

Тема. Елементи математичної статистики. Вибірковий метод.

Генеральна сукупність - уся група об'єктів, що підлягають вивченню.

Вибірка - частина об'єктів генеральної сукупності, що потрапили на перевірку чи дослідження

Обсяг генеральної сукупності (вибірки) - число елементів генеральної сукупності (вибірки): $N, (n)$.

Варіанта - кожне окреме значення ознаки (x_1, x_2, \dots, x_i) .

Частота - число, що показує, скільки разів зустрічається кожна варіанта (n_1, n_2, \dots, n_i) .

Статистичний ряд розподілу – впорядкована статистична сукупність.

Ранжирований ряд – ряд чисел, що знаходиться в порядку зростання або спадання варіюючої ознаки

Варіаційний ряд - ранжирований у порядку зростання чи спадання ряд варіантів з відповідними їм частотами.

Дискретний ряд - ряд, у якому окремі значення ознаки (варіанти) відрізняються одне від одного на деяку скінчену величину.

Неперервний ряд (інтервальний) – ряд, у якому значення ознаки відрізняються одне від одного на яку завгодно малу величину.

Статистичним інтервальним розподілом називається відповідність між інтервалами вибірки, частотами і відносними частотами.

Відносною частотою p_i^ (частістю)* - називають відношення частоти n_i , що відповідає значенню x_i , до суми всіх частот (обсягу вибірки):

$$p_i^* = \frac{n_i}{\sum n_i} = \frac{n_i}{n}, \quad i = \overline{1, k}, \quad k - \text{кількість інтервалів}$$

При переході від інтервального ряду розподілу до дискретного припускають, що частоти згруповані в центрах інтервалів:

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

Атрибутивний ряд – ряд, у якому значення ознаки не має кількісного вираження.

Огіва – графічне представлення залежності між значенням варіант і нагромаджені частот.

Гістограма відносних частот - ступінчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких служать інтервали $[x_{i-1}; x_i)$, а висоти дорівнюють p_i^* .

Полігон відносних частот - ламана, яка з'єднає точки (x_i^*, p_i^*) .

Діаграма - значення ознаки, виражене в процентному відношенні.

Види характеристик	згруповані	не згруповані
Вибіркова середня	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i}{n}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
Дисперсія	$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}$ $\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot n_i}{n} - \bar{x}^2$	$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ чи

		$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n x^2}{n} - \bar{x}^2$
Виправлена дисперсія		$\bar{D}_u = \frac{n}{n-1} \bar{D}$
Середнє квадратичне відхилення		$\sigma = \sqrt{\bar{D}}$
Коефіцієнт варіації		$\bar{V} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$ <p>5% - слабкий 6-10% - помірний 16-20% - значний 21-50% - великий >50 - дуже великий (для малих вибірок < 33%)</p>
Мода		<p>- варіант, що має максимальну частоту, для інтервального ряду:</p> $M_0 = x_{M_0 \min} + h \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{2n_{M_0} - n_{M_0+1} - n_{M_0-1}}$ <p>n_{M_0} - частота модального інтервалу, n_{M_0-1} - частота інтервалу, що передує модальному, n_{M_0+1} - частота наступного інтервалу за модальним, $n_{M_0 \min}$ - нижня межа модального інтервалу.</p>
Медіана		<p>- середина ранжованого ряду для інтервального ряду:</p> $M_e = \frac{1}{3} M_0 + \frac{2}{3} x$

Алгоритм вибіркового методу

- 1) визначення розмаху вибірки: $\Delta = x_{\max} - x_{\min}$;
- 2) побудова ранжованого ряду;
- 3) визначення кількості інтервалів: формула Стерджеса

$$k = 1 + 3,322 \lg n \quad \text{чи} \quad k = \sqrt{n}, \quad (\text{де } n - \text{обсяг вибірки})$$
- 4) обчислення кроку (довжини) інтервалів:

$$h = \frac{b-a}{k}, \quad \text{де } x_{\min} \leq a, \quad x_{\max} \geq b$$
- 5) побудова інтервального ряду розподілу, гістограми;
- 6) побудова дискретного ряду розподілу, полігона;
- 7) обчислення числових характеристик: середнього значення, дисперсії, середнього квадратичного відхилення, моди, медіани, коефіцієнта варіації; висновок.

1.2. Практична частина

Приклад. Отримані вибіркові дані про врожайність зернових культур (ц/га) по господарствах Запорізької області за 2010 рік:

13,4	13,6	17,8	15,4	24,5
17,6	18,2	16,8	19,3	19,4
16,1	16,1	17,2	19,8	26,7
15,9	26,1	21,7	19,9	19,4
17,2	16,1	15,7	20,3	20,5

Використовуючи вибіркового метод:

1. визначити розмах вибірки;
побудувати:

- ранжований ряд;
- інтервальний ряд, гістограму;
- дискретний ряд, полігон;
- обчислити числові характеристики: \bar{x} , $\overline{D_u}$, $\overline{\sigma}$, \overline{V} , M_0 , M_e , A_s , E
- зробити висновок на підставі отриманих числових характеристик.

Розв'язання.

Обсяг вибірки (кількість елементів): $n = 25$

1. Визначимо максимальний і мінімальний варіант вибірки: $x_{\min} = 13,4$, $x_{\max} = 26,7$.

