

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

**В. М. Дубовой, Р. Н. Кветний, О. І. Михальов,
А. В. Усов**

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ

Підручник

Вінниця
ВНТУ
2017

**УДК [519.711+519.876](075)
М74**

Автори:

Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., Усов А. В.

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів (протокол № 13 від 26.05.2016 р.)

Рецензенти:

Л. М. Любчик, доктор технічних наук, професор

В. М. Томашевський, доктор технічних наук, професор

Г. С. Фінін, доктор технічних наук, професор

М74 Моделювання та оптимізація систем : підручник / [Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., А.В.Усов А. В.] – Вінниця : ПП «ТД«Еднльвейс», 2017. – 804 с.

ISBN 978-617-7237-23-4

В підручнику розгорнуто подано загальну характеристику математичного моделювання та оптимізації широкого класу систем. Розглянуті основні типи математичних моделей та способи їх ідентифікації. Приділено увагу питанням моделювання та оптимізації систем в умовах невизначеності. Розглянуто приклади та основні напрямки застосування математичного моделювання складних систем. Підручник рекомендовано для студентів усіх рівнів вищої освіти.

УДК [519.711+519.876](075)

ISBN 978-617-7237-23-4

© В. Дубовой, Р. Кветний,
О. Михальов, А. Усов, 2017

ЗМІСТ

ВСТУП	Поняття про системи і процеси	13
-------	-------------------------------------	----

ЧАСТИНА 1. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1	ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ	19
1.1	Постановка задачі моделювання та оптимізації систем	19
1.1.1	Сутність математичного моделювання та оптимізації	19
1.1.2	Еволюція задач моделювання	22
1.1.3	Роль моделювання та оптимізації в системах управління.	23
1.2	Види моделей	26
1.2.1	Моделі вербальні, формальні, алгоритмічні, графічні, фізичні	26
1.2.2	Моделі геометричні, структурні, функціональні, інформаційні	27
1.2.3	Моделі статичні, моделі динаміки	27
1.2.4	Моделі процесів, перетворень і систем	28
1.2.5	Моделі детерміновані, стохастичні, нечіткі, узагальнені	28
1.2.6	Моделі агрегатні, комплексні	28
1.2.7	Моделі аналітичні, імітаційні	30
1.3	Характеристики моделей	31
1.3.1	Точність моделі	31
1.3.2	Вірогідність моделі	33
1.3.3	Адекватність моделі	33
1.3.4	Складність моделі	35
1.3.5	Універсальність моделі	37
1.3.6	Поняття «жорстких» та «м'яких» математичних моделей	38
1.4	Систематичний підхід до моделювання	40
1.4.1	Ізоморфні та гомеоморфні моделі	40
1.4.2	Теорія подібності	41
1.4.3	Взаємний зв'язок та перетворення моделей	48
1.4.4	Аналіз і синтез моделей	48
1.4.5	Модель як σ -алгебра	49
1.4.6	Метричний простір моделей	49
1.5	Моделі в умовах невизначеності	51
1.5.1	Джерела і види невизначеності моделей	51
1.5.2	Типи невизначеності моделей	52
1.5.2.1	Стохастична невизначеність	52
1.5.2.2	Нечітка невизначеність	65
1.5.2.3	Хаотична невизначеність	68

1.5.2.4	Узагальнена невизначеність	69
1.5.2.5	Невизначеність вищих порядків	72
1.5.3	Невизначені характеристики моделі	74
1.5.4	Форми подання невизначеності	77
1.5.5	Моделі перетворення характеристик сигналів з різною формою невизначеності	79
1.5.5.1	Невизначеність вищих порядків	79
1.5.5.2	Методи моделювання перетворень нечітких даних	83
1.5.5.3	Перетворення узагальнюючої функції	86
	Ключові слова	90
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	90
	Література	92
2	СТРУКТУРНІ МОДЕЛІ	95
2.1	Поняття та способи структурування об'єктів моделювання.....	95
2.2	Графи як узагальнення структурних моделей	99
2.3	Способи формалізації структурних моделей	104
2.4	Формальні перетворення структурних моделей	107
2.5	Потокові граfi	114
	Ключові слова	117
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	117
	Література	118
3	ФУНКЦІОНАЛЬНІ МОДЕЛІ	119
3.1	Моделі статички	120
3.1.1	Модель статички як окремий випадок загальної операторної функціональної моделі	120
3.1.2	Лінійні та нелінійні моделі. Типові нелінійності	120
3.1.3	Лінеаризовані моделі	122
3.1.4	Нелінійна апроксимація (поліномами, сплайнами, вейвлетами тощо)	124
3.1.5	Моделі логіки	128
3.2	Моделі динаміки	130
3.2.1	Модель динаміки як окремий випадок загальної операторної функціональної моделі	130
3.2.2	Моделі динаміки у просторі станів	130
3.2.3	Моделі динаміки у просторі зображень	133
3.2.4	Моделі динаміки у просторі спектрів	136
3.2.5	Моделі динаміки дискретних систем	140
3.3	Моделі обслуговування	144
3.3.1	Поняття системи масового обслуговування	144

3.3.2	Характеристики СМО	147
3.3.3	Моделі типових СМО	148
3.4	Алгоритмічні моделі	159
3.4.1	Основні поняття теорії алгоритмів	159
3.4.2	Основи алгоритмічної алгебри	164
3.4.3	Подання алгоритмічних моделей	165
3.4.4	Ізоморфізм та гомеоморфізм в мовах програмування як основа комп'ютерного моделювання	171
3.5	Агрегатні та комплексні функціональні моделі	172
3.5.1	Формальні перетворення функціональних моделей	172
3.5.2	Агрегування моделей лінійних систем	172
3.5.3	Агрегування моделей нелінійних систем	176
	Ключові слова	178
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	178
	Література	180
4	ІНФОРМАЦІЙНІ МОДЕЛІ	182
4.1	Основні поняття теорії інформації	182
4.2	Бази даних і знань як інформаційні моделі	188
4.3	Семантичні мережі і гіпертекстові системи	193
4.3.1	Поняття про семантичні моделі	193
4.3.2	Моделі гіпертекстових систем	186
4.3.3	Критерії оцінювання гіпертекстових структур	199
4.4	Інформаційні потоки	202
	Ключові слова	207
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	207
	Література	208
 ЧАСТИНА 2. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ МОДЕЛЮВАННЯ		
5	ПОНЯТТЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ	210
5.1	Задачі ідентифікації	211
5.1.1	Структурна ідентифікація	213
5.1.2	Параметрична ідентифікація	214
5.2	Ідентифікаційний експеримент	218
5.2.1	Пасивна ідентифікація функціональної моделі	218
5.2.2	Активна ідентифікація функціональної моделі	222
5.2.3	Ідентифікація алгоритмічної моделі	228
5.2.4	Ідентифікація інформаційної моделі	230
	Ключові слова	232
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	232
	Література	232

6 МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ	234
6.1 Статистична ідентифікація	234
6.1.1 Статистична оцінка законів розподілу випадкових величин	235
6.1.2 Кореляційний аналіз	236
6.1.3 Факторний аналіз	239
6.1.4 Регресійний аналіз	244
6.1.5 Спектральний аналіз	248
6.2 Інтелектуальні засоби ідентифікації	252
6.2.1 Ідентифікація шляхом навчання нейронних мереж	252
6.2.2 Нечітка ідентифікація	258
6.2.3 Узгодження і уточнення рішень	269
6.3 Ідентифікація хаотичних систем	271
6.3.1 Параметрична ідентифікація хаотичної динамічної системи Дуффінга	272
6.3.2 Адаптивно-пошукова ідентифікація хаотичної динамічної системи Ресслера	274
Ключові слова	277
Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	278
Література	278
7 МЕТОДИ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ	280
7.1 Інтерполяція	280
7.1.1 Різницеві методи	281
7.1.2 Інтерполяція за Лагранжем	287
7.1.3 Сплайн-інтерполяція	289
7.1.3.1 Класичний кубічний сплайн	292
7.1.3.2 Створення сплайнових параметричних кривих	295
7.2 Апроксимація даних	302
7.3 Статистична обробка даних	306
7.4 Цифрова обробка сигналів	311
7.4.1 Загальні відомості та поняття	311
7.4.2 Загальна структура системи цифрової обробки аналогових сигналів	313
7.4.3 Дискретні та неперервні сигнали	315
7.4.4 Теорема Котельникова	317
7.4.5 Дискретні перетворення сигналів	320
7.4.5.1 Спектр Фур'є неперервних та дискретних сигналів	321
7.4.5.2 Дискретне перетворення Фур'є	323
7.4.5.3 Застосування ДПФ	327

7.4.6	Перетворення Лапласа	329
7.4.7	Застосування перетворення Лапласа в системах обробки даних	330
7.4.8	Ортогональні перетворення в діадних базисах	333
7.4.9	Згортка. Кореляція	334
7.4.10	Цифрова фільтрація сигналів	337
7.5	Методи обробки зображень	343
7.5.1	Класичні методи обробки зображень	343
7.5.2	Статистичні методи аналізу зображень	346
7.5.3	Фільтрація зображень	347
7.5.4	Методи на основі динамічних моделей	355
7.5.5	Методи на основі декомпозиції на власні вектори	357
7.5.6	Методи класифікації елементів зображень	358
7.5.7	Фрактальні методи	362
7.5.8	Вейвлет-перетворення	374
7.6	Інтервальний аналіз	383
7.6.1	Класична інтервальна арифметика	383
7.6.2	Інтервальне розширення та звуження	385
7.6.3	Диференціювання та інтегрування в інтервальному аналізі	386
7.6.4	Інтервальні методи розв'язання диференціальних рівнянь	389
7.6.5	Інтервальний метод другого порядку для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	389
7.6.6	Інтервальні методи типу Рунге-Кутта	390
7.6.7	Метод Крукенберга	391
7.6.8	Подання інтервальної функції через граничні дійсні функції	393
7.6.9	Розширення інтервальної арифметики	395
	Ключові слова	397
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	397
	Література	401

ЧАСТИНА 3. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ

8	АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	403
8.1	Застосування звичайних диференціальних рівнянь до моделювання технічних систем	403
8.1.1	Деякі відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь	403
8.1.2	Моделювання технічних систем диференціальними рівняннями	412

8.1.3	Математичні моделі технічних систем і процесів	418
8.1.4	Стійкість за Ляпуновим програмних рухів	430
8.1.5	Стабілізація програмних рухів	436
8.1.6	Врахування розподіленості параметрів системи	445
8.2	Диференціальні рівняння в частинних похідних для моделювання технічних систем	450
8.2.1	Рівняння параболічного типу і їх застосування до моделювання теплофізичних процесів в технічних системах	450
8.2.2	Рівняння гіперболічного типу і їх роль в моделюванні динамічних процесів	465
8.2.3	Рівняння еліптичного типу в застосуванні до моделювання стаціонарних процесів	487
	Ключові слова	498
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи.....	498
	Література	499
9	ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	501
9.1	Похибки та властивості обчислювальних методів та алгоритмів.....	502
9.2	Задачі лінійної алгебри	504
9.2.1	Розв'язання систем лінійних рівнянь	504
9.2.1.1	Прямі методи	505
9.2.1.2	Ітераційні методи	514
9.2.1.3	Загальні висновки щодо застосування методів розв'язання систем лінійних рівнянь	516
9.2.2	Визначення власних значень матриць	517
9.2.2.1	Методи обчислення власних значень	518
9.2.2.2	Порівняння методів визначення власних значень	523
9.3	Нелінійні задачі	525
9.3.1	Розв'язання нелінійних рівнянь	525
9.3.1.1	Метод половинного ділення	529
9.3.1.2	Метод хибного положення (хорд)	530
9.3.1.3	Метод Ньютона (дотичних)	532
9.3.1.4	Метод січних	534
9.3.1.5	Метод простої ітерації	535
9.3.1.6	Визначення комплексних коренів	537
9.3.2	Розв'язання систем нелінійних рівнянь	539
9.3.3	Загальні висновки щодо застосування методів розв'язання нелінійних задач	542
9.4	Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь	544

9.4.1	Методи розв'язання задачі Коші	544
9.4.1.1	Однокрокові методи	545
9.4.1.2	Багатокрокові методи	551
9.4.1.3	«Жорсткі» задачі	555
9.4.1.4	Загальні висновки щодо вибору методу розв'язання задачі Коші	555
9.4.2	Методи розв'язання крайових задач	556
9.4.2.1	Метод «стрілянини»	556
9.4.2.2	Різницеві методи	557
9.5	Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних	560
9.5.1	Різницевий метод	562
9.5.2	Розв'язання окремих типів диференціальних рівнянь в частинних похідних	562
9.5.2.1	Еліптичні рівняння	566
9.5.2.2	Гіперболічні рівняння	568
9.5.2.3	Параболічні рівняння	569
9.5.3	Загальні рекомендації до розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних	570
9.6	Чисельне інтегрування	572
9.6.1	Формули прямокутників	572
9.6.2	Формули Ньютона –Котеса	574
9.6.3	Формула Чебишева	577
9.6.4	Формула Гаусса	578
9.6.5	Алгоритми застосування чисельних методів	581
9.6.6	Метод Монте-Карло	583
9.7	Чисельне диференціювання	585
9.7.1	Чисельне диференціювання аналітично заданих функцій.....	585
9.7.2	Чисельне диференціювання таблично заданих функцій.....	586
	Ключові слова	588
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	588
	Література	594
10	ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	596
10.1	Постановка задачі імітаційного моделювання	597
10.2	Використання агрегатного принципу для імітаційного моделювання	598
10.3	Алгоритми генерування тестових послідовностей	602
10.3.1	Обробка результатів імітаційного моделювання	606
10.3.2	Оцінка необхідного обсягу тестів та трудомісткості імітаційного моделювання	606
10.3.3	Програмні пакети для імітаційного моделювання	608

Ключові слова	633
Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	633
Література	634
11 ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ МОДЕЛЮВАННЯ	636
11.1 Стандарти моделювання	636
11.2 Засоби архітектурного моделювання складних систем	639
11.2.1 Уніфікована мова системного моделювання UML	639
11.2.2 мова моделювання бізнес-процесів BPMN	646
11.3 Моделювання в середовищах математичних пакетів	651
11.3.1 Середовище MathCAD	652
11.3.2 Середовище MatLab	655
11.3.3 Інші математичні пакети	659
11.4 Можливості моделювання у системі Microsoft Office	664
11.4.1 Розрахункові та оптимізаційні задачі в системі Excel	664
11.4.2 Задачі моделювання в системі Access	665
11.5 Системи автоматизованого проектування	667
Ключові слова	673
Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	673
Література	673

ЧАСТИНА 4. ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛІЗУ І ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ

12 МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛІННЯ	675
12.1 Модель як складова задачі оптимізації	675
12.1.1 Класифікація задач оптимізації	676
12.1.2 Багатокритеріальна оптимізація	681
12.1.3 Гладка оптимізація	684
12.1.4 Опукла оптимізація	690
12.1.5 Негладка оптимізація за методом координатного спуску (підйому)	692
12.1.6 Стохастична оптимізація	692
12.1.7 Лінійне програмування	698
12.1.8 Теорія ігор	701
12.1.9 Динамічне програмування	702
12.1.10 Варіаційні задачі	704
12.1.11 Алгоритми на графах	704
12.2 Використання моделі для оптимального прогнозування	710
12.2.1 Класифікація задач і методів прогнозування	710
12.2.2 Основи прогнозування даних	711
12.2.2.1 Часові ряди і стохастичні процеси	711

12.2.2.2	Експоненційне згладжування	714
12.2.2.3	Початкові умови експоненційного згладжування	718
12.2.2.4	Вибір постійної згладжування	720
12.2.2.5	Формування ансамблів моделей-предикторів	725
12.3	Модель як складова задачі оптимального оцінювання	728
12.4	Моделювання в задачах прийняття оптимальних рішень	730
12.5	Моделювання в задачах управління проектами	738
12.5.1	Багатокритеріальна нечітка оцінка якості проектів	738
12.5.2	Нечітке булеве програмування і рішення задачі вибору проекту	745
12.5.3	Модельний приклад	749
	Ключові слова	752
	Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	752
	Література	754
13	МОДЕЛІ ОКРЕМИХ КЛАСІВ СИСТЕМ	756
13.1	Моделі фізичних процесів в технологічних об'єктах	756
13.1.1	Фізичні процеси в об'єктах керування	756
13.1.2	Закони збереження як фундаментальні моделі фізичних процесів	756
13.1.3	Рівняння Максвелла	758
13.1.4	Рівняння Шредінгера	760
13.1.5	Рівняння дифузії і теплопровідності	762
13.1.6	Рівняння Кірхгофа	764
13.2	Моделі систем автоматики	765
13.3	Моделювання процесів у металургії	773
13.3.1	Прогнозування показників виробництва марганцевих феросплавів з використанням нечіткої експертної системи	774
13.3.2	Ідентифікація технологічного процесу виплавлення феросиліцію	778
13.3.3	Ідентифікація вихідних характеристик сталі з використанням нейронних мереж	785
13.4	Моделі обчислювальних систем	789
13.4.1	Види обчислювальних систем	789
13.4.2	Математичні моделі обчислень	791
13.4.3	Моделі промислових комп'ютерних мереж	794
13.5	Моделі розподілених систем	797
13.5.1	Види розподілених систем	797
13.5.2	Динамічні процеси в розподілених системах	797
13.5.3	Задача спостережності і керуваності розподіленої	

системи	798
13.5.4 Синергетика і теорія катастроф	799
13.6 Моделі АСУ	802
13.7 Моделі інтелектуальних процесів	803
13.8 Моделі соціально-економічних процесів	805
13.8.1 Модель валового національного продукту	805
13.8.2 Класична модель економіки	806
13.8.3 Кейнсіанська модель	807
13.8.4 Модель демографічних процесів та розвитку популяцій	808
Ключові слова	813
Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи	813
Література	814

ЧАСТИНА 1. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

Поняття „*моделі*”, „*моделювання*”, „*оптимізації*” є одними з базових в усіх галузях наукової та інженерної діяльності. Напевно, саме через різноманітність напрямків в окремих теоретичних дисциплінах під моделюванням розуміють суттєво різні теорії, методи та засоби.

Оптимізація також є базовою процедурою у розв’язанні багатьох прикладних задач. Її використовують при проектуванні і управлінні системами, прийнятті рішень. Моделювання та оптимізація тісно пов’язані.

Розглянемо ці поняття так, як це розуміють в інженерній практиці фахівці з *систем керування*.

1.1 Постановка задачі моделювання та оптимізації систем

1.1.1 Сутність математичного моделювання та оптимізації

Моделювання – це опис певного *об’єкта*. В галузі систем керування об’єктами моделювання є, відповідно, самі об’єкти, системи і процеси керування ними, а також їх складові частини.

Моделювання можна розглядати як *відображення* об’єкта на множину його описів. При цьому, якщо об’єкту O і моделі M властиві певні набори характеристик $O\{\bar{X}\}$ і $M\{\bar{Z}\}$, то повинна існувати відповідність характеристик моделі і об’єкта $x_i \leftrightarrow z_j \quad i \in [1 \dots n], \quad j \in [1 \dots m]$. Найчастіше модель свідомо будують як спрощений опис об’єкта для полегшення його дослідження. Це не дивно, адже природні об’єкти характеризуються безліччю показників, більшість з яких є несуттєвою з точки зору *мети моделювання*. Так, наприклад, при моделюванні системи керування токарним верстатом несуттєвими характеристиками є його колір, рівень шуму тощо. В результаті між моделлю та об’єктом немає повної відповідності.

Отже, задачу моделювання можна сформулювати таким чином: *необхідно для заданого об’єкта підібрати такий опис, який достатньо повною мірою відображає би оригінал з точки зору заданої мети моделювання*.

У найпростішому вигляді це відображає рис. 1.1. Як можна побачити з цього рисунка, у зображенні системи використовуються математичні об’єкти:

Θ_Y – набір характеристик стану системи – модель стану,
 $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$;

Θ_X – набір характеристик вхідних впливів – модель впливів,
 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;

F – функціонал перетворення – модель системи.

Між цими математичними об'єктами є зв'язок, який можна записати у трьох формах:

$$\Theta_Y = F[\Theta_X] \quad (1.1)$$

$$\Theta_X = F^{-1}[\Theta_Y] \quad (1.2)$$

$$F = A[\Theta_X, \Theta_Y] \quad (1.3)$$

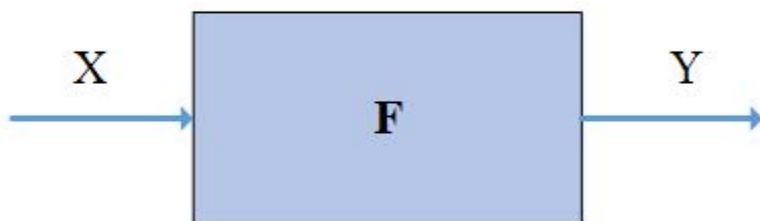


Рисунок 1.1 – Спрощена схема об'єкта моделювання

Форма (1.1) відображає задачу отримання результатів моделювання. Ця задача використовується у більшості задач застосування моделювання: оптимізація процесів, прогнозування характеристик систем, проектування систем управління тощо.

Форма (1.2) відображає задачу знаходження параметрів стану об'єкта за показами вимірювальних приладів, якщо під F розуміти рівняння перетворення цих приладів.

Форма (1.3) відображає задачу ідентифікації, тобто визначення моделі об'єкта F на основі експериментальних даних $[\Theta_X, \Theta_Y]$ за допомогою процедури ідентифікації A .

Якщо об'єктом моделювання є система керування, головним призначенням якої є приведення об'єкта керування у заданий стан, то модель повинна відображати залежність стану об'єкта від керуючого впливу і зовнішніх контрольованих і неконтрольованих збурень з урахуванням структурних характеристик і параметрів системи. Відповідна схема зображена на рис. 1.2. Відповідно, базова форма зв'язку між компонентами моделі матиме вигляд:

$$U = C[X, Y, Z']$$

$$Y = F[U, Z', Z'']$$

де U – вектор керування, Z' – вектор контрольованих збурень, Z'' – вектор неконтрольованих збурень.

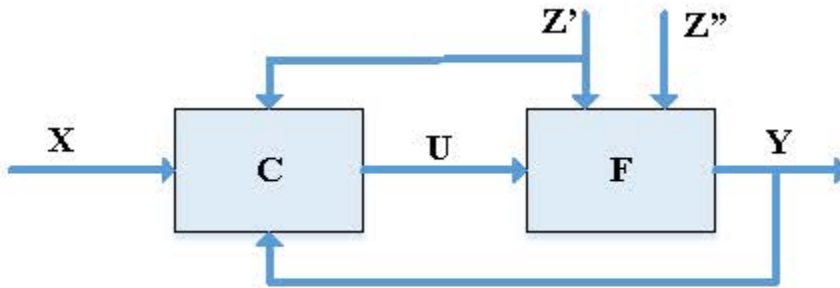


Рисунок 1.2 – Схема системи керування

Наявність неконтрольованих збурень зумовлює часткову невизначеність моделі.

Модель, як і будь-який предмет діяльності людини, проходить певний цикл свого існування, який звичайно називають “життєвим циклом”. Життєвий цикл моделі містить етапи:

- *вибір виду (класу) моделі*, який найбільше відповідає меті моделювання;
- *ідентифікація (identification) об’єкта моделювання*, тобто встановлення однозначної відповідності між моделями вибраного виду (класу) і конкретним об’єктом моделювання;
- *отримання результатів моделювання*, тобто виконання тих математичних (логічних, функціональних та інших) перетворень, які містяться у моделі;
- *використання результатів моделювання* для розв’язання задач проектування, прогнозування, керування об’єктами.

Кожен з цих етапів є істотним для досягнення мети моделювання, але ми виділимо з них найскладніший, а саме етап ідентифікації. Адже в результаті саме цього етапу фактично отримується модель, яка і дає можливість досягти мети моделювання. Але не тільки результати ідентифікації визначають виконання інших етапів. Життєвий цикл моделі не дарма називається «циклом». В ході виконання кожного етапу можуть виникнути обставини, які змусять повернутися до попередніх етапів і внести певні корективи.

Модель системи є основою постановки і розв’язання *задачі оптимізації*. Під оптимізацією розуміють знаходження найкращої, з усіх можливих, сукупності структури, параметрів або алгоритмів поведінки системи.

Задача оптимізації складається з таких елементів:

- *критерію оптимальності K* , максимум або мінімум якого необхідно забезпечити;
- *характеристик системи U* , за допомогою зміни яких і забезпечується досягнення оптимуму;
- *обмежень на параметри і характеристики системи $I(U, \Theta_X)$* , які повинні задовольняти оптимальний розв'язок;
- *моделі $F[U, \Theta_X, K]$* , яка встановлює залежність між характеристиками системи, параметрами оптимізації і критеріями;
- *умови оптимізації*, які визначають спосіб подання решти компонент постановки задачі.

Критерій оптимальності – найважливіший компонент задачі оптимізації – найчастіше є композицією багатьох характеристик системи. Якби ці характеристики були незалежними, задача пошуку оптимального розв'язку була б тривіальною. Але характеристики реальної системи пов'язані між собою моделлю F .

Також і інші компоненти задачі оптимізації пов'язані з моделлю. Так наприклад, область визначення критерію оптимізації визначається обмеженнями на параметри системи, а залежність між ними визначає вигляд цієї області. Якщо залежність лінійна, то область визначення матиме вигляд багатогранника, а якщо нелінійна, то область визначення матиме вигляд тіла з непласкою поверхнею.

1.1.2 Еволюція задач моделювання

Математичне моделювання є динамічною галуззю науки, яка тісно пов'язана з розвитком цивілізації. В процесі досліджень вчені вдаються до математичної формалізації все більш складних явищ. Умовна ієрархія моделей наведена на рис. 1.3. Створені моделі стають основою для нового кроку розвитку. Поступово те, що нещодавно зустрічалося лише у фантастичних романах, отримує математичне обґрунтування і стає реальністю. Сьогодні ряд вчених вже працюють над створенням математичних моделей того, що на рис. 1.3 позначено “?”.

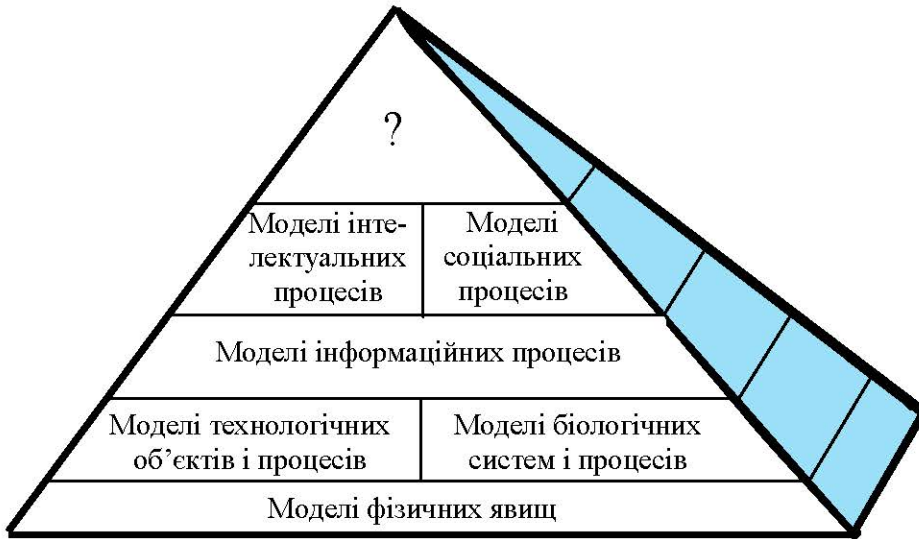


Рисунок 1.3 – Історична ієрархія моделей

З розвитком та проникненням в усі сфери життя комп'ютерної техніки суттєво змінилася постановка задач моделювання. Якщо раніше головною метою математичного моделювання було отримання аналітичної форми моделі (у вигляді певних формул), то наразі перевага віддається алгоритмічній формі моделювання, яка є зручною для перетворення на комп'ютерну програму.

На верхніх рівнях піраміди, які активно розвиваються останнім часом, моделі характеризуються принциповою невизначеністю (*uncertainty*), що теж впливає на їх форму та засоби подання. Тут переважно використовуються моделі у вигляді різноманітних евристичних правил, які не можуть розглядатися з позицій класичних алгоритмічних моделей, до яких висуюються вимоги детермінованості і результативності.

1.1.3 Роль моделювання та оптимізації в системах управління

Роль моделювання та оптимізації в системах управління доцільно розглядати з урахуванням життєвого циклу СУ. Основні етапи життєвого циклу показані на рис. 1.4.

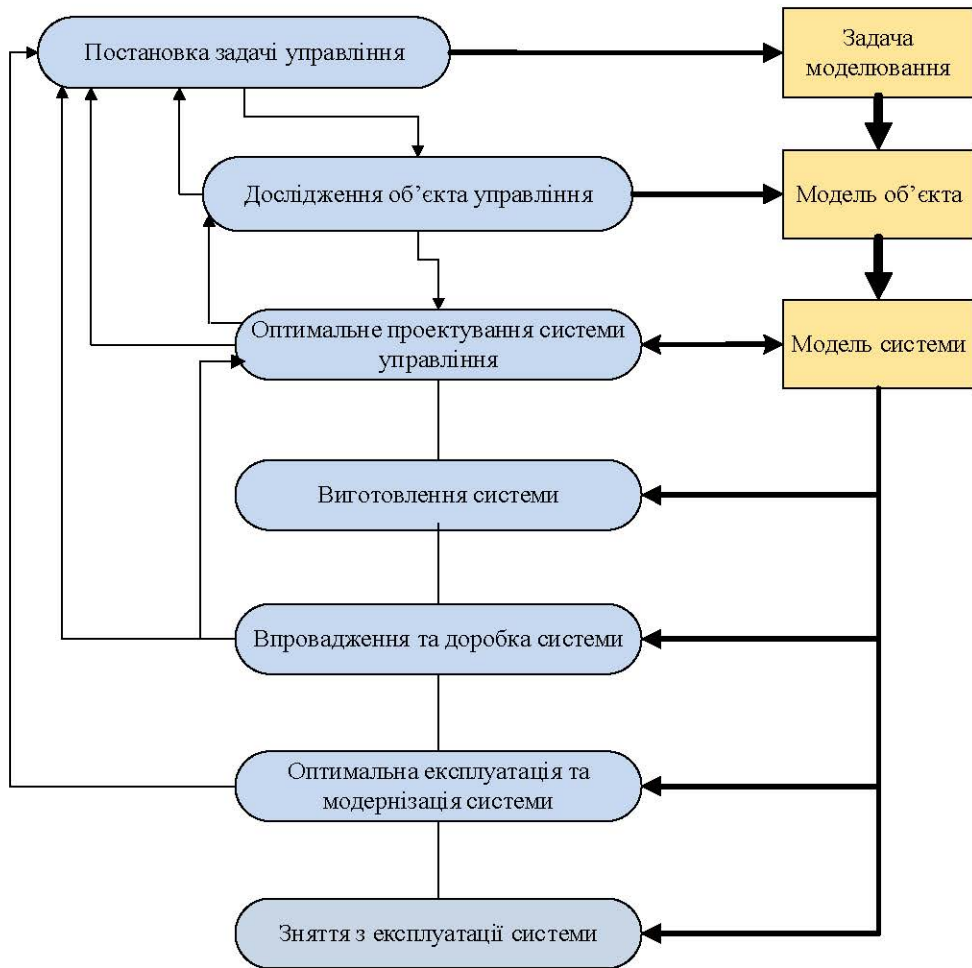


Рисунок 1.4 – Життєвий цикл системи управління

Метою робіт на стадіях постановки задач і дослідження об'єкта управління є отримання моделі об'єкта. Така модель необхідна як для проектування системи, так і для формалізації завдання, на основі якого у подальшому здійснюватиметься перевірка відповідності системи вимогам замовника.

На **стадії проектування** модель є основою створення системи. За її допомогою розробляють структуру і алгоритм (*algorithm*) роботи системи, прогнозують її характеристики, розраховують параметри елементів. Результатом цього етапу є проект СУ, який фактично є її моделлю.

Процес проектування систем управління є ітераційною оптимізаційною процедурою поступової деталізації і доповнення комплексу моделей системи, в якій чергуються етапи аналізу і синтезу.

Аналіз (analysis) – операція уявного або реального розчленування цілого (речі, властивості, процесу або відношення між предметами) на складові частини, яка виконується в процесі пізнання або предметно-практичної діяльності людини.

На першому і другому етапах здійснюється аналіз об'єкта і задачі управління з метою отримання інформації про структуру об'єкта дослідження, а також виділення із загальної маси параметрів тих, які безпосередньо стосуються мети управління, дозволяють спостерігати стан об'єкта (контрольовані параметри) і впливати на нього (керовані параметри).

Синтез (synthesis) – процес (як правило, цілеспрямований) з'єднання або об'єднання раніше розрізнених речей або понять у ціле або набір. У кібернетиці процес синтезу – побудова складних систем із заздалегідь підготовлених блоків або модулів різних типів, причому в процесі синтезу обов'язково застосовують математичні методи оптимізації.

Синтез поділяється на структурний і параметричний. На другому етапі на основі результатів аналізу здійснюється синтез найпростішої структури системи управління за обраним принципом управління, причому керованими і контрольованими параметрами є ті, що виділені на етапі аналізу. Результатом синтезу є комплексна модель системи.

На наступному етапі знов здійснюється аналіз, тепер вже моделі об'єкта у комплексі з системою керування, з метою оцінювання характеристик системи і визначення причин можливих проблем і недоліків.

Потім знов здійснюється синтез, цього разу – елементів корекції і реалізації складніших законів керування і т. д.

На *стадії виготовлення* системи на основі моделі (у формі проекту) виготовляють СУ. Наразі з розвитком комп'ютерної техніки моделі у формі комп'ютерних програм стали безпосередньою частиною СУ.

На *стадії впровадження* і доробки на практиці перевіряють якість розробленої системи і достовірність моделі, вносять необхідні уточнення і корективи.

В *процесі експлуатації* модель у вигляді технічної документації системи є керівним документом для персоналу як при обслуговуванні, ремонті і модернізації СУ, так і при з'ясуванні усіх поточних питань. Важливим компонентом процесу експлуатації є оптимальне управління системою, яке забезпечує високі техніко-економічні показники.

На заключній стадії здійснюється зняття системи з експлуатації. Найчастіше це досить складний процес, який вимагає ретельного дослідження наслідків зняття СУ з експлуатації. Для такого аналізу також необхідна модель СУ

1.2 Види моделей

Залежно від задач, для розв'язання яких вони призначені, використовуються дуже різні моделі.

1.2.1 Моделі вербальні, формальні, алгоритмічні, графічні, фізичні

Залежно від способу опису об'єкта-оригінала моделі розділяються на нижчевказані:

– *Вербальні моделі (verbal model)* використовують словесний опис об'єкта. Такі моделі часто використовують в нетехнічних галузях, а також на початковому етапі моделювання в техніці.

– *Формальні моделі (formal model)* використовують опис об'єкта моделювання у вигляді формул і подаються системою математичних співвідношень.

– *Алгоритмічні моделі (algorithmic model)* подають об'єкт у вигляді послідовності дій, які дозволяють отримати його необхідну характеристику.

