Тема 11
Чисельний метод розв’язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях

План лекції

11.1. Сутність чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях.
11.2. Основна ідея та етапи реалізації чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях.
11.3. Питання для самоконтролю.
11.4. Рекомендована література.

11.1 Сутність чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

Спосіб відшукання наближеного рішення прямокутних ігор був сформульований в роботі Г.В. Брауна, а збіжність процесу була доведена Джулією Робінсон в 1951 році.

Цей метод, званий ще **ітеративним (методом ітерацій)**, є одним з найпростіших чисельних методів розв'язання ігор та спирається на традиційний статистичний принцип: засновувати майбутні рішення на відповідній передісторії.

Полягає він в послідовній процедурі «зближення» верхньої і нижньої ціни гри із заданою точністю.

11.2 Основна ідея та етапи реалізації чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

<u>Ідея методу полягає в наступному</u>:

Розігрується «уявний експеримент», у якому сторони A і B по черзі застосовують один проти одного свої стратегії

$$A:\ A_1, A_2, \ldots, A_m \quad \Rightarrow \quad A_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$
$$B:\ B_1, B_2, \ldots, B_n \quad \Rightarrow \quad B_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right),$$

прагнучи виграти побільше (для гравця A) і програти поменше (для гравця B).

Експеримент складається з ряду «партій» гри.

Починається він з того, що один з гравців (скажімо, A) вибирає довільно одну зі своїх стратегій A_i. Противник (B) відповідає йому тією зі своїх стратегій B_j, яка є найгіршою для A, тобто звертає його виграш при стратегії A_i в мінімум.

Далі знову черга гравця A – він відповідає B тією своєю стратегією A_k, яка дає йому максимальний виграш при стратегії B_j противника.

Далі – знову черга противника. Він відповідає гравцю A тією своєю стратегією, яка є найгіршою не для останньої, застосованої гравцем A, стратегії A_k, а для ***змішаної стратегії***, в якій досі застосовані стратегії A_i, A_k зустрічаються з рівними ймовірностями.

І так далі: на кожному кроці ітераційного процесу кожен гравець відповідає на черговий хід іншого *тією своєю стратегією, яка є оптимальною для нього щодо змішаної стратегії іншого, в яку всі застосовані до сих пір стратегії входять пропорційно частотам їх застосування.*

Замість того, щоб обчислювати кожен раз середній виграш, можна користуватися просто «накопиченим» за попередні ходи виграшем та вибирати ту свою стратегію, при якій цей накопичений виграш є максимальним (мінімальним).

Доведено, що такий метод сходиться: при збільшенні числа «партій» середній виграш на одну партію буде наближатися до ціни гри, а частоти застосування стратегій – до їх ймовірностей в оптимальних змішаних стратегіях гравців, тобто

$$p_i = \frac{N(i)}{K}, \quad q_j = \frac{N(j)}{K}.$$

де $N(i), N(j)$ – число номерів i або j, які співпали та були обрані в даній партії стратегій гравців A і B відповідно;

K – загальне число ходів (партій).

Втім, найкраще можна зрозуміти ітераційний метод на конкретному прикладі.

Приклад: Розглянемо гру з матрицею 3×3:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Щоб не мати справу з матрицею, в якій є від'ємні елементи, скористаємося теоремою 5: додамо до кожного елементу матриці число 5 та отримаємо матрицю виду

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Ціна гри отриманої матриці відповідно до теореми 5 збільшиться на 5 одиниць.

Розв'язання гри:

<u>1 хід</u>: Гравець A обирає довільно стратегію з A_i, наприклад, стратегію A_3 з виграшами, що дорівнюють

$$\{9{,}0{,}11\}.$$

<u>2 хід</u>: Противник B відповідає йому тією зі своїх стратегій B_j, яка є найгіршою для гравця A, тобто звертає виграш гравця A в мінімум при обраній ним стратегії A_3, тобто

$$\min\{9,\underline{0},11\}=0$$

відповідає стратегії B_2 гравця B.