Розмах вибірки обчислимо за формулою: $R = x_{\max} - x_{\min} = 26,7 - 13,4 = 13,3$

2. Побудуємо ранжований ряд, розташувавши значення вибірки в зростаючому чи спадному порядку:

13,4	16,1	17,2	19,4	20,5
13,6	16,1	17,6	19,4	21,7
15,4	16,1	17,8	19,8	24,5
15,7	16,8	18,2	19,9	26,1
15,9	17,2	19,3	20,3	26,7

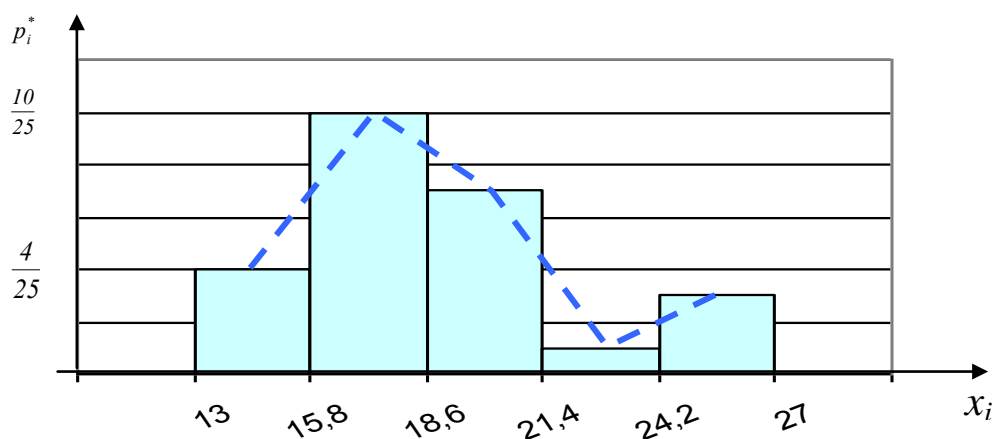
Для побудови інтервального ряду розподілу визначимо кількість інтервалів за формулою:

$$k = \sqrt{n} = \sqrt{25} = 5$$

Крок інтервалу визначаємо за формулою:

$$h = \frac{27 - 13}{5} = 2,8$$

Складемо інтервальний ряд розподілу:



x_i	13 – 15,8	15,8 – 18,6	18,6 – 21,4	21,4 – 24,2	24,2 – 27
n_i	4	10	7	1	3
$p_i^* = \frac{n_i}{n}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$

Для отриманого ряду розподілу побудуємо гістограму відносних частот

- Для переходу до дискретного ряду розподілу, припускаємо, що частоти згруповані в центрах інтервалів

x_i^*	14,4	17,2	20	22,8	25,6
n_i	4	10	7	1	3
$p_i^* = \frac{n_i}{n}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$

Побудуємо полігон відносних частот (зобразимо на гістограмі).

- Обчислимо числові характеристики вибірки даних:

- середнє значення:

$$\bar{x} = \frac{14,4 \cdot 4 + 17,2 \cdot 10 + 20 \cdot 7 + 22,8 \cdot 1 + 25,6 \cdot 3}{25} = 18,77$$

- дисперсію:

$$\bar{D} = \frac{14,4^2 \cdot 4 + 17,2^2 \cdot 10 + 20^2 \cdot 7 + 22,8^2 \cdot 1 + 25,6^2 \cdot 3}{25} - 18,77^2 = 10,64$$

- виправлену дисперсію:

$$\bar{D}_u = \frac{n}{n-1} \bar{D} = \frac{25}{24} \cdot 10,64 = 11,08$$

- середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\bar{D}_u} = \sqrt{11,08} \approx 3,26$$

- коефіцієнт варіації:

$$\bar{V} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{3,26}{18,77} \cdot 100\% = 17,37\%$$

- моду:

$$M_0 = 15,8 + 2,8 \cdot \frac{10-4}{2 \cdot 10-4-7} \approx 17,67$$

- медіану:

$$M_e = \frac{1}{3} 17,67 + \frac{2}{3} \cdot 18,77 = 18,4$$

Висновок: У цілому по господарствам Запорізької області середня врожайність зернових культур складає 15,51-22,3 (ц/га), $\left(\pm \sigma \right)$. Причому в більшій частині господарств отриманий урожай 17,67(ц/га), $\left(M_0 \right)$. У цілому по області розсіювання за результатами врожайності значне $\left(\bar{V} = 17,37\% \right)$.

1.3. Завдання для самостійної роботи.

Наведені вибіркові дані прибутку від реалізації по господарствам Запорізької області.

Треба:

- визначити розмах вибірки;
- побудувати ранжований ряд розподілу;
- побудувати інтервальний ряд розподілу, гистограму відносних частот;
- побудувати дискретний ряд розподілу, полігон;
- обчислити числові характеристики: моду, медіану, середнє значення, дисперсію, виправлену дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.
- зробити висновок на підставі отриманих числових характеристик.

1.1	12,74	15,79	17,85	17,70	18,77	10,93	14,83	17,49	13,13
	11,92	11,61	13,34	13,75	11,06	14,16	14,49	15,57	14,57
14,65	14,56	17,99	15,13	14,56	14,27	19,24	17,03	20,05	13,99
18,62	12,08	16,38	17,10	19,14	15,13	14,25	16,65	14,54	16,82
12,41	13,61	12,26	14,57	15,24	15,36	14,65	19,69	4,70	13,92
1.2	12,69	8,77	9,14	9,05	12,64	13,11	5,52	10,47	12,42
	12,49	13,57	21,41	4,64	12,17	19,94	13,76	13,45	8,65
9,65	13,02	17,95	14,70	19,21	9,04	11,93	13,93	15,11	8,69
16,93	19,38	12,57	18,11	9,79	13,97	14,04	9,77	14,96	22,24
8,96	15,86	9,38	15,48	12,11	11,84	12,06	9,57		
1.3	17,23	24,12	29,67	26,39	34,60	26,11	17,55	14,94	27,08
	31,75	12,89	21,89	23,66	11,26	26,55	23,14	16,45	29,36
24,00	22,73	15,29	19,52	27,94	22,29	17,17	21,49	22,04	16,80
20,65	21,58	35,30	29,46	28,11	24,22	28,07	23,49	22,42	12,71
30,06	16,46	22,74	26,09	25,19	21,13	31,77	24,06	16,78	18,48
1.4	28,26	30,42	36,32	18,99	23,32	34,24	26,13	27,42	18,42
	16,84	23,28	17,72	33,27	29,64	10,13	37,98	35,97	26,45
31,43	19,73	11,39	27,18	21,61	26,80	13,62	21,54	34,74	32,51
17,56	40,06	38,06	28,84	28,63	26,96	33,65	21,93	27,66	27,70
25,23	30,05	27,62	29,02	27,36	26,97	29,21	22,04	24,67	35,00
1.5	7,35	25,62	27,69	24,00	18,29	3,04	21,72	6,28	21,86
	29,05	21,86	17,80	10,76	20,03	20,91	13,05	3,63	17,26
13,65	12,71	24,13	21,80	4,13	14,62	13,58	14,89	8,87	17,34
15,82	23,36	12,80	13,91	21,12	16,42	20,39	11,85	3,17	22,08
16,49	19,45	22,60	18,39	29,15	18,13	6,65	16,54	26,92	21,76
1.6	3,33	9,86	0,47	10,25	8,34	9,52	4,37	-1,52	7,05
	8,54	5,50	10,05	7,38	10,69	8,51	6,08	2,74	12,79
11,95	7,39	8,28	7,86	5,90	4,82	0,58	6,33	2,54	10,43
10,07	6,23	3,62	10,57	3,72	0,18	11,14	8,10	7,05	0,78
11,51	13,09	7,17	8,19	3,91	6,89	11,63	11,00		
1.7	28,91	29,20	24,78	20,49	22,31	24,69	28,76	30,54	26,23
	29,68	24,32	30,33	26,89	28,11	23,16	27,38	26,84	28,61
28,69	27,15	21,80	28,43	32,96	30,13	34,82	26,07	25,69	26,80
27,72	20,35	25,43	28,26	34,10	27,83	29,36	21,71	25,71	31,34

