

Лекція 8 Метод твірних функцій

Іноді для розв'язання комбінаторних задач застосовують поняття функції. Деякій послідовності $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ комбінаторних об'єктів ставлять у відповідність послідовність $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ функцій так, щоб операції над послідовностями відповідали операціям над функціями. Частіше всього у якості функцій розглядають степеневі x^i .

Означення. Дано числову послідовність $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Розглянемо ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Якщо

$\exists x \in \mathbb{R}: \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = f(x)$, то $f(x)$ називають *твірною функцією заданої послідовності*.

Приклад. Задана послідовність $1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$. Знайти її твірну функцію. $1; -0,5; 0,25; -0,075, \dots$

Розв'язання. Послідовності $1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$ відповідає ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = 1 + ax + a^2x^2 + \dots + a^kx^k + \dots$, члени якого утворюють геометричну

прогресію з першим членом 1 та знаменником $q = ax$. Якщо $|q| < 1$, тобто

якщо $|x| < \frac{1}{|a|}$, то ця прогресія нескінченно спадна і її сума обчислюється за

формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$. Отже, якщо $x \in \left(-\frac{1}{|a|}; \frac{1}{|a|}\right)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax}$. Це

означає, що функція $f(x) = \frac{1}{1-ax}$ є твірною для послідовності $1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$

Частинний випадок. При $a=1$ маємо послідовність $1, 1, 1, \dots$, а її твірна функція має вигляд $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Продиференціюємо її за змінною x ,

одержимо $g(x) = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. З іншої сторони $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$,

отже, $f'(x) = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$ Таким чином,
 $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$, тобто функція $\frac{1}{(1-x)^2}$ є твірною для
 послідовності $1, 2, \dots, n, n+1, \dots$

Продовжимо міркування. Помножимо обидві частини рівності
 $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$ на x , отримаємо:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 0x^0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + (n+1)x^{n+1} + \dots$$

Це означає, що $h(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ – твірна функція для послідовності $0, 1, 2, \dots, n,$
 $\dots$

Приклад. У частинному випадку, коли $a=1, b=x$, формула бінома
 Ньютона має вигляд $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$. За попереднім означенням функція
 $f(x) = (1+x)^n$ є твірною для послідовності $(C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n, 0, 0, \dots)$, перші $n+1$
 членів якої є біноміальними коефіцієнтами.

Теорема 5.4 Має місце формула

$$(\forall m \in N) \quad \frac{1}{(1-ax)^m} = 1 + C_m^1(ax) + C_{m+1}^2(ax)^2 + \dots + C_{m+n-1}^n(ax)^n + \dots,$$

яку називають *узагальненим біноміальним правилом*.

Доведення можна здійснити, застосувавши формулу бінома Ньютона
 для від'ємного показника так само як для натурального. Отримаємо

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n}^k (-x)^k,$$

де узагальнений біноміальний коефіцієнт

$$C_{-n}^k = \frac{(-n)(-n-1) \cdot \dots \cdot (-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!} = (-1)^k C_{n+k-1}^k.$$

Тоді

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k.$$

Таким чином, для послідовності біноміальних коефіцієнтів $C_{n-1}^0, C_n^1, C_{n+1}^2, C_{n+2}^3, \dots$ функція $\frac{1}{(1-x)^n}$ є твірною.

Якщо $n=1$, то $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ - твірна функція для послідовності з загальним членом $a_k = 1, k \geq 0$, тобто для послідовності $1, 1, 1, \dots$

Якщо $n=2$, то $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ - твірна функція для послідовності з загальним членом $a_k = k+1, k \geq 0$, тобто для натурального ряду.

Зауваження. Над знайденими твірними функціями послідовностей можна виконувати деякі дії і отримувати твірні функції інших послідовностей. Наведемо приклади таких дій.

1) Якщо $f(x), g(x)$ - твірні функції послідовностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ відповідно, то $\alpha f(x) + \beta g(x)$ - твірна функція послідовності $\alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\}$.

2) Якщо $f(x)$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $\frac{f(x) - a_0}{x}$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - зсув вправо.

3) Якщо $f(x)$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $xf(x)$ - твірна функція послідовності $0, a_0, a_1, \dots$ - зсув вліво.

4) Якщо $f(x)$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $xf'(x)$ - твірна функція послідовності $\{n \cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

5) Якщо $f(x)$ - твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $\frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx$ - твірна функція послідовності $\left\{ \frac{1}{1+n} a_n \right\}_{n=0}^{\infty}$.

