

Частина IV. Оптика

Розділ I. Геометрична оптика (семінари)

Розділ II. Хвильова оптика

§ 1. Природа світла

Питання про природу світла вперше отримало наукове обґрунтування тільки в кінці XVII ст. Майже одночасно Ньютон у своїй книзі “Оптика” сформулював корпускулярну гіпотезу природи, а Гюйгенс в “Трактаті про світло” – хвильову гіпотезу.

Корпускулярна гіпотеза виходила з припущення, що світлові промені є потік особливих найдрібніших частинок (“корпускул”), які витікають з тіла, що світиться. Діючи на сітківку ока своїми ударами, корпускули подразнюють її, і це сприймається людиною як світлове відчуття.

Згідно хвильової гіпотези Гюйгенса світло – це хвиля, що розповсюджується з великою швидкістю від джерела світла. Виникнення хвильової гіпотези було пов’язано з наявністю подібності між світловими і звуковими явищами. Так як звук може розповсюджуватися тільки в речовині, а у вакуумі ні, то для пояснення проходження світла в космічному просторі було висунуто припущення про існування світового ефіру – особливої речовини, що має велику пружність і дуже малу густину.

Простота корпускулярної гіпотези, можливість пояснити за її допомогою багато світлових явищ і величезний авторитет Ньютона стали причиною того, що до кінця XVIII ст. для пояснення оптичних явищ користувалися корпускулярною гіпотезою.

На початку XIX ст. у зв’язку з роботами Юнга і особливо Френеля по вивченню інтерференції і дифракції світла, а пізніше і поляризації, хвильова теорія отримала загальне визнання.

Свій розвиток хвильова теорія отримала у створеній Максвелом в другій половині XIX ст. електромагнітній теорії світла.

Уявлення, за якими світло є процес розповсюдження механічних коливань у світовому ефірі, Максвел замінив уявленнями про електромагнітну природу світла. Видиме світло – це електромагнітні хвилі з довжиною хвилі в інтервалі від $7,6 \cdot 10^{-7}$ м (червоні промені) до $4 \cdot 10^{-7}$ м (фіолетове проміння).

У 1881 р. Майкельсон дослідним шляхом показав, світового ефіру не існує.

Так як світло – це електромагнітна хвиля, носієм його є електромагнітне поле.

Але на кінець XIX ст. було відкрито фотоефект, спектри свічення хімічних елементів, дані про спектр випромінювання абсолютно чорного тіла. Ці явища не вдалося пояснити на основі хвильових уявлень про природу світла.

У загальному випадку плоска хвиля описується функцією виду $f(t - \frac{x}{V})$. Найпростішою, але досить важливою є хвиля, що виникає в результаті гармонічного коливання.

$$E = E_0 \cos \omega(t - \frac{x}{V}); \quad H = H_0 \cos \omega(t - \frac{x}{V}),$$

де E_0 і H_0 – амплітудні значення напружностей електричного і магнітного полів.

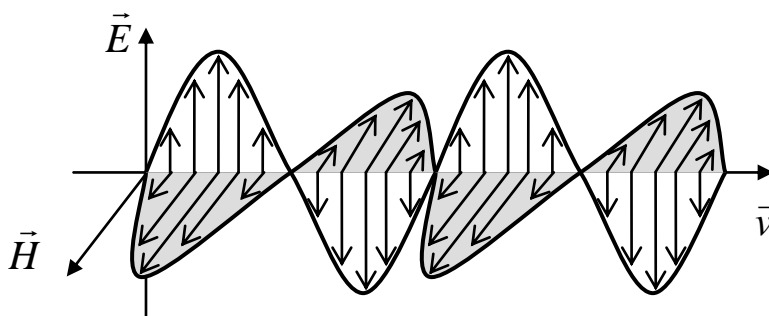
Або

$$E = E_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi x}{VT}) = E_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x) = E_0 \cos(\omega t - kx)$$

$\lambda = VT$ – довжина хвилі, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число. Аргумент $\omega(t - \frac{x}{V})$ наз. фазою. Щоб врахувати, що значення E і H залежать від початку відліку часу t і k -ти x , рівняння хвилі записують так

$$E = E_0 \cos[\omega(t - \frac{x}{V}) + \varphi_0], \quad \text{де } \varphi_0 - \text{початкова фаза.}$$

Графічне зображення плоскої біжучої е-м хвилі наведено на мал. 1.



мал. 1

Поширення хвилі графічно описують за допомогою хвильової поверхні, в усіх точках якої світлові коливання відбуваються в однакових фазах. Геометричне місце точок, до яких у даний момент часу досягають світлові збурення, де коливання здійснюються в тій самій фазі, називається фронтом світлової хвилі. Залежно від форми хвильового фронту хвилі можуть бути плоскі, сферичні, циліндричні та ін.

Світлові хвилі випромінюються атомами, молекулами, іонами, електронами. Макроскопічні джерела світла складаються з великої кількості елементарних випромінювачів, кожний з яких випромінює світло незалежно від іншого.

Атом випромінює протягом 10^{-8} с.

§ 2. Інтерференція світла

Інтерференцією називається явище накладання двох систем хвиль, при якому відбувається перерозподіл інтенсивностей світлових хвиль, що приводить до їх підсилення та послаблення в різних областях простору.

Інтерференція не спостерігається, якщо системи хвиль створюються різними джерелами світла. Причина цього полягає в тому, що джерелом світлових коливань є окремі атоми тіла і в певний момент в даній точці сходяться коливання, створені всією сукупністю атомів, що випромінюють

світло.

Зрозуміло, що якщо в т.О падають дві хвилі від двох різних джерел, то в кожному з них відбуваються (навіть при однаковій частоті) незалежно від іншого хаотичні зміни коливань \vec{E} як за фазою, так і за напрямом.

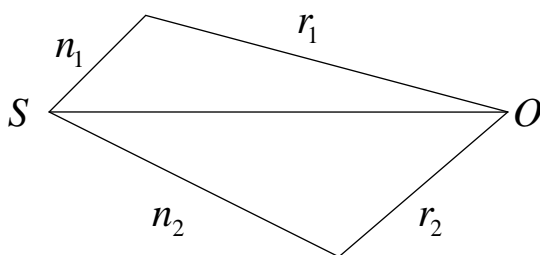
Нехай в деякий момент часу дві хвилі з однаковими напрямками коливань і різницею фаз $2\pi n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) досягли т.О. Очевидно, коливання в цей момент максимально підсилять одна одну. Але через 10^{-8} с ці коливання зміняться як за фазою, так і за напрямком і результат їх накладання буде іншим.

Для того, щоб картина інтерференції була стійкою, необхідно мати такі два джерела світла, які при однаковій частоті коливань створювали б в будь-який момент часу в кожній точці простору коливання, що відбуваються в однакових напрямках і незмінною різницею фаз. Такі джерела наз. когерентними (від лат. “cohaerere” – знаходиться у зв’язку).

Отримати когерентні джерела можна, якщо від одного джерела за допомогою якої-небудь оптичної установки утворити два його зображення.

Якщо одна з хвиль поширюється в середовищі з показником заломлення n_1 , а друга - з n_2 , то різниця фаз

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(r_1 n_1 - r_2 n_2)$$



Добуток показника заломлення на шлях називається оптичною довжиною ходу променя.

$$S = rn$$

$$S_1 = r_1 n_1$$

$$\Delta = S_1 - S_2$$

Отже, в т.О буде спостерігатися максимум, якщо

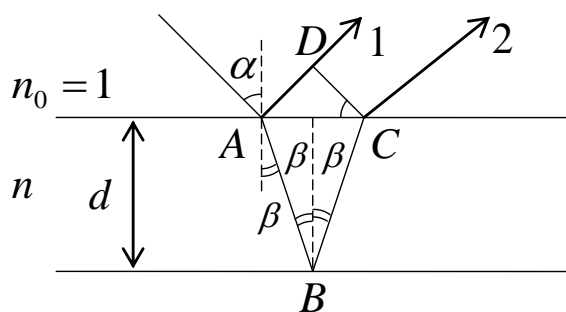
$$\Delta = 2n \frac{\lambda_0}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) - \text{max}$$

мінімум

$$\Delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} - \min$$

Розглянемо одержання когерентних пучків, інтерференція яких має виключно широке технічне застосування.