33,30	31,24	26,01	27,71	25,94	23,73	28,17	27,99	29,15	
1.8	14,35	15,44	15,21	18,12	11,85	17,83	20,89	21,57	7,62
	11,78	22,59	23,37	23,57	27,58	20,78	3,46	13,49	17,35
20,08	18,90	21,59	11,03	18,41	15,53	14,18	17,68	21,63	20,54
14,44	10,58	16,55	13,81	11,24	19,31	13,50	22,31	16,84	15,78
20,72	24,08	18,45	26,41	20,27	11,43	17,63			
1.9	17,40	15,26	9,82	19,73	16,02	18,09	17,86	16,39	17,22
	20,44	9,77	16,85	5,50	18,54	16,25	19,30	16,23	17,30
11,05	18,27	19,73	16,98	17,75	18,13	16,03	17,62	17,22	14,59
16,28	16,20	18,55	14,18	16,41	16,82	16,76	16,74	18,58	13,47
15,80	18,33	18,11	19,01	19,20	20,63	17,18	16,19	19,79	
1.10	2,93	6,59	9,06	8,88	10,16	0,76	5,44	8,63	3,39
	1,94	1,57	3,65	4,14	0,92	4,64	5,03	6,32	5,12
5,22	5,11	9,22	5,80	5,55	4,77	10,73	8,08	11,70	4,43
9,99	2,13	7,29	8,17	10,61	5,80	4,74	7,62	5,08	7,82
2,53	3,97	2,35	5,13	5,92	6,07	5,23	11,27	1,82	
1.11	12,74	15,79	17,85	17,70	8,77	10,93	14,83	17,49	13,13
	11,92	21,61	13,34	13,75	11,06	14,16	14,49	15,57	14,57
10,65	14,56	17,99	15,13	14,93	14,27	9,24	7,03	10,05	13,99
8,62	12,08	16,38	7,10	19,14	15,13	14,25	16,65	14,54	16,82
12,41	13,61	12,26	14,57	15,24	15,36	14,65	19,69		
1.12	8,69	8,77	9,14	9,05	12,64	13,11	5,52	10,47	12,42
	10,49	13,57	21,41	4,64	10,17	10,94	13,76	13,45	8,65
9,65	13,02	12,95	14,70	12,21	9,04	11,93	13,93	15,11	8,69
16,93	19,38	10,57	10,11	9,79	13,97	14,04	9,77	12,44	12,41
8,96	15,86	9,38	15,48	12,11	11,84	12,06			
1.13	17,23	14,12	19,67	16,39	14,60	16,11	17,55	14,94	27,08
	21,75	17,44	11,89	13,66	11,26	26,55	13,14	16,45	29,36
14,00	12,73	15,29	19,52	27,94	22,29	17,17	21,49	22,04	16,80
10,65	21,58	35,30	19,46	28,11	24,22	28,07	13,49	22,42	12,71
10,06	16,46	22,74	16,09	25,19	21,13	31,77	24,06	16,78	
1.14	8,26	30,42	26,32	18,99	23,32	14,24	26,13	27,42	18,42
	6,84	23,28	17,72	23,27	19,64	10,13	17,98	15,97	16,45
11,43	19,73	31,39	27,18	21,61	16,80	13,62	21,54	34,74	32,51
7,56	10,06	38,06	8,84	28,63	26,96	33,65	21,93	27,66	27,70
25,23	10,05	27,62	29,02	27,36	26,97	29,21			
1.15	10,35	15,62	17,69	14,00	18,29	3,04	11,72	16,28	11,86
	19,05	21,86	12,80	10,76	10,03	10,91	13,05	3,63	17,26
13,65	12,71	24,13	21,80	4,13	14,62	13,58	14,89	8,87	12,34
10,82	23,36	12,80	13,91	21,12	16,42	20,39	11,85	3,17	
16,49	19,45	22,60	18,39	29,15	18,13	6,65	16,54	26,92	
1.16	13,33	9,86	10,47	10,25	8,34	19,52	14,37	11,52	7,05
	18,54	15,50	10,05	7,38	10,69	8,51	16,08	12,74	12,79
21,95	17,39	8,28	7,86	5,90	14,82	10,58	16,33	12,54	10,43
10,07	6,23	3,62	10,57	13,72	10,18	11,14	8,10	7,05	10,78
11,51	13,09	7,17	8,19	13,91	6,89	11,63	11,00	12,74	
1.17	8,91	29,20	4,78	20,49	2,31	4,69	8,76	10,54	16,23