– *Графічна модель (graphical model)* зображує модель у наочному вигляді. До графічних моделей відносять різноманітні схеми, які складають конструкторську документацію (електричні, гідравлічні, пневматичні, механічні, схеми програм і даних тощо), графіки, креслення форми об'єктів у різних проекціях, плани і карти тощо. З розвитком комп'ютерної графіки та її застосування для комп'ютерної анімації, симуляції і ігор графічні моделі за масштабом застосування вийшли на перші позиції і наразі поступово створюють віртуальний світ.

– *Фізична модель (physical model)* подає об'єкт-оригінал іншим об'єктом такої ж фізичної природи (масштабні моделі) або іншої (аналогові моделі). Основою фізичного моделювання є теорія подібності. Фізичне моделювання застосовують при дослідженні систем, для яких вихідні дані відомі з обмеженою точністю чи неможливо дати точний математичний опис їх функціонування, а отримання експериментальних характеристик пов'язано з надмірними труднощами та витратами.

В *аналогових моделях (analog model)* фізична природа моделі і об'єкта різні, а їх математичні описи подібні і, крім того, подібні рівняння, які описують їх окремі елементи. В моделі-аналозі реакції на збурення подібні до реакцій на аналогічні збурення об'єкта. Моделі-аналози складаються з окремих блоків, які моделюють фізичні елементи, а не з блоків, які виконують окремі математичні операції. Кожному фізичному параметру в об'єкті однозначно відповідає деякий елемент в моделі-аналозі. Найчастіше використовують електронні моделі при дослідженні поведінки систем, конструювання

та безпосереднє вивчення яких пов'язано з надмірними труднощами та витратами.

Масштабна модель (scale model) – це аналогова модель, в якій між параметрами об'єкта і моделі однакової фізичної природи існує однозначна відповідність, а також відповідність між впливами та реакцією на них. В масштабній моделі кожен елемент в масштабі повторює відповідний елемент об'єкта.

1.2.2 Моделі геометричні, структурні, функціональні, інформаційні

Залежно від властивостей об'єктів, які відображають моделі виділяють:

- геометричні моделі;
- структурні моделі;
- функціональні моделі;
- інформаційні моделі.

Геометричні моделі (geometric model) відображають форму та розташування об'єкта моделювання та його складових частин. Геометричними моделями є різноманітні креслення механізмів, будівель тощо.

Структурна модель (structural model) подає об'єкт моделювання з точки зору його складу та взаємозв'язку частин (елементів системи) між собою та з зовнішнім середовищем.

Зв'язки між елементами можуть бути: фізичні; логічні; інформаційні.

Сукупність елементів системи та зв'язків між ними утворюють структуру системи. Структурні моделі найчастіше існують у формі різноманітних структурних та принципівих схем.

Функціональні моделі (functional model) описують процеси, що відбуваються в об'єкті моделювання.

Інформаційна модель (information model) – система даних про об'єкт та опис потоків даних в процесі його функціонування.

1.2.3 Моделі статички, моделі динаміки

Залежно від наявності відображення змін стану об'єкта у часі моделі поділяються на:

- моделі статички;
- моделі динаміки.

Моделі статички (static model) відображають стан та функціонування об'єкта без урахування їх змін у часі. Як правило, вони подаються у вигляді функціональних залежностей, рівнянь та систем рівнянь.

Моделі динаміки (dynamic model) відображають поведінку об'єкта у часі. Моделі динаміки багатші за моделі статички, оскільки останні можуть розглядатися як окремих випадок для певного фіксованого моменту часу. Від-

повідно і форм подання моделей динаміки значно більше (диференціальні рівняння, операторні рівняння, спектральні подання тощо).

1.2.4 Моделі процесів, перетворень і систем

Розглядаючи види моделей, ще раз повернемося до рис. 1.1. Цей рисунок демонструє взаємозв'язок трьох базових моделей: моделі вхідних впливів X , моделі системи F , моделі станів і вихідних сигналів Y . Якщо ці моделі подані як моделі динаміки, тобто зображають поведінку вхідних впливів, моделі системи, станів і вихідних сигналів у часі, то вони є *моделями певних процесів*.

Система керування здійснює перетворення вхідних впливів на зміни станів, отже модель функціонування системи є *моделлю перетворення*.

Система керування є складним технічним об'єктом, який може розглядатися у різних аспектах: склад і структура, конструкція (в тому числі форма і розташування окремих частин системи), функції системи (в тому числі алгоритм її функціонування), параметри окремих блоків і системи в цілому. Отже *модель системи* є взаємопов'язаним комплексом моделей структури, функціонування, розташування в різноманітних формах (алгоритмічній, інформаційній, формальній, графічній тощо).

1.2.5 Моделі детерміновані, стохастичні, нечіткі, узагальнені

За ступенем та характером невизначеності моделі поділяються на:

- детерміновані;
- стохастичні;
- нечіткі;
- узагальнені.

Детерміновані моделі (deterministic model) не враховують можливі випадкові відхилення характеристик об'єкта і вхідних впливів від номінальних значень.

Стохастичні моделі (stochastic model) розглядають поведінку системи в умовах дії випадкових впливів та випадкової зміни параметрів системи. Інколи розглядають також випадкові зміни структури системи, зумовлені ненадійністю зв'язків між підсистемами та іншими причинами.

Нечіткі моделі (fuzzy model) використовують у випадках, коли окремі параметри системи задані експертом з кінцевим ступенем впевненості.

Узагальнені моделі (generalized model) використовуються при моделюванні систем, в яких частина параметрів задана достовірно, частина отримана в результаті статистичної обробки певних випадкових процесів, а частина задана експертним методом.

1.2.6 Моделі агрегатні, комплексні

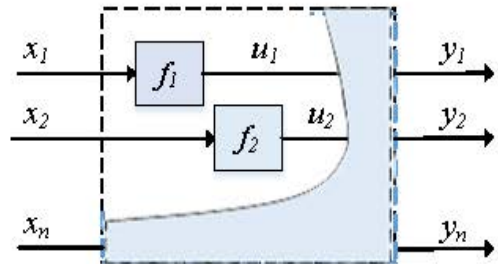
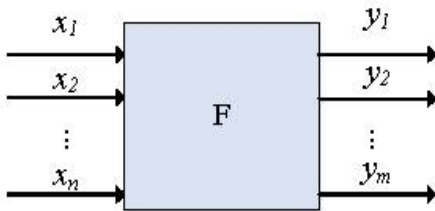
Залежно від способу представлення складного об'єкта (системи) розрізняють моделі:

- агрегатні;
- комплексні.

Агрегатна модель (aggregate model) складної системи складається з моделей окремих підсистем та опису їх взаємодії (рис. 1.5, б). Якщо розглядати для прикладу деяку систему керування, то моделі підсистем подаються окремими рівняннями, що зв'язують вихідні сигнали з вхідними і параметрами підсистеми, а агрегатна модель буде подаватися системою цих рівнянь

$$\begin{cases} u_1 = f_1(x_1, x_2, \dots), \\ u_2 = f_2(u_1, x_1, \dots), \\ \dots \\ y_2 = f_k(u_1, u_2, \dots), \end{cases} \quad (1.4)$$

де X – вектор вхідних впливів; U – вектор параметрів стану; Y – вектор вихідних сигналів.



б)

оделі (а) на агрегати (б)

Взаємодія підсистем тут враховується тим, що вихідні сигнали однієї підсистеми є вхідними для іншої і в агрегатній моделі мають однакове позначення.

Комплексна модель (complex model) подає систему в цілому, не розділяючи її на підсистеми і окремі внутрішні процеси (рис. 1.5, а). Комплексна модель може бути отримана з агрегатної шляхом зведення системи рівнянь до одного рівняння, що зв'язує вхідні і вихідні сигнали системи, методом підстановки

$$Y = F[X] \quad (1.5)$$

Перевага агрегатної моделі у більшій простоті її отримання, оскільки моделі окремих підсистем простіші за модель системи в цілому. Перевага комплексної моделі у тому, що для її отримання немає необхідності досліджувати внутрішню структуру системи. Очевидно, вибір типу моделі залежить від способу її отримання: при теоретичному моделюванні зручніше користуватися агрегатним принципом, а при експериментальному моделюванні (ідентифікації) – комплексним.

1.2.7 Моделі аналітичні, імітаційні

Залежно від способу отримання результатів моделювання розрізняють математичні моделі:

- аналітичні;
- чисельні;
- імітаційні.

Аналітичне моделювання (analytical modeling) – знаходження характеристик об'єкта на основі формальної або алгоритмічної моделі шляхом виконання певних математичних перетворень: розв'язання рівнянь та систем рівнянь тощо.

Чисельне моделювання – знаходження характеристик об'єкта на основі формальної або алгоритмічної моделі шляхом застосування числових методів до розв'язання рівнянь та систем рівнянь тощо.

Імітаційне моделювання (simulation) – проведення на ЕОМ чисельних експериментів з математичною моделлю, що описує поведінку складної системи протягом певного періоду часу. Застосовується, як правило, в тих випадках, коли аналітичні способи дослідження моделі відсутні, а їх пошук потребує дуже великих витрат. Алгоритми імітаційного моделювання можуть враховувати як детермінованість, так і стохастичність, зв'язки і залежності, що характеризують об'єкт моделювання. Найбільше розповсюдження отримали стохастичні методи імітаційного моделювання, оскільки для більшості складних систем відомі лише усереднені значення параметрів. Оскільки імітаційне моделювання являє собою експеримент, важливе значення має застосування методів планування експерименту. Основні проблеми, які доводиться розв'язувати в зв'язку з цим:

- 1) забезпечення стохастичної збіжності;
- 2) намагання зменшити кількість різних комбінацій факторів, що впливають на об'єкт, без зменшення кількості отриманої інформації;
- 3) вибір плану експерименту, який залежить від глибини розуміння експериментатором суті процесів, що відбуваються в системі.

1.3 Характеристики моделей

Ефективне використання моделей можливе лише за умови, що їх характеристики відповідають певним вимогам. Основними характеристиками моделей є точність, вірогідність, адекватність, складність, універсальність.

1.3.1 Точність моделі

Точність математичної моделі (*accuracy of mathematical model*) – її властивість, яка відбиває ступінь збігу передбачених з її допомогою значень характеристик об'єкта з дійсними значеннями цих характеристик. За дійсне значення характеристики об'єкта звичайно приймають експериментально отримані значення або достовірно відомі факти.

Точність характеризується похибкою і є величиною, оберненою до неї. Похибка – це відхилення модельного значення від дійсного. Точністю або похибкою можна характеризувати не всі моделі, а лише ті, для яких визначено чисельну характеристику відхилення моделі від оригіналу, тобто метрика у просторі моделей. Зокрема, досить просто і природно знаходиться відхилення лише для функціональних моделей, які описують залежність одного параметра стану системи від вектора впливів.

Залежно від призначення моделі розглядають похибки абсолютні, відносні і зведені; максимальні, середні, середні квадратичні:

- абсолютна похибка

$$\Delta_y = y - y^*, \quad (1.6)$$

де y – модельне значення, y^* – дійсне значення;

- відносна похибка

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta_y}{y^*}; \quad (1.7)$$

- зведена похибка

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{y_{\max}^* - y_{\min}^*}, \quad (1.8)$$

де $y_{\max}^* - y_{\min}^*$ – діапазон значень результату моделювання;

- максимальна похибка

$$\Delta_{y_{\max}} = \max_{x_i \in X} (y_i - y_i^*), \quad (1.9)$$

де $\vec{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})$ – вектор вхідних величин об'єкта/моделі; X – множина можливих значень вектору вхідних величин;

– середня похибка

$$\overline{\Delta}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y(x_i) - y^*(x_i)], \quad (1.10)$$

де $N = \prod_{k=1}^{n_k} m_k$; m_k – кількість значень k -ї вхідної величини;

– середня квадратична похибка

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [y(x_i) - y^*(x_i)]^2}. \quad (1.11)$$

Якщо кількість значень мала ($N < 30$), то

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y(x_i) - y^*(x_i)]^2}.$$

Похибки моделювання також класифікують за джерелами походження: методичні, обчислювальні, похибки від невизначеності початкових даних тощо.

Методичні похибки можуть бути викликані нехтуванням певними впливовими факторами, помилками у виборі виду функціональної залежності, невідповідністю способу отримання результату моделювання особливостям моделі, неправильним вибором типу моделі тощо.

Обчислювальні похибки викликані особливостями алгоритму отримання результату. При великій кількості послідовних обчислень похибка накопичується і може досягати значної величини. Такі ситуації виникають при розв'язанні диференціальних рівнянь, особливо у частинних похідних, та інших задачах.

Похибки від невизначеності початкових даних відіграють значну роль при використанні алгоритмів, які мають низьку стійкість. Так, наприклад, при обчисленні похідної різницеvim методом похибка результату може значно перевищувати похибки початкових даних.

При застосуванні моделювання у діючих системах реального часу з'являється додаткова складова похибки – *динамічна*. Вона зумовлена тим, що протягом часу моделювання початкові дані можуть змінитися, і отримані результати вже не будуть їм відповідати. Очевидно, динамічна похибка залежить від співвідношення швидкості зміни початкових даних і швидкості моделювання.

Якщо визначені окремі похибки, то за умови їх незалежності загальна середня квадратична похибка підраховується за формулою

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_i (\sigma_y^2)_i}. \quad (1.12)$$

1.3.2 Вірогідність моделі

Вірогідністю характеризуються моделі, для яких не визначено метрику. Вірогідність (*reliability of mathematical model*) – це ймовірність відсутності помилки при побудові моделі

$$P_0 = 1 - P_{ном}. \quad (1.13)$$

Ймовірність помилки розраховується на основі аналізу усіх можливих джерел помилок. Але слід брати до уваги, що у деяких задачах локальна помилка може не привести до загальної помилки моделювання, наприклад у задачах знаходження мінімальних або максимальних шляхів за допомогою структурних моделей у вигляді графів, якщо цей шлях не проходить через помилково визначене ребро.

1.3.3 Адекватність моделі

Необхідна умова для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт дослідження – вимога адекватності моделі і об'єкта.

Адекватність (adequacy of mathematical model) – це правильне відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження.

Будь-яка система чи підсистема може бути подана різними способами, які значно відрізняються один від одного за складністю і деталізацією. В більшості випадків в результаті дослідження з'являється декілька різних моделей одної і тої ж системи. При цьому, залежно від глибини аналізу прості моделі послідовно замінюються все більш складними.

Оскільки будь-яка модель простіша за оригінал, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, при якій модель за всіма характеристиками відповідає оригіналу. Відповідно, оцінювання ступеня подібності може спиратися тільки на оцінювання точності або відмінності від оригіналу. Оцінювання відмінності стикається природним чином з великими труднощами, оскільки звичайно неможливо використовувати для порівняння об'єкт у всій його дійсній цілісності.

Можна виділити декілька евристичних критеріїв адекватності моделей:

1. *Достатня точність за граничних умов моделювання і у особливих точках.*

Для кожної моделі бажано вказувати границі значень параметрів, в яких вона адекватна об'єкту. Чим ширший цей діапазон, тим вищим є ступінь адекватності моделі.

Часто граничними умовами є характерні «точки»: нуль та нескінченність. Поведінка об'єкта при наближенні до таких значень звичайно є зрозумілою (наприклад, відомо, що струм з нульовою частотою, тобто постійний струм, не проходить через конденсатор, а зі зростанням частоти, тобто при наближенні частоти до НВЧ і частоти коливань світла, струм перестає проходити через провідники). Перевірка адекватності моделі у таких випадках здійснюється за допомогою граничного переходу.

2. *Достатня точність збігу з відомими випадками.*

Піонерські дослідження, тобто такі, яким досі не було аналогів, зустрічаються зрідка. Тому у літературних джерелах найчастіше можна знайти результати, які відповідають окремим випадкам застосування моделі.

3. *Підвищення або, принаймні, збереження точності при врахуванні додаткових факторів.*

Вище відзначалося, що одна з головних причин низької точності моделі – методична похибка, яка зумовлена нехтуванням певними факторами заради спрощення моделі. Очевидно, врахування додаткових факторів повинно зменшувати методичну похибку, отже, підвищувати точність моделі. Але це справедливо лише для адекватних моделей. Для неадекватних моделей врахування додаткових факторів найчастіше дозволяє краще виявити розбіжність моделі з оригіналом. Приклад застосування цього критерію адекватності показаний на рис. 1.6.

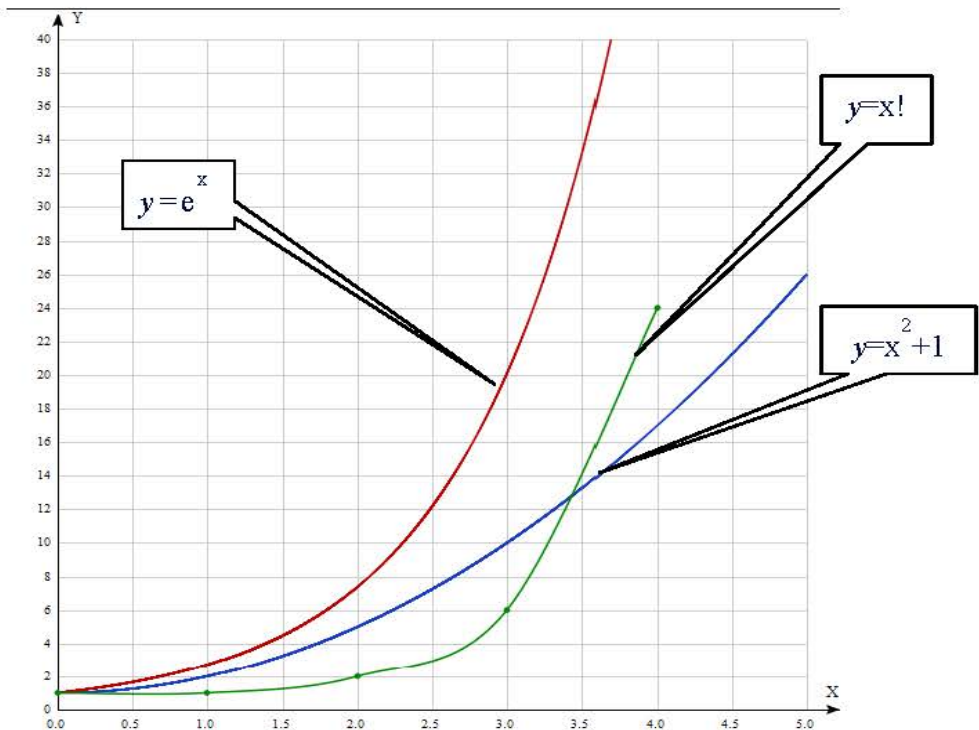


Рисунок 1.6 – Вплив кількості факторів на висновок про адекватність моделі

На рис. 1.6 оригіналом є функція «факторіал». Але ця функція незручна для дослідження, оскільки розраховується лише для дискретних значень, і для неї неможливо розрахувати деякі характеристики, наприклад, похідну. З рисунка видно, що ця функція подана у вигляді двох моделей: поліноміальної і експоненціальної. Якщо враховувати лише три фактори (три значення аргумента: 0, 1 і 2), то можна зробити висновок, що поліноміальна модель є адекватною. Але збільшення кількості точок ясно показує, що більш адекватною є експоненціальна модель.

4. Збереження точності на контрольній вибірці.

При побудові моделі на основі експериментальних даних ці дані розбивають на дві підмножини: ті, що використовуються для отримання параметрів моделі, і ті, що використовуються для перевірки її адекватності, – контрольна група. Головною умовою такого розбиття є рівномірне покриття кожною з підмножин усього простору даних.

1.3.4 Складність моделі

Вже відзначалося, що будь-яка модель є спрощеним описом об'єкта.

Складність моделі є комплексною характеристикою, яка переважно сприймається інтуїтивно. Залежно від виду моделі розрізняють декілька видів складності.

Структурна складність визначається кількістю елементів, зв'язків між ними та показником нерегулярності цих зв'язків.

Функціональна складність визначається кількістю вхідних і вихідних даних, обчислювальною складністю моделі.

Найглибше пророблені методи визначення складності для алгоритмічних моделей. Обчислювальна складність алгоритму – поняття в інформатиці та теорії алгоритмів, що позначає функцію залежності обсягу роботи, виконуваної деякими алгоритмом. При оцінюванні складності алгоритмів враховують кількість вхідних і вихідних даних, кількість операцій, кількість циклів і викликів зовнішніх функцій тощо.

Зі складністю тісно пов'язана інша характеристика – економічність моделі. *Економічність* математичної моделі визначається, перш за все, витратами ресурсів на моделювання: машинного часу, зусиль на отримання і введення початкових даних, необхідної потужності комп'ютерів тощо.

Для адекватних моделей збільшення складності приводить до зменшення методичної похибки, але, разом із тим, призводить до збільшення обчислювальної похибки (чим складніша модель – тим більше дій слід виконати при її практичному використанні, а кожна дія вносить додаткову обчислювальну похибку) і до збільшення витрат часу на отримання результату. Приклад типових залежностей похибок від складності моделі показано на рис. 1.7.

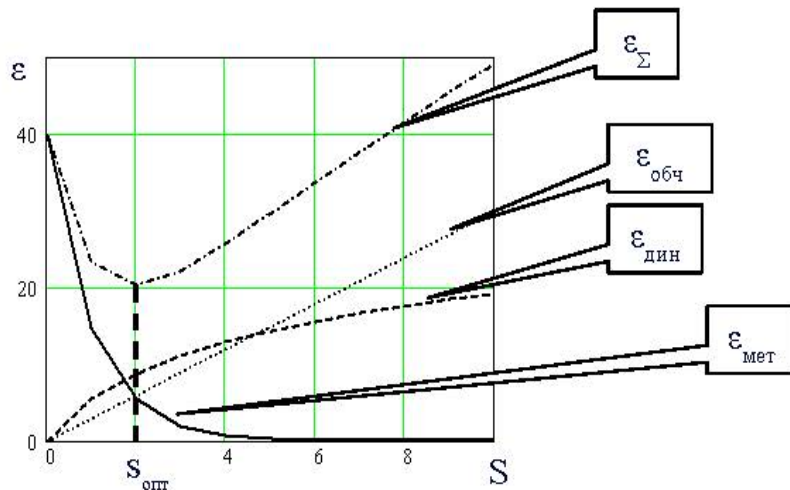


Рисунок 1.7 – Залежності похибок від складності моделі: S – складність, $\varepsilon_{\text{мет}}$ – методична похибка, $\varepsilon_{\text{дин}}$ – динамічна похибка, $\varepsilon_{\text{обч}}$ – обчислювальна похибка, ε_{Σ} – сумарна похибка

Очевидно, існує оптимальна складність, яка забезпечує найбільшу точність адекватної моделі.

1.3.5 Універсальність моделі

Ступінь універсальності математичної моделі визначається її застосуванням до аналізу чисельної групи однотипних об'єктів, до їх аналізу в одному чи багатьох режимах функціонування.

Як приклад найуніверсальніших моделей можна навести модель гравітаційної взаємодії («закон всесвітнього тяжіння» Ньютона). Меншу універсальність мають потокові моделі (закони Кірхгофа) – вони справедливі лише для лінійних систем. Ще вужче застосування мають моделі конкретних об'єктів – їх універсальність проявляється при розгляді об'єкта за різноманітних умов (різних вхідних даних, впливів тощо). Підсумовуючи сказане, слід зазначити, що математичне моделювання та ідентифікації об'єктів і систем є складним багатоступінчастим процесом, який передбачає створення моделі, виконання розрахунків відповідно до моделі та використання отриманих результатів. І на кожному етапі крім формальних математичних методів необхідний ще й досвід інженера, дослідника.

При цьому слід брати до уваги вплив точності і складності не тільки на перший етап, а й, що є найголовнішим, на остаточний результат застосування моделі. Адже дуже часто висока точність моделі зводиться нанівець похибками розрахунків при застосуванні моделі в задачах оптимізації, оцінювання тощо через велику складність. І тільки значний досвід дослідника дозволяє вже з самого початку моделювання досягти цього компромісу.

1.3.6 Поняття «жорстких» та «м'яких» математичних моделей

Математичні моделі можуть бути «жорсткими» і «м'якими». У жорстких моделях невеликі зміни початкових даних можуть призводити до істотно якісно іншого результату. М'які моделі допускають зміни, причому зміни результату при цьому будуть носити тільки кількісний характер.

Прикладом жорсткої моделі є модель війни або битви.

У простій моделі боротьби двох супротивників (скажімо, двох армій) – моделі Ланкастера – стан системи описується точкою (x, y) . Координати цієї точки, x і y – це чисельності протиборчих армій. Модель має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = -by, \\ \dot{y} = -ax. \end{cases}$$

Тут a – потужність зброї армії x , b – армії y . Попросту кажучи, передбачається, що кожен солдат армії x вбиває за одиницю часу a солдат армії y і, відповідно, кожен солдат армії y вбиває b солдатів армії x . Точка над буквою тут і далі означає похідну за часом t , тобто швидкість зміни величини.

Це жорстка модель, яка допускає розв'язання

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad ax \cdot dx = by \cdot dy, \quad ax^2 - by^2 = const.$$

Еволюція чисельності армій x і y відбувається уздовж гіперболи, заданої цим рівнянням (рис. 1.8). За якою саме гіперболою йтиме війна, залежить від початкової точки.

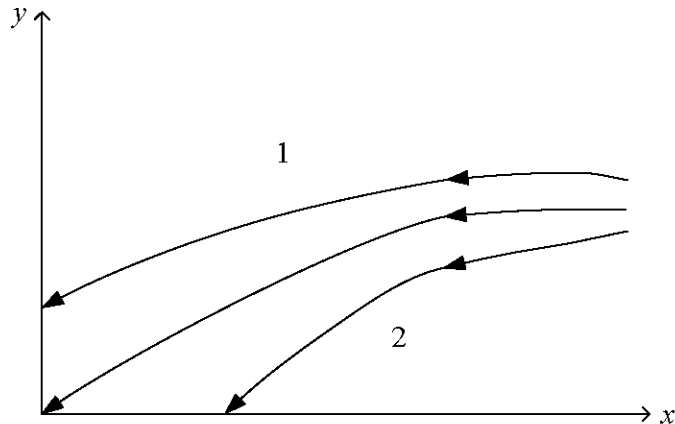


Рисунок 1.8 – Жорстка модель війни

Ці гіперболи розділені прямою $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$. Якщо початкова точка лежить вище цієї прямої (випадок 1 на рис. 1.8), то гіпербола виходить на вісь y . Це означає, що в ході війни чисельність армії x зменшується до нуля (за кінцевий час). Армія y виграє, суперник знищений.

Якщо початкова точка лежить нижче (випадок 2); то виграє армія x . У стані, що розділяє ці випадки, війна призводить до винищення обох армій. Але на це потрібно нескінченно великий час: конфлікт продовжує тліти, коли обидва супротивники вже знесилені.

Висновок моделі такий: для боротьби з удвічі більш чисельними супротивником потрібно в чотири рази більш потужна зброя, втричі більшою чисельністю – в дев'ять разів і т. д. (на це вказують квадратні корені в рівнянні прямої).

Виникне питання – як зміниться висновок, якщо модель буде дещо іншою. Наприклад, коефіцієнти a і b можуть бути не строго постійними, а можуть, скажімо, залежати від x і від y . І точний вигляд цієї залежності нам може бути невідомий. Розглянемо м'яку модель війни (рис. 1.9).

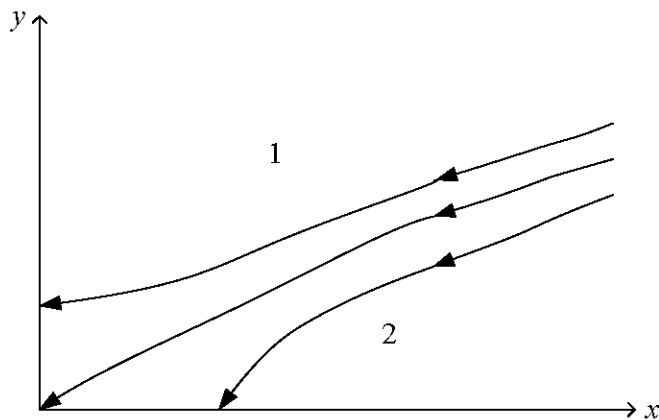


Рисунок 1.9 - М'яка модель війни

У цьому випадку мова йде про систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -b(x, y)y, \\ \dot{y} = -a(x, y)x, \end{cases}$$

яка вже не розв'язується явно. Однак в математиці розроблені методи, що дозволяють зробити висновки загального характеру, не знаючи явного виду функцій a і b .

У цій ситуації прийнято говорити про м'яку модель – модель, що піддається змінам (за рахунок вибору функцій у нашому прикладі).

Таким чином, жорсткі моделі можуть призводити до помилкових передбачень, оптимізація на основі жорсткої моделі може призводити до колапсу системи.

М'яка модель дозволяє запропонувати спосіб боротьби із зазначеним злом. Для отримання достовірних передбачень (прогнозів) важливо, щоб модель була структурно стійкою, тобто щоб висновки витримували малу зміну параметрів і функцій, що описують модель.

1.4 Систематичний підхід до моделювання

Наведена характеристика моделювання дозволяє узагальнити підхід до створення різноманітних моделей об'єктів і систем.

1.4.1 Ізоморфні та гомеоморфні моделі

Наведене вище поняття адекватності – вельми широке, основане на строгих, щодо математики, поняттях ізоморфізму (*isomorphism*) і гомеоморфізму.

Дві системи (в даному випадку об'єкт дослідження і його модель) називаються *ізоморфними*, якщо між ними існує взаємно однозначний зв'язок. *Ізоморфна модель* має всі ознаки, які теоретично належать об'єкту-оригіналу.

В загальному випадку забезпечення ізоморфізму моделі і об'єкта дослідження може бути не тільки важко виконуваним, а й зайвим, оскільки складність моделі при цьому може виявитись настільки значною, що не буде можливим ніяке спрощення вирішуваної задачі. Гомеоморфізм, як і ізоморфізм, передбачає збереження в моделі всіх визначених на об'єктах дослідження властивостей і відношень.

Гомеоморфізм (homeomorphism) визначає таку форму зв'язку між двома подібними об'єктами, при якій однозначне лише в одну сторону перетворення дозволяє звести вихідну систему до більш простої системи, гомеоморфної вихідної. Її називають гомеоморфним образом вихідної системи.

На рис. 1.10 зображена графічна інтерпретація понять ізоморфізму і гомеоморфізму.

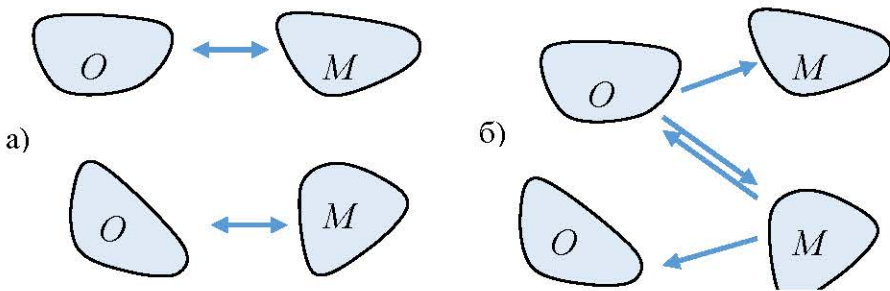


Рисунок 1.10 – Відповідність моделей і об'єктів: а) ізоморфізм; б) гомеоморфізм

Оскільки моделі, в основному, є спрощеним образом об'єкта, то вони переважно гомеоморфні об'єкту і одна одній.

Приклади ізоморфних моделей можна знайти, розглядаючи тотожні перетворення та різні форми запису одних і тих же об'єктів:

1. Системи лінійних рівнянь у звичайній і векторно-матричній формах

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, обидва записи однозначно відповідають один одному;

2. Алгоритм у вигляді графічної схеми і програма алгоритмічною мовою, яка його реалізує.

Приклади гомеоморфізму можна знайти, розглядаючи моделі наближення:

1. Апроксимація функцій

$y_0 = e^x$ і $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ – розклад функції e^x у ряд Тейлора з

обмеженою кількістю членів. Очевидно, функція $y_1(x)$ може розглядатися як наближення функції $y_0(x)$, а також безлічі інших функцій, наприклад, функції

$$y_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

2. Закон Менделєєва-Клапейрона є моделлю поведінки газу $PV = \frac{m}{\mu}RT$,

але однозначно вона відповідає лише «ідеальному» газу. Щодо до реальних газів вона є гомеоморфною.

Задача встановлення ступеня ідентичності моделі і об'єкта може бути поставлена так: будуємо математичну модель об'єкта таким чином, щоб при подачі однакових вхідних впливів на об'єкт і його модель вихідні сигнали мінімально відрізнялись один від одного.

Ступінь близькості моделі до об'єкта може оцінюватися дисперсійною мірою точності. Але існує клас об'єктів, для яких дисперсійна міра не дає достовірної відповіді на питання про близькість моделі і об'єкта.

Використання дисперсії $D[M(y/x)]$ умовного математичного сподівання припускає однаковість її розмірності з розмірностями дисперсій входів. Тому оцінювання ступеня ідентичності моделі і неоднорідного нелінійного об'єкта, на який діють змінні з різною розмірністю, за допомогою дисперсійної міри не завжди можливе. В таких випадках доцільно підійти до оцінювання ідентичності з точки зору інформаційної теорії систем. Цей підхід придатний для будь-яких систем.

1.4.2 Теорія подібності

Теорія подібності (similarity theory) – вчення про дослідження різноманітних явищ, оснований на понятті про їх схожість.

Два явища подібні, якщо за числовими значеннями характеристик одного явища можна отримати числові значення характеристик іншого явища простим перерахунком, який аналогічний переходу від однієї системи одиниць вимірювання до іншої. Для будь-якої сукупності подібних явищ всі відповідні безрозмірні характеристики (безрозмірні комбінації розмірних величин) мають однакове числове значення. Обернене твердження також правильне, тобто, якщо всі

відповідні безрозмірні характеристики для двох явищ однакові, то ці явища фізично подібні.

Аналіз розмірності і теорія подібності тісно пов'язані між собою і покладені в основу експериментів з моделями. В таких експериментах здійснюються заміни вивчення деякого об'єкта в натурі вивченням аналогічного явища на моделі іншої фізичної природи (зазвичай в спеціальних лабораторних умовах).

Математична подібність чи просто *подібність* – математична аналогія при наявності пропорційності між схожими змінними. Два об'єкти подібні, якщо:

- 1) мають схожий математичний опис у формі рівнянь одного виду:

$$F(z_1, x_{1i}, t_{1s}, D_{1s}, a_{1j}) = 0; \quad (1.14)$$

$$F(z_2, x_{2i}, t_{2s}, D_{2s}, a_{2j}) = 0; \quad (1.15)$$

$$i = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots; \quad s = 1, 2, \dots$$

де $D_{1s} = \frac{d}{dt_{1s}}, D_{2s} = \frac{d}{dt_{2s}}$ – оператори диференціювання;

- 2) подібні змінні (z_1 і z_2 ; x_{1i} і x_{2i}, t_{1s} і t_{2s}) зв'язані постійними коефіцієнтами – *константами подібності*:

$$C_z = \frac{z_1}{z_2}; C_{xi} = \frac{x_{1i}}{x_{2i}}; C_z = \frac{t_{1s}}{t_{2s}} = \frac{dt_{1s}}{dt_{2s}} = \frac{D_{2s}}{D_{1s}}. \quad (1.16)$$

Незмінна пропорційність іноді підкреслюється позначенням $C = idem$ (*idem* – незмінно). При умовах (1.16) відповідні подібні рівняння, функції і змінні називаються подібними.