Нехай плоскопаралельна прозора пластинка освітлюється монохроматичним світлом (однакової частоти) від точкового джерела S, що знаходиться у нескінченності (мал. 3)



$$\Delta = (AB + BC)n - (AD \mp \frac{\lambda}{2})$$

Додаткова різниця ходу $\frac{\lambda}{2}$ виникає внаслідок зміни фази коливань світлового вектора на π внаслідок відбивання пучка 1 від

верхньої поверхні пластини ($n_0 < n$) ($n_0 = 1$)

$$AB = BC = \frac{d}{\cos \beta}; \quad AD = AC \sin \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha$$

і α , і β – відповідно кути падіння і заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n}{n_0} = n,$$

тоді

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos \beta} - 2 \operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \frac{\lambda}{2} = 2dn \cos \beta - \frac{\lambda}{2} = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 \beta} - \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}$$

Для max $\Delta = k\lambda$, тобто

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (1)$$

min $\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, тобто

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

З (1) і (2) випливає, що для сталих величин d , n і λ кожному куту падіння

відповідає своя інтерференційна смуга, їх називають смугами або лініями рівного нахилу.

Якщо світло не монохроматичне, тобто до його складу входять хвилі різних довжин, то кожна складова монохром. хвиля утворює свою систему інтерференц. смуг, зміщених одна відносно іншої.

Прикладом цього може бути різнокольорова картина в мильних бульбашках, у тонких плівках масла або гасу (бензину) на поверхні води.

Явище інтерференції світла лежить в основі дії значної кількості оптичних приладів, за допомогою яких з великою точністю вимірюють довжину світлових хвиль, лінійні розміри тіл та їх зміну під впливом різних фізичних процесів, вимірюють також показники заломлення речовин; визначають якість і точність шліфування різних поверхонь; вимірюють кутові розміри небесних тіл. За допомогою явища інтерференції вдається значно зменшити відбивання світла від оптичних систем, а також виготовляти інтерференційні світлофільтри.

§3. Дифракція світла

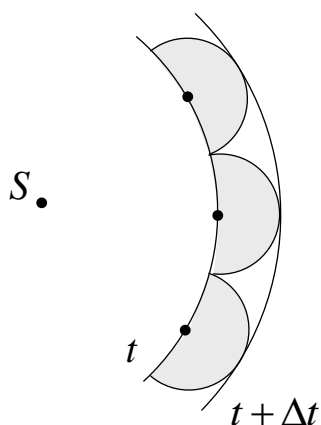
Дифракція світла – оптичне явище, пов'язане із зміною напряму поширення світлових хвиль (порівняно з напрямом, передбаченим геометричною оптикою) на з просторовим перерозподілом їх інтенсивності під впливом перешкод і неоднорідностей середовища. Під дифракцією розуміють будь-яке відхилення від прямолінійного поширення світла, якщо воно не зумовлене відбиванням, заломленням або викривленням променів у середовищах, в яких показник заломлення безперервно змінюється. Дифракція світла зумовлена його хвильовою природою.

Явища дифракції у межах хвильової теорії вперше пояснив О.Френель у 1818р. Пізніше, у 1882р. Г.Кірхгоф обгрунтував дослідження Френеля аналітично. Кожна задача дифракції зводиться до знаходження розв'язків рівнянь Максвела для конкретних умов. Задача дифракції вважається

розв'язаною, якщо визначено розподіл інтенсивності залежно від кута між попереднім напрямком поширення і напрямом дифрагованих променів. Цей кут називається кутом дифракції.

3.1 Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля

Згідно з принципом Гюйгенса кожену точку хвильового фронту можна вважати центром вторинних елементарних сферичних хвиль, і хвильовий фронт у будь-який наступний момент часу визначається як огинаюча поверхня до цих елементарних хвиль (мал. 1).



мал. 1

Принцип Гюйгенса в такому формулюванні можна вважати за геометричний рецепт для побудови хвильових фронтів. При цьому не можна пояснити, чому хвиля не поширюється у зворотному напрямі. Принцип Гюйгенса дає змогу розв'язувати задачі про напрями поширення хвиль, але не вирішує основного

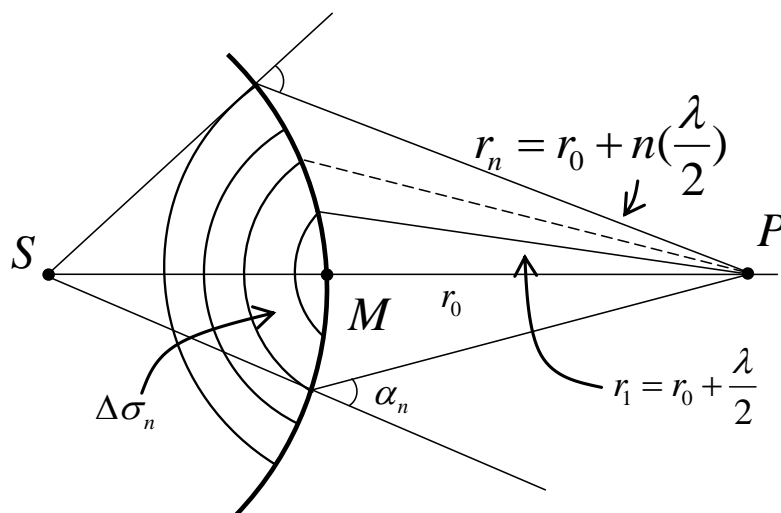
питання дифракції.

Воно розв'язується за допомогою принципу Гюйгенса-Френеля. Гіпотезу про огинаючі вторинні хвилі Френель доповнив фізичним положенням про те, що вторинні хвилі при накладанні інтерферують, і світло має спостерігатися там, де вторинні хвилі підсилюють одна одну внаслідок інтерференції. Вторинні хвилі, що поширюються в зворотному напрямі, розповсюджуються в просторі, де вже є хвильові збурення, зумовлені прямою хвилею. Фази цих коливань відрізняються на π . Тому при інтерференції прямих і вторинних хвиль вони гасять одна одну.

Розглянемо поширення світла від джерела S до т.Р. Відкритий фронт хвилі поділемо кільцеві ділянки з центром у т.М₀. Поділ виконаємо за допомогою концентричних сфер, описаних з т.Р радіусами

$$r_0; r_0 + \frac{\lambda}{2}; r_0 + 2\left(\frac{\lambda}{2}\right); \dots; r_0 + n\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (1) \quad n = 0; 1; 2 \dots ,$$

де n – кількість зон Френеля



мал. 2
Коливання світлового вектора в т.Р, зумовленого дією поверхні $\Delta\sigma_n$

$$E_n = f(\alpha_n) \frac{E_0}{r} \Delta\sigma_n \cos(\omega t - kr - \varphi_0) = E_{0n} \cos(\omega t - kr - \varphi_0) \quad (2)$$

E_0 – амплітуда на відстані одиниці довжини від джерела S , $f(\alpha_n)$ – коефіцієнт нахилу, який характеризує зміну амплітуди вторинних хвиль залежно від напрямку, α_n - кут дифракції.

Площі всіх зон майже однакові, тобто $\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \dots = \Delta\sigma_n$. Оскільки різниця ходу променів, що поширюються в т.Р від сусідніх зон, дорівнює $\frac{\lambda}{2}$, то коливання, зумовлені дією цих зон, матимуть протилежні фази.

