**Тема 9**

# Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях. Властивості розв'язків матричних ігор.

## План лекції

- 9.1. Розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях. Основні поняття та визначення. Теорема фон Неймана. Теорема-критерій оптимальності змішаних стратегій. Теорема про активні стратегії. Теорема про афінні перетворення.
- 9.2. Властивості розв'язків матричних ігор.
  - 9.2.1. Домінування чистих стратегій.
  - 9.2.2. Строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею (2×2). Принципи розв'язання.
- 9.3. Питання для самоконтролю.
- 9.4. Рекомендована література.

## 9.1. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях

Дослідження в матричних іграх починається зі знаходження її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha = \beta,$$

то знаходженням цієї сідлової точки закінчується дослідження гри, оскільки, як відомо, у випадку існування сідлової точки платіжної матриці, *гра має розв'язок у чистих стратегіях*.

Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha < \beta,$$

то *гра має розв'язок у змішаних стратегіях*.

> При цьому умова $\alpha < \beta$ означає, що гравець $A$ не має сподіватися на виграш більший, ніж верхня ціна гри $\beta$, та може бути впевнений в отриманні виграшу, не меншого, ніж нижня ціна гри $\alpha$.

Визначимо, що називається змішаною стратегією для кожного з гравців та яким чином вони обираються.

**Змішаною стратегією першого гравця** називається вектор

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

де:

$$p_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

**Змішаною стратегією другого гравця** називається вектор

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

де:

$$q_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} q_i = 1.$$

**Вектор** $p$ є вектором ймовірності застосування $i-$ї стратегії першим гравцем. Аналогічно, **вектор** $q$ є вектором ймовірності застосування $j-$ї стратегії другим гравцем.

Частинним випадком змішаної стратегії виступає ***чиста стратегія***.

> *<u>Наприклад</u>, застосування чистої стратегії $A_3$ буде відповідати вектору $p^{(3)} = (0,0,1,0,\ldots,0)$, а застосування чистої стратегії $B_2$ буде відповідати вектору $q^{(2)} = (0,1,0,0,\ldots,0)$.*
>
> *Тобто, якщо в змішаній стратегії яка-небудь і-а чиста стратегія застосовується з ймовірністю, що дорівнює 1, то всі інші чисті стратегії не застосовуються. Ця і-а чиста стратегія є частинним випадком змішаної стратегії.*

Оскільки гравці обирають свої чисті стратегії випадково й незалежно один від одного, то *<u>гра має випадковий характер</u>*. Тому випадковою стає й величина виграшу (програшу).

У цьому випадку **середня величина виграшу гравця *A*** виражається у вигляді математичного очікування його виграшів та є функцією від двох змішаних стратегій, яку ми будемо визначати в такий спосіб:

$$f(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j, \tag{9.1}$$

де $f(p,q)-$ це **платіжна функція гри** з матрицею $(a_{ij})_{m \times n}$.

Стратегії $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$, $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ називаються **оптимальними**, якщо для довільних стратегій $p$ $(\forall p = (p_1, p_2, \ldots, p_m))$ та $q$ $(\forall q = (q_1, q_2, \ldots, q_n))$ виконується умова:

$$f(p, q^*) \leq f(p^*, q^*) \leq f(p^*, q). \tag{9.2}$$

Це означає, що використання у грі оптимальних змішаних стратегій забезпечує:

- гравцю *A* виграш, не менший, ніж той, що він отримає при використанні ним будь-якої іншої стратегії $p$;
- гравцю *B* програш, не більший, ніж той, що він отримає при використанні ним будь-якої іншої стратегії $q$.

Сукупність оптимальних стратегій та ціни гри становить **розв'язок гри**.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає ціну гри, яка подається у вигляді

$$V = f\left(p^*, q^*\right).$$

Тоді фактично розв'язком гри в змішаних стратегіях є набір (трійка):

$$\left(p^*, q^*, V\right).$$

Справедливою є наступна ***основна теорема теорії матричних ігор***.

**<u>Теорема 2 (фон Неймана):</u>** У змішаних стратегіях будь-яка кінцева матрична гра має розв'язок.

Нехай маємо матричну гру з матрицею $\left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ й деякі оптимальні змішані стратегії $p^*$ й $q^*$ гравців *A* та *B*, що забезпечують суму виграшу *V*.

