Тема 8

Матричні ігри. Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях

План лекції

8.1. Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу.
8.2. Принципи вибору стратегій гравцями в матричній грі з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях.
8.3. Питання для самоконтролю.
8.4. Рекомендована література.

Як відомо з попередньої лекції, будь-яка гра містить у собі **три елементи**: учасників гри – гравців, правила гри, оцінку результатів дій гравців:

$$\Gamma = < I,\ \{x\},\ \{H\} > = < \text{гравці, стратегії, виграші} >.$$

Таким чином, будь-яка гра передбачає наступне:

– *наявність деякого числа n осіб, які беруть у ній участь (гравців)*. За кількістю гравців ігри класифікуються на ігри двох осіб, трьох осіб тощо;

– *наявність правил гри*, які визначають можливі варіанти дій гравців, обсяг інформації кожної сторони про дії іншої, результат гри, до якого приводить відповідна послідовність ходів. У більшості ігор передбачається, що інтереси учасників піддаються кількісному опису, тобто результат гри (виграш) визначається певним числом;

– *наявність кінцевого виграшу (або програшу) кожного гравця*. Коли гра закінчується, кожен гравець отримує дохід p_i (якщо $p_i < 0$, то це означає, що гравець програв), що залежить від його поведінки та поведінки інших гравців.

Найбільш вивченим класом ігор є так звані ігри з нульовою сумою, коли у будь-якій партії має місце умова

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0,$$

виконання якої означає, що, якщо хтось виграє, то хтось обов'язково програє. Особливо це проявляється в іграх двох осіб з нульовою сумою, коли $p_1 + p_2 = 0$, тобто $p_2 = -p_1$ (інтереси гравців є суворо протилежними, оскільки виграш одного гравця є одночасно програшем іншого). Такі ігри називають *антагоністичними*.

Інші ігри – *з ненульовою сумою*, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

Будь-яка гра складається з *партій*, які починаються та закінчуються, після чого гравцям виплачуються їх виграші.

У свою чергу кожна партія складається з *ходів*, які одночасно чи послідовно роблять гравці.

Опис гри як послідовності ходів зветься *позиційної форми гри*. Теорія ігор у позиційній формі розроблена дуже слабо.

Основний зміст сучасної теорії ігор – це так звана *матрична форма гри*. У цьому випадку вважається, що кожен гравець робить лише один хід, причому всі ходи робляться одночасно. Після цього кожному гравцеві виплачується виграш (або береться програш) в залежності від того, які ходи були зроблені ним та іншими гравцями.

Взагалі кажучи, гра в позиційній формі може бути зведена до гри в матричній формі, проте для реальних ігор це зведення є настільки складним, що практично є неможливим навіть для сучасних ЕОМ. Однак цілком можливо, що в майбутньому така інформація матиме і практичний зміст.

8.1. Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу

Кінцева парна гра двох осіб з нульовою сумою (**антагоністична гра двох осіб або двох коаліцій**) в матричній формі займає центральне місце у сучасній теорії ігор, оскільки теорія таких ігор розроблена майже остаточно.

Для такої гри характерним є те, що в ній виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю.

Подібна ситуація є типовою у практичній діяльності ОПР, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв’язування задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Розглянемо таку гру.

Нехай у грі беруть участь два гравці A та B з протилежними інтересами (виграш одного гравця дорівнює програшу іншого).

У розпорядженні гравця A є лише m можливих ходів $i = 1,2,...,m$ (m можливих стратегій $A_1, A_2,...,A_m$); у розпорядженні гравця B (супротивника) є n можливих ходів $j = 1,2,...,n$ (n можливих стратегій $B_1, B_2,...,B_n$). Натуральні числа m та n ніяким чином не пов’язані.

Можливі такі ходи (стратегії) гравців A та B називаються **чистими стратегіями**.

Обидва гравці роблять одночасно по одному ходу, після чого партія вважається закінченою.

Отже, парна гра складається із **<u>двох ходів</u>**:

1. гравець *A* робить хід *i* та обирає одну зі своїх можливих чистих стратегій A_i $(i=\overline{1,m})$;
2. гравець *B* робить хід *j* та обирає свою чисту стратегію із B_j $(j=\overline{1,n})$ при повному незнанні обраної стратегії гравцем *A*.

Введемо наступні позначення: $\varphi_1(A_i, B_j)$ – виграш гравця *A*;
$\varphi_2(A_i, B_j)$– виграш гравця *B*.