Результуюча амплітуда в т.Р

$$E_p = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots \pm E_n \quad (3)$$

З ростом r_n коеф. нахилу $f(\alpha)$ зменшується.

Тому із збільшенням номера зони відповідні їм амплітуди монотонно зменшуватимуться

$$E_1 > E_2 > E_3 > \dots > E_n$$

Тому амплітуда середньої зони

$$E_n = \frac{1}{2}(E_{n-1} + E_{n+1})$$

Тоді

$$E_p = \frac{1}{2}E_1 + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2}\right) + \left(\frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2}\right) + \dots + \left(\frac{E_{n-2}}{2} - E_{n-1} + \frac{E_n}{2}\right) + \frac{E_n}{2}$$

Очевидно, що $\frac{E_{n-2}}{2} - E_{n-1} + \frac{E_n}{2} = 0$

Тоді $E_p = \frac{E_1}{2} + \frac{E_n}{2}$ (при n – непарному)

і $E_p = \frac{E_1}{2} + \frac{E_{n-1}}{2} - E_n$ (при n – парному)

або $E_p = \frac{E_1}{2} \pm \frac{E_n}{2}$ (4) (+ - непарна кількість зон,
- - парна кількість зон)

При повністю відкритому фронті ($n \rightarrow \infty$, $E_n \rightarrow 0$) сумарна амплітуда коливань у т.Р дорівнює половині амплітуди, зумовленої дією в цій точці тільки першої зони. Інтенсивність випромінювання пропорційна квадрату амплітуди коливань і результуюча інтенсивність у т.Р дорівнює одній четвертій інтенсивності, яка створюється першою зоною Френеля. Дано оцінку площі першої зони. При $r_0 = 1\text{ м}$ і $\lambda = 0,5\text{ мкм}$, $\Delta\sigma_1 = 1\text{ мм}^2$.

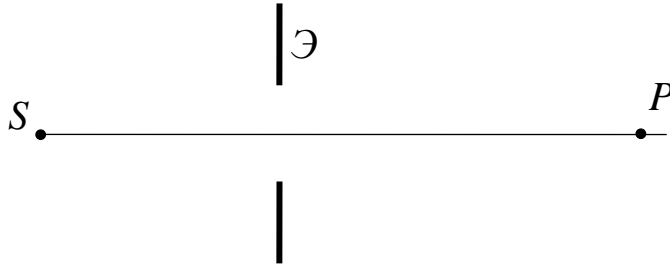
Отже, при вільному поширенні світла в результаті явища інтерференції вторинних хвиль дія всіх зон, крім першої, зводиться до нуля і поширення світла від S до P відбувається так, наче світловий потік поширюється всередині каналу, площа перерізу якого має такий самий порядок, як і площа першої зони Френеля. Це є доказом прямолінійності поширення світла.

3.2 Дифракція Френеля

Дифракція Френеля – це дифракція світла, що спостерігається на таких відстанях, для яких кутові розміри оптичної неоднорідності набагато більші за відношення довжини світлової хвилі до лінійних розмірів цієї неоднорідності. До них належать дифракційні явища, коли хвильовий фронт

сферичний. Такі явища вперше були вивчені Френелем і тому наз. дифракцією Френеля.

1. Дифракція на круглому отворі.



мал. 3

Для визначення результуючої інтенсивності в т.Р з неї поділимо відкриту частину хвильової поверхні на зони Френеля.

Якщо в отворі відкрито непарну кількість зон, то

$$E_p = \frac{E_1}{2} + \frac{E_n}{2}$$

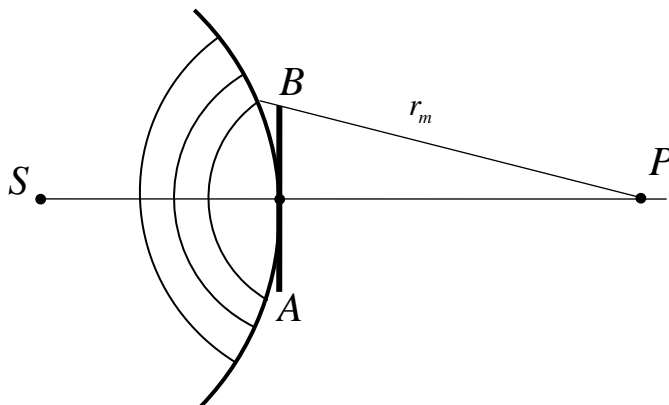
Для парної кількості зон

$$E_p = \frac{E_1}{2} - \frac{E_n}{2}$$

Якщо в отворі непрозорого екрана з т.Р вміщується лише одна зона Френеля, то $E_p = E_1$, тобто інтенсивність у т.Р в 4 рази більша, ніж при відсутності екрана. Найменша інтенсивність відповідає двом зонам.

В результаті симетрії навколо лінії SP розподіл інтенсивності в площині, \perp даній лінії являтиме собою систему концентричних максимумів і мінімумів з центром у т.Р.

2. Дифракція на круглому екрані.



мал. 4

Розмістимо між джерелом S і т.Р непрозорий круглий екран АВ, площина якого \perp до лінії SP. Починаючи від межі екрана з т.Р, поділимо відкриту частину хвильового фронту на зони Френеля.

$$E_p = \frac{1}{2} E_{m+1},$$

де E_{m+1} – амплітуда коливань, зумовлена дією першої відкритої зони Френеля, m – кількість зон, що перекривається круглим екраном. Тобто в т.Р, яка знаходиться в геометричній тіні круглого екрана, спостерігатиметься світла пляма. До такого висновку у 1818р. дійшов Пуассон (цей висновок здався йому абсурдним), тому він заперечував справедливість хвильової теорії світла Френеля. Араго експериментально виявив світлу пляму. Тому ця дифракційна картина має назву плями Араго-Пуассона.

Екран, який перекриває всі парні або непарні зони Френеля, наз. зонною пластинкою.

Для неї

$$E_p = E_1 + E_3 + E_5 + \dots +$$

або

$$E_p = E_2 + E_4 + \dots$$

З формули (3) видно, що інтенсивність світла в т.Р можна збільшити, якщо фази коливань, зумовлені дією парних або непарних зон у цій точці, змінити на π . Таку пластинку називають фазовою зонною пластинкою, її вперше виготовив Р.Вуд.

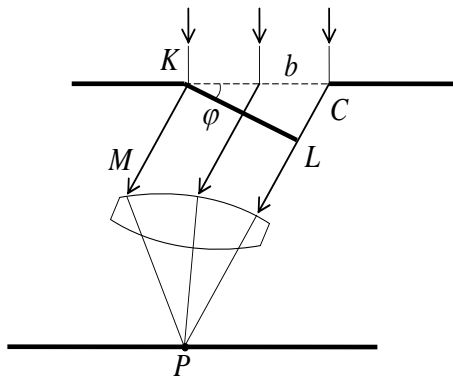
3.3 Дифракція Фраунгофера

Дифракція Фраунгофера – дифракція світла, що спостерігається на таких відстанях, для яких кутові розміри оптичних неоднорідностей набагато менші від відношення довжини світлової хвилі до лінійних розмірів цих неоднорідностей. Дифракція Фраунгофера називається дифракцією в паралельних променях. Для здійснення її джерело світла S розміщують у фокусі збиральної лінзи L_1 . Одержаний паралельний пучок світла дифрагує на перешкодах. Дифракційна картина спостерігається у фокальній площині лінзи L_2 , що розміщена на шляху дифрагованих променів.

Основне завдання у вивченні дифракції Фраунгофера полягає в знаходженні розподілу інтенсивності на екрані спостереження дифракційної картини залежно від кута дифракції.

Дифракція Фраунгофера від щілини.