	9,68	4,32	30,33	6,89	28,11	23,16	27,38	26,84	18,61
8,69	7,15	21,80	8,43	2,96	30,13	4,82	6,07	5,69	26,80
7,72	20,35	5,43	8,26	4,10	27,83	29,36	21,71	25,71	31,34
3,30	31,24	6,01	27,71	25,94	23,73	28,17	27,99	29,15	
1.18	14,35	15,44	15,21	18,12	11,85	17,83	20,89	21,57	7,62
	11,78	12,59	13,37	13,57	17,58	10,78	13,46	13,49	17,35
22,08	18,90	21,59	11,03	18,41	15,53	14,18	17,68	11,63	
24,44	10,58	16,55	13,81	11,24	19,31	13,50	22,31	16,84	
10,72	24,08	18,45	26,41	20,27	11,43	17,63	21,39	17,17	
1.19	7,40	15,26	19,82	19,73	16,02	8,09	7,86	16,39	17,22
	10,44	9,77	16,85	15,50	8,54	16,25	9,30	16,23	17,30
11,05	18,27	9,73	16,98	17,75	8,13	16,03	17,62	7,22	14,59
9,28	16,20	8,55	14,18	16,41	16,82	16,76	16,74	8,58	
15,80	18,33	8,11	19,01	19,20	20,63	17,18	16,19	9,79	
1.20	12,93	26,59	9,06	8,88	10,16	10,76	5,44	8,63	13,39
	11,94	21,57	13,65	4,14	10,92	4,64	5,03	6,32	5,12
15,22	15,11	9,22	5,80	5,55	4,77	10,73	8,08	11,70	4,43
19,99	12,13	7,29	8,17	10,61	15,80	4,74	7,62	5,08	7,82
12,53	13,97	22,35	5,13	5,92	6,07	5,23	11,27		
1.21	22,74	15,79	7,85	17,70	18,77	10,93	14,83	17,49	13,13
	11,92	11,61	13,34	13,75	11,06	14,16	14,49	15,57	4,57
14,65	14,56	17,99	5,13	4,93	4,27	19,24	17,03	10,05	13,99
8,62	22,08	16,38	17,10	9,14	15,13	14,25	16,65	14,54	6,82
12,41	13,61	12,26	14,54	5,24	15,36	14,65	19,69		
1.22	12,69	8,77	9,14	9,05	12,64	13,11	15,52	10,47	12,42
	12,69	13,57	21,41	14,64	12,17	11,94	11,76	13,45	8,65
19,65	13,02	17,95	14,70	11,21	9,04	11,93	13,93	15,11	8,69
16,93	11,38	11,57	18,11	9,79	13,97	14,04	9,77	12,44	12,41
8,96	11,86	9,38	15,48	12,11	11,84	12,06	14,96		
1.23	11,23	14,12	19,67	16,39	14,60	16,11	17,55	14,94	27,08
	21,75	17,44	21,89	23,66	11,26	16,55	23,14	16,45	29,36
14,00	12,73	15,29	19,52	17,94	22,29	17,17	21,49	22,04	16,80
10,65	11,58	35,30	19,46	28,11	24,22	18,07	23,49	22,42	12,71
10,06	16,46	22,74	16,09	25,19	21,13	31,77	14,06		
1.24	18,26	20,42	16,32	18,99	23,32	34,24	16,13	17,42	18,42
	26,84	13,28	17,72	13,27	19,64	10,13	17,98	15,97	16,45
11,43	19,73	21,39	17,18	21,61	26,80	13,62	11,54	14,74	32,51
17,56	20,06	18,06	18,84	18,63	16,96	13,65	21,93	17,66	17,70
15,23	10,05	17,62	19,02	17,36	16,97	10,21	12,04	14,67	
1.25	7,35	25,62	17,69	24,00	18,29	3,04	11,72	16,28	20,16
	19,05	11,86	11,80	10,76	10,03	10,91	13,05	13,63	11,26
13,65	12,71	01,13	11,80	4,13	14,62	13,58	14,89	8,87	11,34
15,82	13,36	12,80	13,91	21,12	16,42	20,39	11,85	3,17	22,08
16,49	19,45	22,60	11,39	20,15	18,13	6,65	16,54	26,92	21,76
1.26	13,33	9,86	10,47	10,25	8,34	9,52	4,37	11,52	7,05
	18,54	5,50	10,05	7,38	10,69	8,51	6,08	12,74	12,79
10,95	7,39	8,28	7,86	15,90	4,82	10,58	6,33	10,54	10,43

10,07	16,23	3,62	10,57	13,72	10,18	11,14	8,10	7,05	10,78
11,51	13,09	7,17	8,19	13,91	6,89	11,63	1,00		
1.27	18,91	20,20	21,78	20,49	22,31	24,69	28,76	10,54	16,23
	19,68	14,32	10,33	26,89	28,11	13,16	17,38	16,84	18,61
18,69	17,15	21,80	18,43	12,96	10,13	14,82	26,07	25,69	26,80
17,72	20,35	25,43	28,26	34,10	27,83	29,36	21,71	15,71	31,34
13,30	31,24	26,01	27,71	25,94	23,73	28,17	27,99	8,10	
1.28	4,35	11,44	15,21	18,12	11,85	17,83	20,89	21,57	7,62
	11,78	12,59	23,37	13,57	27,58	20,78	3,46	13,49	17,35
30,08	18,90	21,59	11,03	18,41	15,53	14,18	17,68	21,63	10,54
34,44	10,58	16,55	13,81	11,24	19,31	13,50	12,31	16,84	15,78
10,72	24,08	18,45	26,41	20,27	11,43	17,63	21,39	19,79	
1.29	17,40	15,26	9,82	9,73	16,02	18,09	17,86	16,39	17,22
	10,44	9,77	16,85	15,50	18,54	32,25	29,30	26,23	17,30
9,05	8,27	9,73	6,98	27,75	18,13	16,03	17,62	17,22	14,59
6,28	16,20	8,55	14,18	16,41	16,82	16,76	26,74	28,58	23,47
5,80	18,33	18,11	19,01	9,20	20,63	17,18	16,19		
1.30	2,93	6,59	9,06	18,88	10,16	10,76	5,44	8,63	3,39
	21,94	11,57	13,65	4,14	20,92	4,64	5,03	6,32	5,12
25,22	15,11	9,22	15,80	5,55	14,77	10,73	8,08	11,70	4,43
19,99	2,13	7,29	8,17	10,61	5,80	4,74	7,62	5,08	7,82
12,53	13,97	2,35	5,13	5,92	6,07	5,23	11,27	1,82	

2.1. Теоретичні відомості. Кореляційно-регресійний аналіз.

Функціональним називають зв'язок між ознаками, при якому кожному значенню однієї змінної відповідає певне значення іншої змінної.

