Тема 3
Розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику

План лекції

1. Матриця рішень та оціночні функції.
2. Класичні критерії прийняття рішень.
3. Похідні критерії прийняття рішень.
4. Розширені критерії прийняття рішень.
5. Приклад застосування класичних критеріїв.
6. Приклад прийняття рішень згідно похідним та розширеним критеріям.

Невизначені фактори, закон розподілу яких невідомий, є найбільш характерними при розв'язанні задач прийняття рішень. Саме на цей випадок слід орієнтуватися при виборі гнучких конструкторських рішень. Методичний облік таких факторів базується на формуванні спеціальних критеріїв, на основі яких приймаються рішення. Критерії МініМакса (Вальда), Севіджа, Гурвіца, Лапласа та інших вже давно і міцно увійшли в теорію прийняття рішень. Розглянемо класичні, похідні й розширені критерії прийняття рішень, а також приклади їх застосування.

1. Матриця рішень та оціночні функції

Всяка діяльність завжди є тісно пов'язаною з невизначеністю та ризиком щодо майбутніх результатів прийняття рішень.

Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з m альтернатив у випадку, коли остаточний результат кожної альтернативи E_i ($i = \overline{1,m}$) буде визначатися конкретним станом навколишнього середовища („природи") F_j ($j = \overline{1,n}$).

Під результатом рішення $e_{ij} = e(E_i\ ;\ F_j\ )$ тут можна розуміти оцінку, що відповідає варіанту E_i і умовам F_j та що характеризує прибуток, корисність або надійність. Звичайно ми будемо називати такий результат корисністю рішення. Звичайно ми будемо називати такий результат ***корисністю рішення***.

Дані, необхідні для ухвалення рішення в умові невизначеності, звичайно задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям, а стовпці – можливим станам системи, тобто сімейство (матриця) рішень має вигляд:

	F_1	F_2	. . .	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	. . .	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	. . .	e_{2n}
. . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
E_m	e_{m1}	e_{m2}	. . .	e_{mn}

Щоб прийти до однозначного й по можливості найвигіднішому варіанту рішення необхідно ввести ***оціночну (цільову) функцію***. При цьому матриця рішень зводиться до одного стовпця виду

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
E_3	e_{3r}
$\vdots$	$\vdots$
E_i	e_{ir}
$\vdots$	$\vdots$
E_m	e_{mr}

Кожному варіанту E_i приписується деякий результат e_{ir}, що характеризує, у цілому, всі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати тим же символом e_{ir}.

Виникає, однак, проблема, який вкласти зміст у результат e_{ir}. Якщо, наприклад, наслідки кожного з альтернативних рішень характеризувати комбінацією з його найбільшого й найменшого результатів, то можна прийняти

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}\,. \tag{1.1}$$

Найкращий у цьому змісті результат має вигляд

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} + \max_j e_{ij} \right). \tag{1.2}$$

Формуючи в такий спосіб бажаний результат, особа, що приймає рішення (ЛПР), виходить із ***компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами***.

Розглянемо тепер деякі інші оціночні функції, а також відповідні до них вихідні позиції.

Оптимістична позиція:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\max_j e_{ij} \right). \tag{1.3}$$

З матриці результатів рішень e_{ij} обирається варіант (рядок), що містить в якості можливого наслідку найбільший із всіх можливих результатів. ОПР стає на точку зору азартного гравця й робить ставку на те, що випаде найвигідніший випадок.

Позиція нейтралітету:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right). \tag{1.4}$$

ОПР виходить з того, що всі відхилення результату рішення від «середнього» випадку, що зустрічаються, припустимі, та приймає рішення, оптимальне з цього погляду.

Песимістична позиція:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} \right). \tag{1.5}$$

ОПР виходить з того, що треба орієнтуватися на найменш сприятливий випадок і приписує кожному з альтернативних варіантів найгірший з можливих результатів. Після цього він обирає самий вигідний варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку. Для кожного іншого зовнішнього стану результат може бути тільки рівним цьому або кращим.