Щілиною наз. прямокутний отвір, шириною якого можна знехтувати у порівнянні з його довжиною. Вважаємо, що світлова хвиля з довжиною λ поширюється перпендикулярно до щілини, ширина якої b . Паралельний пучок світла, пройшовши крізь щілину, дифрагує під різними кутами від початкового напрямку. Лінза L збирає паралельні пучки дифрагованих

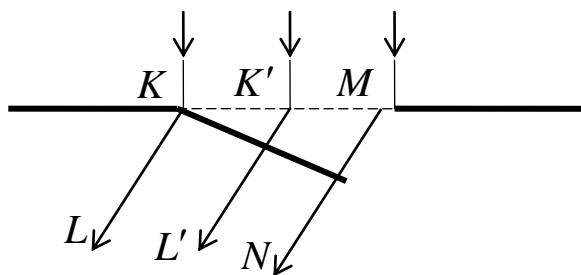


мал. 5

променів у певних точках екрана, розміщеного у фокальній площині лінзи. Для визначення розподілу інтенсивності при дифракції плоскої хвилі на щілині скористаємося методом зон Френеля. Нехай умовно в щілині розміщується 4 зони Френеля. Тоді різниця ходу між променями KL і

$K'L'$ становить $\frac{\lambda}{2}$ і в т.Р вони

прийдуть в протифазі.



мал. 6

Отже, кожному променю зони KK' знайдеться відповідний промінь зони $K'M$, який приходить в т.Р в

протифазі. Тому у випадку парної кількості зон Френеля в т.Р буде спостерігатись мінімум інтенсивності.

$$\Delta = b \sin \varphi = 2n \frac{\lambda}{2} = n\lambda$$

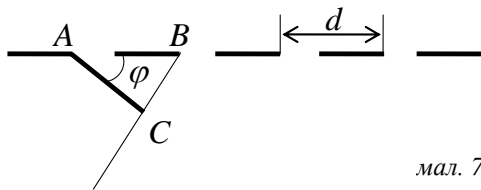
Умова максимуму

$$\Delta = b \sin \varphi = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Дифракційна решітка.

Дифракційна решітка – це пристрій, що має N однакових паралельних щілин, розміщених на рівних відстанях одна від одної в одній або різних площинах. Якщо вони розміщені в одній площині, то така решітка наз. плоскою.

Розглянемо плоску решітку, що складається з однакових рівновіддалених щілин, вирізаних у непрозорому екрані. Ширину щілини позначимо через b , відстань між щілинами – через a . Величину $d = a + b$ наз. сталою або періодом



решітки. Нехай на дифракційну решітку падає нормально до її поверхні плоска монохроматична хвиля завдовжки λ . Завдання полягає в тому, щоб знайти розподіл

інтенсивності світла I_φ залежно від кута φ . При цьому, крім розподілу інтенсивностей, зумовленого дифракцією від кожної щілини, слід враховувати інтерференцію між всіма N пучками.

З мал. 7 видно, що величина $d \sin \varphi$ дорівнює різниці ходу променів Δ , які випромінюються з точок, що перебувають на однакових відстанях від лівих (правих) країв сусідніх щілин і поширюються під кутом φ до нормалі. Якщо в різниці ходу цих променів $\Delta = d \sin \varphi$ вміщується ціле число довжин хвиль λ , то коливання підсилюються.

$$d \sin \varphi = k \lambda \quad (k = 0, 1, 2 \dots),$$

де k – порядок головного максимуму або порядок спектра.

Розміщення головних максимумів, крім центрального, на дифракційній картині від дифракційної решітки визначається довжиною хвилі λ . Тому при пропусканні через решітку білого світла всі максимуми, крім центрального

($k=0$), розкладаються у спектр. Головні дифракційні максимуми для $k=1$ утворюють спектр першого порядку, для $k=2$ – спектр другого порядку і т.д. У кожному з них найбільше відхилення маємо для довжин хвиль, яким відповідає червоний колір, і найменше – для фіолетових променів.

Зауважимо, що в спектральних приладах, де диспергуючим елементом є скляна призма, значніше відхиляються фіолетові промені, а де дифракційна решітка – червоні.

Дифракція світла від круглого отвору.

Оскільки оправы лінз і об'єктивів, як правило, круглої форми, дифракція на круглому отворі має важливе практичне значення. Дифракція плоскої світлової хвилі від круглого отвору якісно не відрізняється від дифракційної картини сферичної хвилі від круглого отвору.

Вона має вигляд концентричних світлих і темних кілець. В центрі – світла пляма у вигляді круга.

Кутові розміри центральної світлої плями визначається з умови

$$\sin \varphi = 0,61 \frac{\lambda}{r}, \text{ де } r \text{ – радіус отвору.}$$

Ця формула відіграє першорядну роль у дифракційній теорії оптичних приладів.

Основні характеристики спектральних приладів

Кутовою дисперсією наз. величина

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

де $d\varphi$ – кутова відстань між двома спектральними лініями, яким відповідають довжини хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Визначимо кутову дисперсію дифракційної решітки, скориставшись формулою решітки $d \sin \varphi = k\lambda$

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad d \cos \varphi d\varphi = k d\lambda$$

тоді
$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}$$

Для малих кутів дифракції φ маємо $\cos \varphi \approx 1$

$D = \frac{k}{d} = k \frac{N}{l}$, де l – довжина робочої ділянки решітки, N – загальна кількість щілин.

Отже, кутова дисперсія решітки не залежить від довжини хвилі, тобто дифракційний спектр рівномірний для всіх довжин хвиль. У цьому й полягає перевага дифракційного спектра над спектром, одержаним за допомогою призми.

Лінійною дисперсією наз. величину

$D_{\text{ліній}} = \frac{dl}{d\lambda}$, де dl – лінійна відстань на екрані між двома максимумами одного й того самого порядку k для хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Якщо фокусна відстань лінзи f , у фокальній площині якої спостерігається дифракційна картина, то зв'язок між лінійною і кутовою дисперсіями буде

$$D_{\text{ліній}} = fD = f \frac{k}{d}$$

Спектральний прилад непридатний для дослідження певної ділянки спектра, якщо спектри сусідніх порядків перекриваються.

Максимальна ширина спектрального інтервалу $\Delta\lambda$, в якому спектри не перекриваються, наз. дисперсійною областю спектрального приладу.

Для дифракційної решітки

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{k}$$

Найменша різниця довжин хвиль двох спектральних ліній $\delta\lambda$, при яких спектральний прилад розділяє їх окремо, наз. спектральною розділяючою

відстанню, а величина $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ – роздільною здатністю приладу.

Для решітки
$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

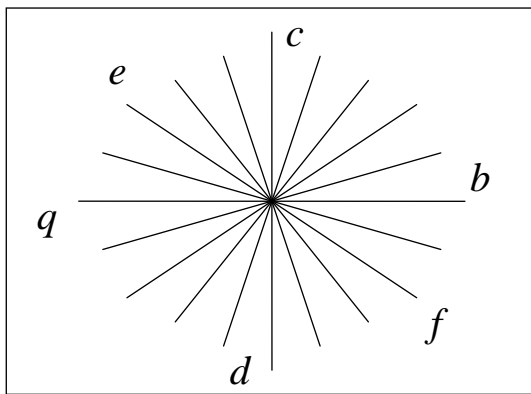
Отже, роздільна здатність решітки визначається загальною кількістю щілин N , тобто залежить від довжини робочої ділянки решітки l .

Роздільна здатність сучасних дифр. решіток досягає 100000 – 400000 і більше.

§ 4. Поляризація світла

Інтерференція і дифракція спостерігаються як для поперечних, так і для поздовжніх хвиль. Але для явища поляризації світла поперечність світл. хвиль має принципове значення.

