

Тема 6. Функції випадкових величин

6.1 Закон розподілу функції однієї випадкової величини

Розглянемо задачу знаходження закону розподілу функції випадкової величини $Y = \varphi(X)$, аргументом якої є випадкова величина X з відомим законом розподілу. Найпростішим прикладом функції однієї випадкової величини є лінійна функція $Y = \alpha X + \beta$, де α та β – задані сталі величини. Прикладами функцій двох випадкових величин X та Y є функції $Z = X + Y$, $Z = XY$ тощо. Можна розглядати функції довільного числа випадкових аргументів. Значення таких функцій теж є випадковими величинами.

Нехай дискретна випадкова величина X має закон розподілу, заданий у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Тоді випадкова величина $Y = \varphi(X)$ також є дискретною випадковою величиною з законом розподілу

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Тут $y_i = \varphi(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Якщо всі значення y_i відрізняються між собою, то події $\{X = x_i\}$ та $\{Y = y_i\}$ є тотожними, тому $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$. Якщо серед значень y_i деякі значення співпадають, то у таблиці для закону розподілу випадкової величини Y їх потрібно об'єднати у один у стовпчик, додавши відповідні ймовірності.

Приклад 1. Дискретна випадкова величина X задана своїм законом розподілу:

X	-1	1	2
P	0,2	0,5	0,3

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язання. Знайдемо всі можливі значення випадкової величини Y та ймовірності їх отримання.

$$y_1 = (-1)^2 = 1^2 = 1, \quad y_2 = 2^2 = 4,$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,2 + 0,5 = 0,7, \quad P(Y = 4) = P(X = 2) = 0,3.$$

Таким чином, випадкова величина $Y = X^2$ приймає значення $Y = 1$ з ймовірністю 0,7, та значення $Y = 4$ з ймовірністю 0,3.

Нехай випадкова величина X є неперервною величиною з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$. Знайдемо щільність розподілу випадкової величини $Y = \varphi(X)$.

Нехай $\varphi(x)$ є монотонно зростаючою на всій числовій прямій функцією. Тоді для відображення $Y = \varphi(X)$ як для монотонної функції існує обернене відображення $X = \psi(Y)$. Знайдемо спочатку функцію $G(y)$ розподілу випадкової величини Y :

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < \psi(y)) = \int_{-\infty}^{\psi(y)} f(x) dx.$$

Щоб знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y , визначимо похідну $G'(y)$. Це похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування. Маємо:

$$g(y) = G'(y) = f(\psi(y)) \cdot \psi'(y). \quad (6.1)$$

Якщо $\varphi(x)$ монотонно спадає, то для $G(y)$ отримуємо:

$$G(y) = P(Y < y) = P(X > x) = P(X > \psi(y)) = 1 - \int_{-\infty}^{\psi(y)} f(x) dx.$$

Диференціюючи останню рівність за змінною y , отримуємо для цього випадку щільність $g(y)$ у вигляді:

$$g(y) = G'(y) = -f(\psi(y)) \cdot \psi'(y) \quad (6.2)$$

Оскільки тут обернена функція $x = \psi(y)$ є монотонно спадною, то $\psi'(y) < 0$, тому формули (6.1) та (6.2) можна об'єднати у одну формулу для визначення щільності розподілу ймовірностей випадкової величини $Y = \varphi(X)$, де φ – монотонна на всій числовій прямій функція:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|, \quad (6.3)$$

де $\psi(y)$ – функція, обернена до $\varphi(x)$.

Приклад 2. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^3$.

Розв'язання. Щільність розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функція $y = \varphi(x) = x^3$ монотонно зростає на всій числовій прямій.

Оберненою до неї є функція $x = \psi(y) = \sqrt[3]{y}$. Для неї $\psi'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$. Щільність

розподілу випадкової величини $Y = X^3$ знаходимо за формулою (6.3):

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}}{3\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt[3]{y^2}}.$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ не є монотонною на всій числовій прямій, але при цьому числову пряму можна поділити на скінченну кількість n інтервалів, на кожному з яких ця функція є монотонною, то кожному значенню y відповідає n значень змінної x : $x_1 = \psi_1(y), x_2 = \psi_2(y), \dots, x_n = \psi_n(y)$. У даному випадку формула (6.3) набуває вигляду:

$$g(y) = \sum_{k=1}^n f(\psi_k(y)) \cdot |\psi'_k(y)| \quad (6.4)$$

Приклад 3. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=0, \sigma=1$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язання. Для випадкової величини X $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Функція, обернена до $y = x^2$, є двозначною: $x_1 = \psi_1(y) = \sqrt{y}, x_2 = \psi_2(y) = -\sqrt{y}$. Застосовуючи формулу (6.4), отримуємо:

$$\begin{aligned} g(y) &= f(\psi_1(y)) \cdot |\psi'_1(y)| + f(\psi_2(y)) \cdot |\psi'_2(y)| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \right) = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

6.2 Математичне сподівання та дисперсія функції випадкової величини

Нехай випадкова величина $Y = \varphi(X)$, де X – дискретна випадкова величина, що приймає можливі значення x_i з відповідними ймовірностями p_i , $i=1, 2, \dots, n$. Тоді математичне сподівання випадкової величини Y можна визначити за формулою:

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i \quad (6.5)$$

Математичне сподівання випадкової величини $Y = \varphi(X)$, що є функцією неперервної випадкової величини X з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$, визначають за формулою:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx. \quad (6.6)$$

Для функції $Y = \varphi(X)$ випадкового аргументу X дисперсія визначається за формулою:

$$D(Y) = M\left[(Y - M(Y))^2\right] = M(Y^2) - (M(Y))^2. \quad (6.7)$$

З формули (6.7) отримуємо формулу для випадку дисперсії функції дискретного аргументу:

$$D(Y) = \sum_{i=1}^n \varphi^2(x_i) \cdot p_i - (M(Y))^2. \quad (6.8)$$

Для функції неперервної випадкової величини X з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ дисперсію визначають за формулою:

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) \cdot f(x) dx - (M(Y))^2. \quad (6.9)$$

Приклад 1. Знайти математичне сподівання випадкової величини $Y = 2 - 3\sin X$, якщо щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Розв'язання. За формулою (6.6) отримуємо:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cdot (2 - 3\sin x) dx = \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{3}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x dx = 2.$$

Приклад 2. Випадкова величина X розподілена рівномірно на інтервалі $(0;1)$. Знайти дисперсію випадкової величини $Y = 2X^2$.

Розв'язання. Оскільки випадкова величина X розподілена рівномірно на $(0;1)$, її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0;1); \\ 0, & x \notin (0;1). \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання $M(Y)$ за формулою (6.6):

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсію $D(Y)$ знайдемо за формулою (6.9):

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) \cdot f(x) dx - (M(Y))^2 = \int_0^1 (2x^2)^2 dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4x^5}{5} \Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{16}{45}.$$