Виграші повинні задовольняти умові:

$$\varphi_1(A_i, B_j) + \varphi_2(A_i, B_j) = 0. \tag{1}$$

Якщо позначимо, що

$$\varphi_1(A_i, B_j) = \varphi(A_i, B_j),$$

то, отже,

$$\varphi_2(A_i, B_j) = -\varphi(A_i, B_j).$$

Оскільки виграш гравця *A* дорівнює виграшу гравця *B* зі зворотним знаком, ми можемо цікавитися тільки виграшем $\varphi(A_i, B_j)$ гравця *A*. Природно, *A* прагне максимізувати, а *B* – мінімізувати $\varphi(A_i, B_j)$.

Якщо гравець *A* обирає деяку стратегію A_i, то це само по собі не може впливати на значення функції $\varphi(A_i, B_j)$, тобто вплив A_i на величину значення $\varphi(A_i, B_j)$ є невизначеним. Визначити j можна тільки після вибору своєї стратегії B_j гравцем *B*.

Наслідки ігри $m \times n$ повністю визначаються матрицею (**платіжною матрицею** або **матрицею гри**)

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

де $a_{ij} = \varphi(A_i, B_j)$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 4}$.

Матриця гри – це таблиця, у яку зведені правила гри в такий спосіб:

а) кількість рядків у матриці *A* відповідає кількості стратегій гравця *A*, а кількість стовпців – кількості стратегій гравця *B*;

б) номер рядка матриці *A* відповідає номеру стратегії A_i гравця *A*, а номер стовпця – номеру застосовуваної стратегії B_j гравця *B*;

в) на перетині рядка A_i й стовпця B_j перебуває елемент a_{ij}, тобто виграш гравця *A* (відповідний до застосовуваних стратегій) або програш гравця *B*. Таким чином, елементи a_{ij} матриці *A* є платою гравця *B* гравцю *A* у випадку вибору гравцем *A* стратегії A_i (*i*-го рядка), а гравцем *B* – стратегії B_j (*j*-го стовпця). Кількість таких ситуацій дорівнюватиме $(m \times n)$.

Елементи a_{ij} матриці A можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю:

- якщо елемент a_{ij} матриці є додатним ($a_{ij} > 0$), то це означає, що гравець B в певній ситуації повинен сплатити гравцю A суму, яка дорівнює значенню цього елемента a_{ij};
- якщо елемент a_{ij} – від'ємний ($a_{ij} < 0$), то це означає, що гравець A сплачує гравцю B суму, яка дорівнює абсолютному значенню цього елемента a_{ij};
- якщо елемент $a_{ij} = 0$, то це означає, що ніякої виплати не проводиться.

Отже, в грі двох осіб з нульовою сумою один гравець виграє стільки ж, скільки програє інший (всі виплати проводяться з «кишень» супротивників). Це і пояснює назву – гра з нульовою сумою.

При складанні моделі гри платіжну матрицю зручно попередньо подати у табличній формі виду:

	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Зведення гри до матричної форми є досить складним, а іноді і нездійсненним завданням через незнання стратегій, їх значну кількість та складність оцінки виграшу, що свідчить про обмеженість можливостей теорії ігор при розв'язанні задач.

Оскільки скінченну парну гру з нульовою сумою можна представити у вигляді матриці, таку гру називають *матричною*.

За загальним виглядом платіжні матриці (в умовах конфлікту) та матриці рішень (в умовах невизначеності й ризику) є подібними. Відмінність між ними полягає в тому, що:

- <u>в умовах конфлікту</u> в якості розумних суперників (гравців) виступають свідомі суб'єкти керування, які будують свою стратегію відповідно до дій один одного;
- <u>в умовах невизначеності та ризику</u> «супротивником» суб'єкта керування є середовище (природа), протидія якого не є свідомою та яке не може реагувати на дії суб'єкта керування.

Тому ігри, які відповідають конфліктним ситуаціям, називаються *стратегічними*, а ігри, що відповідають умовам невизначеності та ризику – *статистичними*.

Аналіз платіжної матриці дозволяє розробити рекомендації щодо вибору оптимальних рішень гравців.

Отже, після побудови матриці гри необхідно обрати оптимальну (ефективну) стратегію, тобто вирішити гру, для чого, в першу чергу, потрібно ознайомитися з принципами, на які спираються гравці *A* та *B* при виборі своїх стратегій A_i $(i=\overline{1,m})$ та B_j $(j=\overline{1,n})$.

8.2. Принципи вибору стратегій гравцями *A* и *B*. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях

Нехай гравець *A* обирає деяку стратегію A_i.