<u>Виникає питання:</u> як перевірити, що набір $\left(p^*, q^*, V\right)$ є розв'язком гри?

Для цього необхідно перевірити справедливість нерівності (9.2) для довільних змішаних стратегій, у тому числі й для стратегій $p^*$ та $q^*$.

Однак різних змішаних стратегій, серед яких є і оптимальні стратегії – нескінченна множина. І в цьому випадку неможливо перевірити справедливість нерівності (9.2).

На це питання дозволяє відповісти наступна теорема.

**<u>Теорема 3:</u> (Критерій оптимальності змішаних стратегій):**

Для того, щоб змішані стратегії $p^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\right)$ й $q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ були оптимальними для гравців *A* та *B* у грі з матрицею $\left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ й виграшем $V$, необхідно й достатньо виконання наступних нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq V, \tag{9.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq V. \tag{9.4}$$

<u>*Доведення*</u>:

1. *Необхідність.*

Нехай $p^*, q^*$ – оптимальні змішані стратегії. Доведемо, що для них виконуються співвідношення (9.3) та (9.4).

Оскільки $p^*, q^*$ – це оптимальні стратегії, то вони за визначеннями задовольняють співвідношенню (9.2).

Використовуючи (9.1) та нерівність (9.2) ми можемо записати:

$$f\left(p,q^{*}\right)\le f\left(p^{*},q^{*}\right)\le f\left(p^{*},q\right),$$

звідки маємо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,p_i q_j^{*}\le V\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,p_i^{*}q_j\,, \tag{9.5}$$

де нерівність (9.5) одержуємо з нерівності (9.2) шляхом явного опису функцій $f\left(p,q^{*}\right)$, $f\left(p^{*},q^{*}\right)$ та $f\left(p^{*},q\right)$.

Розглянемо праву частину співвідношення (9.5).

Значення $V\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,p_i^{*}q_j$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій $q$, де $q=\left(q_1,\dots,q_j,\dots,q_n\right)=\left(0,\dots,\overset{(j)}{1},\dots,0\right)$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій, у тому числі й для чистої стратегії.

Тоді $V\le \sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,p_i^{*}$, що свідчить про виконання нерівності (9.3).

Співвідношення (9.4) перевіряється аналогічно: шляхом підстановки до лівої частини нерівності (9.5) вектора стратегії $q^{*}$:

$$V\ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,p_i q_j^{*}=\sum_{i=1}^{m}p_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j^{*}\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j^{*}\,,$$

у тому числі $p=\left(p_1,\dots,p_i,\dots,p_m\right)=\left(0,\dots,\overset{(i)}{1},\dots,0\right)$.

У такий спосіб доведено співвідношення (9.4):

$$V\ge \sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j^{*}\,.$$

2. *Достатність*.

Нехай виконуються умови (9.3) та (9.4). Покажемо, що $p^{*},q^{*}$ – оптимальні змішані стратегії. З урахуванням співвідношення (9.3) перетворимо праву частину співвідношення (9.5), а з урахуванням співвідношення (9.4) – ліву частину співвідношення (9.5).

Нехай $q$ – довільний вектор.

Тоді:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i^*q_j=\sum_{j=1}^{n}q_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i^*\right)\underset{\text{на основі (9.3)}}{\geq}\sum_{j=1}^{n}q_jV=V\sum_{j=1}^{n}q_j=V.$$

Аналогічно, для лівої частини співвідношення (9.5).

Нехай $p$ – довільний вектор.

Тоді:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j^*=\sum_{i=1}^{m}p_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j^*\right)\underset{\text{на основі (9.3)}}{\leq}\sum_{i=1}^{m}p_iV=V\sum_{i=1}^{m}p_i=V$$

Що й було потрібно довести.

**Зауваження до Теореми 3:** На підставі теореми 3 можна зробити висновок: якщо гравець *A* ухвалює оптимальну змішану стратегію $p^*$, а гравець *B* – будь-яку чисту стратегію $B_j$, то виграш гравця *A* буде не меншим ціни гри $V$.

Аналогічне твердження справедливе й для другого гравця: якщо гравець *B* ухвалює оптимальну змішану стратегію $q^*$, а гравець *A* – будь-яку чисту стратегію $A_i$, то виграш гравця *B* буде не більшим ціни гри $V$.

