

Тема 6
Метод парних порівнянь
та його застосування для розв'язання задач прийняття рішень

План лекції

- 6.1. Методологія експертного оцінювання за методом парних порівнянь.
- 6.2. Визначення узгодженості суджень експертів.
- 6.3. Особливості та умови використання методу парних порівнянь.
- 6.4. Питання для самоконтролю.
- 6.5. Рекомендована література.

6.1. Методологія експертного оцінювання за методом парних порівнянь

Серед методів експертної оцінки, застосовуваних для одержання коефіцієнтів відносної важливості факторів (параметрів, ознак, напряму розвитку і т. ін.), метод парних порівнянь вважається дуже ефективним, оскільки дозволяє визначити відносну важливість факторів, коли безпосереднє ранжування стає важким.

Згідно з цим методом усі фактори порівнюються між собою послідовно, причому кожна наступна оцінка не зв'язана з попередньою.

Нехай N експертів ранжирують n факторів x_1, \dots, x_n та отримують ранжирувані ряди.

Наприклад, якщо є 3 експерти E_j ($j=1,2,3$), яким необхідно проранжувати 3 фактори x_i ($i=1,2,3$), то отримані ранжирувані ряди можуть мати наступний вигляд:

– ряд 1-го експерту E_1 : $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;

– ряд 2-го експерту E_2 : $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;

– ряд 3-го експерту E_3 : $x_2 \succ x_3 \succ x_1$.

Необхідно визначити ітогове ранжування, яке буде узагальнювати судження всіх експертів.

Для цього здійснюються наступні **основні етапи реалізації методу парних порівнянь**:

- 1) складаються матриці парних порівнянь для кожного експерта;
- 2) визначається матриця середніх парних порівнянь;
- 3) визначається середнє значення середнього парного порівняння i -го фактора з l -м для кожного фактору;
- 4) визначається ітогове ранжування факторів.

Розглянемо кожний з наведених етапів реалізації методу докладно.

1 етап: Складання матриці парних порівнянь для кожного експерта.

На цьому етапі здійснюється полегшення процедури порівняння наявних факторів, для чого звичайно використовується спеціальна матриця (таблиця) парних порівнянь (табл. 6.1), в якій фактори (параметри, ознаки, напрями розвитку) розміщуються за горизонталями та за вертикалями (у верхньому рядку та в лівому крайньому стовпці).

Таблиця 6.1

Фактори	x_1	x_2	...	x_l	...	x_n
x_1	$x_1 : x_1$	$x_1 : x_2$...	$x_1 : x_l$...	$x_1 : x_n$
x_2	$x_2 : x_1$	$x_2 : x_2$...	$x_2 : x_l$...	$x_2 : x_n$
...
x_i	$x_i : x_1$	$x_i : x_2$...	$x_i : x_l$...	$x_i : x_n$
...
x_n	$x_n : x_1$	$x_n : x_2$...	$x_n : x_l$...	$x_n : x_n$

За даною таблицею при використанні методу парних порівнянь попарно порівнюються фактори x_i з x_l з метою визначення у кожній парі найбільш важливого (значущого) фактору. В результаті таких попарних порівнянь факторів x_i з x_l заповнюється наступна таблиця (матриця), у комірці якої вписуються результати (оцінки) q_{il} здійснених порівнянь.

При цьому ранжування в такій постановці відбувається за правилом: якщо фактор i (у рядку) є більш значущим, ніж фактор l (у стовпці), то елементу q_{il} (у комірці il) приписується «+1», в протилежному випадку – ставиться «-1». У комірках головної діагоналі (q_{il} , $i=l$) проставляються «0», оскільки порівнювальні елементи на головній діагоналі є еквівалентними самі до себе.

Отже, досліднику пропонується попарно проранжувати фактори, що формально означає, що кожній парі факторів x_i та x_l поставлено у відповідність число

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l; \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l; \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l. \end{cases}$$

При цьому $q_{il} = -q_{li}$.

Таким чином, судження кожного j -го експерту представляється у вигляді матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \|q_{il}^j\|, \quad i, l = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

де: q_{il}^j визначає оцінки q_{il} , отримані за судженням j -го експерта;
кількість матриць Q^j відповідає кількості експертів, тобто N .

2 етап: *Визначення матриці середніх парних порівнянь.*

На даному етапі отримані на попередньому етапі матриці $Q^j = \|q_{il}^j\|$ для усереднення суджень експертів зводяться до однієї загальної матриці – матриці середніх парних порівнянь розмірності $n \times n$ виду

$$\bar{Q} = \|\bar{q}_{il}\|,$$

де \bar{q}_{il} – середнє парне порівняння i -го фактора з l -м, отримане від усіх N експертів:

$$\bar{q}_{il} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_{il}^j, \quad i, l = 1, 2, \dots, n.$$

3 етап: *Визначення середніх рангів за кожним i -м фактором.*

На даному етапі для остаточного визначення шуканих рангів обчислюються середні ранги за кожним i -м фактором

$$\bar{q}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \bar{q}_{il}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Такі середні ранги \bar{q}_i виступають в якості *показників узагальненого судження щодо важливості факторів*: чим більшою є сума i -го рядка, тим більш важливе значення має i -й фактор.