Відповідно до обраної стратегії B_2 «виграш» гравця B складає

$$\{2{,}9{,}0\}.$$

<u>3 хід</u>: Гравець A відповідає йому тією зі своїх стратегій A_k, яка дає максимальний виграш при обраній стратегії B_2 гравця B, тобто

$$\max\{2,\bar{9},0\}=9,$$

що відповідає стратегії A_2 гравця A з виграшем

$$\{2{,}9{,}0\}.$$

4 хід: Гравець B відповідає стратегією B_j, яка дає мінімальний виграш гравцю A, але не для останньої застосованої нами стратегії A_k, а для змішаної стратегії, в якій стратегії A_i та A_k зустрічаються з рівними ймовірностями $(p_i = p_k)$.

і т.д.

У таблиці 11.1 наведені перші 15 кроків ітераційного процесу за методом Брауна-Робінсон (розрахунки можна і продовжити).

Позначимо:

k – номер партії (пари виборів);

i – номер обраної в даній партії стратегії гравця A;

j – номер обраної в даній партії стратегії гравця B;

$\underline{v}$ – нижня оцінка ціни гри;

$\bar{v}$ – верхня оцінка ціни гри;

v^* – середнє арифметичне між $\underline{v}$ та $\bar{v}$;

A_1, A_2, A_3 та B_1, B_2, B_3 – накопичений виграш гравця B та A відповідно за k партій.

Згідно таблиці 2, в першому стовпці наданий номер партії (пари виборів) k, у другому – номер i обраної в даній партії стратегії гравця A.

У наступних трьох стовпцях – «накопичений виграш» за перші k партій при тих стратегіях, які застосовували гравці в попередніх партіях та при стратегіях B_1, B_2, B_3 гравця B в даній партії (виходить додаванням елементів відповідного рядка A_i матриці гри до того, що було отримано в таблиці 11.1 рядком вище).

Таблиця 11.1

k	i	Виграш гравця A, який платить йому гравець В			j	Виграш гравця B, який платить йому гравець A			$\underline{v}$	$\overline{v}$	Наближена оцінка гри v^*
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3			
1	3	9	0	11	2	2	9	0	0	9	4,5
2	2	11	9	11	2	4	18	0	4,5	9	6,75
3	2	13	18	11	3	13	18	11	3,67	6	4,84
4	2	15	27	11	3	22	18	22	2,75	5,50	4,13
5	1	22	29	20	3	31	18	33	4,00	6,60	5,30
6	3	31	29	31	2	33	27	33	4,84	5,50	5,17
7	1	38	31	40	2	35	36	33	4,43	5,14	4,79
8	2	40	40	40	2	37	45	33	5,00	5,61	5,30
9	2	42	49	40	3	46	45	44	4,45	5,11	4,78
10	1	49	51	49	1	53	47	53	4,90	5,30	5,10
11	3	58	51	60	2	55	56	53	4,64	5,09	4,87
12	2	60	60	60	2	57	65	53	5,00	5,41	5,20
13	2	62	69	60	3	66	65	64	4,61	5,07	4,84
14	1	69	71	69	1	73	67	73	4,93	5,21	5,07
15	3	78	71	80	2	75	76	73	4,74	5,06	4,90

З цих накопичених виграшів в таблиці 11.1 підкреслять мінімальний (якщо їх декілька, підкреслюються всі). Підкреслене число визначає відповідний вибір гравця B в даній партії – він обирає ту стратегію, яка відповідає підкресленому числу (якщо їх декілька, береться будь-яка). Таким чином, визначається номер j оптимальної (в даній партії) стратегії B (ставиться в наступному стовпці).

У наступних трьох стовпцях подається накопичений виграш за k партій відповідно при стратегіях A_1, A_2, A_3 гравця A (виходить додаванням елементів стовпця B_j до того, що було рядком вище). З цих значень в таблиці 11.1 «надкреслене» максимальне значення. Воно визначає вибір стратегії гравця A в наступній партії (рядком нижче).