Позиція відносного песимізму:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \tag{1.6}$$

Для кожного варіанта рішення ОПР оцінює втрати в результаті в порівнянні з певним по кожному варіанту найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів обирає найкращий відповідно до представленої оціночної функції.

На основі оцінних функцій будуються критерії прийняття рішень.

2. Класичні критерії прийняття рішень

<u>Мінімаксний критерій</u>

При

$$Z_{\text{MM}} = \max_i e_{ir}, \tag{2.1}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} \tag{2.2}$$

справедливо співвідношення

$$\text{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \text{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}, \tag{2.3}$$

де Z_{MM} – оціночна функція ММ-критерія.

Правило вибору рішення відповідно до ММ-критерію:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем з найменших результатів e_{ir} кожного рядку. Обирати належить ті варіанти E_{i0}, у рядках яких стоять найбільші значення e_{ir} цього стовпця.

Критерій Байєса–Лапласа

Нехай q_j – ймовірність появи зовнішнього стану F_j; тоді для BL-критерія

$$Z_{\text{BL}} = \max_i e_{ir}, \tag{2.4}$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}. \tag{2.6}$$

Правило вибору рішення:

> Матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що включає математичне очікування значень кожного з рядків. Обираються ті варіанти E_{i0}, в рядках яких стоїть найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

Критерій Севіджа

За допомогою позначень

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}, \tag{2.7}$$

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \tag{2.8}$$

формується оціночна функція

$$Z_{\text{S}} = \min_i e_{ir} = \min_i \left[\max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right] \tag{2.9}$$

та будується множина оптимальних варіантів рішення

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}. \tag{2.10}$$

Відповідне до S-критерію правило вибору:

> Кожний елемент матриці рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ віднімається з найбільшого результату $\max_i e_{ij}$ відповідного стовпця. Різниці a_{ij} утворюють матрицю залишків $\left\| a_{ij} \right\|$. Ця матриця поповнюється стовпцем найбільших різниць e_{ir}. Обираються ті варіанти E_{i0}, в рядках яких стоїть найменше для цього стовпця значення.

3. Похідні критерії прийняття рішень

Критерій Гурвиця

$$Z_{\mathrm{HW}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.1}$$

$$e_{ir} = c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij}. \tag{3.2}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ Ei_0 \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le c \le 1 \right\}, \tag{3.3}$$

де c – ваговий множник.

Правило вибору згідно HW-критерію:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого й найбільшого результатів для кожного рядка (3.2). Обираються ті варіанты E_{i0}, у рядках яких стоять найбільші елементи e_{ir} цього стовпця.

Для $c = 1$ HW-критерій перетворюється на ММ-критерій.
Для $c = 0$ він перетворюється на критерій азартного гравця.

Критерій Ходжа–Лемана

Оціночна функція визначається рівністю

$$Z_{\mathrm{HL}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.4}$$

$$e_{ir} = \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij}, \quad 0 \le \nu \le 1, \tag{3.5}$$

а множина HL-оптимальних рішень записується у вигляді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}. \tag{3.6}$$

Правило вибору, що відповідає HL-критерію:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, складеним з середніх зважених (з постійними вагами) математичного очікування та найменшого результату кожного рядка (3.5). Обираються ті варіанти рішень E_{i0}, у рядках яких стоїть найбільше значення цього стовпця.

Для $\nu = 1$ HL-критерій перетворюється на BL-критерій.
Для $\nu = 0$ перетворюється на ММ-критерій.

<u>Критерій Гермейєра</u>

Цей критерій є орієнтованим на величини втрат, тобто на від'ємні значення усіх e_{ij}, тобто $e_{ij} < 0$.