4 етап: *Визначення ітогового ранжування факторів.*

На даному етапі за обчисленими середніми рангами \bar{q}_i будується ранжируваний ряд, в якому на перше місце ставиться фактор з максимальним середнім рангом

$$\bar{q}_v = \max_{i=1, \dots, n} \{\bar{q}_i\},$$

тобто фактор x_v (цей фактор є найсуттєвішим), на друге місце ставиться фактор, який має максимальний з решти середній ранг, і т.д.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з N експертів. В такому випадку буде отримане *ітогове (результуюче) ранжування*.

6.2. Визначення узгодженості суджень експертів

З метою оцінки ступеня довіри ОПР отримуваному ітоговому ранжуванню визначимо *узгодженість суджень експертів*, яка встановлюється за коефіцієнтом конкордації $0 \leq W \leq 1$, який визначається виразом

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{\max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^n (\bar{q}_{il})^2,$$

де

$$D(\bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^n (\bar{q}_{il})^2; \quad D_{\max} = 1.$$

При $W = 1$ судження експертів є повністю узгодженими, а при $W = 0$ вони суперечать один одному. Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \leq W < 0,75$ – для технічних об’єктів; $0 \leq W < 0,5$ – для економічних об’єктів; $0 \leq W < 0,4$ – для екологічних й соціальних об’єктів), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою.

6.3. Особливості та умови використання методу парних порівнянь

Сформулюємо **основні переваги та недоліки методу парних порівнянь**, які формують особливості та умови використання методу.

До *недоліків методу* слід віднести наступні:

1) має місце невеликий вплив суб’єктивного фактору експерту (оскільки ранжируваний ряд не є результатом кількісних оцінок факторів, а є результатом суб’єктивної думки відповідного експерту);

2) залишається відкритим питання про те, наскільки далеко за значимістю знаходяться досліджувані фактори один від одного.

До *переваг методу* відносяться наступні:

1) немає обмеженості кількості факторів, які підлягають ранжуванню;

2) експерт у процесі експертизи зосереджує свою увагу не на всіх факторах відразу, а тільки на двох, які порівнюються в даний момент (це полегшує роботу і сприяє підвищенню якості експертизи).

3) здійснюється велика кількість порівнянь кожного фактору з іншими, за рахунок чого підвищується точність та відкривається можливість вивчення великої кількості ознак);

4) метод дозволяє одержати не тільки середню оцінку фактора, надану кожним експертом, а й дисперсію цієї оцінки, що дає можливість проведення більш глибокого статистичного аналізу;

5) допускається вимірювання нерівномірно змінюваних важливостей показників.

Розглянемо приклад з використання методу парних порівнянь.

Приклад 1. Нехай маємо судження трьох експертів ($N = 3$), представлених відповідними ранжированими рядами факторів x_i ($i = 1, 2, 3$):

- ряд 1-го експерту E_1 : $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;
- ряд 2-го експерту E_2 : $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
- ряд 3-го експерту E_3 : $x_2 \succ x_3 \succ x_1$.

Необхідно з використанням методу парних порівнянь визначити ітогове ранжування, яке буде узагальнювати судження всіх експертів. Оцінити ступінь узгодженості думок експертів.

Розв'язання:

Побудуємо для кожного експерта матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & \dots & x_l & \dots & x_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1l} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2l} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{i1} & q_{i2} & \dots & q_{il} & \dots & q_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nl} & \dots & q_{nn} \end{matrix} \right\| & , \quad i, l = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, N}. \end{matrix}$$

Використовуючи ранжирований ряд 1-го експерту проводимо попарне порівняння кожного фактору x_i (елементи рядку) з кожним фактором x_l (елементи стовпця). В залежності від того, який фактор x_i переважатиме (не переважатиме, буде еквівалентним) фактор x_l , у матриці порівнянь Q^1 для цього експерту на перетині відповідних рядків з відповідними стовпцями проставимо числове значення q_{il} за наступним правилом:

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l; \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l; \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l. \end{cases}$$

$$q_{il} = -q_{li}.$$

Так, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_1 (з 1 стовпця) маємо, що $x_1 \sim x_1$, а, отже, $q_{11} = 0$. Далі, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_2 (з 2 стовпця) маємо (з ранжированого ряду E_1), що $x_1 \succ x_2$, а, отже, $q_{12} = 1$. Аналогічно, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_3 (з 3 стовпця) маємо (з ранжированого ряду E_1), що $x_1 \succ x_3$, а, отже, $q_{13} = 1$. Отже, таким чином, заповнено 1 рядок матриці Q^1 . Далі, діючи аналогічним чином, заповнюємо 2 й 3 рядки матриці. В результаті, для 1-го експерта отримуємо

$$Q^1 = \| q_{il}^1 \| = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

верхній індекс в q_{il}^1 означає, що елементи q_{il} відносяться саме до матриці Q^1 .