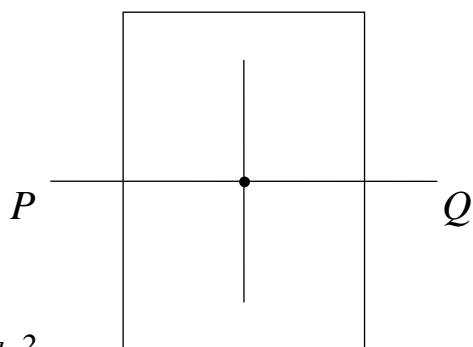
Поляризація світла характеризується просторово-часовою впорядкованістю орієнтації магнітного та електричного векторів.



мал. 1

Наз. природними, або неполяризованими, випромінюються полум'ям, електролампочкою, Сонцем і інш.

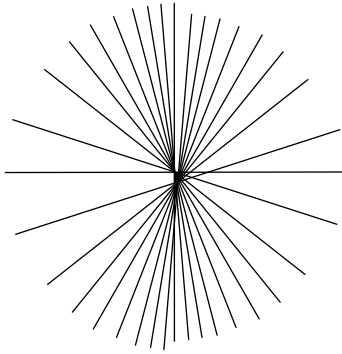
Але можна отримати такі світлові промені, у яких вектор E коливається в одному напрямі. Такі промені наз. поляризованими (мал. 2).



мал. 2

На мал. 1 показаний переріз променя площиною, перпендикулярною до нього. Вектор E за $1c$ багато мільярдів разів змінює напрямки своїх коливань, вони відбуваються то в напрямі ab , то в напрямі cd , ef і т.д. Такі промені, що

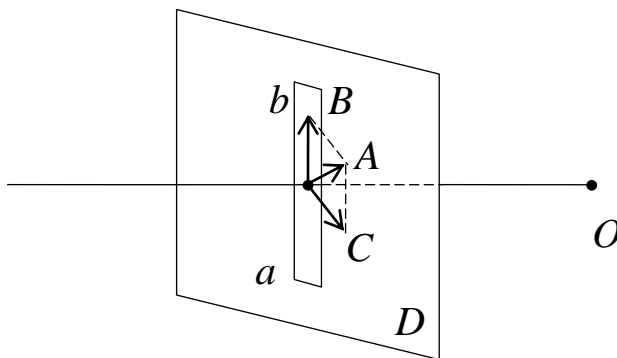
Площина, що проходить через промінь і розміщена перпендикулярно напрямку коливань \vec{E} , наз. площиною поляризації (на мал. 2 площина PQ).



мал. 3

Промені, у яких коливання \vec{E} відбуваються у всіх напрямках, але один з них переважає, наз. частково поляризованими (мал. 3).

Для отримання поляризованого світла використовуються поляроїди. Дію поляроїда можна пояснити за допомогою механічної моделі. В дошці D робиться щілина ab (мал. 4), крізь яку пропускається мотузка, один кінець якої закріплюється в т.О, а інший приводиться в коливання в різних напрямках. За дошкою коливання

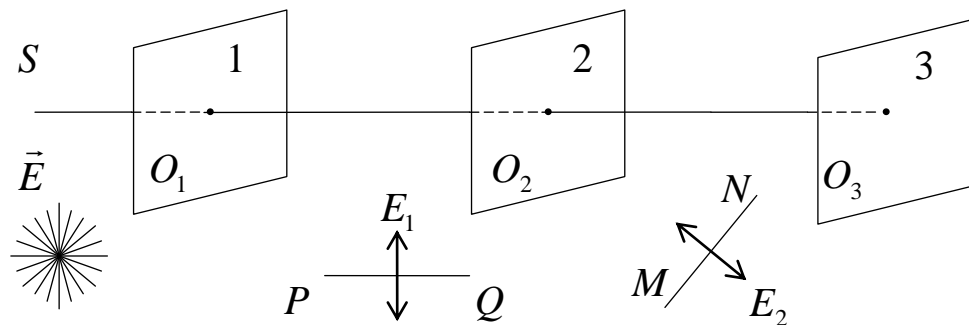


мал. 4

відбуваються тільки в напрямі щілини ab, тобто коливання з амплітудою A після щілини матимуть амплітуду B.

Нехай на шляху природного світла розміщений поляроїд 1. Після нього поляризоване світло зустрічає поляроїд 2 і, пройшовши крізь нього, потрапляє на екран в т.О₃. Поляроїд 1 наз. поляризатором, 2 – аналізатором.

З мал. 5 видно, що PQ і MN – площини поляризації поляроїдів 1 і 2.



мал. 5

Розкладемо амплітуду E на дві складові: \perp -ну площині MN (амплітуда E_{\perp}) і вздовж неї (амплітуда E_{\parallel}).

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{E_{\perp}^2}{E^2}$$

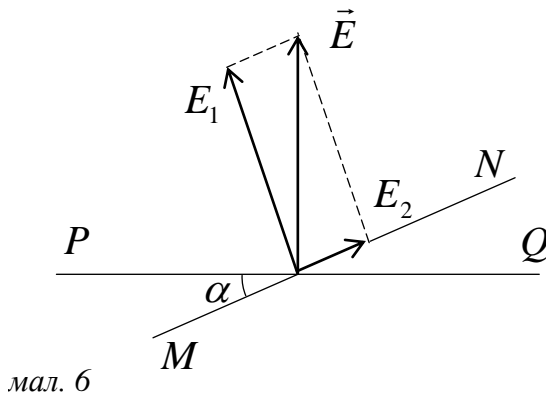
$E_{\perp} = E \cos \alpha$, де α – кут між площинами поляризації, поляризатора і аналізатора, тобто PQ і MN.

$$\text{Тоді } \frac{I_2}{I_1} = \frac{E^2 \cos^2 \alpha}{E^2},$$

$$\text{звідки } I_2 = I_1 \cos^2 \alpha \quad (1)$$

- закон Малюса

Інтенсивність світла, яке пройшло крізь поляризатор і аналізатор, пропорційна квадрату косинуса кута між площинами поляризації цих приладів.



мал. 6

При $\alpha = 0$, тобто якщо площини поляризації обох поляроїдів

співпадають $I_2 = I_1$, тобто освітленість екрана найбільша. Кажуть, що поляроїди відкриті “на світло”. При $\alpha = 90^\circ$, $\cos^2 \alpha = 0$ і $I_2 = 0$. Поляроїди розміщені “на темноту”.

Поляризується також і відбитий від поверхні АВ природний промінь. Ступінь поляризації відбитого променя залежить від кута його падіння α . Кут падіння α , при якому відбитий промінь стає повністю поляризованим, наз. кутом повної поляризації.

Тангенс кута повної поляризації дорівнює показнику заломлення середовища, що відбиває світло.

$$\text{tg} \alpha_0 = n \text{ - закон Брюстера (2)}$$

Відбитий промінь завжди поляризується в площині падіння, тобто коливання \vec{E} відбуваються в площині, перпендикулярній площині падіння (на мал. 7 – зображені точками).

При заломленні світла заломлений промінь також поляризується, але в площині, перпендикулярній площині падіння. Заломлений промінь завжди буде тільки частково поляризованим, причому найвищий ступінь поляризації

у нього буває при куті падіння променя α_0 .

Покажемо, що при повній поляризації відбитого променя, тобто при куті падіння α_0 , відбитий промінь перпендикулярний заломленому.