В якості оціночної функції виступає

$$Z_{\mathrm{G}} = \max_{i} e_{ir}, \tag{3.7}$$

$$e_{ir} = \min_{j} e_{ij} q_j. \tag{3.8}$$

За Критерієм Гермейєра

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i} \min_{j} e_{ij} q_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}. \tag{3.9}$$

Правило вибору згідно критерію Гермейєра (G):

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у неї результату на ймовірність відповідного стану F_j. Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

У випадку рівномірного розподілу $q_j = 1/n$, $j = 1,...,n$, G-критерій становиться ідентичним до ММ-критерію.

4. Розширені критерії прийняття рішень

<u>BL (MM) – критерій</u>

Вихідним для побудови BL(MM)-критерію є BL-критерій. Внаслідок того, що розподіл ймовірностей $\mathbf{q} = (q_1,...,q_n)$ встановлюється емпірично та тому є відомим не точно, отже, відбувається, з одного боку, ослаблення критерію, а з другого, напроти, за допомогою заданих границь для ризику й за допомогою ММ-критерію забезпечується відповідна свобода дій.

Визначення оптимального варіанту за BL(MM)-критерієм включає наступні етапи:

1 етап. Зафіксуємо опорне значення, що задається ММ-критерієм:

$$Z_{\mathrm{MM}} = \max_{i} \min_{j} e_{ij} = e_{i_0 j_0},$$

де i_0 и j_0 – індекси, які є оптимальними для варіантів рішень та, відповідно, станів, що розглядаються за ММ-критерієм.

2 етап. Визначення першої індексної множини *I₁*.

2.1 Для цього визначається $\varepsilon_i := e_{i_0 j_0} - \min_{j} e_{ij}$ для всіх $i \in \{1,...m\}$.

2.2 За допомогою деякого заданого або обраного рівня допустимого ризику $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ визначимо деяку множину згоди, що є підмножиною множини індексів $\{1,\dots,m\}$:

$$I_1 := \left\{ i \;\middle|\; i \in \{1,\dots,m\} \wedge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\}. \qquad (3.10)$$

Величина $\varepsilon_i := e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$ для всіх $i \in I_1$ характеризує найбільші можливі втрати в порівнянні зі значенням $e_{i_0 j_0}$, що задається ММ-критерієм. З іншого боку, в результаті такого зниження відкриваються й можливості для збільшення виграшу в порівнянні з тим, що забезпечується ММ-критерієм.

3 етап. Визначення другої індексної множини I_2.

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\dots,m\} \wedge \max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \ge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} = \varepsilon_i \right\}. \qquad (3.11)$$

Величина $\max_j e_{i_0 j}$ це максимальне число, яке зафіксоване в тому рядку, де визначено опорне значення за ММ-критерієм.

4 етап. Визначення оптимального варіанту за BL(MM)-критерієм.

Для цього на множині-перетинання $I_1 \cap I_2$ ми обираємо тільки такі варіанти рішень, для яких, з одного боку, у певних станах можуть мати місце втрати в порівнянні зі станом, що задається ММ-критерієм, але в інших станах мається хоча б такий самий приріст виграшу.

Отже, оптимальними в смислі BL(MM)-критерію будуть рішення з множини

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \right\}. \qquad (3.12)$$

Правило вибору для цього критерію формулюється наступним чином:

Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще трьома стовпцями. У першому з них записуються математичні очікування кожного з рядків, у другому – різниці поміж опорним значенням $e_{i_0 j_0} = Z_{\text{ММ}}$ та найменшим значенням $\min_j e_{ij}$ відповідного рядка. В третьому стовпці містяться різниці між найбільшим значенням $\max_j e_{ij}$ кожного рядка й найбільшим значенням $\max_j e_{i0 j}$ того рядка, у якому знаходиться значення $e_{i0 j0}$. Обираються ті варіанти E_{i_0}, рядки яких дають найбільше математичне очікування. А саме, відповідне значення $e_{i0 j0} - \min_j e_{ij}$ з другого стовпця має бути меншим або рівним деякому заздалегідь заданому рівню ризику $\varepsilon_{\text{доп}}$. Значення ж з третього стовпця має бути більшим за значення з другого стовпця.

