Практичне заняття «Неперервність функцій»

Основні теоретичні відомості

Функцію $y=f(x)$ називають ***неперервною у точці*** x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Для неперервності функції у точці x_0 необхідним та достатнім є виконання наступних умов:

1) $f(x)$ визначена у точці x_0, тобто $\exists f(x_0)$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Функцію $y=f(x)$ називають ***неперервною у точці*** x_0, якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y=0$.

<u>Означення</u>. Точки, у яких порушується неперервність функції, називають ***точками розриву*** цієї функції.

Якщо $x = x_0$ – точка розриву функції $y = f(x)$, то у ній не виконується хоча б одна з умов 1) – 4). У залежності від того, яка з них не виконується, розрізняють наступні типи точок розриву.

1. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A = const$, проте $A \neq f(x_0)$, або функція $f(x)$ не визначена у точці x_0, то точку x_0 називають ***точкою усувного розриву.*** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 = const$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2 = const$, проте $A_1 \neq A_2$. У цьому випадку точку x_0 називають ***точкою розриву першого роду*** або ***точкою розриву типу стрибка***. Величину $\delta = A_2 - A_1$ називають ***стрибком функції*** $f(x)$ ***у точці*** x_0.

3. Хоча б одна з границь: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не існує, або дорівнює ∞. Точку x_0 у цьому випадку називають ***точкою розриву другого роду.***

Обчислити наступні границі.

1. $\lim\limits_{x \to \pm 0} \frac{\sin x}{|x|}$.

Розв'язання. Нехай $x \to +0$, тобто $x \to 0, x > 0$.

При $x > 0$ $|x| = x$. Отримуємо:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

x=0 т.р. 1 роду

$\delta=1-(-1)=2$

Нехай $x\to-0$, тобто $x\to0, x<0$. Тоді $|x|=-x$.

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{-x}=-1.$$

2. $\lim\limits_{x\to3\pm0}10^{\frac{1}{x-3}}$.

Розв'язання. При $x\to3+0$ $x>3$, тому $x-3$ є додатною нескінченно малою, $x-3\to+0$.

$$\lim_{x\to3+0}10^{\frac{1}{x-3}}=\left(10^{\frac{1}{+0}}=10^{+\infty}\right)=+\infty.$$

При $x\to3-0$ $x<3$, тому $x-3$ є від'ємною нескінченно малою, $x-3\to-0$.

$$\lim_{x\to3-0}10^{\frac{1}{x-3}}=\left(10^{\frac{1}{-0}}=10^{-\infty}=\frac{1}{10^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2^x+3}{2^x-3}$.

Розв'язання. При $x\to+\infty$ $2^x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3}{2^x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{2^x}}{1-\frac{3}{2^x}}=\left\|\begin{matrix}\frac{3}{2^x}\to 0,\\ x\to+\infty\end{matrix}\right\|=1.$$

При $x\to-\infty$ $2^x=\left(2^{-\infty}\right)\to 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+3}{2^x-3}=\frac{3}{-3}=-1.$$

4. $\lim\limits_{x\to2\pm0}\dfrac{2+x}{4-x^2}$.

x=2 – т. р. II роду

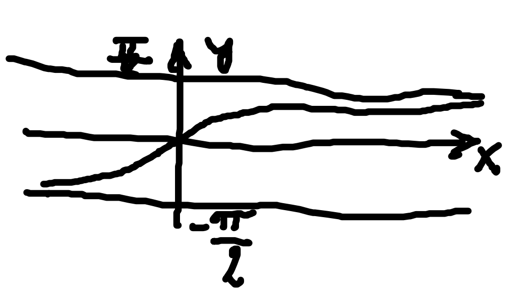
Розв'язання. При $x\to2+0$ $x>2$ і $4-x^2=\left(\overset{-}{2-x}\right)\left(2+x\right)<0$.

$$\lim_{x\to2+0}\frac{2+x}{4-x^2}=\lim_{x\to2+0}\frac{2+x}{\left(2-x\right)\left(2+x\right)}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

При $x\to2-0$ $x<2$ і $4-x^2=\left(\overset{+}{2-x}\right)\left(2+x\right)>0$.

$$\lim_{x\to2-0}\frac{2+x}{4-x^2}=\lim_{x\to2+0}\frac{2+x}{\left(2-x\right)\left(2+x\right)}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x$.



Розв'язання. Використаємо властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$. При $x \to +\infty$ $\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$, при $x \to -\infty$ $\operatorname{arctg} x \to -\frac{\pi}{2}$.