Чисті стратегії, що входять до оптимальної змішаної стратегії будь-якого гравця з ймовірностями, відмінними від нуля, називаються **активними стратегіями**.

Для активних стратегій справедливою є наступна теорема 4.

**Теорема 4 (про активні стратегії):** Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним та рівним ціні гри не залежно від того, яку стратегію приймає інший гравець, якщо тільки той (другий гравець) не виходить за межі своїх активних стратегій.

**Теорема 5 (про афінні перетворення):** Оптимальні змішані стратегії $p^*$ й $q^*$ відповідно гравців *A* та *B* у матричній грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ з ціною гри $V$ будуть оптимальними й у матричній грі з матрицею $(ba_{ij}+c)_{m\times n}$ з ціною гри $V'=bV+c$, де $b>0$.

На підставі теореми 5 платіжну матрицю, що містить від'ємні числа, можна перетворити в матрицю з додатними числами.

Розглянемо це на наступному прикладі.

**Приклад:** Дана матриця гри $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$.

Знайдемо ціну гри для матриці *A*:

$$\begin{array}{c|cc|c} & & & \min \\ \hline A= & -1 & 1 & -1 \\ & -2 & -3 & -3 \\ \hline \max & -1 & 1 & \end{array}$$

Тоді $\left.\begin{aligned}\alpha=\max_i \alpha_i &= -1\\ \beta=\min_j \beta_j &= -1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad V=\alpha=\beta=-1.$

Нехай $c=4, b=1$. Щоб перейти від від'ємних елементів матриці *A* до додатних, додамо до всіх елементів матриці величину *c*

$$A'=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

та знайдемо ціну гри для матриці $A'$:

$$\begin{array}{c|cc|c} & & & \min \\ \hline A'= & 3 & 5 & 3 \\ & 2 & 1 & 1 \\ \hline \max & 3 & 5 & \end{array}$$

Тоді $\left.\begin{aligned}\alpha=\max_i \alpha_i &= 3\\ \beta=\min_j \beta_j &= 3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad V'=\alpha=\beta=3.$

Оскільки $V'=V+c$, то $V=V'-c=3-4=-1$.

Отже, умова теореми 5 є виконаною.

## 9.2. Властивості розв'язків матричних ігор

### 9.2.1. Домінування чистих стратегій

Застосування принципу домінування дозволяє іноді зменшити кількість стратегій гравців, тобто зменшити розмірність матриці *A*. Це випливає з того факту, що доміновані стратегії можуть бути виключені, при цьому ціна гри не змінюється.

**Рядок з номером *i* домінує рядок з номером *k***, якщо виконується умова

$$a_{ij} \ge a_{kj} \quad \text{для} \quad j = \overline{1,n}.$$

Причому існує хоча б один стовпець із номером $m$, для якого виконується умова:

$$a_{im} > a_{km}.$$

Домінований рядок $k$ можна викреслити з матриці, оскільки цією стратегією перший гравець ніколи не скористається, оскільки його виграш при виборі стратегії $i$ завжди буде не меншим, ніж при виборі ним домінованої стратегії $k$.

**Стовпець *j* домінує стовпець із номером *k***, якщо виконується умова:

$$a_{ij} \le a_{ik} \quad \text{для} \quad i = \overline{1,m}.$$

Причому існує хоча б один рядок з номером $p$, для якого виконується умова

$$a_{pj} < a_{pk}.$$

Домінований стовпець $k$ також може бути викресленим з матриці, оскільки другий гравець не буде обирати цю стратегію, оскільки його програш при такому виборі стратегії $j$ буде не меншим, ніж при виборі ним домінованої стратегії $k$.

Стратегії вважаються **еквівалентними (дубльованими)**, якщо всі виграші цих стратегій є однаковими. Еквівалентні стратегії також можуть бути викресленими з матриці. Викреслення проводиться при цьому таким чином, щоб з числа еквівалентних стратегій залишилась лише одна.