<u>BL(S)-критерій</u>

Розглянемо комбінацію критерію Байєса-Лапласа з критерієм Севіджа, що називається BL(S)-критерієм; для цього порівняємо співвідношення (2.3), (2.4) и (2.5) с (2.6)-(2.9). За опорну величину приймемо

$$Z_{\mathrm{S}} = \min_{i} \max_{j} a_{ij} = a_{i_0 j_0},$$

де $a_{ij} = \max_{i} e_{ij} - e_{ij}$.

Через $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ знову визначимо припустиму границю ризику.

Тоді

$$I_1 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \max_{j} a_{ij} - a_{i_0 j_0} \le \varepsilon_{\text{äî}} \right\},$$

$$\max_{j} a_{ij} - a_{i_0 j_0} = \varepsilon_{\text{і}},$$

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \min_{j} a_{i_0 j} - \min_{j} a_{ij} \ge \varepsilon_i \right\},$$

де $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ – припустима границя ризику. Для E_0 маємо:

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j} a_{ij} q_j \right\}.$$

<u>Критерій добутків</u>

Цей критерій орієнтований на величини виграшів, тобто на позитивні значення e_{ij}.

Визначимо оціночну функцію:

$$Z_{\mathrm{P}} = \max_{i} e_{ir}, \tag{3.13}$$

$$e_{ir} = \prod_{j} e_{ij}. \tag{3.14}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i} \prod_{j} e_{ij} \wedge e_{ij} > 0 \right\}. \tag{3.15}$$

Правило вибору:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється новим стовпцем, що містить добуток всіх результатів кожного рядку. Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходяться найбільші значення цього стовпця.

5. Приклад застосування класичних критеріїв

При роботі ЕОМ необхідно періодично припиняти обробку інформації й перевіряти ЕОМ на наявність у ній вірусів. Припинення в обробці інформації приводять до певних економічних витрат. У випадку ж якщо вірус є вчасно виявленим не буде, можливою є втрата деякої частини інформації, що приведе до ще більших збитків.

Варіанти рішення є наступними:
E_1 – повна перевірка;
E_2 – мінімальна перевірка;
E_3 – відмова від перевірки.

ЕОМ може перебувати в наступних станах:
F_1 – вірус є відсутнім;
F_2 – вірус є, але він не встиг ушкодити інформацію;
F_3 – є файли, які потребують відновлення.

Результати, що включають витрати на пошук вірусу та його ліквідацію, а також витрати, пов’язані з відновленням інформації, мають вигляд, наведений у табл. 1.

Таблиця 1

	F_1	F_2	F_3	*MM*-критерій		Критерій *BL*	
				$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum\limits_j e_{ij} q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
E_1	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	-25.0	-22.33	
E_2	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
E_3	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	-21.33

Згідно ***ММ-критерію*** (див. табл. 1) слід проводити повну перевірку.

За ***критерієм Байєса-Лапласа***, у припущенні, що всі стани машини є рівновірогідними, тобто

$$P(F_j) = q_j = 0{,}33,$$

рекомендується відмовитися від перевірки (див. табл. 1).

Матриця залишків $A = (a_{ij})$, де $a_{ij} = \max\limits_i e_{ij} - e_{ij}$, для цього прикладу та їх оцінка (у тисячах) згідно ***критерію Севіджа*** має вигляд:

	F_1	F_2	F_3	Критерій Севіджа	
				$e_{ir} = \max\limits_j a_{ij}$	$\min\limits_j e_{ir}$
E_1	+20.0	0	0	+20.0	
E_2	+14.0	+1.0	+6.0	+14.0	+14.0
E_3	0	+2.0	+15.0	+15.0	

Даний приклад спеціально є підібраним таким чином, щоб кожний з критеріїв пропонував нове рішення. Невизначеність стану, у якому перевірка застає ЕОМ, перетворюється в неясність, якому критерію віддавати перевагу.