Необхідні умови подібності – сумісність рівнянь зв'язує константи подібності певними рівняннями констант, які можна отримати двома методами.

Метод переходу від одного подібного рівняння до іншого

Користуючись константами подібності, заміняють, наприклад, в рівнянні (1.14) величини $z_1, x_{1i}, t_{1s}, D_{1s}$ подібними величинами $z_2, x_{2i}, t_{2s}, D_{2s}$, підставляючи $z_1 = C_z z_2, x_{1i} = C_{xi} x_{2i}, t_{1s} = C_{ts} t_{2s}, D_{1s} = \frac{D_{2s}}{C_{ts}}$. В результаті отримують проміжне рівняння

$$F\left(C_z z_2, C_{xi} x_{2i}, C_{ts} t_{2s}, \frac{D_{2s}}{C_{ts}}, a_{1j}\right) = 0, \quad (1.17)$$

яке має бути тотожним рівнянню (1.15). Для встановлення умов тотожності, що є рівняннями констант подібності, необхідно зробити однаковими розмірності членів цих рівнянь зрівнюваними способами, внаслідок чого можуть мати різний вид і рівняння констант. Проте завжди кожна можлива форма їх може бути перетворена в будь-яку іншу.

Приклад. Об'єкти описуються диференціальними рівняннями

$$D_1 z_1 + a_{11} z_1 - a_{12} x_1 = 0; \quad (1.18)$$

$$D_2 z_2 + a_{21} z_2 - a_{22} x_2 = 0; \quad (1.19)$$

де $D_1 = \frac{d}{dt_1}$; $D_2 = \frac{d}{dt_2}$.

Констант подібності три:

$$C_z = \frac{z_1}{z_2}; \quad C_x = \frac{x_1}{x_2}; \quad C_t = \frac{t_1}{t_2} = \frac{D_2}{D_1}.$$

Заміна змінних у рівнянні (1.18) дає

$$\frac{D_2}{C_t} C_z z_2 + a_{11} C_z z_2 - a_{12} C_x x_2 = 0. \quad (1.20)$$

Зробивши розмірність членів цього рівняння такою ж, як в рівнянні (1.19), отримаємо

$$D_2 z_2 + a_{11} C_t z_2 - \frac{a_{12} C_x C_t}{C_z} = 0. \quad (1.21)$$

або

$$\frac{a_{22} C_z}{a_{12} C_x C_t} D_2 z_2 + \frac{a_{11} a_{22} C_z}{a_{12} C_x} z_2 - a_{22} x_2 = 0. \quad (1.22)$$

Умови тотожності рівнянь (1.21) і (1.19):

$$a_{11} C_t = a_{21}; \quad \frac{a_{22} C_x C_t}{C_z} = a_{22}. \quad (1.23)$$

Умови тотожності рівнянь (1.22) і (1.19):

$$\frac{a_{22} C_z}{a_{12} C_x C_t} = 1; \quad \frac{a_{11} a_{22} C_z}{a_{12} C_x} = a_{21}. \quad (1.24)$$

Перша форма рівнянь констант (1.23) легко перетворюється у другу (1.24) і навпаки.

Метод критеріїв подібності

Після встановлення системи параметрів, що визначають виділений клас явищ, встановлюються *умови подібності* двох явищ. Для подібності двох явищ необхідно і достатньо, щоб числові значення безрозмірних комбінацій, складених з повного переліку параметрів, які утворюють базу, в цих обох явищах були однакові. Умова про постійність *бази абстрактних параметрів*, складених із заданих величин, які визначають явище, називається *критерієм подібності*. В гідродинаміці найважливішим критерієм є число Рейнольдса, яке характеризує співвідношення між інерційними силами і силами в'язкості, число Маха враховує стиснення газу, число Фруда характеризує співвідношення між інерційними силами і силами тяжіння.

Нехай явище визначається n незалежними параметрами, деякі з них можуть бути безрозмірними. Нехай розмірність визначається змінними і фізичними постійних виразів через розмірність k з цих параметрів з незалежними розмірностями ($k \leq n$). Тоді з n величин можна скласти лише $n-k$ незалежних комбінацій. Всі шукані безрозмірні характеристики явищ можна розглядати як функ-

цію від цих $n-k$ незалежних безрозмірних комбінацій, складених з певних параметрів. Серед цих безрозмірних величин, складених з певних характеристик явищ, завжди можна вказати деяку базу, тобто систему безрозмірних величин, які визначають собою всі інші.

Подібні рівняння (1.14) і (1.15) приводяться до безрозмірної форми, при якій всі їх члени мають розмірність, що дорівнює одиниці:

$$\Phi(z_1, x_{1i}, t_{1s}, D_{1s}, a_{1j}) \pm 1 = 0; \quad (1.25)$$

$$\Phi(z_2, x_{2i}, t_{2s}, D_{2s}, a_{2j}) \pm 1 = 0; \quad (1.26)$$

Добутки сталих коефіцієнтів і степенів різних величин об'єднуються в **безрозмірні степеневі комплекси – критерії подібності** виду

$$\pi_{1r} = a_{1r} z_1^{\alpha_r} x_{1i}^{\beta_{ir}} t_{1s}^{\gamma_{sr}} D_{1s}^{\delta_{sr}}; \quad (1.27)$$

$$\pi_{2r} = a_{2r} z_2^{\alpha_r} x_{2i}^{\beta_{ir}} t_{2s}^{\gamma_{sr}} D_{2s}^{\delta_{sr}}, \quad (1.28)$$

де $\alpha_r, \beta_{ir}, \gamma_{sr}, \delta_{sr}$ – деякі сталі.

В результаті безрозмірні функції подаються *критеріальними функціями*

$$\Phi(z_1, x_{1i}, t_{1s}, D_{1s}, a_{1j}) = \varphi(\pi_{1r}); \quad (1.29)$$

$$\Phi(z_2, x_{2i}, t_{2s}, D_{2s}, a_{2j}) = \varphi(\pi_{2r}), \quad (1.30)$$

а рівняння (1.25) і (1.26) – **критеріальні рівняння**

$$\varphi(\pi_{1r}) \pm 1 = 0; \quad (1.31)$$

$$\varphi(\pi_{2r}) \pm 1 = 0. \quad (1.32)$$

У випадку подібності подібні критерії рівні:

$$\pi_{1r} = \pi_{2r}, \quad (1.33)$$

що іноді записується у символічному вигляді $p_r = \text{idem}$.

Рівняння констант подібності мають вид:

$$\frac{\pi_{1r}}{\pi_{2r}} = \frac{a_{1r}}{a_{2r}} C_z^{\alpha_r} C_{x_i}^{\beta_{ir}} C_{t_s}^{\gamma_{sr} - \delta_{sr}} = 1. \quad (1.34)$$

Приведення рівнянь (1.14) і (1.15) до безрозмірної форми (1.25), (1.26) може бути виконано різними способами. Внаслідок цього різний вид можуть мати і критерії подібності, а значить – і рівняння констант. Проте, як і в методі переходу від одного рівняння до іншого, кожна можлива форма їх перетворюється в будь-яку іншу.

Приклад. Об'єкти описуються рівняннями (1.18), (1.19). Приводимо їх до безрозмірної форми, наприклад виду

$$\frac{a_{11}}{D_1} - \frac{a_{12}x_1}{D_1z_1} + 1 = 0; \quad \frac{a_{21}}{D_2} - \frac{a_{22}x_2}{D_2z_2} + 1 = 0; \quad (1.35)$$

або

$$\frac{D_1 z_1}{a_{12} x_1} + \frac{a_{11} z_1}{a_{12} x_1} - 1 = 0; \quad \frac{D_2 z_2}{a_{22} x_2} + \frac{a_{21} z_2}{a_{22} x_2} - 1 = 0; \quad (1.36)$$

В першому випадку (1.35) отримуємо критеріальне рівняння

$$\pi'_{11} - \pi'_{12} + 1 = 0; \quad \pi'_{21} - \pi'_{22} + 1 = 0; \quad (1.37)$$

причому

$$\pi'_{11} = \frac{a_{11}}{D_1}; \quad \pi'_{12} = \frac{a_{12} x_1}{D_1 z_1}; \quad \pi'_{21} = \frac{a_{21}}{D_2}; \quad \pi'_{22} = \frac{a_{22} x_2}{D_2 z_2}$$

і рівняння констант

$$\frac{\pi'_{11}}{\pi'_{21}} = \frac{a_{11} C_t}{a_{21}} = 1; \quad \frac{\pi'_{12}}{\pi'_{22}} = \frac{a_{12} C_x C_t}{a_{21} C_z} = 1, \quad (1.38)$$

рівносильні (1.23).

У другому випадку (1.36) отримуємо критеріальне рівняння

$$\pi''_{11} + \pi''_{12} - 1 = 0; \quad \pi''_{21} + \pi''_{22} - 1 = 0;$$

причому

$$\pi''_{11} = \frac{D_1 z_1}{a_{12} x_1}; \quad \pi''_{12} = \frac{a_{11} z_1}{a_{12} x_1}; \quad \pi''_{21} = \frac{D_2 z_2}{a_{22} x_2}; \quad \pi''_{22} = \frac{a_{21} z_2}{a_{22} x_2}$$

і рівняння констант

$$\frac{\pi''_{11}}{\pi''_{21}} = \frac{a_{22} C_z}{a_{12} C_x C_t} = 1; \quad \frac{\pi''_{12}}{\pi''_{22}} = \frac{a_{11} a_{22} C_z}{a_{12} a_{21} C_x} = 1,$$

рівносильні (1.24).

Рівняння констант подібності повинні бути сумісні і незалежні. Залежні рівняння можуть бути із системи усунуті. Число незалежних рівнянь констант дорівнює числу m незалежних критеріїв подібності r_r , яке визначає основна в теорії подібності p -теорема:

Залежність $F(x_1, x_2, \dots, x_k, X_1, X_2, \dots, X_m) = 0$, що зв'яже $n = k + m$ змінних і постійних розмірних величин, серед яких k величин x_1, x_2, \dots, x_k мають незалежні розмірності, може бути перетворена в залежність

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0$$

між $m = n - k$ незалежними безрозмірними степеневими комплексами r_r величин $x_1, x_2, \dots, x_k, X_1, X_2, \dots, X_m$.

Якщо число констант подібності q дорівнює числу незалежних рівнянь m , то всі константи однозначно визначаються із системи рівнянь констант. Якщо $q > m$, то $q - m$ констант вибираються довільно. Випадок $q < m$ неможливий.

Окремими випадками математичної подібності є: геометрична (подібність геометричних образів), часова (подібність функцій часу, при цьому часова константа показує, в якому відношенні знаходяться такі параметри функцій, як період, часова затримка і т. д.), фізична (подібність об'єктів при наявності їх фізичної аналогії; при цьому всі константи подібності – безрозмірні величини). При

фізичній подібності критерії подібності можуть бути отримані без математичного опису об'єктів, на основі аналізу розмірності.

Аналіз подібності двох об'єктів полягає у: 1) встановленні подібності рівнянь, що їх описують; 2) визначенні констант подібності; 3) виведенні рівнянь констант; 4) встановленні відповідності констант подібності рівнянням констант; 5) встановленні подібності умов однозначності.

Синтез подібності складається з: 1) вибору відповідного об'єкта, який описується рівняннями, подібними до рівнянь, що описують даний об'єкт; 2) виведення рівнянь констант; 3) вибору констант подібності, що задовольняють рівняння констант; 4) забезпечення подібності умов однозначності.

На рис. 1.11 наведений приклад двох подібних моделей різної фізичної природи.

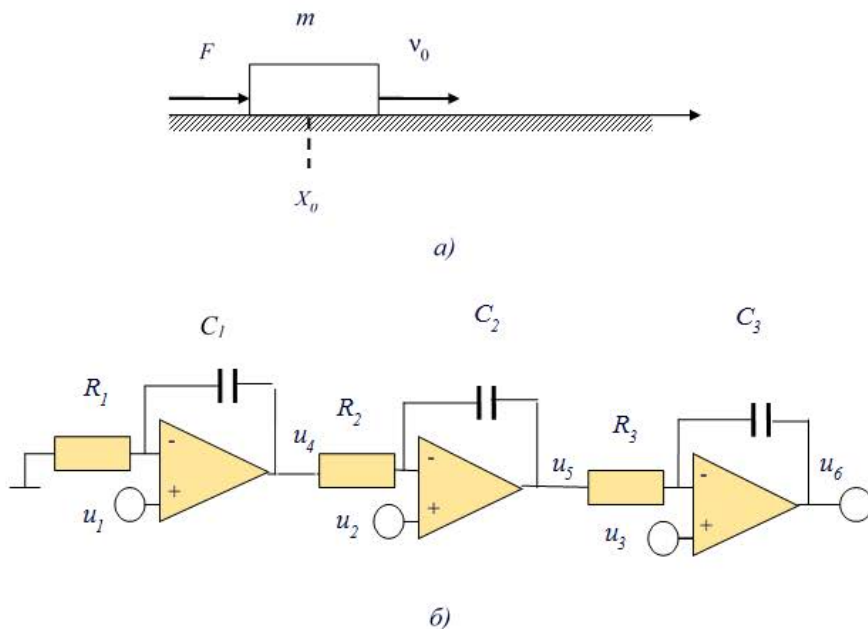


Рисунок 1.11 - Подібні моделі: а) механічна, б) електрична

Механічна модель описується системою

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} \\ v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F}{m} t \\ a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \end{cases}$$

Електрична модель описується системою інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} u_4 = \frac{1}{R_1 C_1} \int_0^t u_1 dt \\ u_5 = \frac{1}{R_2 C_2} \int_0^t (u_2 - u_4) dt \\ u_6 = u_3 - u_5 \end{array} \right. \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_4}{dt} = \frac{1}{R_1 C_1} u_1 \\ \frac{du_5}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} (u_2 - u_4) \\ u_6 = u_3 - u_5 \end{array} \right.$$

Між параметрами двох моделей існує відповідність

$$-u_1 \longleftrightarrow a$$

$$u_2 \longleftrightarrow v_0$$

$$u_3 \longleftrightarrow x_0$$

$$u_4 \longleftrightarrow \frac{F}{m} t$$

$$u_2 - u_4 \longleftrightarrow v_0 + \frac{F}{m} t$$

$$-u_5 \longleftrightarrow v_0 t + \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$u_6 \longleftrightarrow x_0 + v_0 t + \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Якщо умови подібності виконуються, то для фактичного розрахунку всіх характеристик об'єкта за даними про розмірні характеристики на моделі необхідно знати перехідні коефіцієнти для всіх відповідних величин. Якщо явище визначається n параметрами, з яких k мають незалежну розмірність, то для величини з незалежними розмірностями перехідні коефіцієнти можуть бути довільні і їх потрібно задати з урахуванням умови задачі, а при експериментах – і з урахуванням умов досліду. Перехідні коефіцієнти для всіх інших розмірних величин отримують з формул, які виражають розмірність кожної розмірної величини через розмірність k величин з незалежними розмірностями, для яких коефіцієнти підказані умовами досліду і постановкою задачі.

Теорія подібності є логічною основою самої ідеї моделювання, коли на основі дослідження математичних залежностей, параметрів та властивостей одних об'єктів (як реальних, фізичних, так і формальних, математичних) роблять висновки щодо поведінки інших об'єктів.

1.4.3 Взаємний зв'язок та перетворення моделей

Моделі різних типів тісно пов'язані між собою і можуть перетворюватися одна в одну (повністю у випадку ізоморфних моделей і частково у випадку гомеоморфних).

Цей підхід ґрунтується на усвідомленні того, що всі моделі об'єктів відображають одну й ту ж об'єктивну реальність різними методами і у різних формах. Отже, між ними повинен бути тісний зв'язок. Схематично цей зв'язок зображений на рис. 1.12.

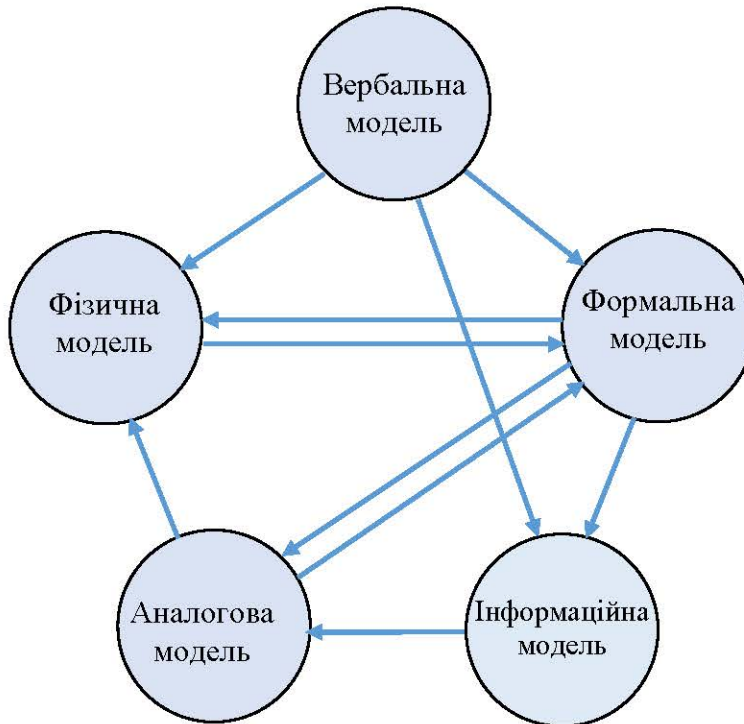


Рисунок 1.12 – Система моделей

Кожна з моделей має свої переваги і недоліки, а обрання за основу тої чи іншої моделі зумовлене метою та смаками дослідника.

1.4.4 Аналіз і синтез моделей

Слід відзначити, створювана модель системи S , з точки зору системного підходу, також є системою S' і може розглядатися відносно зовнішнього середовища E . Найпростіші за поданням є моделі, в яких немає ніякої деталізації, а зберігаються лише фундаментальні закони і загальні закономірності поведінки елементів системи. Правильне розуміння взаємозв'язків як всередині самої моделі M , так і взаємодії її з зовнішнім середовищем E , значною мірою визначається тим, на якому рівні знаходиться спостерігач.

В основі системного підходу лежить розгляд системи як інтегрованого цілого, причому цей розгляд при розробці починається з головного: формулювання загальної мети моделювання. Моделі окремих підсистем, якщо така деталізація необхідна, отримуються шляхом *аналізу* загальної мети і моделі системи. Розробка моделі означає *синтез* окремих компонент в єдину модель, причому кожна з компонент вирішує свої власні задачі та ізольована від інших частин моделі.

На базі системного підходу може бути запропонована і деяка послідовність розробки моделей, коли виділяють дві основні стадії проектування: *макропроектування* і *мікропроектування*.

На стадії макропроектування на основі даних про реальну систему і зовнішнє середовище будується модель зовнішнього середовища, виявляються ресурси і обмеження для побудови моделі системи, вибирається модель системи і критерії, які дозволяють оцінити адекватність моделі реальній системі.

На стадії мікропроектування визначаються деталі внутрішньої структури і параметри моделі, створюються засоби її реалізації. На цій стадії можна встановити основні характеристики створеної моделі, оцінити час роботи з нею і витрати ресурсів для отримання заданої якості моделі системи.

1.4.5 Модель як σ -алгебра

Фундаментальною основою математичного моделювання є *теорія моделей*. Виникла на початку 30-х років XX ст. на основі семантичних досліджень в математичній логіці і розвитку *теорії універсальних алгебр*. Основи теорії моделей розроблені в роботах Д. Гільберта, А. Тарського, А. І. Майцева, К. Геделя, Е. Лося та інших. В теорії моделей досліджуються загальні властивості *алгебраїчних систем*, аксіоматизація класів алгебраїчних систем тощо.

Відповідно до загального підходу модель можна розглядати як певну алгебраїчну систему, яка складається з множини об'єктів, що описуються даною моделлю, набору операцій, які можуть з ними виконуватися, та властивостей, які вони мають.

У практиці моделювання загальна теорія моделей знайшла втілення у технології об'єктно-орієнтованого програмування. Ця технологія ґрунтується на поняттях об'єкта та класу. Фактично *клас* – це програмна реалізація алгебраїчної системи, яка містить визначення множини об'єктів, – “типу даних”, та операцій, які можуть до них застосовуватися – “методів”. Програмна модель, написана за технологією об'єктно-орієнтованого програмування, є системою об'єктів, що взаємодіють один з одним.

1.4.6 Метричний простір моделей

Ще одним аспектом загальної теорії моделей є використання поняття *топологічного і метричного простору*. Ці поняття вкрай важливі для обґрунтування методів оцінювання точності, вірогідності і адекватності моделей.

Топологічний простір – основний об’єкт вивчення топології. Поняття топологічного простору можна розглядати як узагальнення поняття геометричної фігури, в якому ми відволікаємося від властивостей на зразок розміру або точного положення частин фігури в просторі і зосереджуємося тільки на взаємному розташуванні частин. Топологічні простори виникають природно майже в усіх розділах застосувань математичного моделювання.

Наведемо основні означення.

Нехай дана множина X . Система T її підмножин називається **топологією на X** , якщо виконані такі властивості:

- 1) об’єднання довільного сімейства множин, що належать T , належить T ;
- 2) перетин кінцевого сімейства множин, що належать T , належить T ;
- 3) X і \emptyset належать T .

Множина X разом із заданою на ній топологією T називається **топологічним простором**. Множини, що належать T , називаються відкритими множинами.

Якщо не вдаватися до чітких математичних означень теорії множин, то топологічний простір – це множина об’єктів, для яких визначене поняття гомеоморфізму моделей. Якщо розглядати систему як множину взаємопов’язаних підсистем, то наявність безпосередніх зв’язків можна інтерпретувати як найближче оточення. Таким чином, структурна модель системи ще може розглядатись як **топологічний простір**.

Метричним простором називається множина, у якій визначена відстань між будь-якою парою елементів.

Метричний простір M є множиною точок з функцією відстані (також називається метрикою) $d : M \times M \rightarrow R$, де R позначає множину реальних чисел. Для будь-яких точок x, y, z з M ця функція повинна відповідати таким умовам (аксіомам метрики):

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &\geq 0; \\
 d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y; \\
 d(x, y) &= d(y, x) \text{ (симетрія);} \\
 d(x, y) &\leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (нерівність трикутника).}
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

Ці аксіоми відображають інтуїтивне поняття відстані. Наприклад, відстань повинна бути додатною; відстань від x до y така ж, як і від y до x . Нерівність трикутника означає, що пройти від x до z можна коротше, або хоча б не довше, ніж спочатку пройти від x до y , а потім від y до z .

З іншого боку, кожному множині гомеоморфних моделей можна вважати “найближчим оточенням” деякого елемента, в ідеальному випадку – абсолютно адекватної моделі. Якщо у такому топологічному просторі задана **метрика**, то адекватність може бути охарактеризована кількісно величиною відхилення моделі, або точністю.

1.5 Моделі в умовах невизначеності

Функціонування об'єктів і систем керування ґрунтується на певній *інформації* про стан системи, параметри та мету керування. Але ця інформація ніколи не буває абсолютно повною, точною і достовірною. В результаті системи керування завжди працюють в *умовах* певної *невизначеності*.

Врахування невизначеності приводить до суттєвого ускладнення математичного моделювання об'єктів і систем керування. Оскільки моделі використовуються на всіх етапах життєвого циклу, то протягом всієї історії розвитку теорії керування, особливо у період відсутності великих обчислювальних потужностей, перед дослідниками стояла задача всілякого спрощення математичних моделей. Тому в першу чергу розроблялися методи моделювання детермінованих систем, в яких невизначеністю нехтували.

Але детерміновані моделі не завжди дозволяють прийняти об'єктивне управлінське рішення, оскільки не враховують його ризик, що виникає внаслідок невизначеності обставин його прийняття.

У багатьох випадках нехтування невизначеністю приводить не просто до певних похибок, а до втрати адекватності моделі взагалі. Найкраще це було доведено у теорії інформації, яка стала базовою концептуальною моделлю систем зв'язку.

1.5.1 Джерела і види невизначеності моделей

Невизначеність моделей систем зумовлена багатьма факторами:

- заміною фактичних даних статистичними характеристиками або експертними оцінками;
- похибками вимірювань та завадами при передаванні інформації;
- неможливістю повністю проконтролювати стан великої розподіленої системи;
- прогнозуванням процесів тощо.

Як вже зазначалося раніше, модель системи складається з моделі сигналів і моделі перетворення. В умовах невизначеності модель сигналу характеризує можливі зміни значень сигналу, а модель перетворення характеризує можливі зміни параметрів або структури зв'язків підсистем.

Модель об'єкта, в поданні якої врахована невизначеність, називатимемо невизначеною моделлю. Невизначені моделі розрізняються в залежності від аспекту об'єкта, опис якого здійснюється за допомогою моделі. Основні види невизначених моделей показані на рис. 1.13.

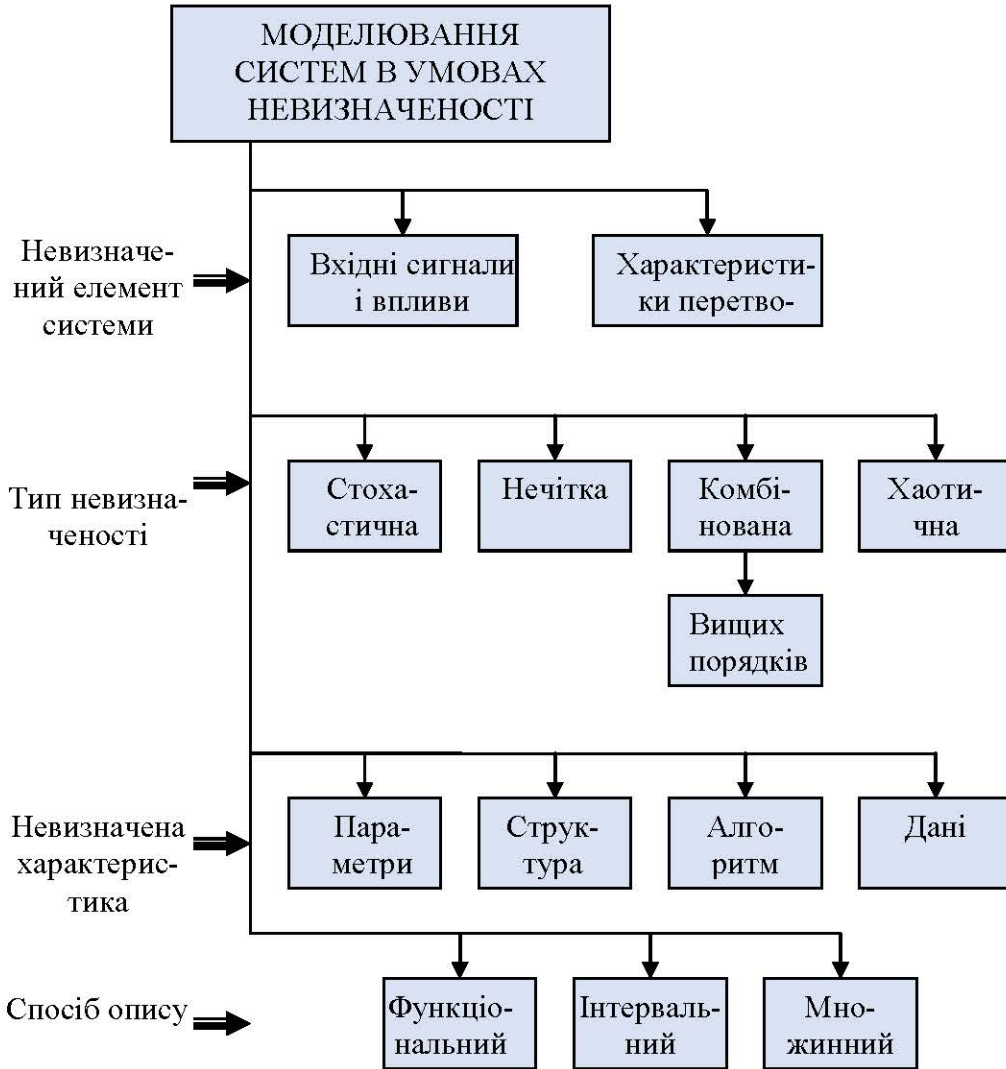


Рисунок 1.13 – Характеристики невизначеності моделей об’єктів і систем керування

1.5.2 Типи невизначеності моделей

1.5.2.1. Стохастична невизначеність

Стохастичною називають невизначеність, яка зумовлена дією випадкових факторів впливу.

Елементарні поняття про випадкові події, величини і функції

Випадковою називається подія, яка може або виникнути при реалізації даного комплексу умов, або не виникнути. Достовірні і неможливі події можуть розглядатися як окремі крайні випадкові події.

Згідно з теоретико-множинним підходом при розгляді поняття «випадкова подія» введемо поняття “елементарна подія”.

Елементарна подія – це один з декількох можливих результатів того чи іншого дослідження (випробування). При вивченні випадкових подій в ході розробки математичних моделей використовується, як правило, не одна, а група подій, між якими існують певні співвідношення.

- Подія A міститься в події B ($A \subset B$).
- Тотожні події ($A = B$).
- Добуток подій (відбуваються обидві події A і B) $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$, $A = A \cdot A$.

- Несумісні події $A \cdot B = \emptyset$.
- Сума подій (об’єднання подій – відбувається хоча б одна з подій A і B або обидві разом) $C = A + B$ або $C = A \cup B$.

– *Повна група подій*. Події A і B складають повну групу подій, якщо при реалізації заданого комплексу умов неодмінно відбудеться хоча б одна з цих подій. Сума всіх таких подій є подія достовірна:

$$C = A + B = U.$$

- *Протилежні події* $A + \bar{A} = U$; $A \cdot \bar{A} = \emptyset$.

Кількісною мірою ступеня можливості появи випадкової події для заданого комплексу умов є *ймовірність події*.

Властивості ймовірностей подій.

1. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю, тобто $P(\emptyset) = 0$.
2. Для будь-якої події A ймовірність протилежної події \bar{A} нуює: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. Якщо подія A тягне за собою подію B , тобто $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.
4. Ймовірність події A розташована між нулем і одиницею, тобто $0 \leq P(A) \leq 1$.
5. Ймовірність двох подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

У ряді випадків доводиться знаходити ймовірності подій при умові, що відбулася деяка подія B . Такі ймовірності називаються *умовними* і позначаються $P(A/B)$.

Подія A називається *незалежною* від іншої події B , якщо ймовірність події A не змінюється від того, настає подія B чи ні. В іншому випадку подія A називається *залежною* від події B . Отже, якщо події A і B незалежні, то $P(A/B) = P(A)$. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої за умови, що перша відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (1.40)$$

Ймовірність добутку незалежних подій дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.41)$$

Якщо події несумісні, то правило додавання ймовірностей приймає вигляд:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.42)$$

Якщо несумісні події складають повну групу, тобто

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = U \text{ і } A_i A_j = \emptyset, i \neq j$$

то:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (1.43)$$

Випадковою називається така *величина*, яка в результаті випробувань може прийняти те чи інше значення.

Випадкові величини поділяються на дискретні і неперервні. Крім дискретної і неперервної випадкових величин зустрічаються *випадкові величини змішаного типу*, для яких, разом з ділянками неперервних значень, є окремі, ізольовані значення.

Для того, щоб задати випадкову величину, необхідно задати множину значень, які вона може приймати, і ймовірності, з якими вона приймає ці значення. Відповідь на це питання дає вичерпна характеристика випадкової величини – *закон розподілу*.

Закон розподілу дозволяє визначити ймовірність появи випадкової величини в будь-якому інтервалі (і, зокрема, ймовірності будь-яких значень дискретної випадкової величини).

Основними формами закону розподілу є: ряд розподілу, функція розподілу і щільність розподілу.

Ряд розподілу є таблицею, в якій перераховані можливі значення випадкової величини і відповідні їм ймовірності. *Ряди розподілу*, утворені зі значень випадкової величини, що характеризують якісну ознаку, називаються *атрибутивними*. Ряди розподілів, утворені зі значень випадкової величини, що характеризують кількісну ознаку явища (події), називаються *варіаційними*.

Для характеристики неперервної випадкової величини визначають ймовірність появи значення випадкової величини меншого x , де x – поточна змінна, тобто визначають ймовірність події $X < x$. Ймовірність цієї події залежить від x , тобто є функцією x . Ця функція називається *функцією розподілу випадкової величини* X і позначається $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.44)$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини у напівзамкнений інтервал $[a, b)$

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a). \quad (1.45)$$

Функція розподілу є неспадна функція, значення якої починаються з нуля і доходять до одиниці, причому, в окремих випадках функція може мати стрибки-розриви.

Функцію розподілу дискретної випадкової величини можна визначити, знаючи її ряд розподілу, за формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i). \quad (1.46)$$

Для неперервної випадкової величини визначають ймовірність появи випадкової величини в межах малого інтервалу $[x, x + \Delta x)$. Розділивши цю ймовірність на довжину інтервалу Δx , знаходять середню щільність ймовірності і при необмеженому зменшенні довжини інтервалу переходять до границі, яка є щільністю розподілу в точці x :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (1.47)$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини на довільну ділянку $[a, b)$ дорівнює:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) \cdot dx. \quad (1.48)$$

Інтеграл в нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$. Це очевидно, оскільки зазначений інтеграл виражає ймовірність достовірної події – потрапляння випадкової величини на ділянку від $-\infty$ до $+\infty$, а тому і дорівнює одиниці.

Щільність розподілу є похідною функції розподілу. З іншого боку, $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$, звідки

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx. \quad (1.49)$$

Величину $F(x)$ називають *інтегральною функцією розподілу* величини X . Величина $f(x)$ – *диференціальна функція розподілу* випадкової величини X . Для оцінювання особливостей законів розподілу випадкових величин визначають числові характеристики цих величин.

При моделюванні об'єктів і систем керування переважно розглядаються не окремі випадкові величини, а сукупності випадкових величин; сукупність впливів на об'єкт, сукупність станів об'єкта тощо. Такі сукупності випадкових величин описуються багатовимірними законами розподілу, зокрема, багатовимірною диференціальною функцією розподілу $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для незалежних випадкових величин $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n).$$

Для багатовимірної диференціальної функції розподілу ймовірностей виконується базова умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$$

Числові характеристики випадкових величин

При вирішенні багатьох практичних задач часто досить вказати окремі числові характеристики, що визначають особливості того чи іншого розподілу випадкової величини. Ці характеристики називають *моментами розподілу*.

Моменти розподілу поділяються на початкові і центральні.

В загальному випадку початкові моменти розподілу

$$M_X^{(k_1 \dots k_n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} f_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.50)$$

а центральні

$$D_X^{(k_1 \dots k_n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)^{k_1} \dots (x_n - m_n)^{k_n} f_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.51)$$

де m_i – перший центральний момент (математичне сподівання) випадкової величини x_i .

Для оцінювання ступеня розкиду, розсіювання значень випадкової величини відносно середнього використовують перший початковий і другий центральний моменти:

- математичне сподівання;
- дисперсію

та пов'язані з ними показники:

- середнє квадратичне відхилення;
- коефіцієнт варіації.

Середнє значення, або математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюється за формулою

$$M[x] = m_x = a = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (1.52)$$

де x_i – можливі значення випадкової величини X ; p_i – ймовірність появи можливого значення випадкової величини X .