Аналогічно, для 2-го та 3-го експертів маємо:

$$Q^2 = \| q_{il}^2 \| = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad Q^3 = \| q_{il}^3 \| = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Далі будуюмо матрицю $\bar{Q} = \| \bar{q}_{il} \|$ середніх парних порівнянь $\bar{q}_{il} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_{il}^j$, які являють собою середнє арифметичне відповідних (з однаковими індексами) елементів матриць Q^j , $j = \overline{1, N}$.

Для даного прикладу, елементи 1 рядка матриці \bar{Q} визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{11} &= \frac{1}{3}(q_{11}^1 + q_{11}^2 + q_{11}^3) = \frac{1}{3}(0 + 0 + 0) = 0, \\ \bar{q}_{12} &= \frac{1}{3}(q_{12}^1 + q_{12}^2 + q_{12}^3) = \frac{1}{3}(1 + (-1) + 1) = \frac{1}{3}, \\ \bar{q}_{13} &= \frac{1}{3}(q_{13}^1 + q_{13}^2 + q_{13}^3) = \frac{1}{3}(1 + 1 + (-1)) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Діючи аналогічно, отримаємо матрицю середніх парних порівнянь

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі визначимо середні ранги за кожним i -м фактором за співвідношенням

$$\bar{q}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \bar{q}_{il}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= \frac{1}{3}(\bar{q}_{11} + \bar{q}_{12} + \bar{q}_{13}) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}, \\ \bar{q}_2 &= \frac{1}{3}(\bar{q}_{21} + \bar{q}_{22} + \bar{q}_{23}) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}\right) = 0, \\ \bar{q}_3 &= \frac{1}{3}(\bar{q}_{31} + \bar{q}_{32} + \bar{q}_{33}) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0\right) = -\frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Розраховані середні ранги $\bar{q}_1 = \frac{2}{9}$, $\bar{q}_2 = 0$, $\bar{q}_3 = -\frac{2}{9}$ дають можливість побудувати ітоговий ранжируваний ряд. Для цього визначимо з трьох середніх рангів $\bar{q}_1 = \frac{2}{9}$, $\bar{q}_2 = 0$, $\bar{q}_3 = -\frac{2}{9}$ максимальний ранг за співвідношенням $\bar{q}_v = \max_{i=1,\dots,n} \{\bar{q}_i\}$:

$$\bar{q}_1 = \max \left\{ \frac{2}{9}, 0, -\frac{2}{9} \right\} = \frac{2}{9}.$$

Далі, фактор, що відповідає максимальному середньому рангу $\bar{q}_1 = \frac{2}{9}$, поставимо на перше місце в ранжируваному ряді.

На друге місце поставиться фактор, значення середнього рангу якого буде максимальним з решти двох, тобто $\bar{q}_2 = \max \left\{ 0, -\frac{2}{9} \right\} = 0$.

На останнє місце поставимо фактор, значення середнього рангу якого залишилося, тобто $\bar{q}_3 = -\frac{2}{9}$.

Отже, отримуємо ітоговий ранжируваний ряд: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

Визначимо узгодженість суджень експертів:

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{\max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^n (\bar{q}_{il})^2 = \frac{1}{3(3-1)} \sum_{i,l=1}^3 (\bar{q}_{il})^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{9} \approx 0,11.$$

Оскільки $0 \leq W = 0,1 \leq 0,4$, то можна зробити висновок, що судження експертів виявились дуже погано узгодженими. Тим не менш, ітогове ранжування виявилось правильним. Це вийшло за рахунок усереднення суджень експертів, котре виключило їх індивідуальні особливості, а разом з ними і помилки.

6.4 Питання для самоконтролю

1. Розкрийте сутність методу парних порівнянь.
2. Охарактеризуйте основні етапи використання методу парних порівнянь.
3. Яким чином будуються матриці парних порівнянь?
4. Як будується матриця середніх парних порівнянь?
5. Як знайти ітогове ранжування методом парних порівнянь?
6. Яким чином в методі парних порівнянь обчислюється коефіцієнт конкордації, в чому полягає його сутність та якими є його границі змінення?
7. Сформулюйте основні переваги й недоліки методу парних порівнянь.

6.5 Рекомендована література

1. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.
2. Грабовецький Б. Є. Методи експертних оцінок : теорія, методологія, напрямки використання : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2010. 171 с.
3. Гнатієнко Г. М., Снитюк В. Є. Експертні технології прийняття рішень : монографія. Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. 444 с.
4. Ярощук Л. Д. Інтелектуальні системи управління: курс лекцій до теми «Системи експертного оцінювання» розділу «Основи штучного інтелекту» кредитного модуля «Інтелектуальні системи управління». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 40 с.
5. Новосад В. П., Селіверстов Р. Г., Артим І. І. Кількісні методи експертного оцінювання : наук.-метод. розробка. Київ : НАДУ, 2009. 36 с.
6. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с.