Отже, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$.

6. $\lim\limits_{x \to \pm 0} (2 + x)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. При $x \to +0$ $\quad x > 0$, $\frac{1}{x} \to +\infty$. Тому

$$\lim_{x \to +0} (2 + x)^{\frac{1}{x}} = \left(2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} \right) = +\infty.$$

При $x \to -0$ $\quad x < 0$, $\frac{1}{x} \to -\infty$.

$$// \ \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +0} (2 + x)^{\frac{1}{x}} = \left(2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} \right) = 0.$$

7. $\lim\limits_{x \to 2\pi \pm 0} \frac{x^2}{\cos x - 1}$. $\quad$ $x = 2\pi$ – т. р. $\underline{\text{II}}$ роду

Розв'язання. При $x \to 2\pi \pm 0$ $\quad \cos x \to 1, \cos x < 1$, тому маємо:

$$\lim_{x \to 2\pi \pm 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} = \left(\frac{4\pi^2}{-0} \right) = -\infty.$$

II. Дослідити на неперервність та встановити характер точок розриву наступних функцій.

1. $y = \dfrac{x}{x-4}$.

Розв'язання. Функція є неперервною на числовій прямій всюди, за винятком точки $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{x}{x-4} = \left(\frac{4}{+0} \right) = +\infty, \ \lim_{x \to 4-0} \frac{x}{x-4} = \left(\frac{4}{-0} \right) = -\infty.$$

Точка $x = 4$ є точкою розриву другого роду.

2. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-4}$.

Розв'язання. Функція є неперервною на числовій прямій всюди, за винятком точки $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{x-4} = t, \\ x \to 4+0, t \to \infty \end{matrix} \right\| = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg} t =$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to 4-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}=\left\|\begin{array}{l}\dfrac{1}{x-4}=t,\\ x\to 4-0,\ t\to-\infty\end{array}\right\|=\lim_{t\to-\infty}\operatorname{arctg}t=$$

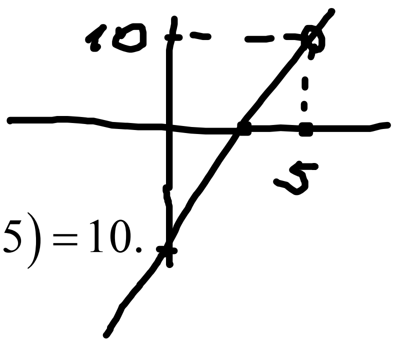
$$=-\frac{\pi}{2}.$$

Ліва та права границі є скінченними, але відрізняються між собою. Отже, $x=4$ – точка розриву першого роду (типу стрибка). Величина стрибка

$$\delta=\lim_{x\to 4+0}y(x)-\lim_{x\to 4-0}y(x)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

3. $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}.$

Розв'язання. Функція неперервна $\forall x\neq 5$.



$$\lim_{x\to 5\pm 0}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5\pm 0}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5\pm 0}(x+5)=10.$$

У точці $x=5$ ліва та права границі функції співпадають, проте у цій точці функція невизначена. Отже, точка $x=5$ є точкою усувного розриву.

4. $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}.$

$x > 2$

Розв'язання. При $x = 2$ функція невизначена. Знайдемо ліву та праву границю функції у цій точці. Спочатку знайдемо ці границі для функції $2^{\frac{1}{x-2}}$.

$$\lim_{x\to 2+0} 2^{\frac{1}{x-2}} = \left(2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} \right) = +\infty, \ \lim_{x\to 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}} = \left(2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} \right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{2^{\frac{1}{x-2}} - 1}{2^{\frac{1}{x-2}} + 1} = \left\| \begin{array}{l} t = 2^{\frac{1}{x-2}}, \\ x \to 2+0, t \to +\infty \end{array} \right\| = \lim_{t\to+\infty} \frac{t-1}{t+1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{\overset{\to 0}{2^{\frac{1}{x-2}}} - 1}{\underset{\to 0}{2^{\frac{1}{x-2}}} + 1} = \left\| \begin{array}{l} t = 2^{\frac{1}{x-2}}, \\ x \to 2-0, t \to 0 \end{array} \right\| = \lim_{t\to 0} \frac{t-1}{t+1} = -1.$$

Ліва та права границі є скінченними, але відрізняються між собою. Отже, $x = 2$ – точка розриву першого роду (розриву типу стрибка).