Математичне сподівання є теоретичною характеристикою випадкової величини при нескінченно великій кількості випробувань.

Емпіричною характеристикою випадкової величини при скінченній кількості випробувань є *емпіричне середнє*, що обчислюється за формулою

$$\bar{X} = M^*[X] = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_n \cdot m_n}{N} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{m_i}{N}, \quad (1.53)$$

або $M^*[X] = \sum_{i=0}^n x_i \cdot p^*(x_i)$, де $p^*(x_i) = \frac{m_i}{N}$ – частота значень x_i при N спостереженнях (випробуваннях); $N = \sum_{i=1}^n m_i$; m_i – кількість появ значень x_i при N спостереженнях.

Емпіричне середнє випадкової величини зі збільшенням числа випробувань (спостережень) наближається до математичного сподівання.

Для неперервної випадкової величини X математичне сподівання визначається інтегралом

$$M[x] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсією називається математичне сподівання квадрата відхилень випадкової величини від свого математичного сподівання. Середнє квадратичне відхилення дорівнює додатному значенню кореня квадратного з дисперсії

$$y_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{M[(X - m_x)^2]}. \quad (1.54)$$

Середнє квадратичне відхилення має однакову розмірність з випадковою величиною, в цьому полягає його перевага.

Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється за формулою

$$D_x = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - m_x)^2 \cdot p(x_i)]. \quad (1.55)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$D_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [(x - m_x)^2 \cdot f(x)] dx. \quad (1.56)$$

Емпіричні значення характеристик розсіювання обчислюють за формулами:

дисперсія

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{m_i}{N}; \quad (1.57)$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{m_i}{N}}. \quad (1.58)$$

Якщо число випробувань (спостережень) $N \geq 30$, то характеристики розсіювання обчислюють за формулами:

дисперсія

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{m_i}{N-1}; \quad (1.59)$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{m_i}{N-1}}. \quad (1.60)$$

Величини u_x^2 і u_x показують абсолютне відхилення від середнього значення випадкової величини, що недостатньо характеризує рівень її розсіювання. Відносною характеристикою розсіювання є *коефіцієнт варіації*, що обчислюється як відношення середнього квадратичного відхилення до емпіричного середнього

$$V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad (1.61)$$

або

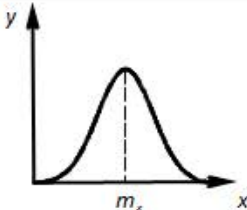
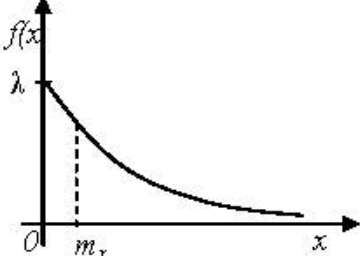
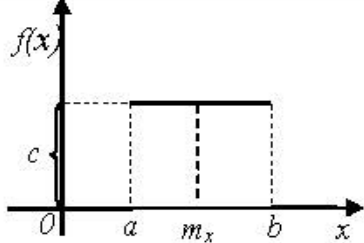
$$V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}. \quad (1.62)$$

Коефіцієнт варіації є безрозмірною величиною і може використовуватися для порівняння міри розсіювання випадкових величин, що мають різну розмірність.

Основні найпоширеніші закони розподілу наведені у таблиці 1.1.

Випадковий процес (стохастичний процес) показує зміни в часі випадкової величини, зокрема, зміни стану системи, які викликані випадковими впливами. Кількісно випадковий процес описується випадковою функцією часу $X(t)$, яка в будь-який момент часу t може приймати різні значення з певним розподілом ймовірностей. Таким чином, для будь-якого $t = t_i$ значення $X_i = X(t_i)$ є випадковою величиною.

Таблиця 1.1 – Типові розподіли ймовірностей

Закон розподілу	Щільність розподілу (ймовірність – для дискретних величин)	Графік щільності розподілу (ймо- вірності)	Моменти розподілу
Нормальний	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{a}}$		$m_x = b$ $D_x = a/2$
Експоненційний (показниковий)	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \lambda > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \lambda > 0. \end{cases}$		$m_x = \sigma = 1/\lambda$ $D_x = 1/\lambda^2$
Рівномірний	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$		$m_x = (a+b)/2$ $\sigma_x = (b-a)/2 \sqrt{3}$

<p>Біноміальний</p>	$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ $(m = 0, 1, \dots, n), q = 1 - p,$ $0 \leq p \leq 1.$		$m_x = np$ $\sigma_x = \sqrt{npq}$
<p>Пуассона</p>	$P(x = m) = \frac{(a^k \cdot e^{-a})}{k!} = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}, k =$ $0, 1, 2, \dots,$		$m_x = a$
<p>Гама-розподіл</p>	$f(x; \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$		$m_x = \frac{\alpha}{\beta}$ $D_x = \frac{\alpha}{\beta^2}$ $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{k-1} dt$
<p>Бета-розподіл</p>	$f(x; \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, x \geq 1, \\ \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & \text{при } 0 < x < 1 \end{cases}$ $(\alpha > 0, \beta > 0).$		$m_x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ $D_x = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$

У випадку багатократних повторень одного і того ж випадкового процесу (паралельно у багатьох однотипних об'єктах або в різні проміжки часу у одному об'єкті) матимемо сукупність випадкових функцій часу. Випадковий процес визначається сукупністю цих функцій часу та законами, що характеризують властивості сукупності. Кожна з функцій цієї сукупності називається *реалізацією випадкової функції*.

Залежно від можливих значень часу t та реалізації $X(t)$ розрізняють чотири типи випадкових процесів:

- 1) випадковий процес загального типу: t і $X(t)$ можуть приймати будь-які значення на відрізку (чи на всій) дійсної осі;
- 2) дискретний випадковий процес: t неперервне, а величини $X(t)$ дискретні;
- 3) випадкова послідовність загального типу: t дискретно, а $X(t)$ може приймати будь-які значення на відрізку (чи на всій) дійсної осі;
- 1) дискретна випадкова послідовність: t і $X(t)$ обидва дискретні.

Найповнішою характеристикою випадкового процесу є його *багатовимірний розподіл ймовірностей* $f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$, де x_1, \dots, x_n – значення випадкової величини відповідно у моменти часу t_1, \dots, t_n . Але визначення такого розподілу є досить складною теоретичною і практичною задачею. Тому частіше використовують лише окремі числові характеристики такого розподілу – *моменти розподілу*.

В загальному випадку початкові моменти розподілу і центральні моменти є функціями часу:

$$M_X^{(k_1 \dots k_n)}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.63)$$

$$D_X^{(k_1 \dots k_n)}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)^{k_1} \dots (x_n - m_n)^{k_n} f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.64)$$

Найчастіше використовуються:

- *середнє* випадкового процесу (або перший початковий момент)

$$m_x(t) = M_X^{(1)} \{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx, \quad (1.65)$$

- *дисперсія* випадкового процесу (або другий центральний момент)

$$D_x(t) = \sigma_x^2(t) = M_X^{(2)} \{[X(t) - m_x(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 f_1(x, t) dx, \quad (1.66)$$

– *коваріаційна функція* випадкового процесу (або змішаний другий початковий момент)

$$K_{x_1x_2}(t_1, t_2) = M_X^{(2)} \{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2; \quad (1.67)$$

– *кореляційна функція* випадкового процесу (або змішаний другий центральний момент)

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2}(t_1, t_2) &= M_X^{(2)} \{[X(t_1) - m(t_1)] \cdot [X(t_2) - m(t_2)]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Легко помітити, що коваріаційна і кореляційна функції тісно пов'язані, тому часто вони замінюють одна одну.

Випадкові процеси можуть бути стаціонарними і нестаціонарними.

Випадковий процес $x(t)$ називається *стаціонарним*, якщо його функція розподілу $f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ довільного порядку n не змінюється при будь-якому зсуві всієї групи точок t_1, t_2, \dots, t_n вздовж осі часу, тобто коли вираз функції розподілу довільного порядку не залежить від положення початку відліку часу

$$f(X, t) = f(X, t + \tau) = f(X). \quad (1.69)$$

Для стаціонарних процесів $m_x(t) = m_x = const$, $D_x(t) = D_x = const$, $K_x(t, t') = K_x(t' - t) = K_x(\Delta t)$.

Ергодичним називається стаціонарний випадковий процес, якщо будь-яка його ймовірнісна характеристика, яка одержана усередненням за множиною можливих реалізацій, дорівнює часовому середньому, яке одержане усередненням за достатньо великий проміжок часу з однієї єдиної реалізації випадкового процесу. Іншими словами, статистичні характеристики ергодичного процесу взагалі не залежать від часу.

Якщо стаціонарний випадковий процес $x(t)$, який заданий на відрізку $[0, T]$, ергодичний, то

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.70)$$

$$D_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt, \quad (1.71)$$

$$R_{xx}(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x] dt. \quad (1.72)$$

Очевидно, $R_{xx}(0) = D_x$.

Найповнішою характеристикою стаціонарного випадкового процесу є сукупність диференціальної функції (щільності) розподілу ймовірностей і кореляційної функції.

Функціональна і ймовірнісна залежності

Більшість явищ та процесів знаходиться у постійному взаємному і всеохоплювальному об'єктивному зв'язку. Розрізняють два види залежностей між явищами і процесами:

- функціональну;
- стохастичну (ймовірнісну, статистичну).

У випадку функціональної залежності маємо однозначне відображення множини A на множини B . Множину A називають областю визначення функції, а множини B – множиною значень функції.

Функціональна залежність зустрічається рідко. В більшості випадків функція або аргумент випадкові величини. X і Y піддаються дії різних випадкових факторів, серед яких можуть бути фактори, що є спільними для двох випадкових величин.

Якщо на випадкову величину X діють фактори $Z_1, Z_2, \dots, V_1, V_2$, а на Y – $Z_0, Z_2, V_1, V_3, \dots$, то наявність двох спільних факторів Z_2 і V_1 дозволяє говорити про ймовірнісну або статистичну залежність між ними.

Статистичною називають залежність між випадковими величинами, при яких зміна однієї з величин тягне за собою зміну закону розподілу іншої величини. Відповідно до властивості (1.73) така залежність двох випадкових величин може бути записана у вигляді

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y/X) = f_2(y) \cdot f_1(x/Y).$$

Для системи n випадкових величин можна записати

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2 / x_1) f(x_3 / x_1 x_2) \dots f(x_n / x_1 x_2 \dots x_{n-1})$$

Статистична залежність проявляється лише в масовому процесі, при великому числі одиниць сукупності.

Статистичний зв'язок між значеннями випадкового процесу характеризує *кореляційна функція* (1.72). Якщо вона характеризує статистичний зв'язок між значеннями одного і того ж випадкового процесу у моменти t і $(t+\tau)$, то називається автокореляційною. Аналогічно можна охарактеризувати зв'язок двох процесів за допомогою взаємної кореляційної функції

$$R_{xy}(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][y(t+\tau) - m_y] dt. \quad (1.73)$$

З формально-математичної точки зору взаємна кореляційна функція є симетричною відносно осі ординат, тобто $R_{xy}(\phi) = R_{xy}(-\phi)$. Це означає однаковість статистичного зв'язку між значеннями y до моменту фіксації x і після нього. Проте з логічної точки зору якщо вважати X впливом на об'єкт, а Y – станом, який змінюється під дією цього впливу, то є сенс розглядати лише випадок, коли значення Y фіксується тільки після значення X .

Зручним способом опису процесів є їх *спектральне подання*. Але випадкові процеси не відповідають умовам перетворення Фур'є, яке використовується для знаходження *спектра*. Тому для моделювання динаміки стаціонарних систем в умовах невизначеності використовують *спектральну щільність потужності* – зображення за Фур'є не самого процесу, а його кореляційної функції:

$$G_{xx}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.74)$$

і


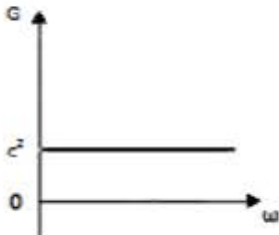

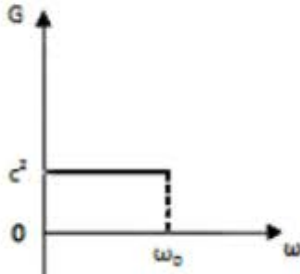
$$G_{xy}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.75)$$

Типові кореляційні функції і спектральні щільності потужності ергодичних процесів показані у табл. 1.2.

З них виділимо випадковий процес, який у системах моделювання використовується як базовий, з якого шляхом достатньо простих перетворень отримують інші, складніші процеси. Цей процес – «білий шум». Така назва дана за аналогією з білим світлом, яке є сумішшю усіх кольорів з приблизно однаковою потужністю. Отже, білий шум має рівномірну спектральну щільність потужності на всій осі частот. Відповідно, автокореляційна функція такого процесу дорівнює нулю на всій осі часу (крім $\tau=0$).

Моделі випадкових процесів можуть використовуватися для опису в умовах невизначеності як сигналів у системі, так і характеристик їх перетворення (параметрів системи, структурних характеристик тощо).

Таблиця 1.2 – Типові кореляційні і спектральні характеристики

Вид процесу	Кореляційна функція		Спектральна щільність	
	Вираз	Графік	Вираз	Графік
Білий шум	$c^2 \delta[\tau]$		c^2	
Результат проходження білого шуму через ідеальний фільтр низьких частот	$\frac{c^2}{\pi \tau} \sin \omega_0 \tau$		$\begin{cases} c^2 & \text{при } \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_0 \end{cases}$	

Вид процесу	Кореляційна функція		Спектральна щільність	
	Вираз	Графік	Вираз	Графік
Результат проходження білого шуму через реальний RC-фільтр низьких частот 1 порядку	$c^2 e^{-\alpha \tau }$ де $\alpha = \frac{1}{RC}$		$\frac{2\alpha c^2}{\alpha^2 + \omega^2}$	
Результат проходження білого шуму через резонансну систему	$c^2 \cos(\beta\tau) e^{-\alpha \tau }$		$\alpha c^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} \right]$	

1.5.2.2 Нечітка невизначеність

У складі систем керування часто використовуються підсистеми, що працюють з *експертною інформацією*. Вона використовується на етапах прогнозування, діагностики, проектування, планування, керування тощо для підтримки прийняття рішення.

Експерт – людина, яка за роки навчання та практики навчилася ефективно розв'язувати задачі, що належать до певної предметної області.

Одною з теорій, яка в останній час широко використовується для моделювання з використанням експертних оцінок, є *нечітка логіка*. Основні поняття та визначення були вперше розроблені Л. Заде як узагальнення відповідних властивостей і операцій класичної теорії множин.

Основним поняттям нечіткої логіки є поняття *нечіткої множини*.

Нечітка множина \tilde{A} на *універсальній множині* X – сукупність пар $(\mu_A(x), x)$, де $\mu_A(x)$ – ступінь належності елемента $x \in X$ до нечіткої множини \tilde{A} (зверніть увагу, що для звичайних «чітких» множин елемент або належить до множини – $x \in A$, або не належить – $x \notin A$, відповідно ступінь належності може приймати значення 1 або 0). Ступінь належності знаходиться в діапазоні $[0, 1]$ і може приймати дробові значення. Чим вищий ступінь належності, тим більшою мірою елемент універсальної множини відповідає властивостям нечіткої множини.

Експерти оперують переважно не числовими, а якісними характеристиками об'єктів у словесній формі.

Лінгвістичною змінною називається така змінна, значеннями якої є слова та словосполучення деякої природної чи штучної мови. Множину цих значень називають *терм-множиною*. *Термом* називається елемент терм-множини.

Функцією належності називається така функція, яка дозволяє обчислити ступінь належності довільного елемента універсальної множини до нечіткої множини. Функція належності $\mu^T(x)$ характеризує суб'єктивну міру впевненості експерта в тому, що чітке значення x відповідає нечіткому терму T .

Якщо універсальна множина складається з кінцевого числа елементів $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, тоді нечітка множина є «сукупністю пар» $\{\mu(x), x\}$.

Носій нечіткої множини A – сукупність елементів $x \in X$, для яких $\mu_A(x) > 0$, він позначається $\text{supp } A$.

Фаззифікація (від англ. *fuzzy* – нечіткий) – зіставлення множини значень x з її функцією належності $\mu(x)$, тобто переведення значень x у нечіткий формат.

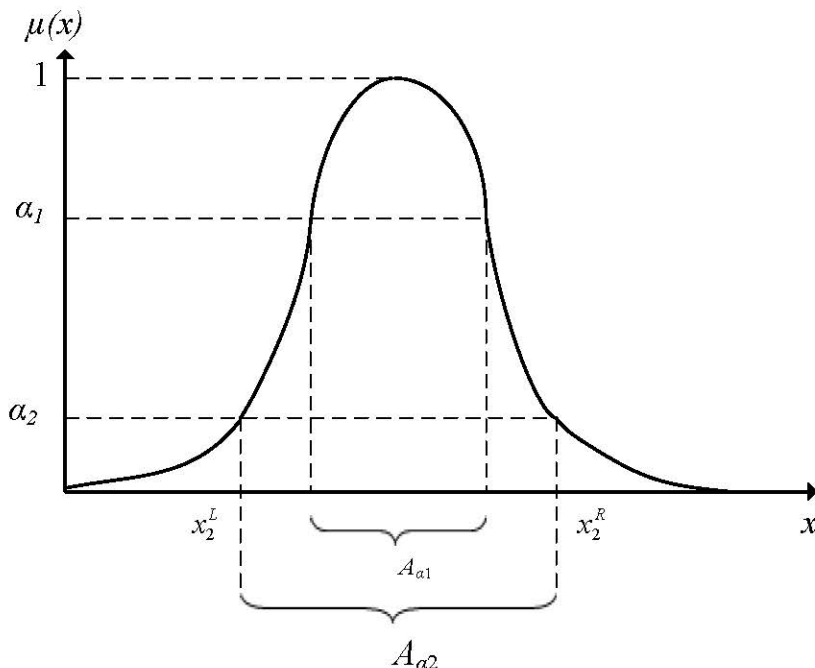
Дефаззифікація – процес, обернений фаззифікації.

Функції належності можуть задаватися як у звичайному функціональному вигляді, так і у вигляді розбиття цієї функції на α -рівні і визначення лівої і правої точок перетину цих рівнів функцією належності.

Формально α -рівнем нечіткої множини $A \subseteq X$, називається множина $A_\alpha \subseteq X$ така, що

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu^A(x) \geq \alpha\}. \quad (1.76)$$

Приклади α -рівневого подання нечіткої множини показані на рис. 1.14.



1.14 - α -рівні нечіткої величини

Таким чином в α -рівневому поданні нечітка множина задається сукупністю пар $\{X^L, X^R\}$ (ліва і права границі інтервалу) на рівні $0 \leq \alpha \leq 1$. На рис. 1.14 на рівнях α_1 і α_2 ці інтервали (множини значень) позначені відповідно A_{α_1} і A_{α_2} .

Операція знаходження відповідності «якщо $A' \subseteq X$ то $B \subseteq Y$ » для нечітких множин A' і B називається *нечітким логічним висновком* і виконується за формулою:

$$B' = \sum_{j=1}^m \sup_{i=1,1} [\inf(\{\mu^{A'}(x_i), \mu^B(x_i, y_j)\} / y_j)], \quad (1.77)$$

де $A, A' \subseteq X$, $B, B' \subseteq Y$; \sup – верхня границя (максимальне значення), \inf – нижня границя (мінімальне значення).

Формула (1.77) називається *max-min-композицією* нечітких множин.

Останнім часом поняття теорії нечітких множин та нечіткої логіки розповсюджені на операції з числами в умовах невизначеності. В результаті створений і активно розвивається новий фундаментальний напрямок математичного моделювання – *нечітка математика*.

Поняття нечіткого числа

Теорія нечітких чисел введена Дюбуа і Прейдом. Використання нечітких змінних і правил їх обробки допомагає значно покращити опис функціонування складних систем з невизначеностями і підвищити якість рішень, які приймаються щодо таких систем.

Нечітке число – це нечітка множина A , що визначена на множині дійсних чисел R , якщо його функція належності нормальна, неперервна і опукла, тобто

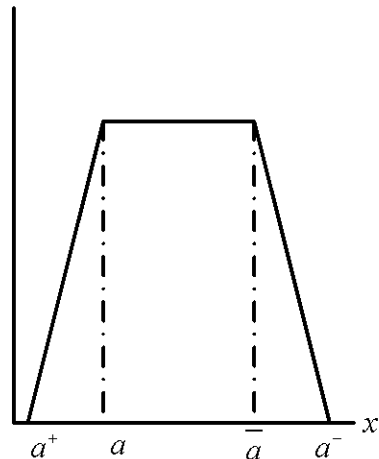
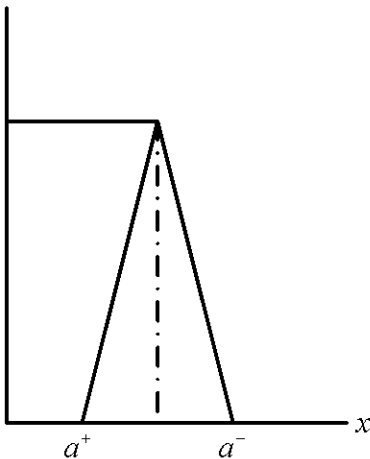
$$\sup_{x \in R} \mu^A(x) = 1, \tag{1.78}$$

$$x \leq y \leq z \Rightarrow \mu^A(y) \geq \inf(\mu^A(x), \mu^A(z)) \tag{1.79}$$

Нечіткі числа можуть задаватися функціями належності різної форми.

Трикутні нечіткі числа (рис. 1.15, а) мають функцію належності вигляду

$$\mu^A(x) = \begin{cases} (x - a^-) / (a - a^-), & a^- \leq x \leq a \\ (a^+ - x) / (a^+ - a), & a \leq x \leq a^+ \end{cases} \tag{1.80}$$



Крім того, функція належності може мати трапецієподібну форму (рис. 1.15, б)

$$\mu^A(x) = \begin{cases} (x - a^-) / (\underline{a} - a^-), & a^- \leq x \leq \underline{a} \\ 1, & \underline{a} \leq x \leq \bar{a} \\ (a^+ - x) / (a^+ - \bar{a}), & \bar{a} \leq x \leq a^+ \end{cases} \quad (1.81)$$

Останнім часом найчастіше використовуються дзвоноподібні функції належності

$$\mu^A(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{b^2}}, \quad (1.82)$$

де a – медіана функції належності, b – її розкид на рівні $e = 2,718$.

1.5.2.3 Хаотична невизначеність

Теорія хаосу – математичний апарат, що описує поведінку деяких нелінійних динамічних систем, у яких спостерігається явище, відоме як хаос. Поведінка такої системи здається випадковою навіть якщо моделі, що описують усі елементи системи, є детермінованими. Прикладами подібних систем є атмосфера, турбулентні потоки, біологічні популяції, суспільство як система комунікацій та його підсистеми: економічні, політичні та інші соціальні системи.

Теорія хаосу свідчить, що складні системи надзвичайно залежні від початкових умов і невеликі зміни в навколишньому середовищі ведуть до непередбачуваних наслідків. Теорія вводить поняття атракторів, стійких траєкторій системи.

Атрактор (англ. attract – залучати, притягати) – множина станів динамічної системи, до яких вона наближається з плином часу. Найпростішими варіантами атрактора є нерухома точка стійкої рівноваги (наприклад, в задачі про маятник з тертям).

Для того, щоб динамічна система була хаотичною, вона повинна бути нелінійною. Чутливість до початкових умов в такій системі означає, що всі траєкторії, спочатку близько розташовані одна до одної, в майбутньому можуть значно відрізнятись. Таким чином, маленька зміна поточної траєкторії може призвести до значної зміни у її майбутній поведінці. Модель хаотичної системи подається жорсткими рівняннями (див. вище). Приклад такої системи зображено на рис. 1.16.

Чутливість до початкових умов більш відома як «Ефект метелика». Помах крил метелика символізує дрібні зміни в початковому стані системи, які викликають ланцюжок подій, які ведуть до великомасштабних змін.

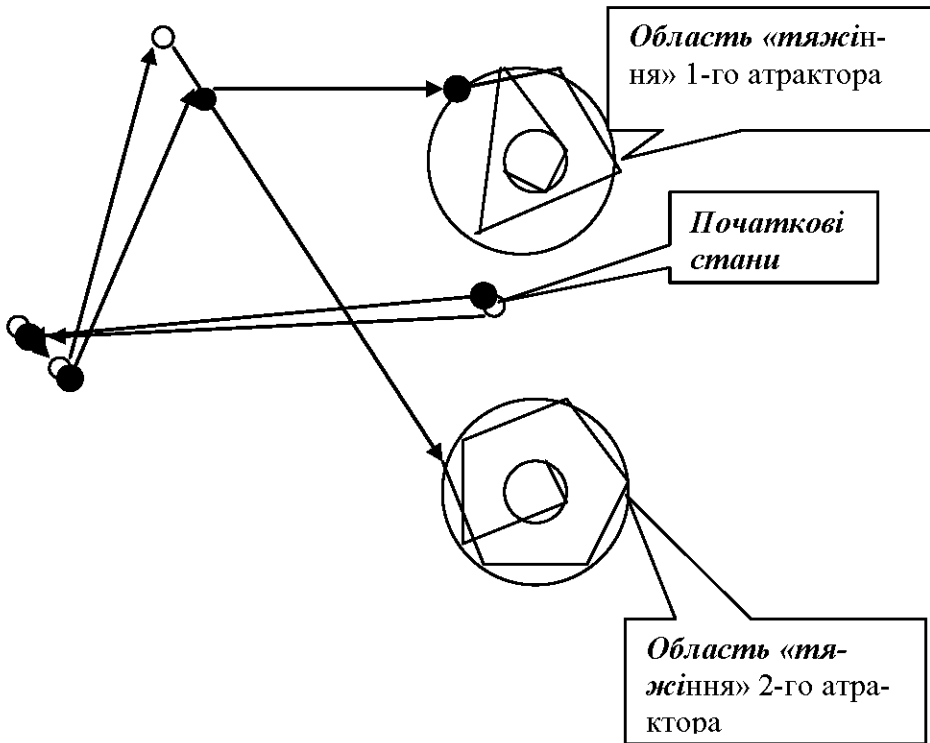


Рисунок 1.16 – В нелінійній системі, яка має два аттрактора, невелика різниця у початкових даних може привести до переходу системи у зовсім різні кінцеві стани.

Теорія хаосу застосовується в багатьох наукових дисциплінах. У технологічних об'єктах хаотичну поведінку можна спостерігати в різних системах, наприклад, великі електричні системи, хімічні реакції, турбулентні потоки рідин тощо.

Тільки за вихідними даними важко сказати, яким є спостережуваний процес – випадковим або хаотичним. Цьому перешкоджають випадкові похибки вимірювань, які завжди виникають в процесі експериментальних досліджень систем. Наявність хаотичної складової найчастіше визначають або теоретичним аналізом, або як різницю між загальною невизначеністю стану системи і сумарною невизначеністю випадкових складових.

1.5.2.4 Узагальнена невизначеність

В системах контролю та керування одночасно можуть існувати причини виникнення різних типів невизначеності, основні з яких наведені у табл. 1.3.

В сучасних роботах запропоновано багато засобів формалізації комбінованої невизначеності. Прикладом такого формалізму є об'єднання імовір-

нісних моделей, моделей, заснованих на функціях довіри, нечітких моделей на базі логічних основ теорії Карнапа.

Таблиця 1.3 – Характеристики невизначеності основних підсистем

Підсистема	Характерні причини невизначеності			Характер невизначеності
	Вплив зовнішніх факторів	Передбачених	Мало факторів	
Об'єкт керування			Мало факторів	Стохастична
			Багато факторів, нелінійний об'єкт	Хаотична
		Непередбачених	Нечітка	
Виконавча підсистема	Адитивна похибка			Стохастична
	Мультиплікативна похибка			Стохастична
	Динамічна похибка			Нечітка або стохастична
Підсистема контролю	Адитивна похибка			Стохастична
	Мультиплікативна похибка			Стохастична
	Методична похибка			Нечітка
Підсистема формування закону керування	Обчислювальна похибка			Стохастична
	Припущення про рівень складності системи			Нечітка
	Залежність часу розрахунків від стану системи			Стохастична
Інтерфейс та передавання даних	затримка сигналу			Стохастична
	Невідповідність дисципліни обслуговування реальному стану процесу			Нечітка
Людина-оператор	Залежність швидкості реакції від психофізичного стану			Стохастична
	Залежність помилкових дій від психофізичного стану			Нечітка, хаотична або стохастична

Одним з підходів до створення єдиної нечітко-ймовірнісної концепції є нечітко-значна імовірнісна логіка.

В основі ще одного з підходів до узагальнення лежать узагальнені оператори кон'юнкції і диз'юнкції, які називають T-нормою і T-конормою.

Триангулярною нормою (T-нормою) називається функція $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, така, що для всіх $x, y, z \in [0,1]$ виконуються аксіоми:

комутативності :

$$(x, y) = T(x, y),$$

асоціативності:

$$T(y, z) = T(T(x, y), z),$$

монотонності:

$$T(y, z) = T(x, z) \text{ для будь-якого } y \leq z.$$

Граничні умови:

$$T(x, 1) = x \text{ або } T(x, 0) = 0 \text{ тобто, усі Т-норми збі-}$$

гаються на границі одиничного квадрата $[0, 1]^2$.

T-норма $T(x, y)$ є узагальненням оператора кон'юнкції у булевій логіці і операції \min в нечіткій логіці.

T-конорма $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ задається як

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y). \quad (1.83)$$

T-конорма $T(x, y)$ є узагальненням оператора диз'юнкції в булевій логіці і операції \max в нечіткій логіці.

Окремі випадки Т-норми і Т-конорми.

а) Мінімум T_M і максимум S_M (операції нечіткої логіки):

$$T_\mu(\mu_x, \mu_y) = \min(\mu_x, \mu_y),$$

$$S_\mu(\mu_x, \mu_y) = \max(\mu_x, \mu_y);$$

б) Добуток T_P і ймовірнісна сума S_P (операції ймовірнісної логіки):

$$T_P(p_x, p_y) = p_x \cdot p_y;$$

$$S_P(p_x, p_y) = p_x + p_y - p_x \cdot p_y.$$

Для систем керування з комбінованою невизначеністю розроблено метод узагальнювальних функцій (УФ).

Для стохастичного даного УФ збігається за властивостями зі щільністю розподілу ймовірностей $\beta(x) = f_X(x)$, рис. 1.17, а.

Для достовірного даного УФ (рис. 1.17, б) визначається як

$$\beta(x) = \delta(x), \quad (1.84)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Для нечіткого даного УФ визначається нормованою за площею функцією належності рис. 1.17, в

$$\beta(x) = \mu_H(x), \quad (1.85)$$

де $\mu_n(x)$ – нормована функція належності
$$\mu_n(x) = \frac{\mu(x)}{\int \mu(x) dx}$$

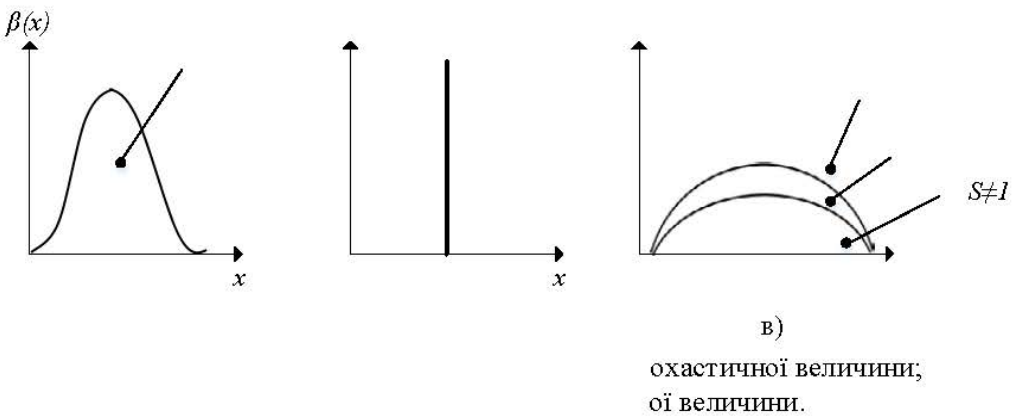
$\mu(x)$ – функція належності нечіткого числа з операцією диз'юнкції

$$\mu\left[\left(x \in \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}\right) \cup \left(x \in \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}\right)\right] = \mu\left(x \in \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}\right) + \mu\left(x \in \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}\right) \quad (1.86)$$

і операцією кон'юнкції

$$\mu\left[\left(x_1 \in \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}\right) \cap \left(x_2 \in \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}\right)\right] = \mu\left[x_1 \in \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}\right] * \mu\left[x_2 \in \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}, \mu^R\right] \quad (1.87)$$

де μ^R – характеристика взаємозв'язку нечітких змінних x_1 і x_2 .



1.5.2.5 Невизначеність вищих порядків

Існує широкий клас задач, в яких відомі методи можуть використовуватися лише зі значними обмеженнями і застереженнями. Це задачі перетворення невизначених вхідних даних, в яких параметри перетворення теж є невизначеними. Такі перетворення породжують невизначеність другого порядку, яка полягає у тому, що параметри підсумкової функції розподілу, функції належності або границі інтервалу, в свою чергу, описуються певними функціями невизначеності. Можна також уявити послідовність перетворень, яка породжуватиме невизначеність третього і більших порядків.

Окремі питання, пов'язані з поданням невизначеності вищих порядків, розглядаються у теорії нестационарних процесів та у нещодавно започаткованій теорії слабких множин, але системний підхід до аналізу невизначеностей вищих порядків досі не сформувався.

Додаткові проблеми виникають в умовах одночасної присутності нечіткої та стохастичної невизначеностей даних. Так, відсутні методи для моде-

лювання перетворень стохастичних даних перетворювачем з нечіткими параметрами і навпаки.

Способом розв'язання проблеми є розвиток операторного методу перетворення узагальнювальних функцій невизначеності в напрямку застосування і дослідження нелінійних інтегральних перетворень, які породжуються задачами з комбінованою невизначеністю вищих порядків. Ідея такого розвитку ґрунтується на міркуваннях:

– підвищення порядку невизначеності може бути подане як результат послідовної дії не повністю визначених операторів;

– не повністю визначений оператор перетворення невизначених даних, який є джерелом невизначеності другого порядку, може розглядатися як модель реального фізичного перетворювача, в якому невизначеність параметрів зумовлена невизначеністю зовнішніх впливів, отже невизначеність другого порядку може бути подана як взаємодія двох невизначених потоків даних.

При розв'язанні проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності вищих порядків виникає задача оптимізації не повністю визначеного функціонала.

Розглянемо поняття квазістаціонарного процесу. Квазістаціонарним будемо називати процес, стаціонарний на кінцевому проміжку часу (t_1, t_2) .

Якщо на проміжку стаціонарності невизначений процес $X(t)$ описується функцією невизначеності $\beta_0(x, \xi)$, де ξ – невизначений параметр, що описується УФН $\beta_\xi(\xi)$, то усереднене значення УФН процесу на всій часовій осі.

$$\beta(x) = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta_0(x, \xi) \beta_\xi(\xi) d\xi. \quad (1.88)$$

В результаті проведених досліджень узагальнена постановка задачі прийняття рішень для умов комбінованої невизначеності.