За законом Брюстера

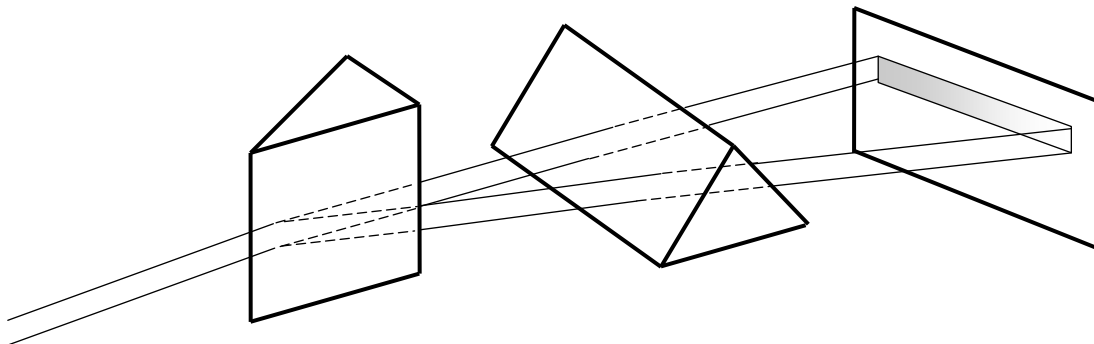
$$\operatorname{tg} \alpha_0 = n, \text{ або } \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha_0 \Rightarrow \angle \beta + \angle \alpha_0 = 90^\circ$$

$$\text{але } \angle \alpha_0 + \angle \varphi + \angle \beta = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

§ 5. Дисперсія світла

Явище залежності показника заломлення світла від довжини світлової хвилі λ або від частоти ν називають дисперсією світла. Вона визначається виглядом функції залежності показника заломлення від довжини хвилі $n = f(\lambda)$ або частоти $n = f(\nu)$. Фізичними величинами, які характеризують дисперсію світла в різних частинах спектра, є похідні $\frac{dn}{d\lambda}$ і $\frac{dn}{d\nu}$.

Ньютон у 1672р. експериментально встановив, що показник заломлення скляної призми залежить від довжини хвилі падаючого світла, тобто $n = f(\lambda)$. Він розмістив дві призми (мал. 1) так, щоб вони розкладали пучок світла у двох взаємно перпендикулярних напрямках.



мал. 1

Для прозорих безбарвних речовин у видимій частині спектра показник заломлення збільшується при зменшенні довжини хвилі, тобто дисперсія

речовини $\frac{dn}{d\lambda} < 0$. Таку дисперсію наз. нормальною.

В призмі, наповненій парою йоду, сині промені заломлюються менше, ніж червоні. Проміжні промені зазнають значного поглинання і тому спостерігати їхнє заломлення неможливо. Отже, для пари йоду при переході від червоних до синіх променів $\frac{dn}{d\lambda} > 0$. Таку дисперсію наз. аномальною.

Розглянемо електронну теорію дисперсії (в межах класичної фізики).

В основу класичної теорії дисперсії покладена дія електромагнітних хвиль на зв'язані електрони атомів із врахуванням їхнього гальмування.

Знайдемо залежність діелектричної проникності ε діелектрика від частоти світла, а потім за допомогою співвідношення $n = \sqrt{\varepsilon}$ перейдемо до $n = f(\omega)$. Вектор поляризації речовини \vec{P} , який створюється полем світлової хвилі \vec{E} визначається співвідношенням $\vec{P} = \varepsilon_0 \beta \vec{E}$ (де β – діелектрична сприйнятливість).

$$\text{Вектор індукції} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1)$$

$$\text{Для ізотропних діелектриків} \quad D = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad (2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \beta \vec{E} \Rightarrow \varepsilon = 1 + \beta \quad (3)$$

Вважаємо, що оптичне середовище складається з сукупності гармонічних електронних осциляторів, взаємодією між якими можна знехтувати. Обмежуємось розглядом коливань тільки оптичних електронів і вважаємо, що в кожному атомі він лише один.

Припущення про гармонічні коливання оптичного електрона означає, що на нього діє пружна сила

$$\vec{F} = -b\vec{r} \quad (4), \quad \text{де } b \text{ – стала пружності, } \vec{r} \text{ - зміщення}$$

електрона від положення рівноваги. Рівняння руху електрона під дією цієї сили має вигляд

$$\frac{md^2\vec{r}}{dt^2} = -b\vec{r} \quad (5)$$

Роз'язком р-я (5) буде $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega_0 t}$, де r_0 – амплітуда коливань, $\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}}$ –

власна циклічна частота коливань електрона.

В електронній теорії дисперсії оптичний електрон розглядається як затухаючий гармонічний осцилятор, тобто як електрон, що коливається і поступово віддає свою енергію середовищу та на випромінювання. Формально затухання можна врахувати введенням сили тертя, яка пропорційна швидкості руху електрона

$$\vec{F}_T = -g \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (6), \text{ де } g - \text{к-т тертя.}$$

Якщо атом знаходиться в полі світлової хвилі, то, крім пружної і гальмівної сили, на електрон діє зовнішня сила

$$\vec{F}_\zeta = e\vec{E} \quad (7), \text{ де } \vec{E} - \text{напруженість ел. поля}$$

світлової хвилі, яка змінюється з часом за законом

$$E = E_0 e^{i\omega t}$$

Рівняння руху електрона при цьому буде таким

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -b\vec{r} - g \frac{d\vec{r}}{dt} + e\vec{E} \quad (8)$$

або

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\gamma \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} \vec{E} \quad (9),$$

де $2\gamma = \frac{g}{m}$ - коефіцієнт затухання, $\omega_0^2 = \frac{b}{m}$ - власна циклічна частота коливань електрона.

Система під дією зовнішньої періодичної сили здійснює вимушені коливання з частотою змушуючої сили.

Тому роз'язок р-я (9) слід шукати у вигляді

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t} \quad (10)$$

Так як $\frac{d\vec{r}}{dt} = i\omega\vec{r}$, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$, то з (9) одержимо

$$-\omega^2 \vec{r} + 2\gamma i \omega \vec{r} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E} \Rightarrow \vec{r} = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i \omega} \quad (10)$$

Якщо в одиниці об'єму знаходиться N ідентичних осциляторів, то вектор поляризації

$$\vec{P} = e \vec{r} N = \frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \vec{E} \quad (11)$$

Підставивши в (3), одержимо

$$\varepsilon = 1 + \frac{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \quad (12)$$

враховуючи, що $n = \sqrt{\varepsilon}$

$$n^2 = 1 + \frac{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \quad (13)$$

Отже, діелектрична проникність виявилась комплексною величиною, тобто в речовині відбуваються два процеси: зміна швидкості поширення хвиль і їх поглинання. Тоді і показник заломлення також має бути комплексним. Введемо його за формулою

$$n' = \sqrt{\varepsilon} = n - i\chi \quad (14)$$

де n – справжній показник заломлення, χ - показник поглинання середовища.

$\varepsilon = (n - i\chi)^2$, то з (12) отримаємо

$$(n - i\chi)^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \quad (15)$$

або

$$(n^2 - \chi^2) - i2n\chi = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} - i \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad (16)$$

Звідки маємо:

$$n^2 - \chi^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad (17)$$

$$2n\chi = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad (18)$$

Проведемо аналіз залежності показників заломлення і поглинання від частоти ω .

Якщо поглинання незначне, то для частот, які значно відрізняються від власної частоти коливань ω_0 , має місце нерівність $\gamma\omega \ll \omega_0^2 - \omega^2$ і співвідношення для показника заломлення (13) буде дійсним і виражатиметься формулою

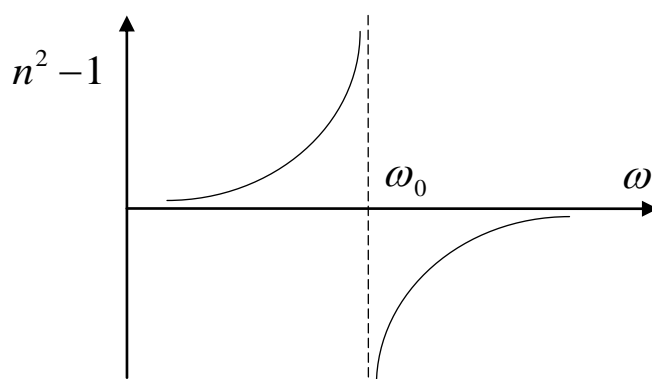
$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} N \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (19)$$

звідки слідує, що $n > 1$ при $0 < \omega < \omega_0$

$$n = \pm\infty \text{ при } \omega = \omega_0$$

$$n < 1 \text{ при } \omega_0 < \omega \leq \infty$$

На мал. 2 наведена залежність ф-ї $n^2 - 1$ від частоти ω .