<u>**Приклад:**</u> Спростити матрицю гри *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тут рядок $A_1$ домінує рядок $A_2$. Отже, викреслюємо другий домінований рядок $A_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $A$ прийме вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці стовпець $B_2$ домінує стовпці $B_3, B_4, B_5$. Отже, викреслюємо доміновані третій, четвертий та п'ятий стовпці:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ 1 & 2 & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $A$ приймає остаточний вигляд, який більше вже не можна буде спростити:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 6:** Якщо елементи одного рядка (стовпця) не всі є меншими (більшими) або рівними відповідним елементам інших рядків (стовпців), але усі є меншими (більшими) або рівними деяким опуклим лінійним комбінаціям відповідних елементів інших рядків (стовпців), то цю стратегію можна виключити, замінивши її змішаною стратегією з відповідними частотами використання чистих стратегій.

**Приклад:** Спростити матрицю гри $A$:

$$A=\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для перших двох чистих стратегій $A_1$ та $A_2$ гравця $A$ оберемо частоти їх застосування (ймовірності) рівними 0,25 та 0,75. Третя стратегія гравця $A$ домінується лінійною опуклою комбінацією стратегій $A_1$ та $A_2$, узятих з частотами 0,25 та 0,75 відповідно, тобто змішаною стратегією:

$$\begin{aligned} 24\cdot 0{,}25 + 0\cdot 0{,}75 = 6 > 4 \\ 0\cdot 0{,}25 + 8\cdot 0{,}75 = 6 > 5 \end{aligned}.$$

Тому доміновану стратегію $A_3$ можна виключити, використовуючи замість неї зазначену змішану стратегію. Отже, вихідна матриця гри буде еквівалентною матриці наступного вигляду:

$$A=\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, якщо кожний елемент деякого стовпця більше або дорівнює деякій опуклій лінійній комбінації відповідних елементів деяких інших стовпців, то цей стовпець можна виключити з розгляду.

**<u>Приклад:</u>** Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

третя стратегія $B_3$ гравця $B$ домінується змішаною стратегією зі стратегій $B_1$ та $B_2$, узятих із частотами 0,5 та 0,5:

$$10 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 5 < 6$$
$$0 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}5 = 5 < 7.$$

Це означає, що стратегія $B_3$ є домінованою та її можна викреслити з розгляду задачі.

Отже, вихідна матриця гри буде еквівалентною матриці наступного вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Як видно, можливості домінування змішаними стратегіями на відміну від чистих є значно менш прозорими (потрібно належним чином підібрати частоти застосування чистих стратегій), але такі можливості існують, ними корисно вміти користуватися.

### 9.2.2. Строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею $(2\times 2)$. Принципи розв'язання

Розглянемо матричні ігри з $(2\times 2)$-матрицею, які часто зустрічаються в теорії ігор або зводяться до них у результаті застосування властивості домінування.

Будемо говорити, що гра з $(2\times 2)$-матрицею є **строго детермінованою**, якщо ця матриця містить елемент, скажемо $V$, який одночасно є мінімальним елементом в утримуючому його рядку й максимальним елементом в утримуючому його стовпці.

Тоді оптимальні стратегії гравців полягають у наступному:

- для гравця *A*: «обрати рядок, що містить $V$»;
- для гравця *B*: «обрати стовпець, що містить $V$».

Ціною гри й буде число $V$.

Матрична гра називається **необразливою**, якщо її ціна дорівнює нулю ($V = 0$).

**<u>Властивість:</u>** Матрична гра з матрицею $A$, у якій в одному рядку або в одному стовпці стоять однакові елементи, є **строго детермінованою**.

Деякі матричні ігри не є строго детермінованими, тобто відповідна їм матриця не містить елемента, який був би одночасно мінімальним у своєму рядку й максимальним у своєму стовпці.

Не строго детерміновані матричні ігри з $(2\times 2)$ -матрицею можна охарактеризувати в такий спосіб.

**<u>Теорема 7 (*про строгу недетермінованість гри*):</u>** Гра з матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

не є строго детермінованою тоді й тільки тоді, коли виконано одне з наступних двох умов:

а) $a<b, a<c$, $d<b$ та $d<c$;

б) $a>b, a>c$, $d>b$ та $d>c$.

Ці співвідношення означають, що елементи головної діагоналі матриці мають бути меншими (більшими) кожного з двох елементів іншої діагоналі матриці.

*<u>Доведення</u>*:

Якщо виконується будь-яка з умов (а) або (б), то, як неважко перевірити, жоден елемент матриці не може бути одночасно мінімальним у тому рядку, якому він належить, і максимальним у тому стовпці, якому він належить; отже, гра не буде строго детермінованою.