Тоді <u>в найгіршому випадку</u> (коли його вибір стане відомий супротивникові) він одержить виграш, що дорівнює

$$\alpha_i=\min_j a_{ij}.$$

Передбачаючи таку можливість, гравець *A* повинен обрати таку стратегію A_{i0}, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$\alpha=\alpha_{i0}=\max_i \alpha_i=\max_i \min_j a_{ij}. \tag{2}$$

Величина α гарантує виграш гравця *A* та називається **нижньою ціною гри**, яка показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець *A*, застосовуючи свої стратегії при будь-яких діях гравця *B*.

Стратегія A_{i0}, що забезпечує одержання α називається **максимінною стратегією**, ідея якої полягає в тому, що гравець *A* не розраховує на можливі помилки гравця *B* та одержує **гарантований виграш** α.

Гравець *B*, обираючи стратегію виходить із наступного принципу: при виборі деякої стратегії B_j його програш не перевищить максимального зі значень елементів *j*-го стовпця матриці, тобто

$$\beta_j=\max_i a_{ij}.$$

Розглядаючи всі значення β_j, гравець *B* обирає таке значення β_{j0}, при якому його максимальний програш буде мінімальним, тобто

$$\beta=\beta_{j0}=\min_j \beta_j=\min_j \max_i a_{ij}. \tag{3}$$

Величина β називається **верхньою ціною гри**, яка показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може гарантувати собі гравець *A*.

Відповідна до виграшу β стратегія B_{j0} називається **мінімаксною стратегією.**

Ситуація (i, j), яка відповідає парі стратегій (A_i, B_j) та якій поставлено у відповідність число a_{ij}, визначає результат вибору кожним гравцем своєї стратегії.

Якщо гравці A та B прийняли відповідно стратегії A_{i0} й B_{j0}, то говорять, що вони використовують **принцип міні-максу (принцип гарантованого результату)**:

> *поступай таким чином, щоб при найгіршій для тебе поведінці супротивника одержати максимальний виграш.*

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1: Визначити нижню й верхню ціну гри із платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$\begin{array}{r|l} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2 \\ 3 = \alpha = \max\limits_i \alpha_i \\ 1 \end{array} \\ \hline \beta_j = \max\limits_i a_{ij} \quad \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 5 \end{matrix} & \end{array}$$

Тоді нижня ціна гри визначається у вигляді

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{ 2 \quad 3 \quad 1 \} = 3,$$

верхня ціна гри визначається у вигляді

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{ 4 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \} = 4.$$

Отже, $\alpha = 3 < \beta = 4$.

Щоб визначити $(i, j)-$ситуацію, потрібно визначити номер рядка та номер стовпця, які відповідають нижній та верхній цінам гри $(i = 2,\ j = 1)$.

Тоді $(2,1)-$ ситуація.

Приклад 2: Визначити нижню й верхню ціну гри із платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$A = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\right| \quad \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\beta_i = \max_i a_{ij} = 3 \quad 2 \quad 4 \quad 5$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{3 \quad 2 \quad 4 \quad 5\} = 2.$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{0 \quad 2 \quad -1\} = 2.$$

$$\alpha = \beta = 2.$$

Отже, $\alpha = \beta = 2$. $\quad (i = 2, j = 2) \Rightarrow (2{,}2) -$ ситуація.

У випадку, коли $\alpha = \beta$, ми маємо справу із **сідловою точкою** або **точкою рівноваги**.

Сідлова точка – це такий елемент $a_{i_0 j_0}$ матриці A, який одночасно є мінімальним у рядку й максимальним у стовпці.

Стратегії (i_0, j_0), які є відповідними до сідлової точки $a_{i_0 j_0}$, називаються **оптимальними чистими стратегіями**.

Ознака наявності сідлової точки й урівноваженої пари стратегій (пари стратегій A_{i_0}, B_{j_0}, які володіють властивістю рівноваги) – це рівність нижньої й верхньої цін гри

$$V = \alpha = \beta.$$

Значення $V = \alpha = \beta$ називається **чистою ціною гри**.