Оскільки різні критерії є пов'язаними з різними умовами, у яких приймається рішення, краще за все для порівняльної оцінки рекомендацій тих або інших критеріїв, отримати додаткову інформацію про саму ситуацію. Зокрема, якщо прийняте рішення відноситься до сотень машин з однаковими параметрами, то рекомендується застосовувати критерій Байєса-Лапласа. Якщо ж число машин є не великим, то краще користуватися критеріями мінімакса або Севіджа.

6. Приклад прийняття рішень згідно похідним та розширеним критеріям

Розглянемо той самий приклад (див. табл. 1).

Побудова оптимального рішення для матриці рішень про перевірки за ***критерієм Гурвиця*** має вигляд (при $C = 0{,}5$, в 10^3):

$\| e_{ij} \|$			$C \min_j e_{ij}$	$(1-C)\max_j e_{ij}$	$e_{ir} = C \min_j e_{ij} + (1-C)\max_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-12.5	-10.0	-22.5	
-14.0	-23.0	-31.0	-15.5	-7.0	-22.5	
0	-24.0	-40.0	-20.0	0	-20.0	-20.0

У даному прикладі у рішення є поворотна точка щодо вагового множника C: до $C = 0{,}57$ у якості оптимального обирається E_3, а при великих значеннях – E_1.

Застосування ***критерію Ходжа-Лемана*** ($q = 0{,}33$, $\nu = 0{,}5$, в 10^3) :

$\sum_j e_{ij} q_j$	$\min_j e_{ij}$	$\nu \sum_j e_{ij} q_j$	$(1-\nu)\min_j e_{ij}$	$e_{ir} = \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu)\min_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
-22.33	-25.0	-11.17	-12.5	-23.67	-23.67
-22.67	-31.0	-11.34	-15.5	-26.84	
-21.33	-40.0	-10.67	-20.0	-30.76	

Критерій Ходжа-Лемана рекомендує варіант E_1 (повна перевірка) – так само як і *ММ*-Критерій. Зміна рекомендованого варіанта відбувається тільки при $\nu = 0{,}94$. Тому рівномірний розподіл станів розглянутої машини має розпізнаватися з дуже високою ймовірністю, щоб його можна було обрати за більшим математичним очікуванням. При цьому число реалізацій рішення завжди залишається довільним.

Критерій Гермейєра при $q_j = 0{,}33$, $j = \overline{1{,}3}$, дає наступний результат (в 10^3):

$\| e_{ij} \|$			$\| e_{ij} q_j \|$			$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j$	$\max_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-6.67	-7.33	-8.33	-8.33	-8.33
-14.0	-23.0	-31.0	-4.67	-7.67	-10.33	-10.33	
0	-24.0	-40.0	0	-8.0	-13.33	-13.33	

У якості оптимального обирається варіант E_1. Порівняння варіантів за допомогою величин e_{ir} показує, що спосіб дії критерію Гермейєра є навіть більш гнучким, ніж у *ММ*-критерії.

У таблиці, наведеній нижче, рішення вибирається відповідно до ***BL(MM)-критерію*** при $q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{3}$ (дані в 10^3).

$\lVert e_{ij} \rVert$			$\min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i(\min\limits_j e_{ij})$	$\varepsilon_i = e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_j e_{ij} - \max\limits_j e_{i_0 j}$	$\sum\limits_j e_{ij} q_j$
-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	-25.0 $= e_{i_0 j_0}$	0	-20.0-(-20.0)=0	-23.33
-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		+6.0	-14.0-(-20.0)=+6.0	-22.67
0	-24.0	-40.0	-40.0		+15.0	0-(-20.0)=+20.0	-21.33

В якості $\varepsilon_{доп} > 0$ можна обрати довільне додатнє число.