Щоб довести другу частину теореми, згадаємо, що гра є строго детермінованою, якщо у відповідній їй матриці є рівними два елементи якого-небудь рядка або стовпця. Отже, можна припустити, що ніякі два елементи одного й того самого рядка або того самого стовпця не є рівними.

Припустимо тепер, що $a<b$. Тоді $a<c$, інакше елемент $a$ буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Крім того, $c>d$, інакше, елемент $c$ буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Нарешті, $d<b$, інакше елемент $d$ буде мінімальним елементом рядка й максимальним елементом стовпця. Отже, припущення $a<b$ приводить до відзначеного вище випадку (а).

Аналогічне припущення $a>b$ приводить до випадку (б).

Теорема доведена.

**<u>Приклад:</u>** Розглянемо гру з матрицею гри виду

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ця гра не є строго детермінованою (виконується умова (б) теореми про строгу недетермінованість гри).

**Приклад:** Нехай матриця гри має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Ця гра також не є строго детермінованою (виконується умова (а) теореми про строгу недетермінованість гри).

Вирішимо питання про те, <u>яким чином обирати оптимальну змішану стратегію гравців зі всіх доступних для них змішаних стратегій</u>.

Розглянемо не строго детерміновану гру з матрицею

$$G=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Для не строго детермінованої гри з введеною матрицею $G$ число $V$ називається **ціною** цієї **гри**, а вектори $p^*=\left(p_1^*, p_2^*\right)$ й $q^*=\begin{pmatrix}q_1^*\\ q_2^*\end{pmatrix}$ – **оптимальні стратегії** гравців $A$ та $B$, якщо мають місце наступні нерівності:

$$p^*G=\left(p_1^*,\, p_2^*\right)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\geq (V,\, V); \tag{9.6}$$

$$Gq^*=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1^*\\ q_2^*\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}V\\ V\end{pmatrix}. \tag{9.7}$$

Нехай гравець $A$ обирає змішану стратегію $p=\left(p_1, p_2\right)$ й (незалежно) гравець $B$ обирає змішану стратегію $q=\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}$. Тоді гравець $A$ виграє суму $a$ з ймовірністю $p_1q_1$, суму $b$ з ймовірністю $p_1q_2$, суму $c$ з ймовірністю $p_2q_1$ та суму $d$ з ймовірністю $p_2q_2$.

В такому випадку середнє значення виграшу (математичне очікування) гравця $A$ обчислиться у вигляді

$$ap_1q_1+bp_1q_2+cp_2q_1+dp_2q_2=pGq.$$

Аналогічно, знаходиться й середнє значення виграшу гравця $B$. Воно дорівнює цьому ж виразу, але зі зворотним знаком.

Щоб виправдати дане вище визначення, потрібно показати, що, якщо для матриці $G$ існують $V, p^*, q^*$ із зазначеними властивостями, то гравець $A$ може зробити середнє значення свого виграшу рівним або більшим $V$, а гравець $B$ може зробити це середнє значення рівним або меншим $V$.

Нехай $q$ – будь-яка стратегія для гравця *B*. Помноживши (9.6) праворуч на $q$, ми одержимо співвідношення $p^{*}Gq \geq (V,V)q = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця *B* гравець *A* може забезпечити собі виграш, середнє значення якого щонайменше дорівнює $V$.

Аналогічно, нехай $p$ – будь-який вектор стратегії для гравця *A*. Помноживши (9.7) ліворуч на $p$, ми одержимо співвідношення $pGq^{*} \leq p\begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix} = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця *A* гравець В може зробити середнє значення виграшу *A* рівним максимально $V$.

Саме в цьому полягає <u>тлумачення оптимальних стратегій</u> $p^{*}$ та $q^{*}$.

Якщо обидва гравця грають оптимальним чином, то для гравця *A* середнє значення виграшу дорівнює $V$, а для гравця *B* середнє значення виграшу дорівнює ($-V$).