Аналіз аксіоматичної основи прийняття рішень в умовах комбінованої стохастичної та нечіткої невизначеності дозволив визначити систему аксіом, яка задовольняє умови незалежності, повноти і відсутності протиріч. Вона є підґрунтям для розробки теорії прийняття оптимальних рішень в умовах комбінованої невизначеності.

Для прийняття рішень в умовах комбінованої невизначеності узагальнено критерій мінімального ризику.

Запропонована концепція невизначеності вищих порядків дозволяє подавати не повністю визначений оператор перетворення невизначених даних, який є джерелом невизначеності другого порядку, як модель реального фізичного перетворювача, в якому невизначеність параметрів зумовлена невизначеністю зовнішніх впливів, тобто як взаємодія двох невизначених потоків даних.

1.5.3 Невизначені характеристики моделі

Відповідно до основних типів моделей виділяють параметричну, структурну, алгоритмічну і інформаційну невизначеності.

Параметрична невизначеність (не визначені параметри моделі)

Параметрична невизначеність характерна для об'єктів, моделі яких переважно подаються у вигляді різноманітних функціональних залежностей (разом з тим слід зазначити, що внаслідок гомеоморфізму невизначеність більшості моделей – структурних, алгоритмічних, інформаційних – може бути подана у параметричному вигляді).

В умовах параметричної невизначеності узагальнена модель системи (1.1) може бути подана у вигляді

$$\beta_Y = \Phi(\beta_{Z_1}, Z_2, X, Y)[\beta_X], \quad (1.89)$$

де $Z = Z_1 \cup Z_2$ – множина параметрів; Z_1 – підмножина невизначених параметрів; Z_2 – підмножина визначених параметрів; β_X – узагальнювальна функція вектора вхідних сигналів системи; де β_Y – узагальнювальна функція вектора вихідних сигналів системи; Φ – оператор перетворення.

Структурна невизначеність (невизначені графи)

Оскільки модель структури системи зображується графом, то структурна невизначеність означає невизначеність графа системи керування.

Як відзначалося у розділі 2.2, граф $G(S, A)$ характеризується множиною вершин і множиною зв'язків і описується матрицями суміжності, інциденції, ваг (для зважених графів), потоків і пропускних спроможностей (для мереж). Отже, невизначеність графу системи керування характеризується невизначеністю розмірності матриць, які описують граф, та значень їх елементів.

Найпоширенішою причиною структурної невизначеності є ненадійність зв'язків між елементами системи. Якщо для опису структури використовується матриця суміжності, то функція невизначеності структури системи $\beta(G)$ теж подається у матричному вигляді. Відповідно, вважаючи всі зв'язки однаково ненадійними, можна записати

$$\beta(a_{ij}) = 2[2P(t) - 1]a_{ij} + 2[1 - P(t)] \quad (1.90)$$

де $P(t) = e^{-\lambda t}$ – ймовірність безвідмовної роботи зв'язку; a_{ij} – елемент матриці суміжності.

Алгоритмічна невизначеність (невизначені алгоритми)

Алгоритмічна невизначеність охоплює:

- невизначеність вхідних даних алгоритму;

- невизначеність деяких параметрів алгоритму;
- невизначеність результату операції вибору послідовності дій.

Особливо актуальним є використання невизначених алгоритмів як моделей реальних систем, де часто вибір послідовності дій або значень величин здійснюється не детерміновано, а з певною ймовірністю (стохастичні алгоритми) або можливістю (нечіткі алгоритми).

Стохастичні алгоритми

Теорія стохастичних алгоритмів розвивалася поетапно. На першому етапі розглядалися лише алгоритми, в яких стохастичність створювалася навмисно за допомогою спеціальних програмних або апаратних генераторів випадкових чисел або сигналів. Це робилося для реалізації стохастичних методів.

Стохастичними методами прийнято називати методи, прямо або опосередковано основані на використанні генераторів псевдовипадкових послідовностей (ПВП).

Методи, які використовують елементи випадковості, стали з'являтися відносно недавно. В основі першого з таких методів лежить випадковий пошук в просторі параметрів задачі із збереженням найкращого отриманого результату. Випадковий пошук забезпечує добір вихідних точок для проведення локальної оптимізації. Отже, рішення покращуються не тільки шляхом локальної оптимізації, але й шляхом випадкового пошуку кращого з локально оптимальних рішень. У деяких випадках стохастичні алгоритми забезпечують також і швидшу збіжність, ніж детерміновані.

Застосування такого методу не гарантує отримання оптимального рішення. Результат роботи стохастичного алгоритму точно не визначений. Можна лише говорити про ймовірності того або іншого результату.

Крім того, результат роботи методу не може бути кращим, ніж при інших методах пошуку, оскільки в обох випадках розглядаються одні й ті ж дискретні точки простору пошуку задачі.

Нечіткі алгоритми

Нечіткий алгоритм визначається впорядкованою множиною нечітких інструкцій, які містять поняття, що формалізуються нечіткими множинами.

Інструкції в нечітких алгоритмах можна розділити на три класи.

1. Нечіткі присвоювання значень, наприклад, « x = великий».
2. Нечіткі висловлення типу «якщо A , тоді B ». У таких висловленнях або A , або B , або обидва можуть бути нечіткими множинами, наприклад, «якщо A = великий, тоді B = нижче середнього».
3. Безумовні активні висловлення, наприклад, «набагато зменшити x ».

Основні задачі, які розв'язують за допомогою нечітких алгоритмів.

– Алгоритми визначення складного нечіткого поняття A через більш прості поняття, які легко описати нечіткими множинами; результатом застосування таких алгоритмів до деякого елемента u буде ступінь належності u поняттю A (ступінь, з яким елемент u може характеризуватися поняттям A).

– Алгоритми породження, в результаті виконання яких породжується один з елементів нечіткої множини, що описує поняття, яке цікавить нас (наприклад, алгоритм породження зразків почерку, рецептів готування їжі, твору, музики, речень у природній мові).

– Алгоритми опису відношень між нечіткими змінними, наприклад, у вигляді послідовності нечітких інструкцій; такі алгоритми дозволяють приблизно описувати поведження систем, вхідні й вихідні сигнали яких є нечіткими підмножинами.

– Алгоритми прийняття рішення, що дозволяють приблизно описувати стратегію або найважливіше правило, наприклад, алгоритм проїзду перехрестя, що містить послідовність дій, які необхідно виконати. При цьому описи цих дій складаються з нечітких понять типу: нормальна швидкість, кілька секунд, повільно наближатися.

Інформаційна невизначеність (невизначені дані)

Інформаційна невизначеність зустрічається найчастіше з усіх видів невизначеності. Вона полягає у невизначеності певних даних про об'єкт моделювання. У побуті ми часто зустрічаємося з висловами: «Чоловік віком близько 40 років», «нормальне значення рівня гемоглобіну 120-140» тощо. Перший з прикладів відповідає нечіткій невизначеності, оскільки тут мова йде про експертну оцінку певної характеристики конкретної людини. Другий приклад відповідає стохастичній невизначеності, оскільки дані про нормальний вміст гемоглобіну отримані як результат усереднення показників багатьох тисяч аналізів крові здорових людей.

На жаль, подання інформаційних моделей з урахуванням невизначеності стандартизоване лише для деяких окремих випадків. Так, наприклад, метрологічні стандарти вимагають подання результатів вимірювань із зазначенням похибок (вважається, що виміряне значення відповідає математичному сподіванню, а похибка – середньому квадратичному відхиленню, причому невизначеність характеризується нормальним розподілом ймовірностей). У конструкторській документації на механічні конструкції також вказують зону допуску на розміри й інші параметри, розуміючи під ними граничні відхилення.

Особливості оцінювання невизначеності результатів управління

Одною з головних задач, заради розв'язання якої досліджують невизначеність моделі, є оцінювання ризику керування. У загальному розумінні ризиком вважають ймовірність несприятливої події. У байєсівських задачах теорії керування (задачах, де кожному результату керування може бути зіставлене деяке значення виграшів/штрафів) як характеристику ризику використовують зважене значення ймовірності

$$R = \int_Y q(y)f(y)dy, \quad (1.91)$$

де R – ризик; y – результат керування; $q(y)$ – вагова функція або функція штрафів/виграшів; $f(y)$ – функція розподілу ймовірностей; Y – область значень результату керування.

У системах з комбінованою невизначеністю використовують узагальнений ризик, для розрахунку якого у вираз (1.91) замість функції розподілу ймовірностей $f(y)$ підставляють узагальнювальну функцію невизначеності $\beta(y)$.

В системах керування найчастіше як функцію штрафів використовують головний показник якості керування – похибку

$$q(y) = \Delta = y - y_0.$$

Врахування особливостей систем управління часто дозволяє спростити визначення функції розподілу ймовірностей $f(y)$ або узагальнювальну функцію невизначеності $\beta(y)$. Інерційність та замкненість структури збільшують порядок оператора моделі системи (1.89). Збільшення порядку оператора в свою чергу приводить до наближення результату перетворення до гауссіана, який визначається лише першим і другим моментами (математичним сподіванням і дисперсією). Отже, при моделюванні систем управління найчастіше достатньо визначити ці два моменти для повної характеристики результату в умовах невизначеності.

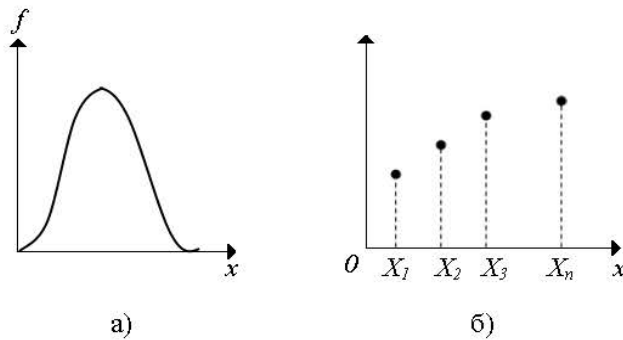
1.5.4 Форми подання невизначеності

Необхідність врахування невизначеності моделей у різноманітних задачах керування зумовила використання багатьох форм опису невизначеності. Але за усіма формами опису ховається одна й та ж об'єктивна реальність – можливість того, що деяка характеристика набуває різних (і невідомих спостерігачу!) значень. Це зумовлює певний гомеоморфізм різних форм опису невизначеності.

Функціональна форма

Функціональна форма широко використовується для опису невизначеності. При функціональному способі кожному можливному значенню невизначеної характеристики ставиться у відповідність обрана міра невизначеності. Оскільки мірою невизначеності стохастичних даних є ймовірність, а нечітких даних – належність, то, відповідно, функціональною формою опису невизначених даних є розподіл ймовірностей стохастичних даних і функція належності нечітких даних.

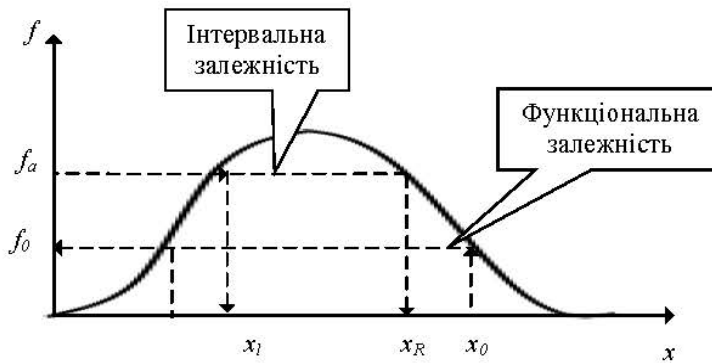
Графічне зображення функціонального опису невизначеності наведено на рис. 1.18.



визначеності: а) неперервних
їх величин

Інтервальна форма

Інтервальна форма подання невизначеності тісно пов'язана з функціональною формою. Цей зв'язок показаний на рис. 1.19.



Якщо при функціональному способі подання невизначеності встановлюється рівень невизначеності для кожного значення даного

$$x_0 \rightarrow f_0,$$

то при інтервальному способі для кожного рівня невизначеності встановлюється ліва і права границя відповідного інтервалу

$$f_\alpha \rightarrow (x_L, x_R).$$

У практиці моделювання процесів і систем керування інколи використовується інтервальне подання невизначеності (x_L, x_R) без зазначення рівня довіри f_α . Таке подання опосередковано передбачає, що вихід параметра x за межі інтервалу неможливий. Цей підхід до моделювання називають методом гарантованого результату.

Множинна форма

Множинна форма опису невизначеності використовується у випадках, коли відомий лише перелік значень, які може приймати дане. Прикладом такої невизначеності є твердження щодо типу невідомої завади, яка впливає на систему керування (тепловий шум, дробовий шум, імпульсна електромагнітна завада, наведений сигнал електромережі живлення тощо).

1.5.5 Моделі перетворення характеристик сигналів з різною формою невизначеності

Моделювання в умовах невизначеності передбачає моделювання як сигналів, так і їх перетворень у системі.

1.5.5.1 Моделювання перетворення стохастичних даних

Задача *перетворення стохастичних даних* може бути сформульована таким чином.

Нехай задане перетворення $y = F(x_1 \dots x_n)$, де x_i – випадкові величини (процеси), які задані певною множиною C_x своїх характеристик. Необхідно знайти відповідні характеристики C_y результату перетворення.

Залежно від вигляду перетворення F розрізняють нелінійні статичні, лінійні динамічні і нелінійні динамічні перетворення. *Нелінійне статичне перетворення* – це таке, що може бути подане у вигляді функціональної залежності. *Лінійне динамічне перетворення* – це таке, що може бути подане лінійним диференціальним рівнянням.

При нелінійних статичних перетвореннях відносно просто визначити функції розподілу ймовірностей результату та їх характеристики і важко визначити кореляційні і спектральні характеристики, а при лінійних динамічних перетвореннях навпаки. Найбільші проблеми складає моделювання *нелінійних динамічних перетворень*. Найчастіше такі перетворення подаються сукупністю нелінійних статичних і лінійних динамічних перетворень. Результати лінійного статичного перетворення деяких характеристик сигналів наведені в табл. 1.4.

Таблиця 1.4 – Лінійне перетворення характеристик випадкових сигналів

Характеристика	Рівняння перетворення сигналу	Рівняння перетворення характеристики
Математичне сподівання m	$y = ax + b$	$m_y = am_x + b$
	$y = ax_1 + bx_2$	$m_{x_2/x_1} = m_{x_2} + r_{x_1x_2} \sqrt{\frac{D_{x_1}}{D_{x_2}}}(x_1 - m_{x_1})$ $m_y = am_{x_1} + bm_{x_2/x_1}$
Дисперсія D	$y = ax + b$	$D_y = a^2 D_x$
	$y = ax_1 + bx_2$	$D_y = a^2 D_{x_1} + b^2 D_{x_2} - 2abr_{x_1x_2} \sqrt{D_{x_1} D_{x_2}}$
Кореляційна функція $R_{y_1x_2}$	$y = ax_1 + b$	$R_{y x_2}(\tau) = aR_{x_1x_2}(\tau)$
Спектральна щільність потужності $S_{y_1x_2}$	$y = ax_1 + b$	$S_{y x_1}(\omega) = aS_{x_1x_2}(\omega)$
Щільність розподілу ймовірностей f_y	$y = ax + b$	$f_y = \frac{1}{a} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Для моделювання перетворення стохастичних даних в динамічних процесах існує багато методів. Найпоширенішими серед них є рівняння Колмогорова, прямий метод визначення кореляційної функції, метод контурних інтегралів, метод похідних, метод твірних функцій.

Кореляційна функція результату лінійного динамічного перетворення знаходиться за допомогою рівняння Вінера-Хопфа, яке аналогічне інтегралу Дюамеля

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau_1) g(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (1.92)$$

Відповідна енергетична характеристика – спектральна щільність потужності – знаходиться через частотну передаточну функцію $W(j\omega)$, яка є Фур'є-зображенням імпульсної перехідної характеристики

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Звідки

$$S_{xy}(j\omega) = S_{xx}(j\omega) \cdot W(j\omega). \quad (1.93)$$

Функція розподілу результату нелінійного статичного перетворення для монотонної функції $y=N(x)$

$$f_y(y) = \dot{N}^{(-1)}(y) f_x[N^{(-1)}(y)], \quad (1.94)$$

де $N^{(-1)}$ – обернена функція, $\dot{N}^{(-1)}$ – її похідна.

Методи знаходження кореляційної функції та енергетичного спектра процесу на виході нелінійного елемента переважно призначені для нормальних розподілів імовірностей вхідних процесів.

Рівняння Колмогорова застосовується для знаходження розподілу імовірності переходу дифузійного марковського процесу. Оскільки нормальний випадковий процес з експоненціальною кореляційною функцією є дифузійним марковським процесом, то рівняння Колмогорова для нього теж виконуються. *Перше рівняння Колмогорова* має вигляд:

$$\frac{\partial f_{X_1 X_2}(t, t_1)}{\partial t} + m_{dx(t+dt)/x_1(t)}^{(1)} \frac{\partial f_{X_1 X_2}(t, t_1)}{\partial x_1} + \frac{1}{2} m_{dx(t+dt)/x_1(t)}^{(2)} \frac{\partial^2 f_{X_1 X_2}(t, t_1)}{\partial x_1^2} = 0, \quad (1.95)$$

де $m_{dx(t+dt)/x_1(t)}^{(k)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_1)^k f_{X_1 X_2}(t, t_2) dx_3$, $m_{dx(t+dt)/x_2(t)}^{(1)}$ і

$m_{dx(t+dt)/x_2(t)}^{(2)}$ скінченні ($m_{dx(t+dt)/x_2(t)}^{(2)}$ відмінно від нуля) та $m_{dx(t+dt)/x_2(t)}^{(k)} \equiv 0$ при $k \geq 3$, $f_{X_1 X_2}(t, t_1)$ – двовимірний розподіл.

Друге рівняння Колмогорова, відоме також як *рівняння Фоккера-Планка*, має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{X_1 X_2}(t, t_1)}{\partial t_1} = & - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[m_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)}^{(1)} f_{X_1 X_2}(t, t_1) \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[m_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)}^{(2)} f_{X_1 X_2}(t, t_1) \right] \end{aligned} \quad (1.96)$$

де $m_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)}^{(1)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_2) f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dx_3$ є коефіцієнт зносу,

$m_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)}^{(2)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_2)^2 f_{X_1 X_2}(t_1, t_2) dx_3$ – коефіцієнт дифузії.

Обидва рівняння (1.95) і (1.96) належать до класу параболічних диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Для нормального випадкового процесу умовна функція розподілу з нульовим середнім, дисперсією σ^2 і коефіцієнтом кореляції r має вигляд:

$$f_{X \cap X \cap}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(1-r^2_{x_1 x_2})}} \exp\left[-\frac{(rx_1 - x_2)^2}{2\sigma^2(1-r^2_{x_1 x_2})}\right], \quad (1.97)$$

$$f_{X \cap X \cap}(0, t_1) = \delta(x_2, x_1). \quad (1.98)$$

Головним недоліком рівнянь Колмогорова є те, що вони призначені лише для нормальних розподілів з експоненціальною кореляційною функцією.

Операторний метод моделювання перетворень стохастичних даних дозволяє наближено оцінити закон розподілу вихідного сигналу $f_y(y)$, якщо відомі закони розподілу вхідних сигналів $f_{x_1}(x_1)$, $f_{x_2}(x_2)$ та їх перший і другий моменти, також і взаємна кореляційна функція $R_{X_1 X_2}(t)$.

Нехай вхідні дані $\{X_1 \dots X_n\}$ розподілені за законами $\{f_{x_1}(x_1) \dots f_{x_n}(x_n)\}$ та їх взаємна парна кореляційна функція – $\{R_{x_i x_j}(t)\}$. Диференціальний закон розподілу вихідного даного $f_y(y)$ може бути знайдений як *інтегральний оператор* вигляду:

$$f_Y(y) = \Phi_{XY}(f_X(\bar{x}), A, W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\bar{x}) \varphi(x, y, A, W) d\bar{x}, \quad (1.99)$$

де Φ_{XY} – інтегральний оператор, n – кількість вхідних величин, A та W – параметри алгебраїчного й інтегро-диференціального перетворень.

Вираз ядра оператора $\varphi^{(1)}(x, y)$ для нелінійної алгебраїчної операції ґрунтується на відомій в теорії випадкових процесів формулі нелінійного перетворення випадкового процесу і рівнянні регресії. Вираз ядра для інтегро-диференціального перетворення ґрунтується на поданні такого перетворення інтегральною сумою (інтегралом Дюамеля). Опис операторів для основних типів операцій наведений у таблиці 1.5.

Таблиця 1.5 – Інтегральні оператори перетворення щільності розподілу

Операція	Оператор	Параметри
$y = N(x)$	$f_y = \int_{\Omega_x} f_x(x) \delta[y - N(x)] dx$	Ω_x – область визначення f_x δ – дельта-функція Дірака
$y = N(x_1, x_2)$	$f_y = \int_{\Omega_{x_1}} \int_{\Omega_{x_2}^{-\infty}^{+\infty}} \int f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \delta[y - N(x_1, x_2)] \delta[x_2 + ax_1 + b\xi + c] d\xi dx_1 dx_2$	$a = -r_{x_1 x_2} \sqrt{\frac{D_{x_2}}{D_{z_1}}}$ $b = -\sqrt{1 - r^2_{x_1 x_2}}$ $c = r_{x_1 x_2} m_{x_1} \sqrt{\frac{D_{x_2}}{D_{z_1}}} + (\sqrt{1 - r^2_{x_1 x_2}} - 1) m_{x_2}$
$y = \int_0^t x(t - \tau) g(\tau) d\tau$	$f_y = \int_{\Omega_x} \dots \int \prod_{i=1}^n f_x(x_i - m_x) \delta[y - (1 - a)m_y - a \sum_{i=1}^n x_{n-1}(t - i\tau) \cdot g_0(i\tau)] dx_1 \dots dx_n$	$\tau = \frac{S_{xx \max}}{D_x}$ $T_{np} = \frac{\pi W_{\max}}{\int_0^\infty W(\omega) d\omega}$ $g_0(i\tau) = \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} g(\tau) d\tau$ $n = \text{ent} \left[\frac{T_{np}}{\tau} \right]$ $a = \sqrt{\frac{D_y}{D_x \sum_{i=1}^n g_0(i\tau)}}$

1.5.5.2. Методи моделювання перетворень нечітких даних

Нечіткі дані можна поділити на лінгвістичні і числові. Над лінгвістичними даними виконуються переважно множинні операції.

Операції над нечіткими множинами.

а) *Доповненням* нечіткої множини A називається нечітка множина $\neg A$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{\neg A}(x) = 1 - \mu^A(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.100}$$

б) *Перетином* двох нечітких множин A і $B \subseteq X$ називається нечітка множина $A \cap B$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{A \cap B}(x) = \min[\mu^A(x), \mu^B(x)] \quad \forall x \in X. \quad (1.101)$$

в) *Об'єднанням* двох нечітких множин A і $B \subseteq X$ називається нечітка множина $A \cup B$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{A \cup B}(x) = \max[\mu^A(x), \mu^B(x)] \quad \forall x \in X. \quad (1.102)$$

Кардинальне число (потужність) нечіткої множини

$$A = \mu^A(x_1)/x_1 + \mu^A(x_2)/x_2 + \dots + \mu^A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu^A(x_i)/x_i \quad (1.103)$$

знаходиться таким чином: $\text{card } A = |A| = \sum_{i=1}^n \mu^A(x_i)$.

Принципи узагальнення математичних операцій на нечіткі дані були зроблені для того, щоб для нечітких чисел можна було застосовувати арифметичні та алгебраїчні операції, які використовуються для звичайних чітких даних. Базовий принцип узагальнення – це *принцип узагальнення Заде*, який полягає в нижчевикладеному.

Якщо задана функція від k змінних $y = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ і аргументи x_i – нечіткі числа \tilde{x}_i з носіями $\text{supp } \tilde{x}_i = [x_i^-, x_i^+]$, $i = \overline{1, k}$, то нечітке число $\tilde{y} = g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ визначається в такий спосіб:

$$\mu_{\tilde{y}}(y^*) = \sup_{\substack{g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = y^* \\ x_i^* \in \text{supp } \tilde{x}_i, \quad i = \overline{1, k}}} \inf(\mu_{\tilde{x}_1}(x_1^*), \dots, \mu_{\tilde{x}_k}(x_k^*)) \quad (1.104)$$

Алгоритм реалізації принципу узагальнення Заде:

1. Фіксується значення $y = y^*$;
2. Знаходяться всі k -ті $\{x_{1j}^*, x_{2j}^*, \dots, x_{kj}^*\}$, що задовольняють умови:

$$y^* = g(x_{1j}^*, x_{2j}^*, \dots, x_{kj}^*), \quad x_{ij}^* \in [x_j^-, x_j^+], \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.105)$$

3. Визначається ступінь належності елемента y^* нечіткому числу \tilde{y} за формулою:

$$\mu_{\tilde{y}}(y^*) = \sup_{j=1, m} \inf(\mu_{\tilde{x}_1}(x_{1j}^*), \mu_{\tilde{x}_2}(x_{2j}^*), \dots, \mu_{\tilde{x}_n}(x_{nj}^*)) \quad (1.106)$$

4. Перевіряється умова чи взяті всі елементи y^* . Якщо “так”, то переходять до кроку 5, інакше фіксують нове значення y^* і переходять до кроку 2;

5. Кінець.

Основні арифметичні операції над нечіткими числами відповідно до принципу узагальнення мають вигляд:

- додавання $\mu^{A+B}(z) = \max_{z=x+y} \min[\mu^A(x), \mu^B(y)]$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$;
- віднімання $\mu^{A-B}(z) = \max_{z=x-y} \min[\mu^A(x), \mu^B(y)]$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$;
- множення $\mu^{A*B}(z) = \max_{z=x*y} \min[\mu^A(x), \mu^B(y)]$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$;
- ділення $\mu^{A/B}(z) = \max_{z=x/y, y \neq 0} \min[\mu^A(x), \mu^B(y)]$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{R}$.

Якщо $y = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – функція від k нечітких аргументів \tilde{x}_i , кожний із яких задається функцією належності в n точках універсальної множини

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n \mu_{\tilde{x}_i}(x_{ij}) / x_{ij}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (1.107)$$

то для визначення нечіткого числа \tilde{y} за принципом узагальнення Заде необхідно перебрати $N = n^k$ варіантів.

Крім принципу узагальнення Заде в літературі зустрічаються й інші принципи узагальнення.

1. Правило типу minimum (правило Мамдані)

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)].$$

2. Правило типу «добуток» (правило Ларсена)

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y).$$

3. Правило Лукашевича

$$\begin{aligned} \mu_{A \rightarrow B}(x, y) &= \mu_R(x, y) = 1 \wedge [1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)] = \\ &= \min[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)]. \end{aligned}$$

4. Бінарне правило

$$\begin{aligned}\mu_{A \rightarrow B}(x, y) &= \mu_R(x, y) = [1 - \mu_A(x)] \vee \mu_B(y) = \\ &= \max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)].\end{aligned}$$

5. Правило Гогуена

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = 1 \wedge \frac{\mu_A(x)}{\mu_B(y)} = \min\left\{1, \frac{\mu_A(x)}{\mu_B(y)}\right\}.$$

6. Правило Шарпа

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ 0, & \text{якщо } \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}.$$

7. Правило Геделя

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y), & \text{якщо } \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}.$$

8. Ймовірнісне правило

$$\begin{aligned}\mu_{A \rightarrow B}(x, y) &= \mu_R(x, y) = 1 \wedge [1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)] = \\ &= \min[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)].\end{aligned}$$

9. Правило обмеженої суми

$$\begin{aligned}\mu_{A \rightarrow B}(x, y) &= \mu_R(x, y) = 1 \wedge [1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)] = \\ &= \min\{1, [\mu_A(x) + \mu_B(y)]\}\end{aligned}$$

та інші.

1.5.5.3 Перетворення узагальнювальної функції

У випадку комбінованої невизначеності модель процесу керування може бути подана у вигляді

$$\beta(Y) = \overline{\Phi^{(n)}}[\beta(X)] \quad (1.108)$$

або у розгорнутому вигляді

$$\beta(y_i) = \Phi_i^{(n)}[\beta(x_1, x_2, \dots, x_m)], \quad i = 1 \dots k,$$

де Y – вектор станів (вихідних сигналів) системи розмірністю k ; X – вектор вхідних впливів (керувань та збурень) розмірністю m ; $\overline{\Phi^{(n)}}$ – модель системи керування (вектор операторів перетворення узагальнювальних функцій невизначеності розмірністю k); n – порядок операторів моделі системи.

Оператори моделі (1.108) реалізуються за допомогою інтегральних перетворень

$$\beta(y_i) = \int_{\Omega_1} \cdots \int_{\Omega_m} \phi \left[y_i, X, \left\| R_{x_i x_j} \right\| \right] \beta(x_1, x_2, \dots, x_m) (dx_1)^{n_1} \dots (dx_m)^{n_m},$$

де $n = \sum_{j=1}^m n_j$ – порядок оператора (кратність інтегрування); $\phi[\bullet]$ – ядро перетворення (модель системи); $\left\| R_{x_i x_j} \right\|$ – кореляційна матриця.

Визначені операції з узагальнювальною функцією – унарна, бінарна операції, операції порівняння невизначених даних та загострення.

Означення 1. Результатом унарної операції \circ над невизначеним даним $x_1 \in B_1$ є таке невизначене дане, для якого

$$\int_{B_2} \beta(x_2) dx_2 = \int_{B_1} \beta(x_1) dx_1, \quad (1.109)$$

причому $B_1 \subset B, B_2 \subset B, B_1 : \forall x_1 \rightarrow x_2 = o(x_1)$.

Означення 2. Результатом бінарної операції \circ над невизначеними даними $x_1 \in B_1$ і $x_2 \in B_2$ є таке невизначене дане $x_3 \in B_3$, для якого

$$\int_{B_3} \beta(x_3) dx_3 = \int_{B_1 B_2} \beta(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (1.110)$$

причому $B_1 \subset B, B_2 \subset B, B_3 \subset B, B_3 : \forall x_1, x_1 \rightarrow x_3 = x_1 \circ x_2$.

Означення 3. Відношення рівності: невизначені дані x, y вважаються рівними $X \underline{=} Y$ якщо $\beta_X = \beta_Y$.

Означення 4. Відношення нерівності: для невизначених даних $X \underline{\geq} Y$, якщо $Z = X - Y$ і

$$\int_0^{+\infty} \beta_Z dz > \int_{-\infty}^0 \beta_Z dz. \quad (1.111)$$

Означення 5. Невизначене дане x' є загостренням невизначеного даного x , якщо:

1. $X_{x'} = X_x$, де X – невизначеності даного (область визначення УФ);
2. $M_{x'} = M_x$, де M – мода УФ;
3. $\exists [a, b]: M_{x'} \in [a, b]; \forall x \in (a, b) \rightarrow \beta_{x'}(x) \beta_x(x); (x = a) \vee (x = b) \rightarrow \beta_{x'}(x) = \beta_x(x)$.

Визначені також правила виконання операцій з УФ. За основу визначення цих операцій прийнятий *операторний метод* перетворення законів розподілу ймовірностей, загальний вигляд якого поданий моделлю (1.108).

Нелінійна операція

$$\beta_y(y) = \Phi^{(1)}[\beta_x(x), N(x, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_x(x) \varphi(x, y) dx, \quad (1.112)$$

де ядро $\varphi(x, y) = \delta[y - N(x)]$ – дельта-функція Дірака.

Бінарна операція

$$\beta_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_X(\bar{x}_1) \beta_X(\bar{x}_2) \varphi^{(2)}(x_1, x_2, y) dx_1 dx_2, \quad (1.113)$$

де $\varphi^{(2)}(x_1, x_2, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[y - N(x_1, \zeta)] \delta\left[\zeta - r_{X_1, X_2} \sqrt{\frac{D_{X_2}^{(2)}}{D_{X_1}^{(2)}}(x_1 - m_{X_1}^{(1)}) - \sqrt{1 - r_{X_1, X_2}^2}(x_2 - m_{X_2}^{(1)})} - m_{X_2}^{(1)}\right] d\zeta;$

m_{x_1} – перший початковий момент X_1 ; m_{x_2} – перший початковий момент X_2 ;
 D_{x_1} – другий центральний момент X_1 ; D_{x_2} – другий центральний момент X_2 ;
 r_{X_1, X_2} – другий змішаний нормований центральний момент X_1 та X_2 .

Інтегро-диференціальна операція

$$\beta_Y(y) = \Phi^{(n)} \beta_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_X(x_n - m_X^{(1)}(t)) \varphi^{(n)}(x_n, y, \omega) dx_n, \quad (1.114)$$

$$\varphi^{(n)}(x, y, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \beta_X(x_i - m_X^{(1)}) \times \delta\left[y - (1-a)m_Y^{(1)} - a \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1}(t-i\tau)g(i\tau)\right] dx_1 \dots dx_{n-1};$$

де $n = \text{ent}[t/\Delta\tau]$; $a = \sqrt{\frac{D_Y^{(2)}}{\tau D_X^{(2)} \sum_{i=1}^{n-1} g_0^2(i\tau)}}$; $g(t)$ – імпульсна перехідна характеристика;

$g_0(i\Delta\tau) = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{i\Delta\tau}^{(i+1)\Delta\tau} g(\tau) d\tau$; $\Delta\tau$ – інтервал дискретизації.

Більш складні перетворення визначаються шляхом декомпозиції на розглянуті три типи перетворень.

Властивості алгебри узагальнювальних функцій.

1. Невизначене дане x_0 , якому відповідає узагальнювальна функція $\delta[x - x_0]$, еквівалентне достовірному даному відносно операцій системи G .
2. Операціям над невизначеними даними властива асоціативність

$$\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 = \Phi_1 [\Phi_2 \Phi_3]. \quad (1.115)$$

3. Операції над невизначеними даними не комутативні

$$\Phi_1\Phi_2 \neq \Phi_2\Phi_1. \quad (1.116)$$

4. Послідовність унарних операцій подається добутком операторів.

5. Бінарна операція над двома функціями невизначеної змінної подається добутком оператора другого порядку на добуток операторів гілок.

6. Існує одиничний оператор **1**, що задовольняє правило множення

$$\Phi_1 \cdot 1 = \Phi_1. \quad (1.117)$$

7. Існує обернений оператор Φ^{-1}

$$\Phi \cdot \Phi^{-1} = 1. \quad (1.128)$$

Узагальнена модель СК в умовах невизначеності враховує алгоритмічну, параметричну і структурну невизначеності, які присутні в системі керування.

Ключові слова

Модель, система керування, об'єкт, функціонал перетворення, вербальні моделі, формальні моделі, алгоритмічні моделі, фізичні моделі, аналогові моделі, масштабні моделі, геометричні моделі, структурні моделі, функціональні моделі, інформаційні моделі, моделі статистики, моделі динаміки, детерміновані моделі, стохастичні моделі, нечіткі моделі, узагальнені моделі, комплексні моделі, аналітичні моделі, імітаційні моделі, адекватність моделі, точність моделі, похибка моделі, абсолютна похибка, відносна похибка, зведена похибка, максимальна похибка, середня похибка, середня квадратична похибка, методична похибка, обчислювальна похибка, похибки від невизначеності початкових даних, економічність моделі, ступінь універсальності моделі, ізоморфізм, гомеоморфізм, теорія подібності, умови подібності, критерій подібності, синтез, аналіз, теорія моделей, універсальна алгебра, алгебраїчна система, клас, топологічний простір, топологія, метрика.