Ціна гри V й набір стратегій (i_0, j_0) утворюють **розв'язок гри в чистих стратегіях**, тобто набір

$$\{(i_0, j_0), V\}.$$

<u>*Твердження 1*</u>*:* Ситуація (i_0, j_0) в матричній $m \times n$ - грі є **рівноважною (сідловою точкою)**, якщо для будь-якого $i = 1,\ldots,m$ й кожного $j = 1,\ldots,n$ виконується нерівність

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}.$$

У грі може існувати не одна сідлова точка, наприклад

$$(i_0, j_0),\ (i_{10}, j_{10}),\ (i_{20}, j_{20}).$$

Зокрема, наприклад, матриця $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ має 4 сідлові точки, що дорівнюють 2, які розташовані в першому рядку й першому стовпці, у першому рядку й четвертому стовпці, у другому рядку й першому стовпці, у другому рядку й четвертому стовпці матриці, відповідно.

Дійсно, визначаючи нижню та верхню ціни гри, маємо:

$$\begin{array}{rcc} & & \min\limits_j a_{ij} \\ & & \| \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}\right\} \alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & 7 & 6 & 2 \end{matrix}} & \\ & \beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2 & \end{array}$$

Даний приклад показує, що матриця може мати кілька (більше однієї) сідлових точок.

Проте, якщо матриця має кілька сідлових точок, всі їх значення є рівними.

Так, у матриці, всі елементи якої дорівнюють один одному, всі елементи є сідловими точками. Максимальна кількість сідлових точок у такій грі дорівнює $(m \times n)$, $m-$ кількість рядків, $n-$кількість стовпців матриці.

<u>Твердження 2</u>: У випадку існування сідлової точки платіжної матриці говорять, що гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Вірним є й *<u>зворотне твердження</u>*: гра має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця гри має сідлову точку.

<u>Теорема 1:</u> У матричній грі нижня ціна гри α не перевершує верхньої ціни гри β, тобто $\alpha \le \beta$.

Доведення

За визначенням маємо:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \quad \left(\forall i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right);$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij} \quad \left(\forall i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right).$$

Тоді:

$$\alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j \ \left(\forall i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}\right),$$

звідки $\alpha_i \le \beta_j$.

Оскільки отримана нерівність виконується для довільних α_i та β_j, то вона виконується й для α та β, тобто:

$$\max_i \alpha_i = \alpha \le \beta = \min_j \beta_j$$

Отже, доведено, що $\alpha \le \beta$.

Теорема доведена.

<u>Приклад 3:</u> Знайти розв'язок гри в чистих стратегіях для гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{array}{rcc} & & \min\limits_j a_{ij} \\ & & \| \\ \mathrm{A} = & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & 5 & 4 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2} & \end{array}$$

Сідловою точкою є пара $(i_0 = 3; j_0 = 1)$, при якій $V = \alpha = \beta = 2$.

Помітимо, що хоча виграш у ситуації (3,3) також дорівнює 2, вона не є сідловою точкою, оскільки цей виграш не є максимальним серед виграшів третього стовпця.

<u>Відповідь</u>: $\{(i_0, j_0), V\} = \{(3,1), 2\}$ – розв'язок гри в чистих стратегіях.

<u>Приклад 4:</u> Знайти розв'язок гри в чистих стратегіях (якщо існує) для гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$
\begin{array}{lcc}
 & & \min\limits_{j} a_{ij} \\
A=\begin{pmatrix}10 & 30\\ 40 & 20\end{pmatrix} & \begin{matrix}\to\\ \to\end{matrix} & \left.\begin{matrix}10\\ 20\end{matrix}\right\}\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}=20 \\
\max\limits_{i} a_{ij}\downarrow \quad \downarrow & & \\
\quad \underbrace{40 \quad 30} & & \\
\min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}=30 & &
\end{array}
$$

З аналізу матриці виграшів видно, що $\alpha < \beta$, тобто дана матриця не має сідлової точки.

<u>Відповідь</u>: оскільки $\alpha < \beta$, то розв'язку гри в чистих стратегіях не існує.

8.3 Питання для самоконтролю

1. Надайте визначення гри двох осіб з нульовою сумою виграшу?
2. Якій умові повинні задовольняти виграші у гри двох осіб з нульовою сумою виграшу?
3. Що таке матриця гри?
4. Яка величина називається верхньою ціною гри?
5. Що називають нижньою ціною гри?
6. У чому полягає принцип міні-макса (принцип гарантованого результату?
7. Що означає поняття гарантований виграш?
8. Чому гра називається парною грою?
9. Яку стратегію називається максимінною стратегією?
10. Що означає поняття сідлова точка, що це за такий елемент?
11. Які стратегії називаються чистими стратегіями.?
12. Що означає знайти розв'язок гри в чистих стратегіях?
13. Яке значення називається чистою ціною гри?

8.4 Рекомендована література

1. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.

2. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с.