Застосування методів комбінаторики до комбінаторних підрахунків

Задача. На курсі є 4 студентських групи A, B, C, D . Нехай M – множина, що складається з одного студента групи A , одного студента групи B , двох студентів групи C , двох студентів групи D . Скількома способами можна вибрати двох студентів із множини M ?

Розв'язання. Введемо символ x_A^0 для позначення вибору 0 студентів із групи A . В загальному випадку, символом x_i^j позначимо факт вибору j

студентів із групи i , $i = A, B, C, D$

Наприклад, із групи C можна вибрати 0, 1 або 2 студенти, а,

отже, за правилом додавання цей факт запишеться у вигляді

$x_C^0 + x_C^1 + x_C^2$. Є тільки 2 варіанта

вибору студентів із групи A , тобто

маємо $x_A^0 + x_A^1$. Наприклад, якщо

вибрали обох студентів з групи D , то цей факт запишеться у вигляді

$x_A^0 \cdot x_B^0 \cdot x_C^0 \cdot x_D^2$, а якщо вибрали по одному студенту з груп B та D , то маємо

$x_A^0 \cdot x_B^1 \cdot x_C^0 \cdot x_D^1$. Перелічимо всі можливі набори верхніх індексів (див.

таблицю). Розглянемо формальний добуток

$(x_A^0 + x_A^1) \cdot (x_B^0 + x_B^1) \cdot (x_C^0 + x_C^1 + x_C^2) \cdot (x_D^0 + x_D^1 + x_D^2)$. Якщо цей добуток

перетворити у многочлен, розглядаючи верхні індекси як показники степеня,

а нижніми індексами знехтувати, то число наборів, що задовольняють умову

задачі, визначить коефіцієнт при x^2 . Цей многочлен матиме вигляд

$f(x) = (1+x) \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1+x+x^2)$ і буде твірною функцією

послідовності, член a_i якої дорівнює числу способів вибору i студентів із

Таблиця 5.1 – Набори верхніх індексів

0	0	0	2
0	0	2	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1

множини M .

Наведемо формальне описання способу знаходження числа комбінацій з повтореннями за допомогою твірних функцій.

Нехай з мультимножини елементів n типів вибираються неупорядковані набори по k елементів і нам треба знайти $\bar{C}_n^k$. Твірна функція для послідовності таких комбінацій будується за правилом:

- Якщо в комбінації елемент типу i може входити m_1 або m_2 або... або m_{k_i} раз, то в твірній функції йому відповідає множник

$$f_i(x) = x^{m_1} + x^{m_2} + \dots + x^{m_{k_i}};$$

- Твірна функція є добутком таких множників по всім можливим i , тобто
- $$f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x);$$
- Число $\bar{C}_n^k$ є коефіцієнтом при x^k в твірній функції.

Задача. Скільки існує способів вибору 12 об'єктів із множини об'єктів 5 видів, якщо треба вибрати не більше двох об'єктів перших трьох типів і необмежену кількість об'єктів останніх двох видів?

Розв'язання. Твірна функція має вигляд

$(1 + x + x^2)^3 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2$. Перетворимо її до вигляду

$$\left(\frac{1 - x^3}{1 - x} \right)^3 \cdot \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{(1 - x^3)^3}{(1 - x)^5}.$$

Тепер за теоремою 5.4 запишемо

$$\frac{(1 - x^3)^3}{(1 - x)^5} = (1 - 3x^3 + 3x^6 - x^9) (1 + C_5^1 x + C_6^2 x^2 + \dots + C_{5+n-1}^n x^n + \dots).$$

Нас цікавить коефіцієнт при x^{12} , він дорівнює $1 \cdot C_{5+12-1}^{12} - 3 \cdot C_{5+9-1}^9 + 3 \cdot C_{5+6-1}^6 - 1 \cdot C_{5+3-1}^3$.

Задача 4. Знайти коефіцієнт при x^{17} в розкладі твірної функції

$$f(x) = \frac{x^4}{(1-x)^5} \text{ в степеневий ряд.}$$

Розв'язання. За теоремою 5.4 при $m=5$ розклад заданої функції має вигляд

$$f(x) = x^4 \frac{1}{(1-x)^5} = x^4 (1 + C_5^1 x + C_6^2 x^2 + \dots + C_{17}^{13} x^{13} + \dots),$$

отже шуканий коефіцієнт дорівнює C_{17}^{13} .

Задача 8. За допомогою твірних функцій розв'язати рекурентне співвідношення $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n > 1$, $a_0 = 8$, $a_1 = 16$.