Вирішимо питання про **існування стратегій** $p^{*}$ **та** $q^{*}$ **в не строго детермінованій грі**. Тоді як при більш складних іграх знаходження оптимальних стратегій виявляється важкою задачею, вирішення цього питання у випадку не строго детермінованої гри з $(2 \times 2)$-матрицею може бути отримане за наступними співвідношеннями:

$$p_1^{*} = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{9.8}$$

$$p_2^{*} = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{9.9}$$

$$q_1^{*} = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{9.10}$$

$$q_2^{*} = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{9.11}$$

$$V = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}. \tag{9.12}$$

Легко перевірити, що знайдені по формулах (9.8)-(9.12) вектори $p,q$ й число $V$ задовольняють умовам (9.6), (9.7). У дійсності нерівності (9.6) та (9.7) у цьому простому випадку переходять у рівності. Цей факт не має місця в загальному випадку не строго детермінованих ігор, матриця яких має більше число рядків або стовпців.

Знаменник кожної з формул (9.8)-(9.12) являє собою різницю між сумами елементів по двом діагоналям.

Оскільки для не строго детермінованої гри елементи по одній діагоналі мають перевершувати елементи по іншій діагоналі, то знаменник не може звернутися в нуль.

У чисельнику дробу для $V$ стоїть визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Якщо для не строго детермінованої гри з матрицею $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0,$$

то така не строго детермінована гра буде ***необразливою***.

**<u>Приклад:</u>** Нехай задана гра з $(2 \times 2)$-матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайти розв’язок заданої гри.

*Розв’язання*

1. Перевіримо, чи є ця гра строго детермінованою (В цьому випадку гра буде мати розв’язок у чистих стратегіях).

   Ця гра не є строго детермінованою (виконується умова (а) теореми про строгу недетермінованість гри: $a < b, a < c,\ d < b$ та $d < c$).

2. Знайдемо нижню й верхню ціни гри:

$$\begin{array}{lcll} & & \min\limits_{j} a_{ij} & \\ A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}\right\} & \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = -2 \\ \max\limits_{i} a_{ij} \downarrow \quad \downarrow & & & \\ \qquad\quad \underbrace{5 \quad 4} & & & \\ \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = 4 & & & \end{array}$$

   Отже, $\alpha = -2$ та $\beta = 4$.

   Оскільки $\alpha < \beta$, то в матриці $A$ немає сідлових точок.

   Отже, розв’язку гри в чистих стратегіях не існує, потрібно шукати розв'язок гри в змішаних стратегіях.

3. Знайдемо оптимальні змішані стратегії кожного гравця та ціну гри.

Кожний із гравців $A$ та $B$ має єдину оптимальну змішану стратегію відповідно $p^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$ й $q^* = \left(q_1^*, q_2^*\right)$, які визначаються за формулами (9.8)-(9.11):

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-3-5}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{4}{7},$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-2-4}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{3}{7} = 1 - p_1^*,$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-3-4}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{1}{2},$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-2-5}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{1}{2} = 1 - q_1^*.$$

Отже, оптимальною змішаною стратегією гравця $A$ є стратегія $p^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, а оптимальною змішаною стратегією гравця $B$ є стратегія $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ціну гри підрахуємо за формулою (9.12):

$$V = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)} = \frac{(-2)(-3)-4\cdot 5}{(-2-3)-(4+5)} = 1.$$

Тоді розв'язок гри – набір $\left(p^*, q^*, V\right)$, тобто $\left(\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), 1\right)$.

<u>Відповідь</u>: $\left(\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), 1\right)$.

## 9.3 Питання для самоконтролю

1. Які стратегії називаються чистими?
2. Які стратегії називаються змішаними?
3. Що визначає та яким чином обчислюється платіжна функція гри у змішаних стратегіях?
4. Як визначається оптимальність змішаних стратегій гравців?
5. Що являє собою розв'язок гри у змішаних стратегіях?
6. Сформулюйте теорему фон Неймана.
7. Сформулюйте теорему про критерій оптимальності змішаних стратегій.
8. Яким чином платіжну матрицю, що містить від’ємні числа, можна перетворити у матрицю з додатними числами?
9. Сформулюйте умови домінування чистих стратегій гравця $A$.
10. Сформулюйте умови домінування чистих стратегій гравця $B$.

11. Надайте визначення строго детермінованої гри двох осіб.
12. Надайте визначення не строго детермінованої гри з матрицею (2×2). Умови строгої не детермінованості гри.
13. Яка матрична гра називається необразливою? Умови необразливості гри.
14. Яким чином знаходиться розв'язок гри у змішаних стратегіях для не строго детермінованої гри з матрицею (2×2).
15. Які стратегії називаються активними?

### 9.4 Рекомендована література

1. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.

2. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с.