Кореляційним (статистичним) зв'язком називається такий зв'язок, при якому чисельному значенню однієї змінної відповідає кілька значень іншої.

Кореляційною залежністю у від х називається така залежність, при якій зміна випадкової величини x спричинюють зміни середнього значення змінної y (\bar{y}_x), тобто $\bar{y}_x = f(x)$.

Вибірковим коефіцієнтом кореляції називається число:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y},$$

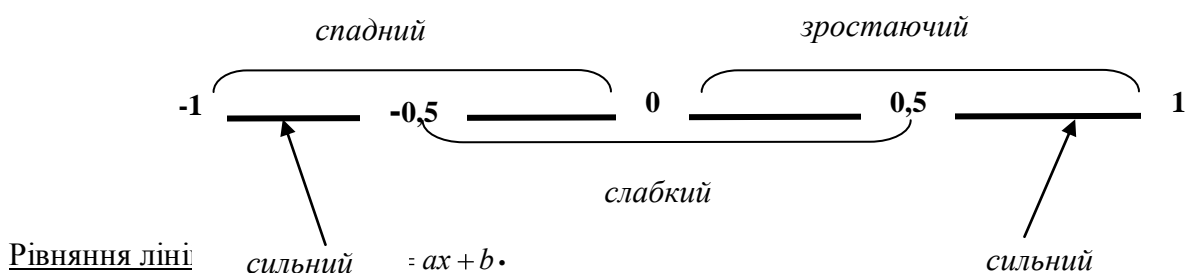
де \bar{x}, \bar{y} - вибіркові середні для x і y , тобто $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$.

σ_x, σ_y - вибіркові середньоквадратичні відхилення для x і y :

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2}.$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

- абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує 1: $|r| \leq 1$
- якщо $r = \pm 1$, то x і y зв'язані точкою лінійного зв'язку: $y = ax + b$;
- якщо $r = 0$, то між x і y немає лінійного зв'язку, але криволінійна залежність можлива;
- чим ближче r до ± 1 , тим сильніше лінійний зв'язок між x і y і, чим ближче r до 0, тим він слабший;
- якщо $r > 0$, зв'язок між x і y зростаючий, $r < 0$, зв'язок – спадний.



Параметри лінійної регресії дорівнюють: $a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Перевірка гіпотези про значимість коефіцієнта кореляції.

Гіпотеза H_0 : лінійного кореляційного зв'язку для даної генеральної сукупності немає.

- Визначаємо значення критерію, що спостерігається

$$t_p = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}.$$

- по таблиці Ст'юдента визначають $t_{кр} = t_{\alpha, k = n-2}$.

- при $|t_p| \geq t_{кр}$ - нульову гіпотезу відкидають, при $|t_p| < t_{кр}$ - H_0 приймають.

2.2. Практична частина

Приклад. Задана залежність врожайності y (ц/га) від якості ґрунту x (у балах).

x_i	-1	0	1	4
y_i	-1	2	0	2

Знайти:

- коефіцієнт кореляції;
- рівняння лінійної регресії.
- перевірити коефіцієнт кореляції на значимість.

Розв'язання. Для зручності обчислень складемо розрахункову таблицю:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
-1	-1	1	1	1
0	2	0	0	4

	1	0	0	1	0
	4	2	8	16	4
Σ	4	3	9	18	9

Обчислимо середнє значення для x та y :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{4}{4} = 1; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{9}{4} = 2,25; \quad (n=4)$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення для x і y :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{18 - 4 \cdot 1^2}{4}} = 2,16; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{9 - 4 \cdot 2,25^2}{4}} = 1,5.$$

Обчислюємо коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2,25}{4 \cdot 2,16 \cdot 1,5} = 0,62.$$

На підставі властивостей коефіцієнта кореляції робимо висновок.

Оскільки $r=0,62 > 0$, то між x і y сильний, зростаючий лінійний кореляційний зв'язок.

Обчислюємо коефіцієнти лінійної регресії $y = ax + b$:

$$a = \frac{0,62 \cdot 1,5}{2,16} = 0,43; \quad b = 2,25 - 0,43 = 0,32$$

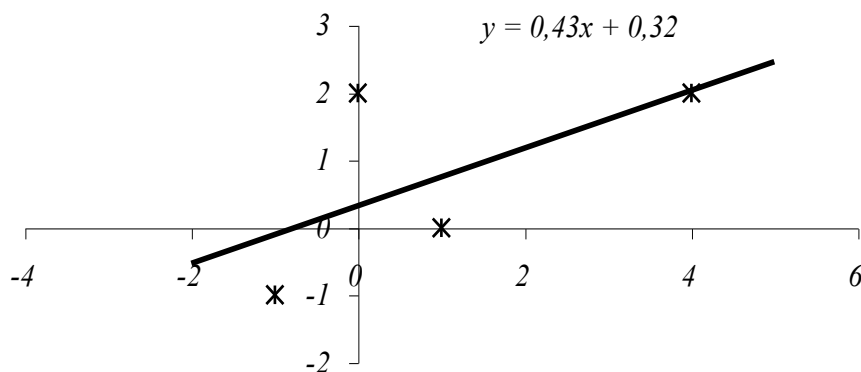
Рівняння лінійної регресії має вид: $y = 0,43x + 0,32$

Побудуємо на координатній площині задані пари точок і отриману пряму.

Перевіримо коефіцієнта кореляції на значимість (критерій Ст'юдента).

$H_0: \rho = 0$ - для даної генеральної сукупності лінійного кореляційного зв'язку немає.

а) Обчислюємо значення критерію, що спостерігається



$$t_p = 0,62 \cdot \sqrt{\frac{-2}{-0,62^2}} \approx 1,12,$$

б) за таблицею Ст'юдента визначаємо

$$t_{kp} = 0,05; \quad k = n - 2 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow 5,99.$$

Оскільки $|t_p| < t_{кр}$ ($1,12 < 5,99$) нульову гіпотезу приймаємо, тобто коефіцієнт кореляції для всієї генеральної сукупності не дорівнює нулю.

2.3. Завдання для самостійної роботи.