Величина стрибка $\delta = \lim\limits_{x\to 2+0} y(x) - \lim\limits_{x\to 2-0} y(x) = 1 - (-1) = 2$.

5. $y = \dfrac{x+2}{(x-1)(x-5)}$.

Розв'язання. Функція неперервна всюди, крім точок $x = 1$ та $x = 5$. Знайдемо праві та ліві границі у цих точках.

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x+2}{(x-1)(x-5)} = \left(\frac{3}{(+0)(-4)} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x+2}{(x-1)(x-5)} = \left(\frac{3}{(-0)(-4)} \right) = +\infty.$$

Точка $x=1$ є точкою розриву другого роду.

$$\lim_{x \to 5+0} \frac{x+2}{(x-1)(x-5)} = \left(\frac{7}{4 \cdot (+0)} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 5-0} \frac{x+2}{(x-1)(x-5)} = \left(\frac{7}{4 \cdot (-0)} \right) = -\infty.$$

Точка $x=5$ є точкою розриву другого роду.

6. $y = \begin{cases} x^2, \ x \le 3; \\ 2x+1, \ x > 3. \end{cases}$

Розв'язання. Можливою точкою розриву є точка $x=3$. Знайдемо у цій точці ліву та праву границі функції.

$$\lim_{x \to 3+0} y(x) = \lim_{x \to 3+0} (2x+1) = 7,$$

$$\lim_{x \to 3-0} y(x) = \lim_{x \to 3-0} x^2 = 9.$$

У точці $x=3$ ліва та права границя існують, є скінченними, проте відрізняються між собою. Отже, ця точка є точкою розриву першого роду. Величина стрибка

$$\delta = \lim_{x\to 3+0} y(x) - \lim_{x\to 3-0} y(x) = 7-9 = -2.$$

7. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. $-\frac{1}{+0} = -\infty$

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to +0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(e^{-\infty}\right) = 0 = \lim\limits_{x\to -0} e^{-\frac{1}{x^2}}$. У точці $x=0$ ліва та права границі функції скінченні, співпадають між собою, проте у цій точці функція невизначена. Отже, $x=0$ є точкою усувного розриву. Прийнявши $y(0)=0$, отримаємо неперервну функцію.

8. $y = x\cdot \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Функція має нескінченну кількість точок розриву, що мають вигляд $x = n\pi, n\in\mathbb{Z}$. При $n=0$ $x=0$.

$$\lim_{x\to +0} x\cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x\to +0} \frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to +0} \frac{x}{\sin x}\cdot \lim_{x\to +0} \cos x = 1.$$

$$\lim_{x\to -0} x\cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x\to -0} \frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to -0} \frac{x}{\sin x}\cdot \lim_{x\to -0} \cos x = 1.$$

У точці $x=0$ ліва границя функції дорівнює правій границі, вони скінченні, проте у цій точці функція не визначена. Отже, $x=0$ – точка усувного розриву.

Нехай $x = n\pi, n \in \mathbb{N}$, тобто $x = n\pi > 0$.

$$\lim_{x \to n\pi \pm 0} x \cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to n\pi \pm 0} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \to n\pi \pm 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to n\pi + 0} \cos x =$$

$$= \lim_{x \to n\pi \pm 0} \frac{x}{\sin x} \cdot (-1)^n.$$

Границя $\lim\limits_{x \to n\pi \pm 0} \frac{x}{\sin x}$ є нескінченною. Отже, точки $x = n\pi, n \in \mathbb{N}$ є точками розриву другого роду. Функція $y = x \cdot \operatorname{ctg} x$ є парною, тобто при від’ємних значеннях *n* точки $x = n\pi$ також є точками розриву другого роду.

Домашнє завдання.

Дослідити на неперервність та встановити характер точок розриву наступних функцій.

1. $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{x^3 + 8}$. ((Відповідь: $x = -2$ точка розриву першого роду).

2. $y = \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{x+1}}}$. (Відповідь: $x = -1$ – точка розриву першого роду).

3. $y = \frac{x + 5}{x^2 - 16}$. (Відповідь: $x = \pm 4$ – точки розриву другого роду).

4. $y=\begin{cases} x-1, x\le 1; \\ 5x-4, x>1. \end{cases}$

(Відповідь: $x=1$ – точка усувного розриву).

5. $y=5^{\frac{1}{(x-3)^2}}$. (Відповідь: $x=3$ – точка розриву другого роду).