мал. 2

Для $\omega = \omega_0$ функція має розрив, а для всіх інших значень ω спостерігається нормальна

дисперсія, тобто $\frac{dn}{d\lambda} < 0$.

Перетворення показника заломлення у нескінченність

при $\omega = \omega_0$ не має зичного

змісту і пояснюється нехтуванням поглинання.

Прозорі тіла не мають смуг поглинання у видимій ділянці спектра.

Отже, зміна показника заломлення залежно від ω зумовлена суперпозицією первинної світлової хвилі і всіх викликаних нею вторинних

хвиль у даному середовищі. Фази вторинних хвиль відрізняються від фази первинної хвилі. Це приводить до того, що результуюча хвиля розповсюджується у речовині з фазовою швидкістю $V < C$. Різниця між V і C буде тим більша, чим сильніші вимушені коливання електронів (тобто чим ближче частота хвилі до резонансної частоти електронів).

Розділ III. Основи спеціальної теорії відносності

§ 1. Постулати спеціальної теорії відносності

Галілей виявив, що стан рівномірного прямолінійного руху не впливає на протікання механічних процесів.

В середині XIX ст. були створені теорія електромагнітних явищ (теорія Максвелла) та теорія теплових явищ – термодінаміка і статистична фізика. Виникло питання про те, як впливає рівномірний прямолінійний рух на всі фізичні явища.

Перший постулат СТВ – принцип відносності Ейнштейна – розповсюджує принцип відносності Галілея на всю фізику, стан рівномірного прямолінійного руху не впливає ні на які фізичні явища.

Принцип відносності можна сформулювати і так: **тотожні дослід**, поставлені в будь-якій ІСВ за тотожних початкових умов, дають тотожні результати. **Або коротше: усі ІСВ рівноправні.**

Іноді I постулат СТВ формулюють і так: **ніякими дослідями, що проводяться всередині ІСВ, не можна виявити її рівномірного прямолінійного руху.**

Перетворення Галілея не змінюють вид II закону Ньютона, але змінюють вид рівнянь Максвелла.

У класичній механіці неявно приймалось, що взаємодії чи сигнали можуть передаватись з нескінченною швидкістю (це ж стосувалось і швидкості світла).

Сучасна фізика вчить, що взаємодія (сигнали) можуть передаватися лише

зі скінченною швидкістю.

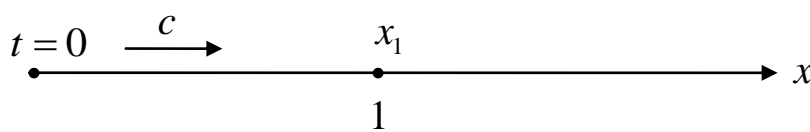
II постулат СТВ: В ІСВ швидкість передачі сигналу не залежить від руху спостерігача і джерела сигналу і є величиною постійною.

На сьогодні вважається, що вона не може перевищувати швидкість світла у вакуумі $C \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Коли швидкості тіл наближаються до швидкості світла, користуватися системою відліку з одним годинником дуже незручно. Ейнштейн запропонував “будувати” систему відліку інакше.

Визначення часу настання події в СТВ визначається за допомогою багатьох годинників. В якості тотожних годинників можна взяти атоми певного сорту, а в якості еталона довжини – довжину хвилі випромінювання цих атомів.

В кожную точку координатної системи розміщують нерухомі годинники. Узгодження показів годинників наз. синхронізацією. Не можна синхронізувати годинники в одному місці, а потім розмістити їх по місцям, бо при цьому годинники будуть рухатися з прискоренням, яке впливає на їх хід. Тому спочатку треба розмістити годинники по місцям, а потім їх синхронізувати.



Якщо на осі X в т.1 знаходиться годинник і необхідно його синхронізувати, то

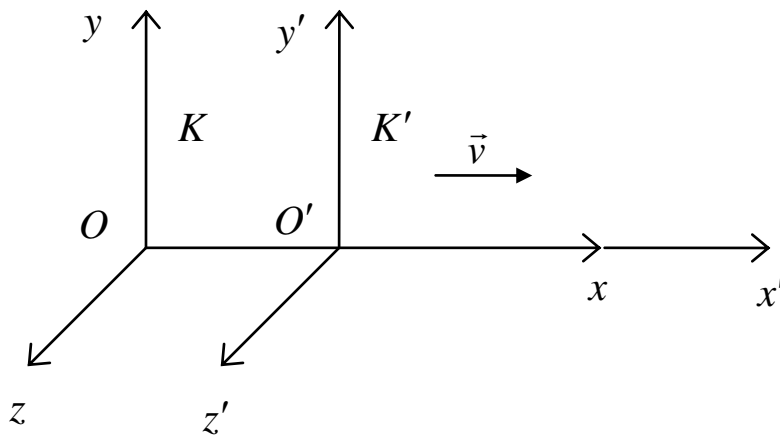
з т.0 в момент часу $t=0$ посилають світловий чи радіосигнал в т.1. В момент приходу сигналу в т.1 на годиннику, що знаходиться в цій точці, слід

поставити час $t_1 = \frac{x_1}{c}$. Дві події в різних точках простору можна вважати

одночасними, якщо в момент їх настання годинники, що знаходяться в цих точках і синхронізовані, показують один і той же час.

§ 2. Перетворення Лоренца та наслідки з них

Нехай ІСВ K' рухається зі швидкістю \vec{V} відносно ІСВ K (мал. 1). Якій-небудь події відповідають в системі K значення координат і часу x, y, z, t , а в



мал. 1

системі K' - x', y', z', t' . Якщо в момент $t=t'=0$ початки координат обох систем співпадали, то тоді між координатами подій в обох системах мають місце такі

співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t + \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (1a) \text{ перетворення Лоренца}$$

При $V \ll c$ перетворення Лоренца переходять в перетворення Галілея.

Одновременність подій в різних системах відліку

Нехай в системі K в т. x_1 і x_2 відбуваються одночасно дві події в момент часу $t_1 = t_2 = b$. Відповідно (1a) в K' будуть відповідати координати

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vb}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - Vb}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

і моменти часу

$$t'_1 = \frac{b - \frac{V}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

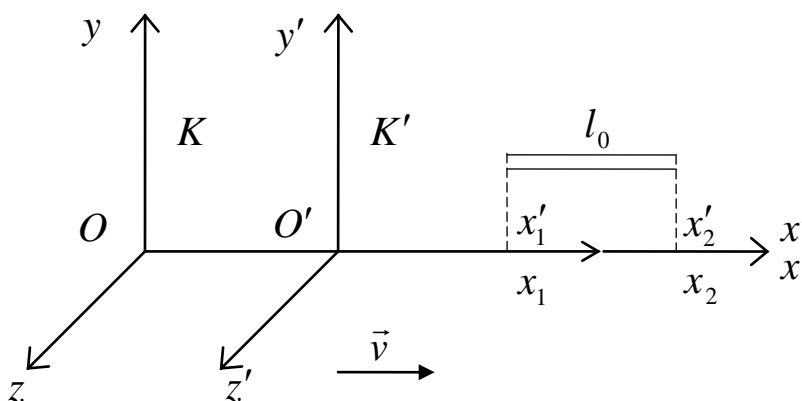
$$t'_2 = \frac{b - \frac{V}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Якщо події в K відбуваються в одному місці простору, то в K' вони будуть співпадати і в просторі ($x'_1 = x'_2$) і часі ($t'_1 = t'_2$).