Наведені вибіркові дані. Треба визначити:

- коефіцієнт кореляції, зробити висновок;
- параметри лінійної регресії $y = ax + b$;
- надійність коефіцієнта кореляції;
- значимість коефіцієнта кореляції;
- побудувати графік залежності $y = f(x)$

2.1	X	2	4	5	6	7	2.2	X	1	2	3	4	5
	Y	-3	5	9	4	2		Y	1	-5	-4	-3	-1
2.3	X	0	1	2	3,5	4	2.4	X	0	1	2	3	4
	Y	4	2,5	3	-2	3		Y	1	3	2	4	6
2.5	X	-2	-1	0	1	2	2.6	X	-1	0	3	4	5
	Y	1	1,5	4	3	1		Y	2	1	4	-2	3
2.7	X	-1	0	1	2	3	2.8	X	-2	0	1	2	3
	Y	-3	0	2	4	2		Y	1	-5	2	-4	2
2.9	X	1	2	3	4	5	2.10	X	-1	0	1	2	4
	Y	2	3	4	2	5		Y	0	3	9	4	2
2.11	X	-2	0	1	2	3	2.12	X	-1	0	3	4	5
	Y	-1	-5	5	3	2		Y	-1	5	2	4	2
2.13	X	-3	-2	-1	0	2	2.14	X	-1	0	1	3	5
	Y	-3	3	2	4	2		Y	3	2	1	4	2
2.15	X	-1	0	1	2	4	2.16	X	-1	0	1	2	6
	Y	2	1	9	4	2		Y	2	8	3	4	3
2.17	X	-2	-1	0	1	2	2.18	X	1	2	3	4	5
	Y	-2	5	2	4	2		Y	-1	-5	2	4	2
2.19	X	-1	0	1	2	5	2.20	X	-3	-2	-1	0	2
	Y	1	2,5	2	3	1		Y	1	3	4	3	1
2.21	X	1	2	3	4	5	2.22	X	-2	-1	0	2	3
	Y	1	-3	4	3	1		Y	-5	2	4	-3	1
2.23	X	-2	0	1	2	3	2.24	X	-3	-2	-1	0	2
	Y	1	2,5	4	3	1		Y	1	3	4	3	1
2.25	X	-3	-2	-1	0	1	2.26	X	1	2	3	4	5
	Y	2	5	3	3	1		Y	5	3	5	3	1
2.27	X	-3	-2	-1	0	2	2.28	X	-2	-1	0	1	2
	Y	6	4	2	3	1		Y	8	3	0	2	-1
2.29	X	-3	-1	0	1	2	2.30	X	-4	-2	0	1	3
	Y	5	3	0	1	1		Y	1	4	2	0	-3

3.1. Теоретичні відомості. Однофакторний дисперсійний аналіз.

Дисперсійний аналіз – це математико-статистичний метод вивчення результатів спостереження, залежних від різноманітних одночасно діючих факторів

Алгоритм методу

1. Складають розрахункову таблицю у вигляді:

Рівні	Повторності				Середнє	R_i	R_i^2	P_i
	1	2	...	n				
I.	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}				
II.	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}				
...				
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}				
						$\sum R_i$	$\sum R_i^2$	$\sum P_i$

де $R_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$ - сума значень ознаки на кожному рівні,

$P_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}^2$ - сума квадратів значень ознаки на кожному рівні,

2. Обчислюють суми (загальну, факторну, залишкову):

$$S_{заг} = \sum_{i=1}^m P_i - \frac{1}{mn} \left[\sum_{i=1}^m R_i \right]^2$$

$$S_{факт} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m R_i^2 - \frac{1}{mn} \left[\sum_{i=1}^m R_i \right]^2,$$

$$S_{зал} = S_{заг} - S_{факт}$$

3. Обчислюють дисперсії (факторну, залишкову):

$$\sigma_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{m-1}, \quad \sigma_{зал}^2 = \frac{S_{зал}}{m(n-1)}$$

4. Обчислюють значення функції $F_{спост}$, що спостерігається, та визначають за таблицею Фішера критичне значення $F_{крит}$ (табличне), на підставі обчислених ступенів вільності.

$$F_{спост} = \frac{\sigma_{факт}^2}{\sigma_{зал}^2},$$

за таблицею Фішера-Снедекора (додаток 4) для обчислених чисел ступенів вільності і рівня значимості $\alpha = 0,05$ знаходять $F_{крит}$ (де $k_1=m-1$ і $k_2=m(n-1)$)

Висновок згідно критерію Фішера:

якщо $F_{спост} < F_{крит}$ - розходження групових середніх незначне, фактор не впливає;

якщо $F_{спост} > F_{крит}$ - фактор впливає.

3.2. Практична частина

Приклад. За результатами досвідів із трьома повторностями перевірити чи впливає сорт пшениці на зміст білка в зерні.

Рівень (сорт)	Повторності			R_i	$x_i = \frac{\sum R_i}{m}$	p_i	R_i^2
	1	2	3				
1	0	1	0	1	1/3	1	1
2	1	1	1	3	1	3	9
3	1	2	0	3	1	5	9
4	1	0	0	1	1/3	1	1

$$\sum R_i = 8$$

$$\sum P_i = 10$$

$$\sum R_i^2 = 20$$

За умовою: $m=4$, $n=3$

1) Обчислюємо суми:

$$S_{загал} = 10 - \frac{8^2}{12} = 4,7, \quad S_{факт} = \frac{20}{3} - \frac{8^2}{12} = 1,4, \quad S_{зал} = 4,7 - 1,4 = 3,3,$$

2) Обчислюємо дисперсії:

$$\sigma_{факт}^2 = 1,4 / (4 - 1) = 0,47, \quad \sigma_{ост}^2 = 3,3 / (4 \cdot 3 - 1) = 0,41.$$

3) Знайдемо значення критерію $F_{спост}$, що спостерігається, та критичне значення $F_{крит}$:

$$F_{спост} = \frac{\sigma_{факт}^2}{\sigma_{зал}^2} = \frac{0,47}{0,41} = 1,15, \quad k_1 = 4 - 1 = 3, \quad k_2 = 4 \cdot 3 - 1 = 8$$

За таблицею $F_{крит} = 4,07$ (по $k_1, k_2, \alpha = 0,05$)

4) Висновок: так як $F_{спост} < F_{крит}$ - фактор сорт пшениці на кількість білка у зерні не впливає.