Розв'язання. Нехай

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \dots$$

(5.4)

твірна функція шуканої послідовності. Домножимо обидві частини рівності

(5.4) спочатку на $2x$, а потім на $3x^2$, отримаємо відповідно

$$2xf(x) = 2a_0 x + 2a_1 x^2 + \dots + 2a_{n-1} x^n + \dots$$

$$3x^2 f(x) = 3a_0 x^2 + 3a_1 x^3 + \dots + 3a_{n-2} x^n + \dots$$

Знайдемо вираз $f(x) - 2xf(x) - 3x^2 f(x)$, отримаємо

$$f(x) - 2xf(x) - 3x^2 f(x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1 - 3a_0)x^2 + \dots + (a_{n-1} - 2a_{n-2} - 3a_{n-3})x^{n-1} + (a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2})x^n + \dots$$

Оскільки $a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0$ для будь-якого $n > 1$, то з урахуванням

початкових умов $a_0 = 8$, $a_1 = 16$ отримаємо $f(x)(1 - 2x - 3x^2) = 8$, звідки

$$f(x) = \frac{8}{1 - 2x - 3x^2}. \text{ Тепер цю знайдену твірну функцію заданої послідовності}$$

треба записати в розгорнутому вигляді, тобто у вигляді степеневого ряду.

Для цього розкладемо дріб у правій частині на елементарні дробки, наприклад,

методом невизначених коефіцієнтів:

$$f(x) = \frac{8}{1-2x-3x^2} = \frac{6}{1-3x} + \frac{2}{1+x} =$$

$$= 6(1+3x+3^2x^2+\dots+3^nx^n+\dots) + 2(1-x+x^2-\dots+(-1)^nx^n+\dots).$$

Таким чином, явна формула для загального члена заданої послідовності є коефіцієнтом при x^n , тобто

$$a_n = 6 \cdot 3^n + 2 \cdot (-1)^n.$$

Зауваження. Цю задачу можна було розв'язувати за допомогою характеристичного рівняння, адже задане рекурентне співвідношення лінійне.

Задача 9. Розв'язати рекурентне співвідношення $a_n = 2a_{n-1} + 3^n, n > 0$, $a_0 = 1$.

Розв'язання. Рекурентне співвідношення нелінійне. Застосуємо метод твірних функцій. Нехай

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \dots \quad (5.5)$$

твірна функція шуканої послідовності. Результат множення обох частин рівності (5.5) на $2x$ має вигляд

$$2xf(x) = 2a_0x + 2a_1x^2 + \dots + 2a_{n-1}x^n + \dots$$

Тепер нам потрібен степеневий ряд із загальним членом $3^n x^n$, його розгорнутий вигляд

$$3^0 x^0 + 3x + 3^2 x^2 + \dots + 3^{n-1} x^{n-1} + 3^n x^n + \dots = \frac{1}{1-3x}.$$

Знайдемо вираз $f(x) - 2xf(x) - \frac{1}{1-3x}$, отримаємо

$$f(x) - 2xf(x) - \frac{1}{1-3x} = a_0 - 1 + (a_1 - 2a_0 - 3)x +$$

$$+ (a_2 - 2a_1 - 3^2)x^2 + \dots + (a_{n-1} - 2a_{n-2} - 3^{n-1})x^{n-1} + (a_n - 2a_{n-1} - 3^n)x^n + \dots$$

Оскільки $a_n - 2a_{n-1} - 3^n = 0$ для будь-якого $n > 0$, то з урахуванням

початкової умови $a_0 = 1$, отримаємо $f(x)(1-2x) = \frac{1}{1-3x}$, звідки

$f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$. Після розкладу дробу у правій частині на елементарні дробки маємо

$$f(x) = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} = \\ = 3(1+3x+3^2x^2+\dots+3^nx^n+\dots) - 2(1+2x+2^2x^2+\dots+2^nx^n+\dots)$$

Таким чином, явна формула для загального члена заданої послідовності є коефіцієнтом при x^n , тобто

$$a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Задача 10. В урні знаходяться 4 червоних, 5 синіх та 2 зелених кульок. Скільки існує способів вибору 7 кульок, якщо треба обов'язково вибрати 1 червону та 2 синіх кульки?

Розв'язання. Умова обов'язкового вибору 1 червоної кульки дасть для твірної функції множник $(x+x^2+x^3+x^4)$, а умова обов'язкового вибору 2 синіх кульок дасть множник $(x^2+x^3+x^4+x^5)$. Таким чином, твірна функція має вигляд $(x+x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)$. Нас цікавить коефіцієнт при x^7 , він дорівнює 10.

17. Розкласти за формулою бінома Ньютона або узагальненому біноміальному правилу:

а) $(1-x^2)^5$, б) $(1+\cos x)^7$, в) $(x+x^2)^6$, г) $(t^2-t^4)^5$, д) $(1-x^2)^{-2}$.