Невизначеність, алгоритмічна невизначеність, параметрична невизначеність, структурна невизначеність; стохастична невизначеність, випадкова величина, закон розподілу випадкової величини, ймовірність, функція розподілу, диференціальна функція розподілу, функція щільності ймовірності, випадковий процес, стохастичний процес, реалізація випадкової функції, початкові моменти розподілу, центральні моменти розподілу, середнє випадкового процесу, дисперсія, кореляційна функція, стаціонарний процес, ергодичний процес; хаос; експерт, нечітка логіка, нечітка множина, універсальна множина, ступінь належності, функція належності, лінгвістична змінна, терм-множина, нечітке відношення, фазифікація, дефазифікація, α -рівень, max-min композиція, нечіткий логічний висновок, носій нечіткої множини, нечітке число, перетворення стохастичних даних, нелінійне статичне перетворення, лінійне динамічне перетворення, нелінійне динамічне перетворення, рівняння Колмогорова, рівняння Фоккера–Планка, інтегральний оператор, ядро оператора, доповнення нечіткої множини, перетин нечітких множин, об'єднання нечітких множин, принцип узагальнення Заде, комбінована невизначеність, T-норма, метод узагальнювальних функцій, унарна операція, бінарна операція, відношення рівності, відношення нерівності, загострення, операторний метод, декомпозиція, властивості узагальнювальних функцій.

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. Що таке модель?
2. В чому суть процесу моделювання?
3. Що таке функціонал?
4. При моделюванні об'єкт відображається у моделі. А чи існує обернене відображення?
5. Поясніть терміни:
 - вербальна модель,
 - модель статистики,

- формальна модель,
- алгоритмічна модель,
- фізична модель,
- аналогова модель,
- масштабна модель,
- геометрична модель,
- структурна модель,
- функціональна модель,
- інформаційна модель,
- модель динаміки,
- детермінована модель,
- стохастична модель,
- нечітка модель,
- узагальнена модель,
- комплексна модель,
- аналітична модель,
- імітаційна модель.

6. Як визначається адекватність моделі, чим вона характеризується?
7. Дайте означення основних характеристик точності моделі?
8. Що є джерелами похибок моделювання?
9. Якими якісними показниками характеризується модель?
10. Дайте означення адекватності, точності та складності моделі.
11. Дайте означення гомеоморфізму і ізоморфізму.
12. Який вид моделей є ізоморфним оригіналу?
13. Клонування людини – це гомеоморфне чи ізоморфне моделювання?
14. Як пов'язані поняття гомеоморфізму і методичних похибок моделі?
15. Як визначити, чи є подібними об'єкт і модель?
16. Чому критерій подібності має бути безрозмірним?
17. Чи можна говорити про подібність, якщо модель відображає нечислові характеристики об'єкта (наприклад, структурна модель)?
18. Якщо виконуються умови подібності, то чи можна казати про ізоморфізм моделей?
19. Що спільного є між поняттями „аналіз і синтез моделі” і технологіями розробки програм „знизу догори” та „згори до низу”?
20. Які типи моделей є основними у схемотехніці, програмуванні, фізиці, архітектурі, а які допоміжними?
21. Чим відрізняється метричний простір від топологічного?
22. У якому просторі – топологічному чи метричному, розглядаються структурні моделі? А функціональні моделі?
23. Чим відрізняється випадкова величина і випадковий процес?
24. Що може стати джерелом стохастичної невизначеності в системі керування?
25. Що спільного і чим відрізняються спектр і спектральна щільність потужності сигналу?
26. Як отримати кореляційну функцію, якщо відома спектральна щільність потужності?
27. Чим відрізняється математичне сподівання від середнього значення?
28. Як Ви думаєте, чому S_{xx} назвали „спектральною щільністю потужності”?
29. Що спільного і чим відрізняються випадкові і нечіткі величини?

30. Що є джерелом нечіткості?
31. Перевірте, чи можна подати операції звичайної логіки (п.3.1) як \max - \min композицію?
32. Наведіть приклади застосування нечітких чисел і нечітких лінгвістичних даних?
33. Чи утворює терм-множина метричний або топологічний простір?
34. Для яких статистичних характеристик вихідних сигналів перетворювачів існують методи оцінювання?
35. Чому функція розподілу ймовірності сигналу на виході лінійного динамічного перетворювача завжди наближається до нормального?
36. Як визначити спектральну щільність потужності, якщо відома двовимірна функція розподілу ймовірностей?
37. Знайдіть добуток нечітких чисел x_1 і x_2 , якщо кожне з них має трикутну функцію належності у діапазоні $(x_{max} \pm 2)$, причому $x_{1max}=3$, $x_{2max}=4$. Порівняйте результати трьох методів узагальнення.
38. Наведіть приклади систем контролю та керування з комбінованою невизначеністю.
39. На чому ґрунтується параметричний опис структурної невизначеності?
40. Що таке Т-норма?
41. Як, на Вашу думку, можна описати зв'язок невизначених даних, які задані узагальнювальними функціями?

Література

1. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування : навчальний посібник / В. М. Дубовой. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 308 с.
2. Букетов А. В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем : навчальний посібник / Букетов А. В. – Тернопіль : СМП „Тайп“, 2009. – 260 с.
3. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики / Коршунов Ю. М. – М. : Энергия, 1972. – 376 с.
4. Лапа В. Г. Математические основы кибернетики / Лапа В. Г. – К. : Вища школа, 1974. – 452 с.
5. Лежнюк П. Д. Аналіз чутливості оптимальних рішень в складних системах критеріальним методом / Лежнюк П. Д. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 131с.
6. Математическая энциклопедия: В 6 томах. [Под ред. И.М.Винаградова]. – М.: Советская энциклопедия, 1984.

7. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / [Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф. и др.]; под ред. Поспелова Д. А. – М. : Наука, 1986. – 312 с.
8. Бухарев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов / Бухарев Р. Г. – М. : Наука, 1985. – 288 с.
9. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Вентцель Е. С. – М. : Наука, 1964. – 576 с.
10. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и её инженерные приложения / Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. – М. : Наука, 1991. – 384 с.
11. Воронов А. А. Теория автоматического управления : в 2-х томах / Воронов А. А. – М. : Энергия, 1986. – Т. 2 – 503 с.
12. Дубовой В. М. Моделювання систем керування в умовах невизначеності : монографія / Дубовой В.М., Глонь О.В. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 169 с.
13. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений / Заде Л. – М. : Мир, 1976. – 167 с.
14. Иванова В. М. Математическая статистика / Иванова В. М., Калинина В. Н., Нешумова Л. А., Решетникова И. О. – М. : Высш. школа, 1981. – 371 с.
15. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А. Н. – М. : Наука, 1974. – 120 с.
16. Лапа В. Г. Математические основы кибернетики / Лапа В. Г. – К. : Вища школа, 1974. – 452 с.
17. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Левин Б. Р. – М. : Сов. радио, 1974. – 552 с.
18. Маликов В. Т. Анализ измерительных информационных систем / Маликов В. Т., Дубовой В. М., Кветный Р. Н., Исматуллаев П. Р. – Ташкент : ФАН, 1984. – 176 с.
19. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения: / [Пер. с англ. Под ред. Р. Р. Ягера.] – М. : Радио и связь, 1986. – 408 с.
20. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / Пугачев В. С. – М. : Наука, 1979. – 496 с.
21. Романовский И. В. Дискретный анализ / Романовский И. В. – СПб. : Невский диалект, 2000. – 240 с.
22. Ротштейн А. П. Нечёткая надежность алгоритмических процессов / Ротштейн А. П., Штовба С. Д. – Винница : Континент-ПРИМ, – 1997.– 142 с.
23. Трауб Дж. Информация, неопределённость, сложность / Трауб Дж., Васильковский Г., Вожняковский Х. – М. : Мир, – 1988. – 183 с.
24. Штовба С. Д. Проектирование нечётких систем средствами MATLAB / Штовба С. Д. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.

25. Аверкин А. Н. Триангулярные нормы в системах искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин, В. В. Костерев // Известия Академии наук. Теория и системы управления, 2000. – №5. – С. 106–109.
26. Прийняття рішень в управлінні розгалуженими технологічними процесами : монографія / В. М. Дубовой, Г. Ю. Дерман, І. В. Пилипенко, М. М. Байас. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 223 с.
27. Оборский Г. А. Моделирование систем : монография / Г. А. Оборский, А. Ф. Дащенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин. – Одесса, “Астропринт”, 2013. – 664 с.
28. Усов А. В. Математическое моделирование технических систем / Вайсман В. А., Дмитришин Д. В., Плотникова Л. И., Оборский Г. А. – К. : Техника, 1995. – 328 с.
29. Усов А. В. Вероятностно-аналитическое моделирование технико-экономических систем : монография в 2-х частях / Третьяк А. И., Коновалов А. Л., Дубров К. А. – Одесса : Астропринт, 2003. – 224 с., 440 с.
30. Усов А.В. Моделирование систем с распределенными параметрами : монография / А. В. Усов, А. Н. Дубров, Д. В. Дмитришин. – Одесса : Астропринт, 2002. – 664 с.
31. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельєва, І. І. Становська. – Одеса : Пальміра, 2011. – 500 с.
32. Усов А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения : учебное пособие / Д. В. Дмитришин, А. В. Усов, Ю. А. Морозов, В.В. Перстнева. – Одесса : Астропринт, 2008.– 440 с.
33. Арнольд В. И. Теория катастроф. – М. : Наука, 1990. – 128 с.
34. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971, 240 с.

2 СТРУКТУРНІ МОДЕЛІ

Моделі структури (структурні моделі) дуже поширені в практиці проектування та дослідження систем контролю і управління.

У моделюванні систем структурні моделі традиційно займають провідне місце. Це зумовлено перевагами, які надає дослідження структури системи. У першу чергу це суттєве спрощення моделювання, оскільки дозволяє відокремити моделювання процесів всередині елементів системи і моделювання їх взаємодії. Окреме моделювання кожного елемента звичайно простіше за моделювання системи в цілому.

2.1 Поняття та способи структурування об'єктів моделювання

Поняття структури відносять до фундаментальних понять теорії систем. Про структуру кажуть завжди, коли у певному середовищі з'являються частини з відмінними від суміжних елементів властивостями або виявленими межами.

Сукупність елементів системи та зв'язків між ними утворюють структуру системи.

Узагальнена модель (1.1) з метою відображення структурних характеристик об'єкта може бути подана у вигляді

$$\Theta_Y = F(S, Z)[\Theta_X] \quad (2.1)$$

де S – структурні характеристики об'єкта; Z – параметри об'єкта.

До структурних характеристик об'єкта відносять опис кількості, складу та зв'язків елементів (блоків, підсистем, вузлів) об'єкта; порядок та вид диференціального рівняння, що описує динаміку об'єкта; характер нелінійності функції (ступінь полінома), що описує статику та інше.

Найбільшого поширення структурні моделі набули в електроніці в період переходу від дискретних елементів до інтегральної схемотехніки. Наразі з поступовим переходом до реалізації більшості функцій системи у цифровому вигляді за допомогою програмованого процесора роль структурних моделей дещо знизилася, поступаючись алгоритмічним моделям.

Останнім часом багато уваги приділяють структурам, які самостійно виникають у неперервному нелінійному середовищі. Ці явища вивчає наука синергетика. Вважають, що такі процеси відповідають за утворення кристалічних структур і космічних систем, функціонування серця і мозку тощо.

В інженерній практиці структурні моделі мають вигляд різноманітних схем, які є головними документами проектів систем управління є схеми. Схеми залежно від основного призначення розділяють на такі типи:

- структурні;
- функціональні;
- принципові (повні);
- з'єднань (монтажні);
- під'єднання;
- загальні;
- розташування.

Схеми залежно від фізичної природи та видів елементів і зв'язків між ними розділяють на такі види:

- електричні;
- гідравлічні;
- пневматичні;
- кінематичні;
- оптичні;
- комбіновані.

Найчастіше у теорії управління використовують схеми електричні структурні та схеми комбіновані структурні.

Різноманітні функціональні, структурні і принципові схеми (деякі приклади яких наведені на рис. 2.1) подаються графічними зображеннями, які показують склад та взаємозв'язки блоків системи.

Поява великої кількості стандартів зображення схем підкреслює їх велику роль у практиці дослідження, проектування та експлуатації систем. Така стандартизація забезпечила появу спільної міжнародної мови інженерів, яка характеризується наочністю і однозначністю.

Разом з тим розмаїття схем приховує їх спільні риси, які дозволяють стверджувати, що більшість схем є гомеоморфними моделями. Як вже відзначалося, гомеоморфізм дозволяє скоротити роботу дослідника і розповсюджувати результати, отримані на одних моделях, на моделі іншої природи з обов'язковим аналізом відмінностей між ними. Відповідно постає задача такої формалізації подання схем, яка була б достатньо інформативною та продуктивною і разом з тим універсальною.

Головними операціями у процесі формалізації структури системи є композиція і декомпозиція. Ці операції є окремими випадками більш загальних процесів аналізу і синтезу у застосуванні їх до структурних моделей.

Декомпозиція структури системи (*system decomposition*) – це подання цілісного складного об'єкта (системи в цілому або окремих її частин) у вигляді окремих елементів з певними зв'язками.

Композиція (*system composition*) – обернена операція, яка полягає у заміні певної сукупності елементів системи одним цілісним об'єктом, в якому не розглядається внутрішня структура.

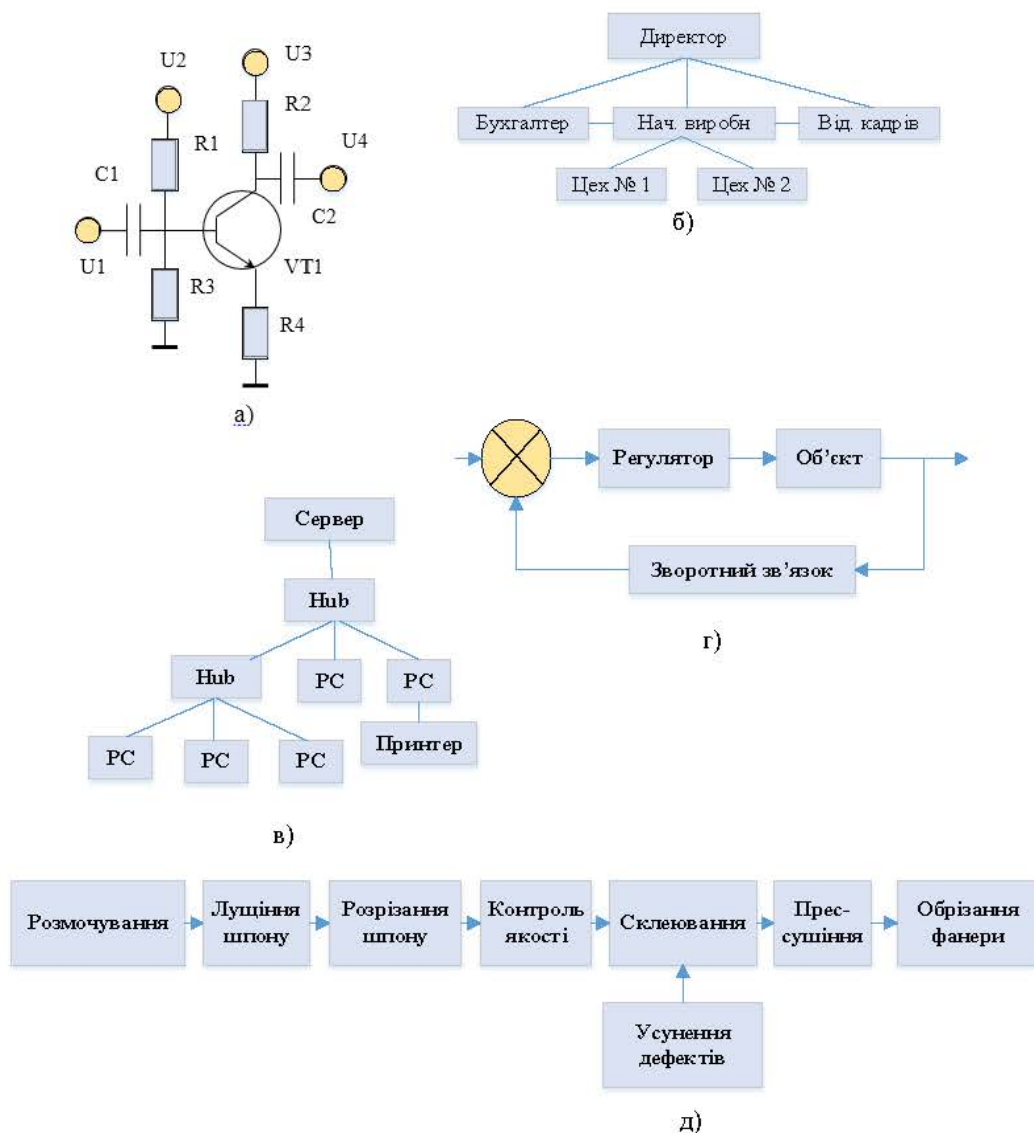


Рисунок 2.1 – Приклади схем: а) схема електрична принципова; б) структура підприємства; в) схема комп'ютерної мережі; г) структурна схема системи управління; д) схема технологічного процесу виготовлення фанери

Побудова моделі складної системи як цілісного об'єкта найчастіше є надто громіздкою задачею. Тому звичайно моделі будують у декілька етапів, показаних на рис. 2.2. Перший етап – етап *аналізу* системи, останній – етап *синтезу* моделі.

Незважаючи на зовнішню складність, такий багатоетапний процес вимагає значно менших зусиль, ніж дослідження системи як цілісного об'єкта. Якщо система має n входів і кожен вхідний сигнал може приймати m значень, то кіль-

кількість експериментів для повного дослідження системи в процесі моделювання складає m^n . Якщо ж здійснити декомпозицію системи на n одноходових підсистем, то необхідно буде здійснити $m \cdot n$ експериментів і додатково дослідити $n \cdot (n - 1)$ зв'язків. Так, наприклад, для системи з 10 входами і кількістю можливих значень кожного вхідного сигналу 10 відповідні кількості експериментів складатимуть $10 \cdot 000 \cdot 000 \cdot 000$ (або 10^{10}) для цілісної системи і $(m \cdot n + n \cdot (n - 1)) = 190$ для системи після її декомпозиції.



Рисунк 2.2 – Етапи структурного моделювання системи

Разом з тим не слід забувати, що самі процеси аналізу (декомпозиції) і синтезу (композиції) часто є досить складними, вимагають творчого підходу і розуміння природи і принципів функціонування системи, що не враховано у формальному підрахунку кількості операцій.

2.2 Графи як узагальнення структурних моделей

При всій різноманітності зображень структурних моделей найпоширенішою і найуніверсальнішою формою є граф (*graph*).

Граф – це наочне графічне зображення взаємозв'язку елементів деякої множини об'єктів. Формально графова модель $G\{V, P\}$ складається з двох множин – множини V об'єктів (*вершин, вузлів*) і множини P зв'язків (*ребер*).

Вершина, Вузол – базове поняття: точка, де можуть сходитися/розходитися *ребра* та/або *дуги*. Множина вершин графу G позначається $V(G)$.

Ребро графу (дуга графу) – базове поняття. Ребро з'єднує дві *вершини* графу.

Таке дуже загальне означення нашо вхує на думку, що методи і алгоритми теорії графів можуть використовуватись для розв'язування дуже великої кількості задач. Адже поняття множини – це фундамент сучасної математики, а це означає, що практично будь-яка математична модель може бути подана у термінах графів. Теорія графів дуже багата на алгоритми розв'язання найрізноманітніших задач. Питання полягає лише в доцільності такого подання – може існує простіший і ефективніший шлях розв'язання конкретної задачі?

При створенні графової моделі слід в першу чергу визначитися, у якому просторі вона створюється. Залежно від природи елементів множини вершин графи можуть розглядатися у різних просторах:

- в *геометричному просторі* – наприклад, карта автомобільних доріг, план розташування комп'ютерів мережі у приміщенні;

- в *просторі станів та перетворень* (у часі) – наприклад, алгоритм (відображає зміну та зв'язок станів комп'ютера), мережний графік (відображає зміну та зв'язок станів технологічного процесу);

- в *просторі відношень* – наприклад, комп'ютерна мережа (відображає інформаційний зв'язок комп'ютерів), схема взаємодії підрозділів підприємства, семантична мережа, мережа логічного висновку.

Графи в просторі відношень є структурними моделями. На практиці часто з ними суміщають елементи функціональних моделей, зокрема ваги у зважених графах можуть відображати величини інформаційних потоків, силу струму тощо у процесі функціонування.

Розмаїття задач, в яких використовуються графи, спричиняє відповідне розмаїття видів графів.

Залежно від симетричності зв'язків між вершинами графи поділяються на *орієнтовані* (рис. 2.3, б, г) і *неорієнтовані* (рис. 2.3, а, в, д, е). Односторонні зв'язки зображаються направленими ребрами, які називають *дугами*. Граф з дугами називають *орієнтованим*, або орграфом. Якщо хоча б одне ребро графу має

орієнтацію, то весь граф називається орієнтованим.

Залежно від того, як характеризується кожне ребро графу, графи поділяються на *зважені* (рис. 2.3, в), *незважені* (рис. 2.3, а, б, д, е), *мережні* (рис. 2.3, г). В незважених графах ребра не характеризуються ніякими числовими параметрами і вичерпною характеристикою ребра є сам факт його існування. У зважених графах ребру приписується певний числовий параметр – вага, який може бути відстанню між вершинами у метричному просторі, ймовірністю переходів у просторі станів тощо. У мережних графах кожне ребро характеризується двома параметрами: величиною *потoku* і *пропускною спроможністю*.

Шлях в графі – послідовність вершин і ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, що чергуються, в якій будь-які два сусідні елемента пов'язані (*інцидентні*). Якщо в графі існує шлях між кожною парою вершин, то граф називається *зв'язним*, у іншому випадку – *незв'язним*.

Петля – ребро, початок і кінець якого знаходяться в одній і тій самій вершині.

Виділяють спеціальні види графів: *дерева* (рис. 2.3., в, д), *циклічні графи* (рис. 2.3., е).

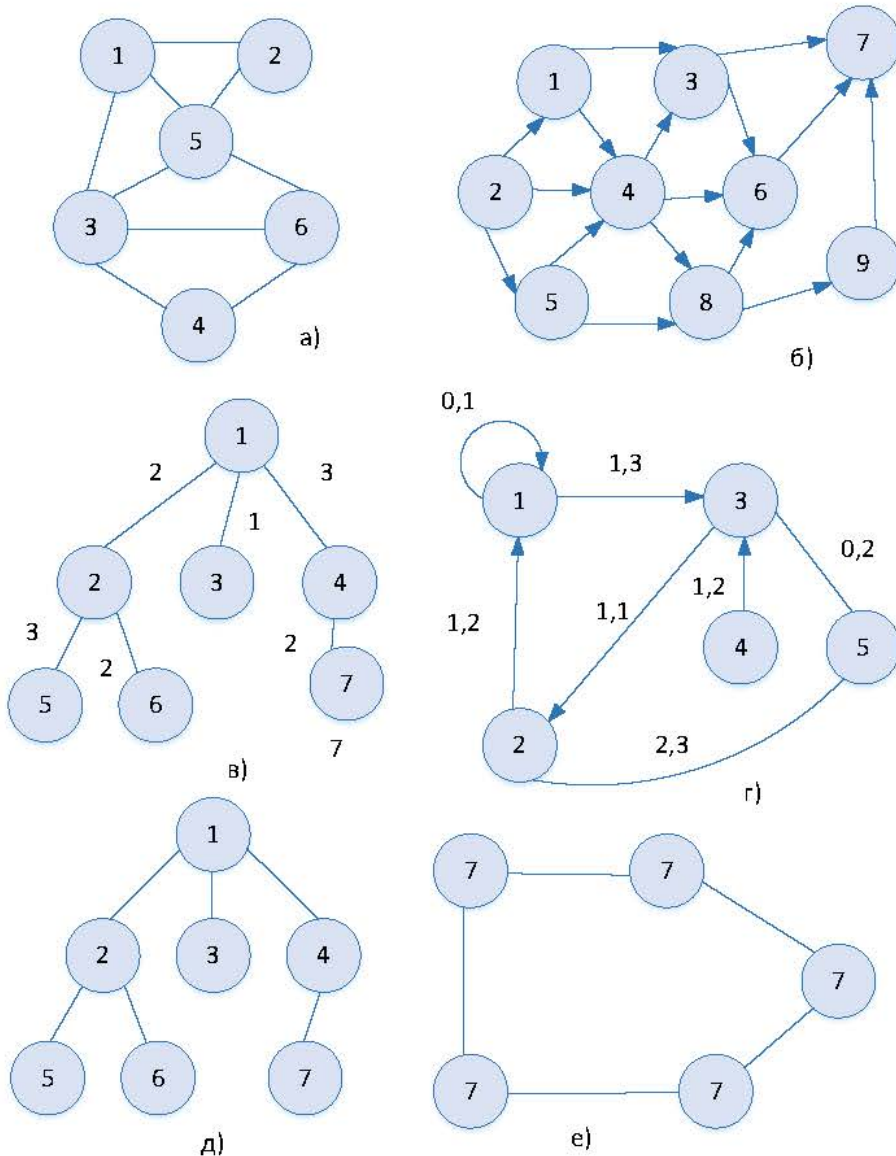


Рисунок 2.3 – Приклади графів різних видів:

- а) незважений неорієнтований; б) незважений орієнтований;
- в) зважений неорієнтований; г) зважений орієнтований;
- д) дерево; е) циклічний граф

Мультиграф – граф, в якому існує пара вершин, що з'єднана більш ніж одним ребром (ненаправленим), або більше ніж двома дугами протилежних напрямків.

Зв'язний граф – граф, в якому всі вершини зв'язані.

Змішаний граф – граф, що містить як орієнтовані, так і неорієнтовані ребра.

Плоский граф – геометричний граф, в якому жодні два ребра не мають спільних точок крім інцидентних їм обом вершинам (не перетинаються), є укладеним графом на площині.

Планарний граф – граф, що може бути нарисований (укладений) на площині без перетину ребер. Ізоморфний плоскому графу, тобто, є графом із перетинаннями, але таким, що допускає плоске укладання, через це може відрізнятися від *плоского графу* зображенням на площині. Таким чином, може бути різниця між плоским і планарним графами у зображенні на площині.

Двоїстий граф. Граф A називається двоїстим до планарного графу B , якщо вершини графу A відповідають граням графу B , і дві вершини графу A з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні грані графу B мають хоча б одне спільне ребро.

Повним графом називається граф, в якому для кожної пари вершин v_1, v_2 існує ребро, інцидентне v_1 і інцидентне v_2 (кожна вершина з'єднана ребром з будь-якою іншою вершиною).

Суграф (частковий граф) початкового графу – граф, що містить всі вершини початкового графу і підмножину його ребер.

Регулярний граф – граф, степені всіх вершин якого рівні.

Степінь вершини – кількість ребер графу G , що інцидентні вершині x . Позначається $d(x)$. Мінімальний степінь вершини графу G позначається $\delta(G)$, а максимальний – $\Delta(G)$

Дводольний граф (або **біграф**, або **парний граф**) – граф $G(V, E)$, такий що множина вершин V розбита на дві підмножини V_1 і V_2 , що не перетинаються, причому кожне ребро E інцидентне вершині з V_1 і вершині з V_2 (тобто з'єднує вершину з V_1 з вершиною з V_2). Множини V_1 і V_2 називають «долями» дводольного графу. Дводольний граф називається «повним», якщо будь-які дві вершини з V_1 і V_2 виявляться суміжними. Якщо $|V_1| = a$, $|V_2| = b$, то повний дводольний граф позначається $K_{a,b}$.

Цикл – замкнений ланцюг. Для *орграфів* цикл називають *контуром*.

Гамільтонів шлях – простий шлях в графі, що містить всі вершини графу точно по одному разу.

Гамільтонів цикл – простий цикл в графі, що містить всі вершини графу точно по одному разу.

Грань – область, обмежена ребрами в *плоскому графі* і така, що не містить всередині себе вершин і ребер графу. Зовнішня частина площини також утворює грань.

Дерево – зв'язний граф, що не містить циклів.

Ліс – неорієнтований граф без циклів. Компонентами зв'язності лісу є *дерева*.

Кістяковим (каркасним) лісом незв'язного графу $G = (V, E)$ називають сукупність кістякових (каркасних) дерев компонент зв'язності графу G ^[2].

Ейлерів граф – граф, в якому існує *цикл*, що містить усі ребра графу по одному разу, вершини можуть повторюватися.

Ейлерів ланцюг (або **Ейлерів цикл**) – *ланцюг (цикл)*, що містить всі ребра графу, вершини можуть повторюватися.

Переріз графу – множина ребер, видалення яких ділить граф на два ізолюваних підграфу.

Кліка – підмножина вершин графу, повністю з'єднаних кожна з кожною, тобто підграф, що являє собою *повний граф*.

Обхват – довжина найменшого *циклу* в графі.

Довжина маршруту – кількість ребер в маршруті (з повтореннями). Якщо маршрут $M = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, то довжина M дорівнює k (позначається $|M| = k$).

Зв'язність. Дві вершини в графі **зв'язні**, якщо існує (простий) *ланцюг*, що їх з'єднує.

2.3 Способи формалізації структурних моделей

Графічне зображення графу є зручним і наочним для людини, але графові моделі переважно використовуються в комп'ютерних алгоритмах. Оскільки комп'ютер оперує з числами, то для комп'ютерної обробки зручнішим є не графічне, а умовне числове подання графу.

Для опису графів використовуються різноманітні матриці та списки.

Найпоширеніші:

- матриця суміжності;
- матриця інцидентії;
- списки пар вершин.

Матриця досяжності орграфу – матриця, що містить інформацію про існування шляхів між вершинами орграфу.

Суміжність – поняття, яке використовується стосовно тільки двох ребер або двох вершин: два ребра, інцидентні одній вершині, називаються **суміжними**; дві вершини, інцидентні дному ребру, також називаються суміжними.

Інцидентність – поняття, що використовується тільки для ребра і вершини: якщо v_1, v_2 – вершини, а $e = (v_1, v_2)$ – ребро, що їх з'єднує, тоді вершина v_1 і ребро e інцидентні, вершина v_2 і ребро e також інцидентні.

Дві вершини (або два ребра) інцидентними бути не можуть. Для позначення найближчих вершин (ребер) використовується поняття *суміжності*.

Матриця інцидентії є головним, з теоретичної точки зору способом опису графу, оскільки показує зв'язок між вершинами і ребрами і є просто табличною формою подання відповідності $G = (V, E)$, яка, власне, і є графом.

Якщо граф має n вершин і m ребер, то матриця інцидентії матиме розмірність $(n \times m)$. Якщо ребро графу ненаправлене, відповідний елемент матриці дорівнює 1. Якщо ребро (дуга) виходить з вершини, відповідний елемент матриці дорівнює 1. Якщо ребро (дуга) входить в вершину, відповідний елемент матриці дорівнює -1. Якщо немає ребра, яке пов'язує дві вершини, відповідний елемент матриці дорівнює 0.

Приклад матриці інцидентії наведений для графу зображеного на рис. 2.4.

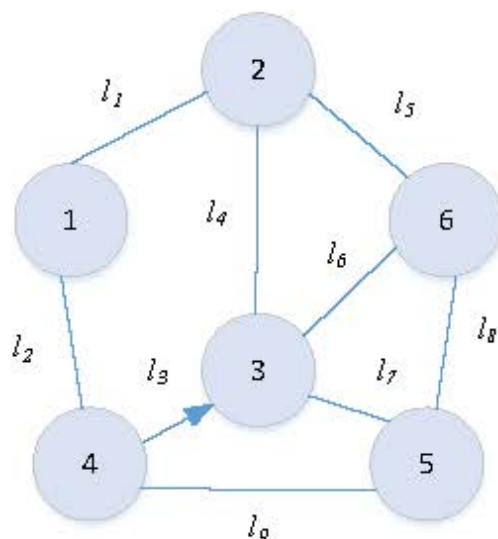


Рисунок 2.4 – Приклад графу

Матриця суміжності для графу, який має n вершин, буде мати розмірність $(n \times n)$. Елемент матриці $A[i, j] = 1$, якщо є ребро або дуга з вершини i в вершину j , $A[i, j] = 0$, якщо немає такого ребра.

Якщо $A[i, j] = A[j, i] = 1$, то між вершинами i та j знаходиться ребро. Якщо $A[i, j] \neq A[j, i]$, то між вершинами i та j є дуга.

Матриця суміжності неорієнтованого графу симетрична відносно головної діагоналі. Якщо граф орієнтований (коли хоча б одне ребро графу є дугою), то матриця суміжності буде несиметричною.

Для опису деяких графів використовуються одночасно декілька матриць. Зокрема, для опису мереж (потоків графів) крім матриць інцидентції або суміжності використовуються ще дві матриці: матриця пропускних спроможностей і матриця потоків.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	-1	1	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	1	1	1
6	0	0	0	0	1	1	0	1	0

Матриця суміжності для графу, показаного на рис. 2.4:

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Список пар вершин. Для кожного ребра записується пара вершин: перша – та, з якої ребро виходить, друга – та, в яку ребро входить. Для графу рис. 2.4

$$l_1 : 1-2; \quad l_2 : 1-4; \quad l_3 : 4-3; \quad l_4 : 2-3; \quad l_5 : 2-6; \quad l_6 : 3-6; \quad l_7 : 3-5; \quad l_8 : 5-6; \\ l_9 : 4-5$$

Для опису зважених графів використовуються *матриці ваг*. Особливістю застосування матриці ваг є неоднозначний запис ваги відсутніх ребер. Якщо, наприклад, матриця ваг використовується для пошуку найкоротшого шляху в графі, то відсутнім ребрам приписується нескінченна вага, а якщо найдовшого – то нульова.

2.4 Формальні перетворення структурних моделей

Перетворення структурних моделей є важливим етапом моделювання систем. Вони виконуються в процесі аналізу, синтезу і дослідження структури систем.

Евристичне поняття операцій над графами

Перетворення графів, які зображають структурні моделі, відповідають природним уявленням про перетворення структури об'єктів і систем керування. Розмаїття видів об'єктів і систем зумовлює велику кількість операцій над їх структурою. Але усі операції можна розбити на дві групи:

- операції композиції, які виконуються переважно в процесі синтезу систем;
- операції декомпозиції, які виконуються переважно в процесі аналізу систем.

Конкретний зміст операцій над графами залежить від типу графу. Так, розрізняють правила виконання операцій над орієнтованими і неорієнтованими графами, зваженими і незваженими графами. Найпростішими є правила виконання операцій над неорієнтованими незваженими графами, оскільки такі графи характеризуються мінімальною кількістю даних, а усі вершини і ребра є рівнозначущими.

Формальний опис на основі теорії множин

Із структурними моделями, які зображуються графами, можуть виконуватися алгебраїчні перетворення. Спосіб виконання цих перетворень визначається тим, що граф за означенням є сукупністю множин вершин та ребер. Відповідно, до графів можуть застосовуватися всі операції над множинами.

1. Операція вилучення ребра

Нехай $G = (V, E)$ – граф і $e \in E$ – деяке його ребро. Говорять, що граф $G_1 = G - e$ одержано з графу G внаслідок операції вилучення ребра e , якщо $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$. Отже, вершини-кінці ребра e не вилучаються з множини V .