3.3. Завдання для самостійної роботи.

Визначити вплив фактора (попередня культура) на врожай буряка

3.1	Рівні	Повторність				3.16	Рівні	Повторність		
	Овес	5	3	6	6		Овес	5	9	12
	Просо	5	6	7	5		Просо	5	6	7
	Горох	8	6	4	7		Горох	12	9	10
	Пшениця	4	8	7	4		Пшениця	13	10	9
3.2	Рівні	Повторність				3.17	Рівні	Повторність		
	Овес	3	5	4	5		Овес	3	4	4
	Просо	7	5	6	9		Просо	5	8	6
	Горох	5	6	7	6		Горох	7	8	6
	Пшениця	5	6	6	5		Пшениця	4	9	9
	Люцерна	6	6	5	4	Люцерна	5	6	4	
3.3	Рівні	Повторність				3.18	Рівні	Повторність		

	<i>Овес</i>	8	8	8	9		<i>Овес</i>	5	6	5			
	<i>Просо</i>	7	4	4	8		<i>Просо</i>	4	2	3			
	<i>Горох</i>	6	7	7	6		<i>Горох</i>	5	7	4			
	<i>Пшениця</i>	5	7	7	6		<i>Пшениця</i>	8	9	3			
3.4	Рівні	Повторність				3.19	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	6	7	6	5		<i>Овес</i>	3	3	3			
	<i>Просо</i>	7	4	5	6		<i>Просо</i>	4	3	3			
	<i>Горох</i>	6	7	8	7		<i>Горох</i>	12	13	13			
	<i>Пшениця</i>	5	6	6	6		<i>Пшениця</i>	12	13	11			
	<i>Люцерна</i>	8	8	8	10		<i>Люцерна</i>	10	9	11			
3.5	Рівні	Повторність				3.20	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	4	4	3	5		<i>Овес</i>	4	3	2			
	<i>Просо</i>	6	4	3	2		<i>Просо</i>	3	2	3			
	<i>Горох</i>	8	7	5	9		<i>Горох</i>	5	6	5			
	<i>Пшениця</i>	4	7	5	7		<i>Пшениця</i>	8	4	9			
3.6	Рівні	Повторність				3.21	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	4	7	5	5		<i>Овес</i>	6	7	6	7		
	<i>Просо</i>	7	5	7	6		<i>Просо</i>	3	4	4	7		
	<i>Горох</i>	8	7	7	9		<i>Горох</i>	7	4	7	6		
	<i>Пшениця</i>	7	6	7	8		<i>Пшениця</i>	8	5	7	6		
3.7	Рівні	Повторність					3.22	Рівні	Повторність				
	<i>Просо</i>	8	6	6	8	9		<i>Просо</i>	6	6	5	3	3
	<i>Горох</i>	7	6	7	6	9		<i>Горох</i>	7	6	7	6	7
	<i>Пшениця</i>	7	6	6	6	6		<i>Пшениця</i>	6	7	6	7	6
3.8	Рівні	Повторність				3.23	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	6	9	6	10		<i>Овес</i>	6	7	6			
	<i>Просо</i>	8	8	5	8		<i>Просо</i>	6	6	8			
	<i>Горох</i>	7	6	8	6		<i>Горох</i>	6	8	9			
	<i>Пшениця</i>	7	6	6	5		<i>Пшениця</i>	11	6	7			
3.9	Рівні	Повторність				3.24	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	4	6	6	7		<i>Овес</i>	4	5	4			
	<i>Просо</i>	3	7	3	4		<i>Просо</i>	5	4	5			
	<i>Горох</i>	4	7	7	3		<i>Горох</i>	5	6	3			
	<i>Пшениця</i>	4	7	4	5		<i>Пшениця</i>	5	4	5			
	<i>Люцерна</i>	3	6	6	6		<i>Люцерна</i>	7	6	7			
3.10	Рівні	Повторність					3.25	Рівні	Повторність				
	<i>Просо</i>	8	7	4	4	3		<i>Просо</i>	5	6	5	3	3
	<i>Горох</i>	7	8	7	4	9		<i>Горох</i>	7	6	7	6	7
	<i>Пшениця</i>	7	7	9	9	6		<i>Пшениця</i>	8	7	8	7	8
3.11	Рівні	Повторність				3.26	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	7	9	4	4		<i>Овес</i>	6	7	6			
	<i>Просо</i>	8	8	5	8		<i>Просо</i>	6	6	8			
	<i>Горох</i>	7	6	8	6		<i>Горох</i>	3	4	5			
	<i>Пшениця</i>	7	4	6	5		<i>Пшениця</i>	7	7	4			
3.12	Рівні	Повторність				3.27	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	4	5	6	7		<i>Овес</i>	4	5	4			

	<i>Просо</i>	3	5	3	4		<i>Просо</i>	5	4	5			
	<i>Горох</i>	4	5	5	3		<i>Горох</i>	3	4	3			
	<i>Пшениця</i>	4	5	4	5		<i>Пшениця</i>	5	4	5			
	<i>Люцерна</i>	3	6	6	6		<i>Люцерна</i>	4	6	7			
3.13	Рівні	Повторність				3.28	Рівні	Повторність					
	<i>Просо</i>	8	6	8	6		3	<i>Просо</i>	6	6	5	3	3
	<i>Горох</i>	7	8	7	6		9	<i>Горох</i>	5	8	8	6	7
	<i>Пшениця</i>	7	7	9	9		6	<i>Пшениця</i>	8	3	7	2	4
3.14	Рівні	Повторність				3.29	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	7	9	5	3		<i>Овес</i>	6	7	6			
	<i>Просо</i>	8	5	5	8		<i>Просо</i>	6	6	8			
	<i>Горох</i>	7	6	8	6		<i>Горох</i>	7	5	4			
	<i>Пшениця</i>	7	3	6	5		<i>Пшениця</i>	5	6	2			
3.15	Рівні	Повторність				3.30	Рівні	Повторність					
	<i>Овес</i>	4	3	7	9		<i>Овес</i>	7	5	4			
	<i>Просо</i>	3	5	3	4		<i>Просо</i>	5	4	5			
	<i>Горох</i>	4	5	4	3		<i>Горох</i>	8	6	3			
	<i>Пшениця</i>	4	8	3	4		<i>Пшениця</i>	9	7	5			
	<i>Люцерна</i>	3	6	6	6		<i>Люцерна</i>	4	6	7			