Якщо в K події відбуваються в різних точках ($x_1 \neq x_2$), то в K' вони також відбуваються в різних точках ($x'_1 \neq x'_2$), але не буде одночасними ($t'_1 \neq t'_2$). В різних системах K' (при різних V) різниця $t'_2 - t'_1$ буде різною за величиною і може відрізнятися за знаком. Це означає, що в одних системах подія 1 буде передувати події 2, в інших навпаки. Але це стосується лише подій, не пов'язаних причинним зв'язком. Причинно пов'язані події (наприклад, постріл і попадання кулі в мішень) ні в одній із систем відліку не будуть одночасними і в усіх системах подія, що є причиною, буде передувати наслідку.

Відносність довжин тіл

Нехай в системі K' вздовж осі x знаходиться нерухомий стержень довжиною $l_0 = x'_2 - x'_1$. Відносно системи K стержень рухається зі швидкістю V . Тоді в момент часу $t_1 = t_2 = b$



$$x'_1 = \frac{x_1 - Vb}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - Vb}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\text{або } x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (2)$$

Отже, довжина стержня l , виміряна в системі, відносно якої він рухається, виявляється менше довжини l_0 , виміряної в системі, відносно якої стержень знаходиться в спокої.

Відносність проміжків часу

Нехай в точці, нерухомій відносно K' , відбувається подія тривалістю $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$. Початку події відповідає в цій системі к-та $x'_1 = a$ і момент часу t'_1 , Кінцю події – $x'_2 = a$ і t'_2 . Відносно системи K точка, в якій відбувається подія, переміщується.

В системі K

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}a}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}a}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Тоді

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \text{ або } \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Δt_0 визначено по годиннику, що рухається разом з тілом, Δt – за годинником системи, відносно якої тіло рухається зі швидкістю V .

Час Δt_0 , відрахований по годиннику, що рухається разом з тілом, називається власним часом цього тіла. Він завжди менший, ніж час, відрахований за рухомим відносно тіла годинником.

В складі космічних променів є частинки μ^+ і μ^- -мезони. Вони нестабільні – розпадаються на позитрон (електрон) і два нейтрино.

Власний час життя μ -мезона $2 \cdot 10^{-6}$ с. Тобто, рухаючись навіть зі швидкістю світла, μ -мезони можуть пройти шлях 600м. Але μ -мезони утворюються в космічних променях на висоті 20-30км і досягають земної поверхні.

Додавання швидкостей

$$U_x = \frac{dx}{dt}, \quad U_y = \frac{dy}{dt}, \quad U_z = \frac{dz}{dt} \quad - \text{в } K$$

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{C^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

$$\text{Тоді } \left. \begin{aligned} U_x &= \frac{U'_x + V}{1 + \frac{VU'_x}{C^2}} \\ U_y &= \frac{U'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}{1 + \frac{VU'_x}{C^2}} \\ U_z &= \frac{U'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}{1 + \frac{VU'_x}{C^2}} \end{aligned} \right\} (4) \quad \begin{array}{l} \text{формули перетворень швидкостей при} \\ \text{переході від однієї системи відліку до іншої} \end{array}$$

Якщо тіло рухається паралельно осі x , його швидкість U відносно K співпадає з U_x .

$$U = \frac{U' + V}{1 + \frac{U'V}{C^2}}$$

Нехай швидкість $U' = C$. Тоді

$$U = \frac{C + V}{1 + \frac{CV}{C^2}} = C$$

Релятивістська динаміка

$$\text{Для маси} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad (5)$$

m_0 - інваріантна величина, що наз. масою спокою даного тіла.

$M = m(V)$ - релятивістська маса.

Помноживши на швидкість \vec{V} , отримаємо релятивістський вираз для імпульсу матеріальної точки

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \quad (6), \text{ при } V \ll C \text{ отримаємо } \vec{p} = m_0 \vec{V}$$

Релятивістський вираз II з. Ньютона має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \right) = \vec{F} \quad (7), \text{ де } \vec{F} - \text{результуюча сил, що діють на тіло.}$$

Знайдемо релятивістський вираз для енергії матеріальної точки, користуючись (7) і помноживши його на $\vec{V} dt$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \right) \vec{V} dt = \vec{F} \vec{V} dt$$

Права частина цього співвідношення – елементарна робота, виконана над частинкою за час dt .

По закону збереження енергії, робота, виконана над частинкою, повинна дорівнювати приросту енергії частинки dE . Тому

$$\begin{aligned} dE &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \right) \vec{V} dt = \vec{V} d \left(\frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \right) = \left\| V^2 = \vec{V}^2; V dV = \vec{V} d\vec{V} \right\| = \vec{V} \left[\frac{m_0 d\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} + \frac{m_0 \vec{V} \left(\frac{\vec{V}}{C^2} d\vec{V} \right)}{\left(1 - \frac{V^2}{C^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right] = \\ &= \frac{m_0 \vec{V} d\vec{V}}{\left(1 - \frac{V^2}{C^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_0 C^2 d \left(\frac{V^2}{C^2} \right)}{2 \left(1 - \frac{V^2}{C^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = d \left(\frac{m_0 C^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \right) \end{aligned}$$

Інтегрування одержаного виразу дає

$$E = \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} + const \quad \text{Ейнштейн прийняв константу рівною нулю.}$$

$$\text{Тоді } E = \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} = m C^2 \quad (8), \text{ де } m - \text{релятивістська маса частинки.}$$

Якщо швидкість частинки $V = 0$, енергія приймає значення

$$E_0 = m_0 C^2 \quad (9)$$

Величина (9) носить назву енергії спокою частинки. Ця енергія і є

внутрішньою енергією частинки, не пов'язану з рухом частинки як цілого.

Кінетичну енергію частинки визначимо як різницю між E і E_0

$$T = E - E_0 = \left(\frac{m_0 C^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} - m_0 C^2 \right) = m_0 C^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} - 1 \right) \quad (10)$$

При $V \ll C$

$$T \approx m_0 C^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{C^2}} - 1 \right) \approx m_0 C^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{C^2} - 1 \right) = \frac{m_0 V^2}{2}$$

Тобто класичний вираз для кінетичної енергії частинки.

Виключивши з виразів (6) і (8) швидкість V , сприймаємо вираз для енергії частинки через імпульс p :

$$E = C \sqrt{p^2 + m_0^2 C^2} \quad (11)$$

Класичний вираз $E = \frac{p^2}{2m}$

Зазначимо, що формули (8) і (9) справедливі для складного тіла, що складається з багатьох частинок. Енергія E_0 тіла, що знаходиться у стані спокою, крім енергії спокою частинок, що входять до його складу, містить також кінетичну енергію частинок (зумовлену їх рухом відносно центра інерції тіла) і енергію їх взаємодії одна з одною. В енергію спокою, як і в повну енергію, не входить потенціальна енергія тіла у зовнішньому силовому полі.

Із виразу (8) слідує, що енергія і маса тіла завжди пропорційні. Будь-яка, за винятком зміни потенціальної енергії у зовнішньому полі, зміна енергії тіла ΔE супроводжується зміною маси тіла $\Delta m = \frac{\Delta E}{C^2}$, і навпаки

$$\Delta E = \Delta m C^2 \quad (12)$$

Це твердження носить назву закону взаємозв'язку маси і енергії.

Відмітимо, що пропорційність між релятивістською масою і енергією приводить до того, що твердження про збереження сумарної релятивістської маси частинок є сказане іншими словами твердження про збереження повної

енергії. Тому в фізиці не прийнято вести мову про закон збереження релятивістської маси як про окремий закон.