Неважко показати, що для довільних ребер e і e_1 графу G виконується така тотожність:

$$(G - e) - e_1 = (G - e_1) - e. \quad (2.3)$$

Отже, якщо виконується підряд кілька операцій вилучення ребра, то результат не залежить від порядку вилучення ребер з графу (рис. 2.5).

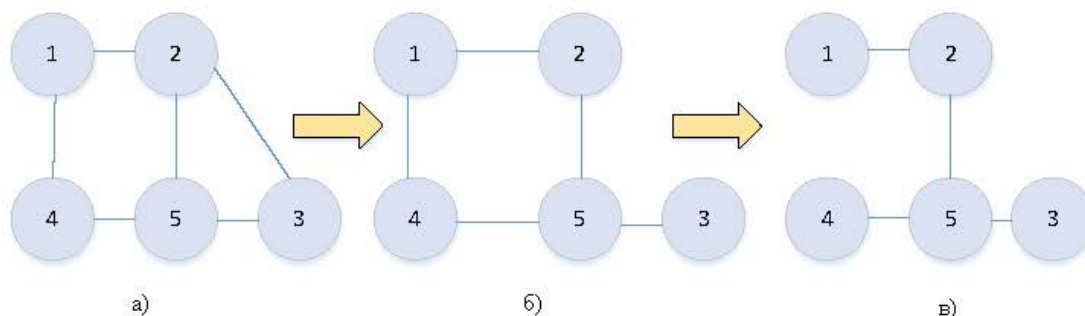
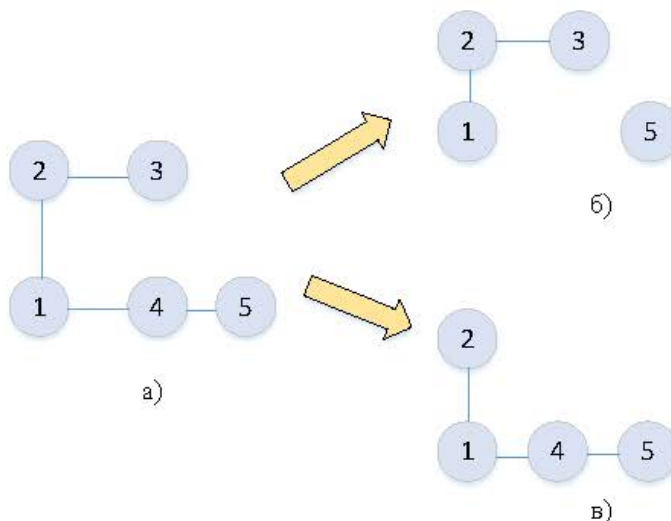


Рисунок 2.5 – Видалення ребра: а) граф G ; б) граф $G \setminus \{(2,3)\}$; в) граф $(G \setminus \{(2,3)\}) \setminus \{(1,4)\}$

2. Операція видалення вершини

Нехай $G = (V, E)$ – граф, і $v \in V$ – його вершина. Говорять, що граф $G_1 = G - v$ одержаний з графу G внаслідок операції видалення вершини v , якщо вершина v видалена з V , а з E видалені всі ребра, інцидентні з вершиною v .

Неважко переконатися, що операція видалення вершини не залежить від порядку, в якому видаляються вершини з графу (рис. 2.6.).



Формально операція видалення вершини може бути записана у вигляді

$$G_1(V_1, E_1) = G(V, E) \setminus G_0 \left(\{v_0\}, \left\{ \bigvee_i [e_{i0}, e_{0i}] \right\} \right). \quad (2.4)$$

3. Операція введення ребра

Якщо вершини $u, v \in V$ і ребро $(u, v) \notin E$ в графі $G = (V, E)$, то операція вве-

дення ребра

$$G + e = (V, E \cup \{e\}), \quad (2.5)$$

де $e = (u, v)$.

Внаслідок комутативності операції об'єднання множин можна стверджувати, що послідовність операцій введення ребер у граф G не залежить від порядку, в якому ці ребра вводяться в граф G . Іншими словами, справедлива тотожність

$$\forall e, e_1 \in E \quad ((G + e) + e_1 = (G + e_1) + e). \quad (2.6)$$

4. Операція введення вершини в ребро

Нехай (u, v) — деяке ребро графу G . Введенням вершини w в ребро (u, v) називається операція, внаслідок якої одержуємо два ребра (u, w) і (w, v) , а ребро (u, v) при цьому вилучається з графу G .

5. Операція об'єднання графів

Граф F називається об'єднанням графів $G = (V, E)$ і $H = (V_1, E_1)$, якщо $F = (V \cup V_1, E \cup E_1)$. Граф F позначається $G \cup H$. Об'єднання графів $F = G \cup H$ називається *диз'юнктивним*, якщо $V \cap V_1 = \emptyset$.

Безпосередньо з означення операції об'єднання графів випливає, що $(\forall G, H)(G \cup H = H \cup G)$.

Операція диз'юнктивного об'єднання графів дає можливість ввести до розгляду ще один важливий тип графів.

Граф є *зв'язним*, якщо його не можна подати у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох підграфів, і *незв'язним* — у протилежному випадку. На рис. 2.7 показані ці два випадки об'єднання графів.

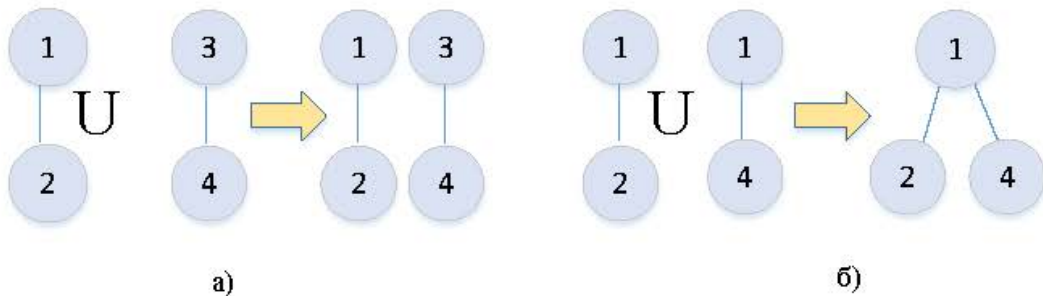


Рисунок 2.7 – Об'єднання графів: а) диз'юнктивне; б) недиз'юнктивне

Отже, будь-який незв'язний граф можна зобразити у вигляді диз'юнктивного об'єднання скінченного числа зв'язних підграфів. Кожний із таких зв'язних підграфів називається *компонентом зв'язності*.

6. Добуток графів

Добутком графів $G = (V, E)$ і $H = (V_1, E_1)$ називається граф $F = G \times H$, у

якого $V = V \times V_1$, а E визначається таким чином: вершини (u, u_1) і (v, v_1) суміжні в F тоді і тільки тоді, коли $u=v$, а u_1 і v_1 суміжні в H або $u_1=v_1$, а u і v суміжні в G . Приклад наведений на рис. 2.8.

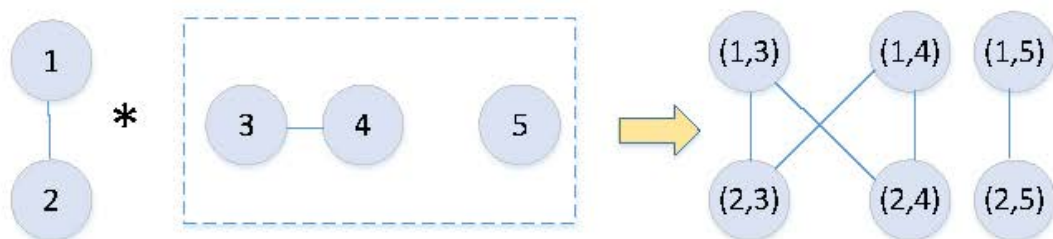


Рисунок 2.8 – Добуток графів

7. Ототожнення (злиття) вершин (рис. 2.9)

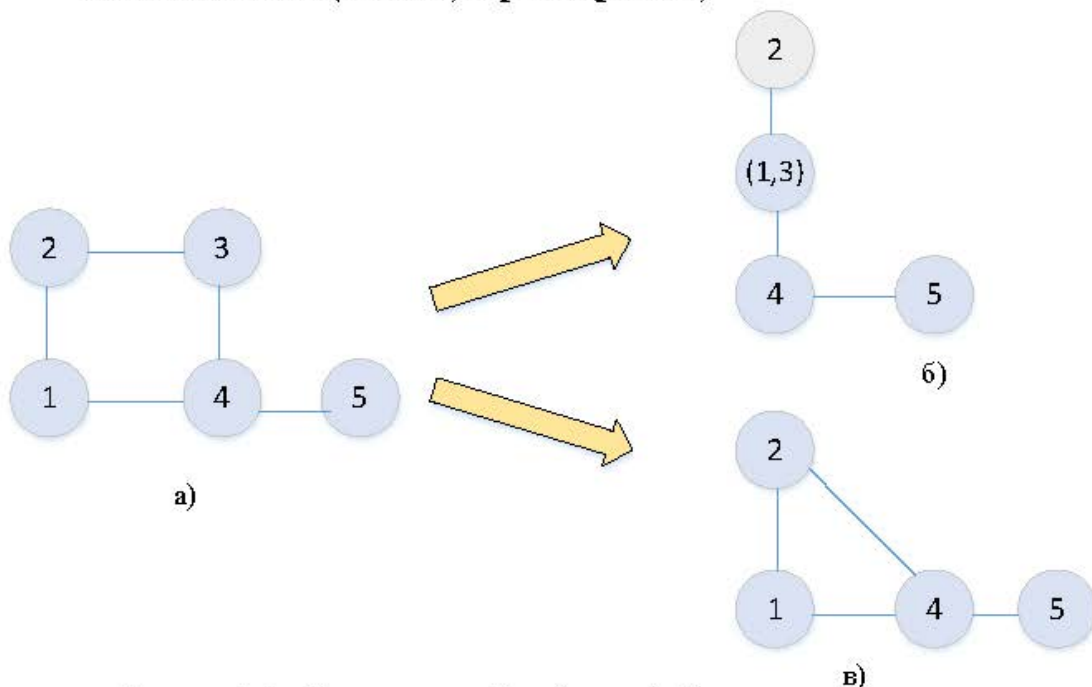


Рисунок 2.9 – Стягування ребра: а) – граф; б) – ототожнення вершин 1 і 3 в G ; в) – стягування ребра (2, 3) в G

Якщо $G = (V, E)$ – граф, u, v – дві його вершини, причому вершина v суміжна з вершинами $\{v_1, \dots, v_l\}$, а вершина u суміжна з вершинами $\{u_1, \dots, u_k\}$, то граф

$$H(V \setminus \{u, v\} \cup u', E \setminus \{a_{u,\{u_i\}}, a_{v,\{v_j\}}\} \cup \{a_{u',\{u_i\}}, a_{u',\{v_j\}}\}),$$

одержаний приєднанням нової вершини u' до множини вершин замість вилуче-

них вершин u, v і множини ребер $\{(u', u_i)\}, \{(u', v_j)\}$ ($i=1, 2, \dots, k, j=1, 2, \dots, l$) замість вилучених $\{(u, u_i), (v, v_j)\}$, ($i=1, 2, \dots, k, j=1, 2, \dots, l$) називається графом, одержаним із G ототожненням вершин u і v .

Операція стягування ребра (u, v) в графі $G = (V, E)$ означає ототожнення вершин u і v в графі G . Граф G називається графом, який *стягується до графу* H , якщо H можна одержати з G за допомогою деякої послідовності операцій стягування ребра.

8. Операція роздвоєння (розщеплення) вершини

Нехай v — деяка з вершин графу G . Розіб'ємо множину суміжних з нею вершин довільним чином на дві частини — M і P , а потім виконаємо таке перетворення графу G : вилучимо вершину v разом з інцидентними їй ребрами і введемо дві нові вершини u і w разом з ребром, яке з'єднує ці вершини, вершину u з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини M , а вершину w — з кожною вершиною з множини P . Одержаний граф позначимо G' і будемо вважати, що він одержаний з графу G внаслідок роздвоєння (розщеплення) вершини v (рис. 2.10.).

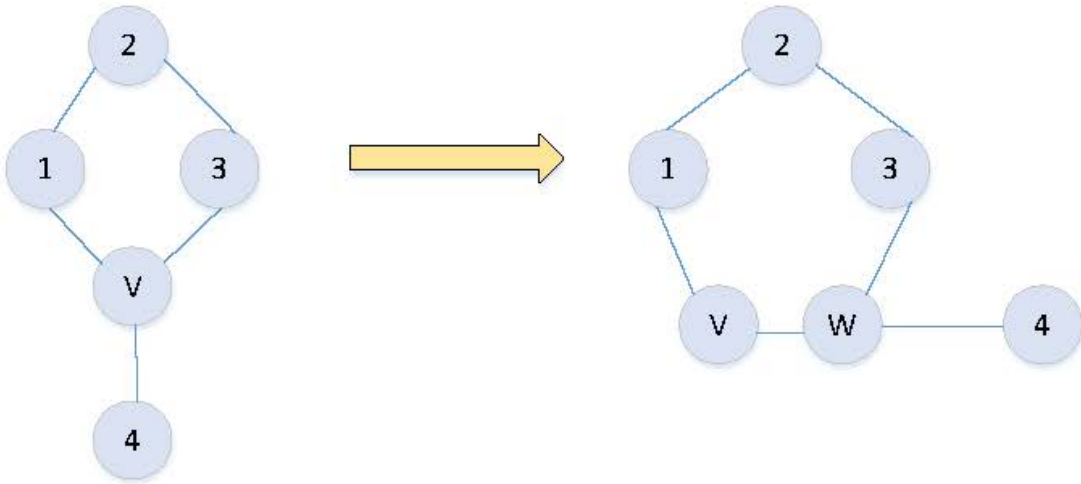


Рисунок 2.10 – Роздвоєння вершини V

Хоча операція роздвоєння вершини є оберненою до операції стягування ребра, проте внаслідок довільного розбиття множини суміжних вершин на підмножини M і P вона є неоднозначною. Отже ці операції не є повністю взаємно оберненими.

9. Операція з'єднання графів

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графи, у яких множини вершин V_2 і V_1 не перетинаються, тобто $V_2 \cap V_1 = \emptyset$. Операція з'єднання графів G_2 і G_1 полягає в тому, що множини V_2 і V_1 об'єднуються, а потім з'єднується ребрами кожна вершина графу G_2 з кожною вершиною графу G_1 .

$$G = G_1 \cup G_2 = G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{E(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}) \quad (2.7)$$

Очевидно, що операція з'єднання графів може бути виражена у вигляді добутку (суперпозиції) операції об'єднання графів G_2 і G_1 та послідовності операцій введення ребра.

10. Перетин графів

Якщо дано граф $G_1 = (V_1, E_1)$ і граф $G_2 = (V_2, E_2)$, то перетин графів

$$G = G_1 \cap G_2 = G(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2) \quad (2.8)$$

11. Операція доповнення (знаходження різниці) графів

Нехай $G = (V, E)$ – граф. *Доповненням* G^* графу G називається граф з множиною вершин V , в якому дві вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не суміжні в графі G (рис. 2.11). Звідси випливає, що коли граф G має n вершин, то граф G^* можна побудувати, вилучивши з повного графу (тобто графу, в якому між кожною парою вершин є ребро) всі ребра, які належать G (граф G вважається підграфом графу K_n).

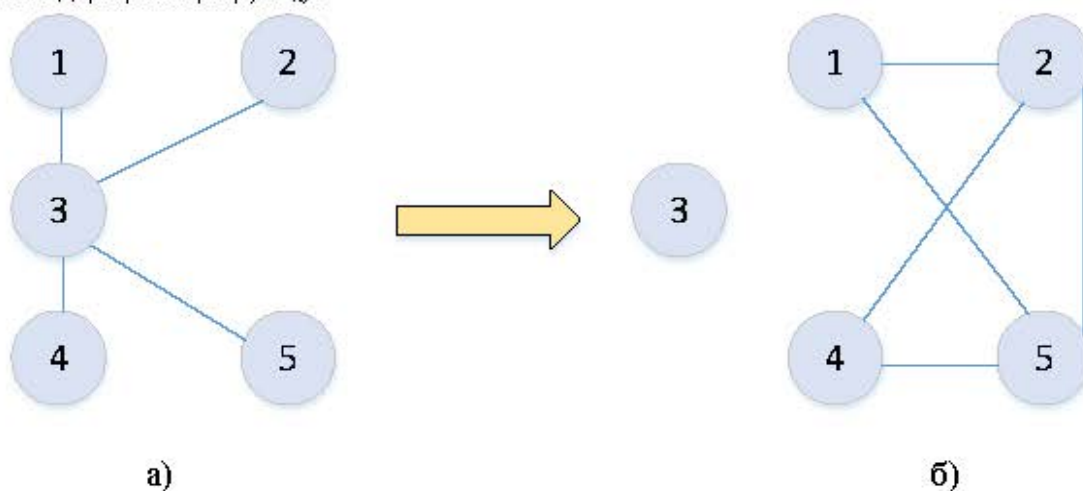


Рисунок 2.11 – Доповнення графу: а – граф G , б – доповнення графу G

Очевидно також, що доповнення повного графу є пустим графом і, навпаки, доповнення пустого графу є повним графом. Неважко довести, що доповнення регулярного графу є регулярним графом.

Якщо у топологічному просторі графів визначити метрику, то операція доповнення графів дозволить розглядати чисельну характеристику різниці графів з однаковою потужністю множини вершин.

12. Додавання вершини

Додавання вершини v_0 до графу $G_1 = (V_1, E_1)$ зводиться до з'єднання графів $G(V, E) = G_1(V_1, E_1) \cup G_0(\{v_0\}, \emptyset)$;

Формальний опис на основі матриць інциденції

Формалізовані у множинному вигляді операції над графами використовуються переважно для теоретичних досліджень структурних моделей та доведення правильності результатів алгоритмів, що призначені для розв'язання задач на графах. При комп'ютерному моделюванні зручнішим є подання операцій над графами як операцій над відповідними матрицями.

Операції над графами у матричному вигляді задаються наборами правил виконання кожної операції. Так наприклад, операція вилучення вершини передбачає:

- виділення у матриці інциденції відповідного рядка;
- виділення у матриці стовпців, на перетині яких з виділеним рядком є знак, відмінний від нуля;
- вилучення виділених рядка і стовпців.

Аналогічно формулюються інші операції над графами у матричному вигляді.

Морфологічні перетворення структурних моделей

Останнім часом у зв'язку з розв'язанням задач обробки зображень і розпізнавання образів широко використовуються морфологічні операції над графами. Морфологічні операції полягають у виділенні компактних підграфів базового графу, які характеризуються певними ознаками. Для цього використовуються операції додавання або вилучення ребер та вершин, в результаті чого зв'язність вершин всередині підграфів збільшується, зв'язність окремих підграфів зменшується. Таким чином краще виявляються структурні особливості графу.

2.5 Потокові графи

Транспортна мережа – це технічний об’єкт, яким розповсюджуються потоки. Прикладами таких мереж є водогінна мережа, комп’ютерна мережа, мережа автомобільних доріг тощо.

Потік – це кількість речовини, енергії або інформації, яка проходить через переріз за одиницю часу.

Моделлю транспортної мережі є зважений граф, у якому задані **потоки** $v(x,y)$ і **пропускні спроможності** ребер $c(x,y)$ – максимальні кількості потоку, які можуть проходити через ребра від виток до стоку, де x – початкова вершина ребра, y – кінцева вершина.

Значення потоків визначаються функцією потоку $f(x,y)$, причому

$$f(x, y) \leq c(x, y). \quad (2.9)$$

В мережі існує три типи вузлів:

- *виток* S , з якого виходить більше потоку, ніж входить в нього;
- *сток* T , в який входить більше потоку, ніж виходить з нього;
- *проміжні вузли*, в які скільки виходить потоку, стільки ж і входить.

Приклад мережі показаний на рис. 2.3, г. На рисунку кожне ребро охарактеризоване пропускною здатністю (перша цифра) і величиною потоку (друга цифра). Наведена мережа має один виток, два стоки і 9 проміжних вузлів.

Для мережі можна записати певні співвідношення, які повинні задовольняти потоки через ребра:

1) головна умова існування мережі

$$\forall_{i,j} V_{ij} \leq C_{ij}, \quad i, j = 1..N; \quad (2.10)$$

2) умова балансу потоків у проміжному вузлі (сума потоків, які входять з усіх інших вершин в j -ту вершину, дорівнює сумі потоків, що виходять з j вершини)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ j \neq S \\ j \neq T}}^N V_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N V_{ji}; \quad (2.11)$$

3) умова виток (сума всіх потоків від виток до всіх інших вершин більша, ніж сума всіх потоків, що входять від i -их вершин до виток)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq S}}^N V_{Si} > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq S}}^N V_{iS}; \quad (2.12)$$

4) умова стоку (сума всіх потоків до стоку від усіх інших вершин більша ніж сума всіх потоків, що виходять зі стоку)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq T}}^N V_{Ti} < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq T}}^N V_{iT}; \quad (2.13)$$

5) умова збереження кількості потоку в мережі

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq S}}^N (V_{Si} - V_{iS}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq T}}^N (V_{iT} - V_{Ti}). \quad (2.14)$$

При дослідженні мереж за допомогою поточкових графів використовують такі їх характеристики.

Нагадаємо, що розріз – розбиття множини усіх вершин V на дві підмножини A і B такі, що $s \in A$, $t \in B$, причому перетин $A \cap B = \emptyset$.

Пропускна здатність розрізу (A, B) – сума пропускних спроможностей усіх ребер, які ведуть з A в B

$$\sum_{u \in A} \sum_{v \in B} c(u, v).$$

Потік через розріз (A, B) – сума усіх потоків з A в B

$$\sum_{u \in A} \sum_{v \in B} f(u, v).$$

Він не може перевищувати пропускну спроможність розрізу.

Мінімальний розріз – розріз з мінімальною пропускну спроможністю.

Залишкова пропускна спроможність ребра $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$. Вона завжди невід'ємна.

Залишкова мережа – граф $G_f = (V, E_f)$, де E_f – множина ребер з додатною залишковою пропускну спроможністю.

Потокові графи широко використовуються для розв'язування практичних задач. Однією (дуже поширеною!) задачею є *задача про максимальний потік*: у потоковому графі знайти максимальний потік, який може бути переданий з витока до стока. Прикладом такої задачі є знаходження максимальної пропускну спроможності комп'ютерної мережі.

Задача про максимальний потік розв'язується на основі **теорему Форда – Фалкерсона** – теорему про максимальний потік у графі: величина максимального потоку у графі дорівнює величині пропускну спроможності його мінімального розрізу.

На цій теоремі оснований алгоритм Форда-Фалкерсона пошуку максимального потоку в графі.

Моделювання топології електричних кіл

Одним з найпоширеніших застосувань потокових графів є моделювання електричних кіл, оскільки для електричних кіл виконується 1-й закон Кірхгофа. Цей закон відповідає умовам (2.11) – (2.14). Що ж стосується умови (2.10), то в реальних електричних колах завжди є обмеження максимального значення електричного струму в провідниках та елементах. Так наприклад, якщо максимальна потужність резистора R дорівнює P_{\max} , то максимально допустимий струм (пропускна спроможність) буде $C = I_{\max} = \sqrt{P_{\max}/R}$.

Інформація про структуру електричного кола міститься в його схемі (наприклад, рис. 2.12, а). Для отримання графу двополосні елементи замінюють ребрами графу (рис. 2.12, б). Місце з'єднання гілок графу – вузол електричного кола. Джерело живлення, яке на рис. 2.12, а не показано, теж є елементом схеми і на графі показане ребром.

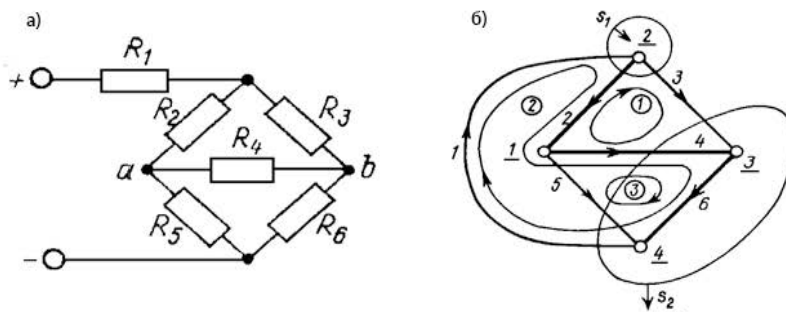


Рисунок 2.12 – Електричне коло та його модель

Перед початком аналізу кола на схемі заміщення вказують напрямок відліку (умовні позитивні напрямки) струмів або на окремих ділянках. Вибір напрямку відліку є довільним. Найбільш природно вибрати як напрямок відліку струмів напрямок руху позитивних зарядів. Стрілки на рис. 2.12, б вказують прийняті напрямки відліку струмів.

Переріз графу зображують на графі або схемі кола у вигляді замкненого контуру, що охоплює частину кола, яка включає один або декілька вузлів. Окремі ребра перетину направленої графу перетинають цю поверхню в різних напрямках. Можна прийняти позитивним напрям перетину поверхні назовні. Такий перетин називається орієнтованим.

Ключові слова

Граф, вершина, вузол, ребро, метричний простір, простір станів, простір перетворень, простір відношень, орієнтований граф, неорієнтований граф, дуга, зважений граф, незважений граф, потоковий граф, потік, пропускна спроможність, зв'язний граф, незв'язний граф, дерева, циклічні графи, планарні суграфи, матриця суміжності, матриця інциденції, список пар вершин, матриця ваг, доповнення графу, об'єднання графів, з'єднання графів, перетин графів, додавання вершини, видалення вершини, видалення ребра, додавання ребра, стягування підграфу у вершину, розмноження вершини, різниця структурних моделей, топологічна ентропія, теорема Форда-Фалкерсона.

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. Наведіть приклади задач, в яких застосовується графове подання моделі.
2. Розгляньте класичну модель відносин типу “любовний трикутник”. Чи є відповідний граф орієтованим? Зваженим? Мережним? Зв'язним?
3. Зобразіть принципову схему рис. 2.1, а у вигляді графу {вершини – елементи, ребра – провідники} і у вигляді графу {вершини – сигнали, ребра – перетворення}. Чи є ці моделі ізоморфними? А гомеоморфними?
4. Зобразіть фрагмент карти рис. 2.1, г у вигляді неорієтованого графу. Опишіть його матрицями суміжності і інциденції.
5. Припустимо, що деякі з вулиць на рис. 2.1, г мають односторонній рух. Опишіть такий граф матрицями суміжності та інциденції. Порівняйте отримані матриці з матрицями попереднього завдання.
6. Складіть графову модель для розв'язання задачі пошуку найкоротшого шляху по карті рис. 2.1, г при наявності вулиць з одностороннім рухом.
7. Дайте означення основним операціям з графами.
8. Які операції над графами є однозначними, а які ні?
9. Які операції над графами приводять до гомеоморфних моделей, а які до ізоморфних?
10. Оцініть топологічну ентропію двох графових моделей, які відрізняються на одну вершину і відповідні ребра.
11. Дано матрицю можливих з'єднань комп'ютерів. Скласти алгоритм знаходження схеми з'єднань для побудови лінійної комп'ютерної мережі мінімальної довжини.
12. У чому сутність методу пошуку в ширину?
13. У чому сутність методу пошуку в глибину?
14. У чому сутність методу гілок та границь?
15. Дайте визначення цикла, гамільтонова цикла, дерева, кістякового дерева.

Література

1. Дубовой В. М. Моделирование систем контролю та керування / Дубовой В. М. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 175 с.
2. Дубовой В. М. Спеціальні розділи математики / Дубовой В. М., Никитенко О. Д. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 165 с.
3. Букетов А. В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем : навчальний посібник / Букетов А. В. – Тернопіль : СМП „Тайп“, 2009. – 260 с.
4. Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / Акимов О. Е. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376 с.
5. Лапа В. Г. Математические основы кибернетики / Лапа В. Г. – К. : Вища школа, 1974. – 452 с.
6. Математическая энциклопедия. В 6 томах / [под ред. И. М. Винаградова]. – М. : Советская энциклопедия, 1984.
7. Основи дискретної математики : підручник. / [Капітонова Ю. В, Кривий С. Л., Летичевський А. А., Печурін Н. К.] – К.: Наукова думка, 2002. – 580 с.
8. Романовский И. В. Дискретный анализ / Романовский И. В. – СПб. : Невский диалект, 2000. – 240 с.
9. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на С. Алгоритмы на графах ; [пер. с англ.] / Седжвик Р. – СПб. : ДиаСофтЮП, 2003. – 480 с.
10. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера / Сигорский В. П. – К. : Техника, 1977. – 768 с.
11. Единая система конструкторской документации. Схемы. Виды и типы. Общие требования к выполнению : ГОСТ 2.701-68 – [Чинний від 1968-01-01]. – М. : Изд-во стандартов, 1968. – 34 с. – (Государственный стандарт СССР)

3 ФУНКЦІОНАЛЬНІ МОДЕЛІ

Функціональні моделі описують процеси, які відбуваються в об'єкті моделювання. Якщо об'єктом моделювання є система керування, то функціональна модель відображає залежність стану системи і її вихідних сигналів від зовнішніх впливів.

У загальному випадку модель системи можна розглядати як *операторне перетворення*

$$\Theta_Y = F(S, Z, f, t)[\Theta_X] \quad (3.1)$$

де Θ_X – множина характеристик вхідних впливів; Θ_Y – множина характеристик вихідних величини і параметрів стану; F – оператор перетворення; Z – параметри системи; S – структура системи; f – вектор зовнішніх збурень; t – час.

Таким чином, функціональна модель системи складається з моделей вхідних та вихідних величин і оператора перетворення.

Якщо набір характеристик Θ містить значення вхідних та вихідних величин та їх похідних, то операторне перетворення може бути подане *диференціальним рівнянням*. Для прикладу розглянемо систему, зображену на рис. 3.1, яку можна описати диференціальним рівнянням другого порядку

$$F[y, \dot{y}, \ddot{y}, x, \dot{x}] + f = 0, \quad (3.2)$$

де y – вихідна величина, x і f – вхідні впливи, \dot{y} і \dot{x} – перші похідні у часі, \ddot{y} – друга похідна у часі.

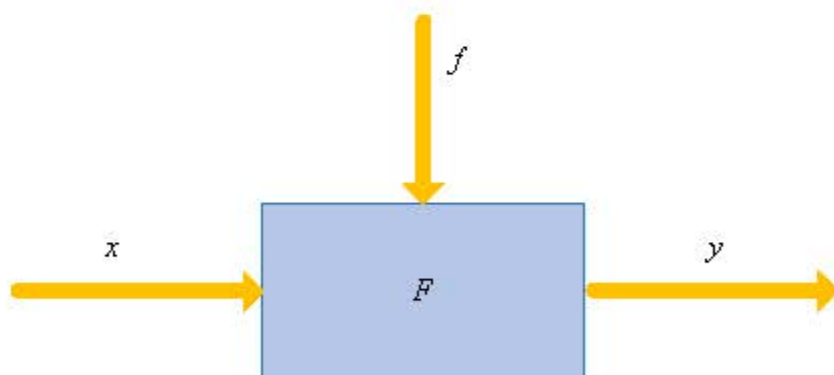


Рисунок 3.1 – Узагальнене зображення об'єкта моделювання

Рівняння (3.2), яке описує процеси в часі при довільних вхідних впливах, називається *рівнянням динаміки*. Нехай при постійних вхідних величинах ($x=x_0$ і $f=f_0$) процес протягом часу встановиться – вихідна величина прийме постійне значення $y = y_0$. Тоді (3.2) матиме вигляд:

$$F[y_0, 0, 0, x_0, 0] + f_0 = 0. \quad (3.3)$$

Це рівняння описує встановлений чи *статичний режим*, його називають *рівнянням статички*.

3.1 Моделі статички

Модель статички системи – це залежність між вхідною і вихідною величинами у встановленому стані. Графік, який виражає цю залежність, називається *статичною характеристикою*.

3.1.1 Модель статички як окремий випадок загальної операторної функціональної моделі

Рівняння статички можна отримати з диференціального рівняння динаміки системи шляхом прирівнювання до нуля похідних в цьому рівнянні, в результаті чого рівняння перетворюється в алгебраїчне.

Модель статички може подаватися одним рівнянням, або системою рівнянь

$$\begin{cases} N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{f}) = 0 \\ \dots \\ N_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{f}) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

де риска над змінною означає вектор.

У певних досить простих випадках система рівнянь може бути зведена до одного рівняння (*композиція моделі*) і навпаки (*декомпозиція моделі*).

Якщо система має декілька входів, то описується за допомогою *сімейства* чи сімейств статичних характеристик. Наприклад, систему, яка характеризується в статичному режимі рівнянням (3.3), можна описати графічно за допомогою сімейства статичних характеристик, які являють собою криві залежності вихідної величини $y(x)$ при різних фіксованих значеннях збурення \bar{f} .

3.1.2 Лінійні та нелінійні моделі. Типові нелінійності

Більшість систем керування є лінійними. В лінійних системах виконується принцип суперпозиції, тобто стан (вихідний сигнал y) є лінійною комбінацією вхідних впливів x_i

$$y = \sum_i a_i x_i + b, \quad (3.5)$$

де a_i і b – коефіцієнти.

При агрегатному підході модель статички подається системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Це є спрощенням, яке дозволяє використати зручний математичний апарат лінійної алгебри та лінійного програмування для моделювання і оптимального проектування систем.

Реальні системи найчастіше мають у своєму складі нелінійні елементи, отже вони є в цілому нелінійними. Способи моделювання нелінійних систем суттєво залежать від типу нелінійності. Типові нелінійності зображено на рис. 3.2. Зустрічаються також різноманітні комбінації цих характеристик, наприклад гладка характеристика з зоною нечутливості або екстремальна з двома екстремумами і асимптотичним наближенням до певного значення тощо.