В останніх трьох стовпцях таблиці 11.1 подані: $\underline{v}$ – нижня оцінка ціни гри, що дорівнює мінімальному накопиченому виграшу гравця A, поділеному на число партій k; $\overline{v}$ – верхня оцінка ціни гри, що дорівнює максимальному накопиченому виграшу гравця *B*, поділеному на *k*; v^* – середнє арифметичне між ними (воно слугує кращою, ніж нижня та верхня, наближеною оцінкою ціни гри).

Як видно, величина v^* незначно коливається навколо ціни гри $v = 5$ (див. рис. 11.1).

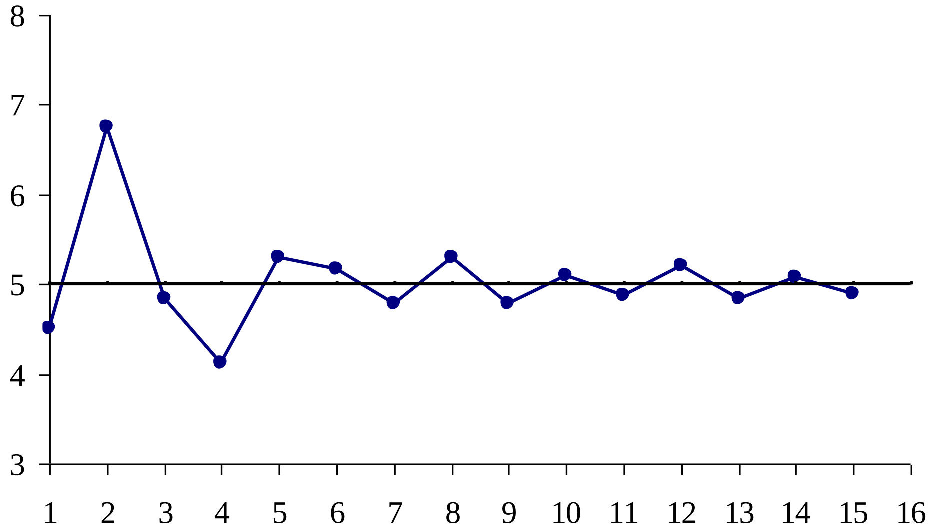

Рисунок 11.1 – Графічне зображення збіжності ціни гри v^* до ціни гри $v = 5$

Підрахуємо за таблицею 11.1 частоти $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$, $\tilde{p}_3$, $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{q}_3$ стратегій гравців:

$$\tilde{p}_1 = 4/15 \approx 0{,}266, \qquad \tilde{p}_2 = 7/15 \approx 0{,}468, \qquad \tilde{p}_3 = 4/15 \approx 0{,}266,$$
$$\tilde{q}_1 = 2/15 \approx 0{,}133, \qquad \tilde{q}_2 = 8/15 \approx 0{,}534, \qquad \tilde{q}_3 = 5/15 \approx 0{,}333,$$

що не так вже сильно відрізняється від ймовірностей для першої, другої й третьої стратегій відповідно, отриманих іншими методами, наприклад, за допомогою методів лінійного програмування:

$$p_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25, \quad p_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5, \quad p_3 = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$
$$q_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25, \quad q_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5, \quad q_3 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Такі порівняно хороші наближення ми отримали вже при 15 ітераціях. На жаль, далі процес наближень буде йти не так жваво. Збіжність методу Брауна-Робінсон, як показує досвід, є дуже повільною.

Дуже важливою перевагою ітераційного методу розв'язання ігор є те, що його трудомісткість порівняно повільно зростає зі збільшенням розмірності гри $m \times n$, тоді як трудомісткість методів лінійного програмування зростає при збільшенні розмірності задачі набагато швидше.

11.3 Питання для самоконтролю

1. Чому метод Брауна-Робінсон називають ітеративним?
2. В чому полягає статистичний принцип на який спирається метод Брауна-Робінсон?
3. Для платіжних матриць якої розмірності застосовується метод Брауна-Робінсон?
4. Розв’язок матричної гри, отриманий за допомогою методу Брауна-Робінсон, є точним (аналітичним) або наближеним (чисельним)?
5. В чому полягає ідея методу Брауна-Робінсон?
6. Наведіть основні етапи реалізації методу Брауна-Робінсон.

11.4 Рекомендована література

1. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.

2. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с.