Список рекомендованої літератури

1. Гмурман В.Е. Керівництво до розв'язання задач по теорії ймовірностей і математичній статистиці. М.: Вища школа, (будь-яке видання).
2. Гмурман В.Е. Теорія ймовірностей і математична статистика. М.: Вища школа, 1977.
3. Венецький І.Г., Кильдишев Г.С. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.. Теорія ймовірностей і її інженерні додатки. М.: Наука, 1988р.
5. Коваленко І.Н., Філіппова А.А. Теорія вероятрностей и математическая статистика. М.: Вища школа, 1982.
6. Опря А.Т. Математична статистика. К.: Урожай, 1994. – 208 с.
7. Пугачов В.С. Теорія ймовірностей і математична статистика. М.: Наука, 1979.
8. Кремер Н.Ш. “Теорія вероятрностей и математическая статистика”, Учебник для вузов.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 543 с.

Таблиця 1. Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Додаток 1.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1,00	0,3413
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794	1,10	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,2910	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3749
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,2967	1,16	0,3770
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995	1,17	0,3790
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,3810
0,20	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051	1,19	0,3830
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078	1,20	0,3849
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3133	1,22	0,3883
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,90	0,3159	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212	1,25	0,3944
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,3980
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049

1,32	0,4066	1,64	0,4495	1,96	0,4750	2,56	0,4948
1,33	0,4082	1,65	0,4505	1,97	0,4756	2,58	0,4951
1,34	0,4099	1,66	0,4515	1,98	0,4761	2,60	0,4953
1,35	0,4115	1,67	0,4525	1,99	0,4767	2,62	0,4956
1,36	0,4131	1,68	0,4535	2,00	0,4772	2,64	0,4959
1,37	0,4147	1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,66	0,4961
1,38	0,4162	1,70	0,4554	2,04	0,4793	2,68	0,4963
1,39	0,4177	1,71	0,4564	2,06	0,4803	2,70	0,4965
1,40	0,4192	1,72	0,4573	2,08	0,4812	2,72	0,4967
1,41	0,4207	1,73	0,4582	2,10	0,4821	2,74	0,4969
1,42	0,4222	1,74	0,4591	2,12	0,4830	2,76	0,4971
1,43	0,4236	1,75	0,4599	2,14	0,4838	2,78	0,4973
1,44	0,4251	1,76	0,4608	2,16	0,4846	2,80	0,4974
1,45	0,4265	1,77	0,4616	2,18	0,4854	2,82	0,4976
1,46	0,4279	1,78	0,4625	2,20	0,4861	2,84	0,4977
1,47	0,4292	1,79	0,4633	2,22	0,4868	2,86	0,4979
1,48	0,4306	1,80	0,4641	2,24	0,4875	2,88	0,4980
1,49	0,4319	1,81	0,4649	2,26	0,4881	2,90	0,4981
1,50	0,4332	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,92	0,4982
1,51	0,4345	1,83	0,4664	2,30	0,4893	2,94	0,4984
1,52	0,4357	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,96	0,4985
1,53	0,4370	1,85	0,4678	2,34	0,4904	2,98	0,4986
1,54	0,4382	1,86	0,4686	2,36	0,4909	3,00	0,49865
1,55	0,4394	1,87	0,4693	2,38	0,4913	3,20	0,49931
1,56	0,4406	1,88	0,4699	2,40	0,4918	3,40	0,49966
1,57	0,4418	1,89	0,4706	2,42	0,4922	3,60	0,49984
1,58	0,4429	1,90	0,4713	2,44	0,4927	3,80	0,49993
1,59	0,4441	1,91	0,4719	2,46	0,4931	4,00	0,49997
1,60	0,4452	1,92	0,4726	2,48	0,4934	4,50	0,499998
1,61	0,4463	1,93	0,4732	2,50	0,4938	5,00	0,5
1,62	0,4474	1,94	0,4738	2,52	0,4941		
1,63	0,4484	1,95	0,4744	2,54	0,4945		

Таблиця 2. Критичні точки χ^2 - розподілу.

Число ступенів вільностей k	Рівень значимості		
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,05$
1	3,8	6,6	10,8
2	6,0	9,2	13,8
3	7,8	11,3	16,3
4	9,5	13,3	18,5
5	11,1	15,1	20,5
6	12,6	16,8	22,5
7	14,1	18,5	24,3
8	15,5	20,1	21,6
9	16,9	21,7	27,9
10	18,3	23,2	29,6
11	19,7	24,7	31,3
12	21,0	26,2	32,9
13	22,4	27,7	34,5
14	23,7	29,1	36,1
15	25,0	30,6	37,7
16	26,3	32,0	39,3
17	27,6	33,4	40,8
18	28,9	34,8	42,3
19	30,1	36,2	43,8
20	31,4	37,6	45,3
21	32,7	38,9	46,8

Таблиця 3. Критичні точки t - розподілу Ст'юдента.

Додаток 3.

Число ступенів вільності k	Рівень значимості		
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,001$
1	12,7	63,7	637,0
2	4,30	9,92	31,6
3	3,18	5,84	12,9
4	2,78	4,60	8,61
5	2,57	4,03	6,86
6	2,45	3,71	5,96
7	2,36	3,50	5,40
8	2,31	3,36	5,04
9	2,26	3,25	4,78
10	2,23	3,17	4,59
11	2,20	3,11	4,44
12	2,18	3,05	4,32
13	2,16	3,01	4,22
14	2,14	2,98	4,14
15	2,13	2,95	4,07
16	2,12	2,92	4,01
17	2,11	2,90	3,96
18	2,10	2,88	3,92
19	2,09	2,86	3,88
20	2,09	2,85	3,85
21	2,08	2,83	3,82

Таблиця 4. Критичні точки розподілу F Фишера – Снедекора ($\alpha = 0,05$).

Додаток 4.

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,21
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,91
9	5,12	4,26	3,63	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,79
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,72	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73