Якщо обрати $\varepsilon_{доп} = 6 \times 10^3$, то індексна множина $I_1 := \left\{ i \mid i \in \{1,\ldots,m\} \wedge e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\}$ буде включати два перших варіанти рішень за умови виконання нерівності $e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}}$, тобто $I_1 = \{1, 2\}$ при $\varepsilon_{доп} = 6 \times 10^3$. Щоб побудувати індексну множину $I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \max\limits_j e_{ij} - \max\limits_j e_{i_0 j} \ge e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij} = \varepsilon_i \right\}$, за елементами передостаннього стовпця таблиці, обираємо ті варіанти, які є більшими або дорівнюють знайденим ε_i. В даному впадку $I_2 = \{1, 2, 3\}$. Оптимальний варіант за BL(MM)-критерієм знаходиться при використанні BL-критерію на перетині першого та другого індексних множин, тобто на $I_1 \cap I_2$, яким в даному випадку буде множина $I_1 \cap I_2 = \{1, 2\}$. З урахуванням цього BL-критерій обирає оптимальний варіант тільки з двох перших варіантів: $\max\limits_{i \in I_1 \cap I_2} \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} q_j = \max\limits_{i \in I_1 \cap I_2} (-23.33; -22.67) = -22.67$. Отже, оптимальний варіант рішення за BL(MM)-критерієм буде: $E_0 = E_2$ (мінімальна перевірка).

Якщо ж обрати $\varepsilon_{доп} = 15 \times 10^3$, то індексна множина I_1 буде включати всі варіанти рішень, тобто $I_1 = \{1, 2, 3\}$. В такому впадку $I_2 = \{1, 2, 3\}$. Перетин $I_1 \cap I_2 = \{1, 2, 3\}$, а, отже оптимальним варіантом рішення за BL(MM)-критерієм буде: $E_0 = E_3$ (відмова від перевірки).

Зауважимо, що варіант E_3 (відмова від перевірки) приймається цим критерієм тільки тоді, коли ризик наближається до $\varepsilon_{доп} = 15 \times 10^3$. У противному випадку оптимальним виявляється варіант E_2.

У багатьох технічних і господарських задачах припустимий ризик буває набагато нижчим, становлячи звичайно тільки незначний відсоток від загальних витрат. У подібних випадках буває особливо корисним, якщо неточне значення розподілу ймовірностей оказує не дуже сильний вплив.

Якщо при цьому виявляється неможливим установити припустимий ризик $\varepsilon_{доп}$ заздалегідь, не залежно від прийнятого рішення, то допомогти може обчислення очікуваного ризику $\varepsilon_{доп}$.

Тоді стає можливим подумати, чи є виправданим подібний ризик. Таке дослідження звичайно дається легше.

Результати ***застосування критерію добутку*** при $a = 41 \cdot 10^3$ та $a = 200 \cdot 10^3$ мають вигляд:

	$\left\| e_{ij} + a \right\|$			$e_{ir} = \prod_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
a=41	+21	+19	+16	6384	6384
	+27	+18	+10	4860	
	+41	+17	+1	697	
a=200	+180	+178	+175	5607	
	+186	+177	+169	5563	
	+200	+176	+160	5632	5632

Умова $e_{ij} > 0$ для даної матриці є не виконуваною. Тому до елементів матриці додається (за зовнішнім бажанням) спочатку $a = 41 \cdot 10^3$, а потім $a = 200 \cdot 10^3$. Для $a = 41 \cdot 10^3$ оптимальним виявляється варіант E_1, а для $a = 200 \cdot 10^3$ – варіант E_3. Отже, залежність оптимального варіанта від a є очевидною.

7. Питання для самоконтролю

1. Що таке величина ризику в грі з природою?
2. Опишіть критерій мінімакса (Вальда).
3. Опишіть критерій Севіджа.
4. Опишіть критерій Байєса–Лапласа.
5. Що таке коефіцієнт песимізму в критерії Гурвіца?
6. Опишіть критерій Ходжа–Лемана.
7. Опишіть критерій Гермейєра.
8. З яким критерієм становиться ідентичним критерій Гермейєра у випадку рівномірного розподілу ймовірностей станів середи?
9. Що визначає ваговий множник критерію Ходжа–Лемана (HL)?
10. Що таке опорне значення в критерії BL (MM)?