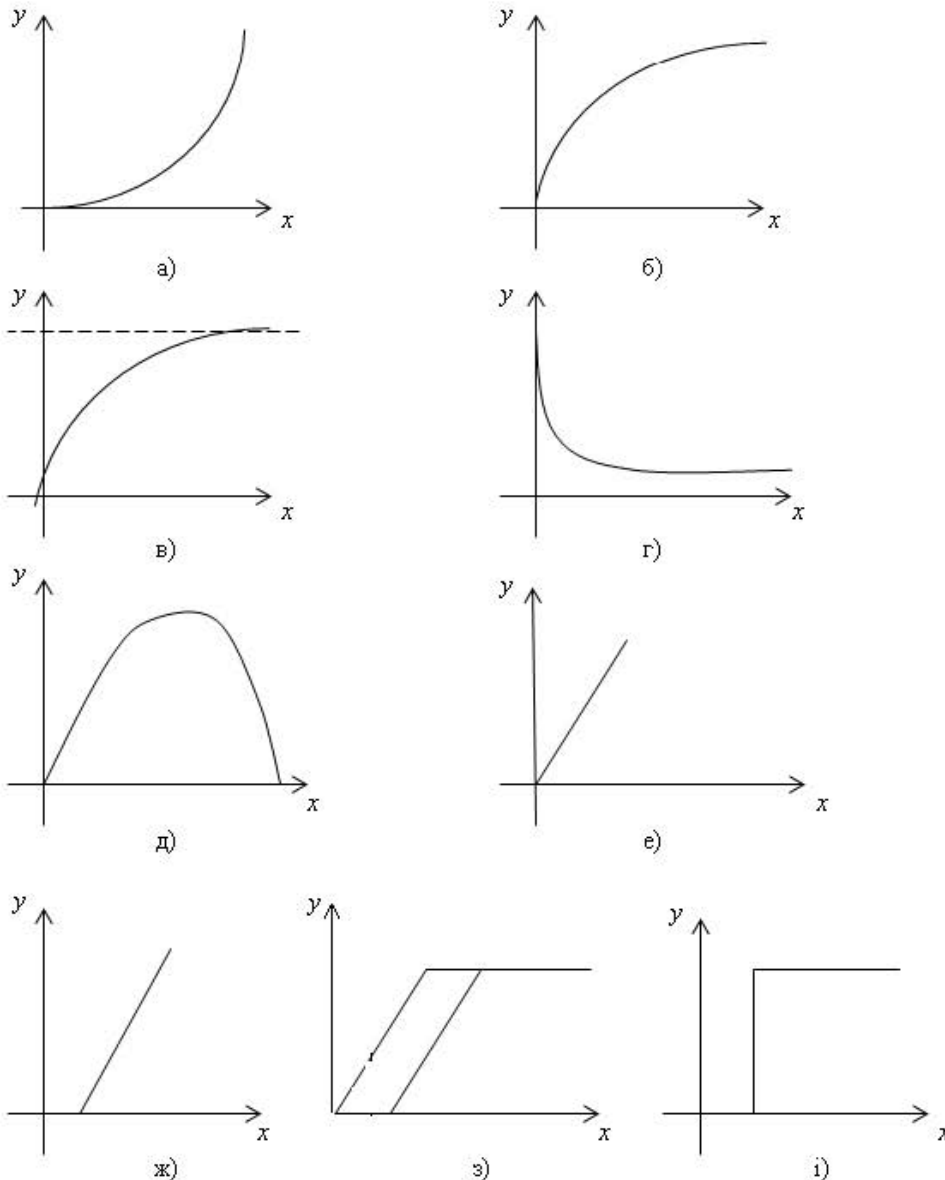


Рисунок 3.2 – Типові нелінійності: гладка опукла донизу (а), гладка опукла догори (б), асимптотично зростаюча (в), асимптотично спадна (г), екстремальна (д), кусково-лінійна з обмеженням (е), кусково-лінійна із зоною нечутливості (ж), характеристика з люфтом (з), релейна або розривна характеристика (і)

3.1.3 Лінеаризовані моделі

В багатьох випадках можна замінити вихідні нелінійні рівняння лінійними, які наближено описують процеси в системі. Процес перетворення нелінійних рівнянь в лінійні називається *лінеаризацією*.

Існують різні методи лінеаризації в залежності від вигляду нелінійної характеристики та інших особливостей системи.

В системах регулювання повинен підтримуватись деякий заданий стан. Але через різні збурювальні фактори фактично стан відрізняється від потрібного (заданого). В нормально діючій системі ці відхилення від потрібних значень малі. Це дозволяє провести лінеаризацію, розкладаючи нелінійні функції, які входять у рівняння, в ряд Тейлора

$$y = N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (3.6)$$

де $a_0 = N(x_0)$, $a_i = \frac{N^{(i)}(x_0)}{i!}$, $N^{(i)}(x_0)$ – i -та похідна нелінійної залежності $N(x)$, обчислена у точці x_0 .

Відповідно, лінеаризована характеристика

$$y \approx N(x) = a_0 + a_1x. \quad (3.7)$$

Лінеаризована модель характеризується *похибкою лінеаризації*, яка дорівнює залишковому члену ряду Тейлора

$$\Delta_{\text{л}} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i. \quad (3.8)$$

Відповідно середня похибка лінеаризації на інтервалі $[X_{\min}, X_{\max}]$ знаходиться шляхом розкладання у степеневий ряд

$$\bar{\Delta}_{\text{л}} = \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i \cdot dx = \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{i} (X_{\max}^{i-1} - X_{\min}^{i-1}).$$

Лінеаризація шляхом розкладання у степеневий ряд проста, але не завжди можлива (повинні виконуватися умови розкладання – відсутність розривів функції та її похідних, а також мала величина відхилення від точки розкладання) і найчастіше характеризується значною похибкою.

Часто нелінійну залежність між окремими змінними, які входять в модель статички, задають у вигляді кривої. В цих випадках лінеаризацію можна виконати графічно, як показано на рис. 3.3, а.

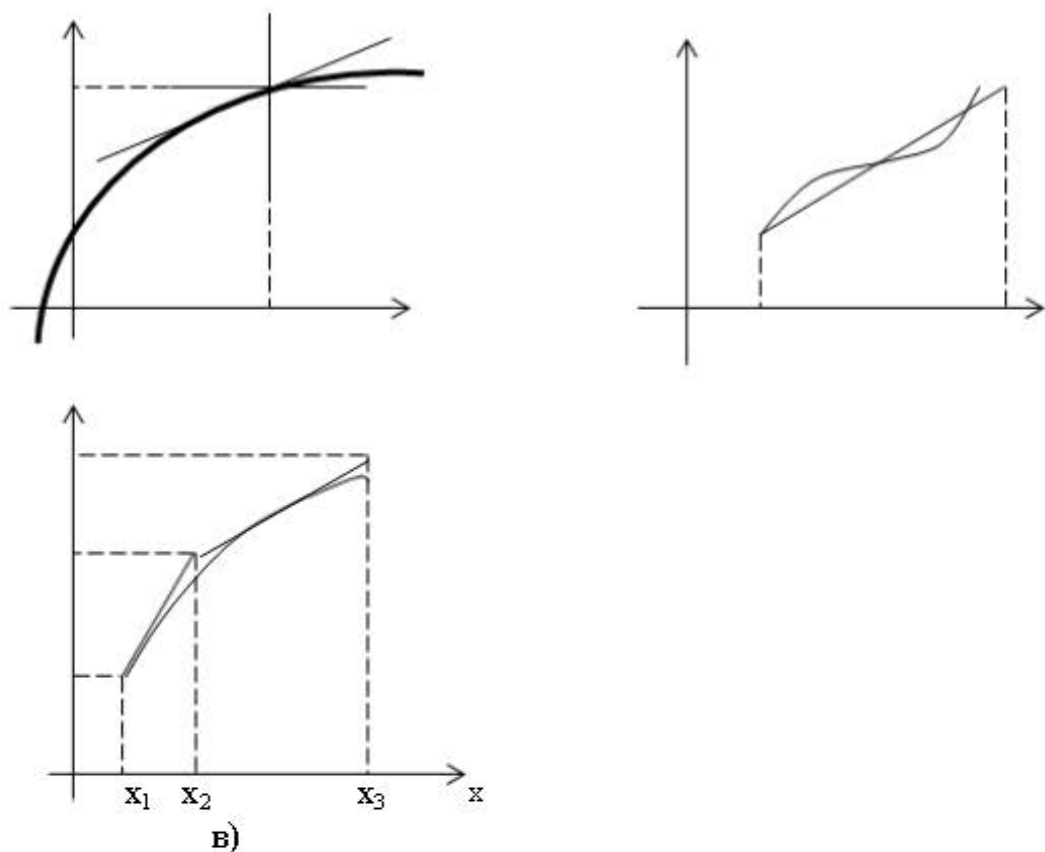


Рисунок 3.3 – Лінеаризація статичної характеристики: а) у точці, б) на відрізку, в) кускова

Лінеаризація може також виконуватися шляхом лінійної апроксимації (рис. 3.3, б), яка позбавлена зазначених вище недоліків. Найчастіше таку апроксимацію виконують за критерієм мінімуму суми квадратів відхилень, тобто пошуку таких коефіцієнтів (a, b) рівняння прямої

$$y = ax + b,$$

які забезпечують мінімум с.к.в.

$$\min_{a,b} \left\{ \sigma^2 = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [N(x) - (ax + b)]^2 dx \right\}. \quad (3.9)$$

Якщо похибка лінеаризації перевищує допустиму, то може здійснюватися *кускова лінеаризація* (рис. 3.3, в). Це дозволяє зменшити інтервал лінеаризації за допомогою розбиття його на частини, що забезпечує зменшення похибки лінеаризації.

При кусково-лінійній апроксимації здійснюється пошук не коефіцієнтів лінійних функцій, а координат точок перетину лінійних відрізків. Ця задача має вигляд задачі оптимізації з обмеженнями:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i r} - x_{i l}} \int_{x_{i l}}^{x_{i r}} \left[y(x) - \left(y_{i l} + \frac{y_{i r} - y_{i l}}{x_{i r} - x_{i l}} (x - x_{i l}) \right) \right]^2 dx \right\} \quad (3.10)$$

$$\text{при} \begin{cases} x_{i r} = x_{i+1 l} \\ y_{i r} = y_{i+1 l} \\ x_{1 l} = x_{\min} \\ x_{n r} = x_{\max} \end{cases}$$

де n – кількість відрізків; $x_{i l}$ – ліва межа i -го відрізка; $x_{i r}$ – права межа i -го відрізка.

3.1.4 Нелінійна апроксимація (поліномами, сплайнами, вейвлетами тощо)

У деяких задачах необхідно забезпечувати максимальну точність моделі, незважаючи на її ускладнення через врахування нелінійності. Тоді виникає необхідність аналітичного опису нелінійності у деякій системі базисних функцій. Таке подання нелінійної залежності називають нелінійною апроксимацією. Як базисні звичайно обирають функції, для яких вже існують достатньо зручні алгоритми розрахунку параметрів.

Найпоширенішим способом апроксимації є поліноміальний. Цей спосіб застосовується у випадках, коли причина походження нелінійності невідома, але нелінійна залежність є достатньо гладкою на вигляд. При поліноміальній апроксимації статична характеристика подається сумою степеневих функцій

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n a_i x^n, \quad (3.11)$$

де a_i – коефіцієнти апроксимації; n – степінь полінома.

Відомі декілька формул для розрахунку коефіцієнтів апроксимації, наприклад, формула Лагранжа

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \left[f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]. \quad (3.12)$$

Але загальним недоліком поліноміальної апроксимації є принципова неможливість у багатьох випадках отримання достатньої точності. Причиною є необхідність, з одного боку, збільшувати кількість членів полінома для підвищення точності апроксимації, але, з іншого боку, ці члени містять високі степені аргумента, розрахунок яких призводить до значних обчислювальних похибок.

Для підвищення точності використовують апроксимацію функціями, які за своїми властивостями наближаються до статичної характеристики об'єкта. Так наприклад, при апроксимації характеристики з багатьма екстремумами доцільно використовувати вейвлети, при апроксимації характеристик напівпровідникових приладів доцільно використовувати експоненціальні функції (оскільки фізичні процеси у напівпровідниках описуються експоненціальними залежностями).

Вейвлет (*wavelet* – хвилька) – функція, яка складається з декількох коливань певної частоти. Вейвлети можуть застосовуватися для моделювання немотонних статичних характеристик, але в основному застосовуються для моделювання скінченних хвильових процесів, форми шорсткої поверхні тощо. Приклади вейвлетів наведені на рис. 3.4.

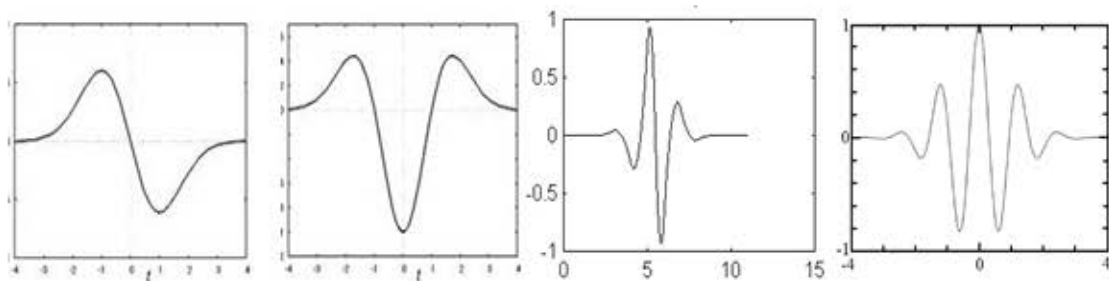


Рисунок 3.4 – Приклади вейвлетів

Ще одним способом подання моделі статички є використання кусково-нелінійної апроксимації. Якщо на кожному інтервалі розбиття статичної характеристики для апроксимації використовуються поліноми, то ми отримаємо кусково-поліноміальну апроксимацію. Відповідно кусково-лінійна апроксимація є окремим випадком кусково-поліноміальної із степенем полінома $n=1$.

Останнім часом широко використовують апроксимацію сплайнами. Під **сплайном** розуміють агрегатну функцію, яка збігається з апроксимованою функцією на кожному елементі розбиття області визначення.

Класичний сплайн однієї змінної будується так: область визначення розбивається на кінцеву кількість відрізків, на кожному з яких сплайн збігається з певним алгебраїчним поліномом. Максимальний ступінь використаних поліномів називається степенем сплайна. Зокрема, кубічні сплайни широко використовуються для створення лекал (лекала дозволяють будувати плавні криві по 4-х точках – стільки точок необхідно для визначення кубічного сплайна

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

Приклади лекал показані на рис. 3.5. Наявність 4-х коефіцієнтів апроксимації у кубічному сплайні означає, що для побудови лекальної кривої необхідно мати 4 точки цієї кривої і підібрати на лекалі ділянку, яка добре співпадає з цими точками.



Рисунок 3.5 – Лекала, побудовані з використанням кубічних сплайнів

B-сплайном називають сплайн-функцію, яка має найменший носій (тобто мінімальну неперервну область визначення) для заданого степеня, гладкості і розбиття області визначення. Будь-яка сплайн-функція для заданого степеня, гладкості і області визначення може бути подана як лінійна комбінація відповідних *B-сплайнів*. *B-сплайни* можуть бути обчислені за допомогою алгоритму де Бора.

Коли вузли рівновіддалені один від одного кажуть, що *B-сплайн* є *однорідним*.

Коли кількість вузлів збігається зі степенем сплайна, *B-сплайн* перетворюється на *криву Безьє*.

Неоднорідний раціональний *B-сплайн* (NURB) – різновид сплайна, який широко застосовується у комп'ютерній графіці для зображення кривих і поверхонь.

На завершення наведемо таблицю 3.1 найпоширеніших типів стандартних кривих, які застосовуються у математичних моделях.

Таблиця 3.1 – Стандартні криві

Плоскі криві	Алгебраїчні	Конусні перетини (2-й порядок)	Гіпербола Парабола Еліпс (Коло)
		Еліптичні (3-й порядок)	Еліптична крива Функції Якобі
		Лемніскати (2n порядок)	Бернуллі (Овал Кассіні) Бута Жероно
		Апроксимаційні криві	Сплайни (В-сплайн, Кубічний сплайн, Моносплайн, Сплайн Ерміта) Крива Безье
		Інші (у дужках вказано порядок)	Верзьєра Аньєзі (3) Декартів лист (3) Півкубічна парабола (3) Строфоїда (3) Цисоїда Діокла (3)
	Трансцендентні	Спіралі	Архімедова (Ферма) Гіперболічна «Жезл» Клотоїда Логарифмічна
		Циклоїдальні (породжені колом, що котиться)	Циклоїда Епіциклоїда (Кардіоїда, Нєфроїда) Гіпоциклоїда (Дельтоїда – крива Штейнера, Астроїда) Трохоїда (Подовжена циклоїда, Скорочена циклоїда) Епітрохоїда (Подовжена епіциклоїда, Скорочена епіциклоїда, Равлик Паскаля «Троянда») Гіпотрохоїда Найшвидшого спуску (Брахістохрона, Дуга циклоїди)
		Фрактальні	Крива Коха Крива Леві Крива Мінковського Крива Пеано Топологічні: серветка і ковдра Серпінського, губка Менгера
		Інші	Квадратриса Крива погоні (Трактриса) Ланцогова лінія (перевернута аркова) Крива постійної ширини Синусоїда
		Перетворені криві	Евольюта Евольвента Каустика
Неплоскі		Гвинтова лінія Лінія схилу Локсодрома Ортодрома	

3.1.5 Моделі логіки

Окремим випадком функціональних моделей статистики є *моделі логіки*.

Моделі логіки оперують з двозначними об'єктами «істина» та «хибність», які для зручності позначаються символами відповідно «1» та «0». В загальному вигляді модель логіки є логічним висловленням, яке має вигляд рівняння

$$y = L(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.13)$$

де (x_1, x_2, \dots, x_n) – вхідні логічні змінні, які приймають логічні значення, y – логічний результат, L – логічна функція, записана за допомогою логічних операцій.

Сукупність логічних об'єктів та операцій над ними є алгеброю логіки.

Усі логічні операції розділяються на унарні (з одним вхідним даним) і бінарні (з двома вхідними даними). Унарні та бінарні операції над логічними даними визначаються за комбінаторним принципом. Унарні операції подані таблицями рис. 3.6.

$y = x$	
X	Y
0	0
1	1

а)

$y = \bar{x}$	
X	Y
0	1
1	0

б)

Рисунок 3.6 - Унарні операції: а) повторення, б) інверсія

Деякі бінарні операції подані на рис. 3.7.

$y = x_1 \cap x_2$		
x ₁	x ₂	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

а)

$y = x_1 \cup x_2$		
x ₁	x ₂	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

б)

$y = x_1 \oplus x_2$		
x ₁	x ₂	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

в)

Рисунок 3.7 - Бінарні операції: а) кон'юнкція, б) диз'юнкція, в) імплікація

Доведено, що серед усіх унарних та бінарних операцій можна виділити *функціонально повні групи*, тобто такі, за допомогою яких можна подати усі інші операції. Найпоширенішими операціями, які утворюють функціонально повну групу, є пари операцій: {кон'юнкція і інверсія} або {диз'юнкція і інверсія}. На практиці найчастіше використовують надлишковий базис, який складається з

операцій кон'юнкції, диз'юнкції і інверсії. Для цих операцій виконуються закони логіки:

Комутативність	$x \cup y = y \cup x$	$x \cap y = y \cap x$
Асоціативність	$x \cup y \cup z = (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$	$x \cap y \cap z = (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$
Дистрибутивність	$(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$	
Закони інверсії Де Моргана	$\overline{x \cup y} = \bar{x} \cap \bar{y}$	$\overline{x \cap y} = \bar{x} \cup \bar{y}$

Будь-яку логічну функцію можна подати у вигляді досконалих кон'юнктивної або диз'юнктивної нормальних форм (ДКНФ і ДДНФ). Наприклад, нехай логічна функція $y(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицею

(Продовження)

Аргументи			Функція
x_1	x_2	x_3	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1

Аргументи			Функція
x_1	x_2	x_3	y
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Тоді ДДНФ записується на основі рядків, у яких $y = 1$

$$y = \overline{x_1} x_2 x_3 \cup \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \cup \overline{x_1} x_2 x_3,$$

де знак кон'юнкції (логічного добутку) для зручності не показаний.

Грунтуючись на законах алгебри логіки, досконала форма може бути спрощена.

3.2 Моделі динаміки

Моделі динаміки значно складніші і різноманітніші за моделі статички. Якщо моделі статички описують перетворення *вхідної величини на вихідну величину*, то моделі динаміки описують перетворення *вхідної функції часу на вихідну функцію часу*

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad (3.14)$$

3.2.1 Модель динаміки як окремий випадок загальної операторної функціональної моделі

Модель динаміки складається з *моделі сигналів* і *моделі їх перетворення*. Модель динаміки лінійної системи може бути подана рівнянням

$$Y = WX,$$

де X – модель вхідного сигналу, Y – модель вихідного сигналу, W – оператор перетворення.

Модель динаміки системи може подаватися у різних ізоморфних та гомеоморфних формах:

- функції часу і диференціальні рівняння;
- функції часу і інтегральні рівняння;
- зображення сигналів і операторні рівняння;
- спектри сигналів і комплексні частотні передатні функції;
- спектри сигналів і амплітудно-фазові частотні характеристики;
- функції часу і перехідні функції і характеристики.

Розглянемо зв'язки між ними.

3.2.2 Моделі динаміки у просторі станів

Диференціальні рівняння є базовою і найпоширенішою формою моделей динаміки.

Залежно від того, входить чи ні час в рівняння в явному вигляді, системи поділяються на стаціонарні і нестаціонарні. Автоматичні системи керування називають *стаціонарними*, якщо вони при постійних зовнішніх впливах описуються рівняннями, які явно не залежать від часу. Це означає, що динамічні властивості системи з часом не змінюються. Рівняння, в якому час не входить явно, називаються *автономними*. Тому стаціонарні системи можна визначити як системи, які при постійних зовнішніх впливах описуються автономними рівняннями.

Автоматичні системи називають *нестаціонарними*, якщо при постійних зовнішніх впливах вони описуються рівняннями, в які час входить явно. Такі рівняння називаються *неавтономними*. Тому нестаціонарні системи можна ви-

значити як такі системи, які при постійних зовнішніх впливах описуються неавтономними рівняннями. За означенням динамічні властивості нестационарних систем з часом змінюються.

Приклади моделей стаціонарних і нестационарних систем:

– стаціонарна

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 0.5x(t),$$

– нестационарна

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2t \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 0.5x(t).$$

Тут у моделі стаціонарної системи коефіцієнт при першій похідній виходу не залежить від часу, а у нестационарної – залежить.

Стаціонарними лінійними системами називають системи, які описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Нестационарними лінійними системами або системами зі змінними параметрами називаються системи, які описуються лінійними рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

Для лінійних систем справедливий принцип суперпозиції, тобто при дії на систему декількох впливів результат буде сумою результатів дії кожного впливу окремо. Наприклад, модель динаміки

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 0.5x(t) + 2 \frac{du(t)}{dt} - v(t)$$

може бути подана у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy_1(t)}{dt} + 3y_1(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 0.5x(t) \\ \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy_2(t)}{dt} + 3y_2(t) = 2 \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{d^2 y_3(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy_3(t)}{dt} + 3y_3(t) = -v(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \end{cases}.$$

Звичайно лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами записуються в стандартній формі (з одиничними коефіцієнтами при y і x). Так, для рівняння другого порядку

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{x} + b_0 x + c_0 f, \quad (3.15)$$

де $x(t)$ – вхідний вплив; $y(t)$ – стан (вихідний сигнал); $f(t)$ – збурення, стандартна форма матиме вигляд

$$T^2_0 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = k_1 (T_2 \dot{x} + x) + k_2 f, \quad (3.16)$$

де $T_0 = \sqrt{a_2 / a_0}$, $T_1 = a_1 / a_0$, $k_1 = b_1 / a_2$, $T_2 = b_0 / b_1$, $k_2 = c_0 / a_0$.

В рівнянні (3.16) постійні T_0 , T_1 і T_2 мають розмірність часу і їх називають постійними часу, а коефіцієнти k_1 , k_2 – передатними коефіцієнтами.

Моделі динаміки у просторі станів переважно розглядають в умовах визначеності, тобто висловлюють припущення про характер вхідних впливів і збурень. Тоді права частина диференціального рівняння (3.16) (або іншого, яке є моделлю динаміки системи) є визначеною функцією часу, що дозволяє розв'язати це рівняння. Нагадаємо, що розв'язок лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами знаходять як суму загального розв'язку однорідного рівняння (з нульовою правою частиною) і окремого розв'язку неоднорідного рівняння. Перше є сумою n експонент, де n – порядок лівої частини рівняння, друге – сумою інтегралів від правої частини з кратністю інтегрування від 0 до n і невизначеними коефіцієнтами, які визначаються з початкових і кінцевих умов.

З усіх типових моделей динаміки у просторі станів особливо виділяють модель при вхідному впливі у вигляді функції Хевісайда $H(t)$ (одичний ступінчастий сигнал) – тоді вихідним сигналом системи буде перехідна функція (а її графіком – перехідна характеристика) і у вигляді функції Дірака або δ -функція (похідна від функції Хевісайда – імпульс нескінченно малої ширини і нескінченно великої амплітуди, площа якого дорівнює 1) – тоді вихідним сигналом системи буде імпульсна перехідна функція (а її графіком – імпульсна перехідна характеристика), приклади яких показані на рис. 3.8.

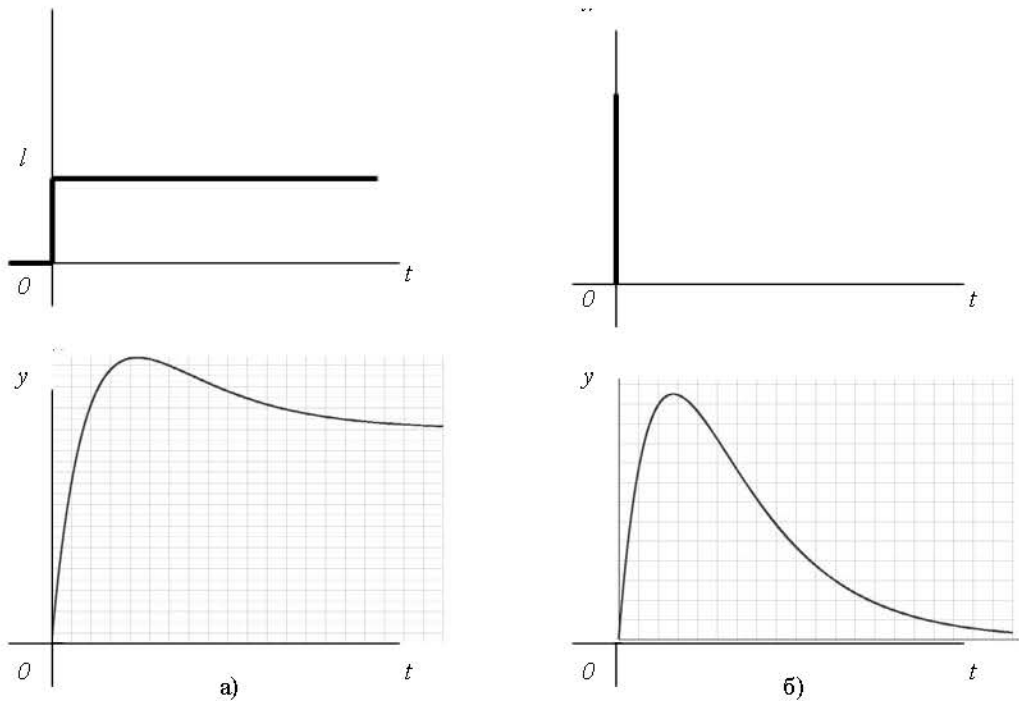


Рисунок 3.8 – Приклади основних динамічних характеристик:
а) перехідна характеристика; б) імпульсна перехідна характеристика

3.2.3 Моделі динаміки у просторі зображень

Розв'язання диференціальних рівнянь є достатньо громіздким процесом. Деякі типи моделей динаміки можуть бути спрощені. Зокрема, моделі лінійних стаціонарних систем з нульовими початковими умовами можуть бути перетворені на звичайне алгебраїчне рівняння за допомогою введення поняття оператора диференціювання.

Розглянемо операторну форму моделі динаміки на прикладі рівняння (3.15). Для позначення операції диференціювання використовується поняття оператора p , тобто

$$\frac{d}{dt} \equiv p, \quad \frac{d^i}{dt^i} \equiv p^i.$$

Використовуючи його, рівняння (3.15) можна записати у вигляді

$$a_2 p^2 y + a_1 p y + a_0 y = b_1 p x + b_0 x + c_0 f. \quad (3.17)$$

При записі і перетворенні диференціальних рівнянь оператор p можна розглядати як алгебраїчний множник, а вираз py як добуток, який не має властивостей комутативності. Враховуючи це зауваження, перепишемо (3.17), виносячи y і x за дужки:

$$y(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) = x(b_1 p + b_0) + c_0 f. \quad (3.18)$$

Введемо позначення $Q(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0$; $R_1(p) = b_1 p + b_0$, $R_2(p) = c_0$. За допомогою цих позначень рівняння (3.18) можна записати в компактнішій формі

$$Q(p)y = R_1(p)x + R_2(p)f. \quad (3.19)$$

Це рівняння є загальним для операторного подання моделей динаміки лінійних систем довільного порядку. Воно відображує принцип суперпозиції, тобто результат дії двох впливів: x і y , є сумою результатів дії кожного з них окремо.

В рівнянні (3.19) $Q(p)$ (диференціальний оператор при вихідній величині) називається *власним оператором*, а $R_1(p)$ і $R_2(p)$ (диференціальні оператори при вхідних величинах) – *операторами взаємодії*.

Відношення оператора взаємодії до власного оператора називається *передатною функцією* в операторній формі.

Систему, яку описує рівняння (3.17), можна характеризувати двома передатними функціями: передатною функцією $W_1(p)$ за вхідною величиною x

$$W_1(p) = R_1(p)/Q(p) \quad (3.20)$$

тобто для прикладу (3.18)

$$W_1(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

і передатною функцією $W_2(p)$ за вхідною величиною f , тобто передатною функцією збудження

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{Q(p)}. \quad (3.21)$$

Для прикладу (3.18)

$$W_2(p) = \frac{c_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Використовуючи передатні функції, рівняння (3.18) запишеться у вигляді

$$y = W_1(p)x + W_2(p)f$$

Разом з передатною функцією в операторній формі широко використовують передатну функцію в формі зображення Лапласа.

Перетворенням Лапласа називають інтегральний оператор

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (3.22)$$

який ставить у відповідність функції $x(t)$ дійсної змінної функцію $X(s)$ комплексної змінної s ($s = \sigma + j\omega$). При цьому $x(t)$ називають оригіналом, а $X(s)$ – зображенням за Лапласом.

Співвідношення

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s)e^{st} ds, \quad (3.23)$$

яке визначає за відомим зображенням його оригінал (в точках неперервності останнього), називають *зворотним перетворенням* Лапласа.

Властивості перетворення Лапласа

1. *Властивість лінійності.* Для будь-яких постійних α і β

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}. \quad (3.24)$$

2. *Диференціювання оригіналу.* Якщо похідна $x(t)$ є функцією-оригіналом, то

$$L\{x'(t)\} = sX(s) - x(0), \quad (3.25)$$

де $X(s) = L\{x(t)\}$, $x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t)$

І взагалі, якщо n -на похідна $x^{(n)}(t)$ є функцією-оригіналом, то

$$L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x'(0) - \dots$$

Якщо початкові умови нульові, тобто $x(0) = \dot{x}(0) = \dots = x^{(n)}(0) = 0$, то остання формула матиме вигляд $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s)$. Таким чином, за нульових початкових умов диференціювання оригіналу відповідає множенню зображення на s .

3. *Інтегрування оригіналу.* Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на s :

$$L\left\{\int_0^t x(t) dt\right\} = \frac{X(s)}{s}. \quad (3.26)$$

4. *Теорема запізнення.* Для будь-якого позитивного числа τ

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau} L\{x(t)\} = e^{-s\tau} X(s). \quad (3.27)$$

5. *Теорема про згортку* (теорема множення зображень). Якщо $x_1(t)$ і $x_2(t)$ – оригінали, а $X_1(s)$ і $X_2(s)$ – їх зображення, то

$$X_1(s) \cdot X_2(s) = L \left\{ \int_0^{\infty} x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau \right\} = L \left\{ \int_0^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right\}. \quad (3.28)$$

Інтеграл правої частини рівності називають *згорткою (convolution) функції* $x_1(t)$ і $x_2(t)$ і позначають $x_1(t) * x_2(t)$.

6. *Теорема про граничні значення.* Якщо $x(t)$ – оригінал, а $X(s)$ – його зображення, то

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

і при існуванні $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ також

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s). \quad (3.29)$$

Передатною функцією в формі зображення Лапласа називають відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної величини при нульових початкових умовах.

Передатну функцію в формі зображення Лапласа можна отримати з передатної функції в операторній формі, якщо в останній зробити підстановку $p=s$. В загальному випадку це впливає з того, що диференціюванню оригіналу – символічному множенню оригіналу на p – при нульових початкових умовах відповідає множення зображення на комплексне число s .

Подібність між передатними функціями у формі зображення Лапласа і в операторній формі має місце тільки у випадках стаціонарних систем.

Використовуючи передатні функції в зображенні Лапласа можна записати рівняння (3.15) у вигляді

$$Y(s) = W_1(s)X(s) + W_2(s)F(s). \quad (3.30)$$

3.2.4 Моделі динаміки у просторі спектрів

Важливу роль при моделюванні лінійних стаціонарних систем відіграють частотні характеристики.

В загальному випадку передатна функція $W(p)$ за означенням (3.20) дорівнює

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Функцію $W(j\omega)$, яку отримують з передатної функції при підстановці в неї $p=j\omega$ (де $j = \sqrt{-1}$, ω – кутова частота, $\omega = 2\pi f$)

$$W(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (3.31)$$

називають *частотною передатною функцією*. Частотна передатна функція є комплексною функцією від дійсної змінної ω .

Функцію $W(j\omega)$ можна подати у виглядах

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}, \quad (3.32)$$

$$\text{де} \begin{cases} A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \\ \phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (3.33)$$

Модуль передатної функції $A(\omega) = |W(j\omega)|$ називають *амплітудно-частотною функцією*, її графік – *амплітудно-частотною характеристикою*.

Аргумент $\phi(\omega) = \arg[W(j\omega)]$ називають *фазочастотною функцією*, її графік – *фазочастотною характеристикою*.

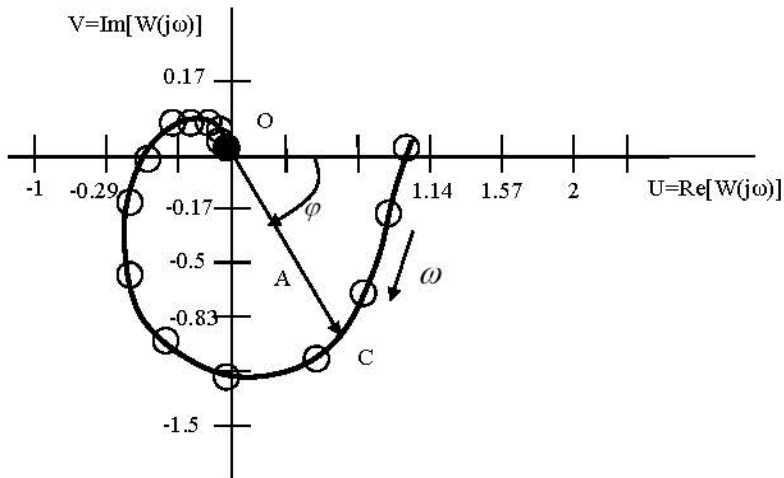
На комплексній площині (рис. 3.9) частотну передатну функцію $W(j\omega)$ позначають вектором \overrightarrow{OC} , довжина (модуль) якого дорівнює $A(\omega)$, а аргумент (кут, утворений цим вектором з дійсною позитивною напіввіссю) – $\phi(\omega)$. Криву, яку описує кінець цього вектора при змінні частоти від нуля до нескінченності, називають *амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ)* або *годографом*.

Частотну передатну функцію називають також *амплітудно-фазовою частотною функцією*. Її дійсну частину $U(\omega) = \text{Re}[W(j\omega)]$ і уявну частину $V(\omega) = \text{Im}[W(j\omega)]$ називають відповідно *дійсною* і *уявною частотними функціями*. Графік дійсної частотної функції $U(\omega)$ називають *дійсною частотною характеристикою*, а графік уявної частотної функції $V(\omega)$ – *уявною частотною характеристикою*.

Частотна, або спектральна, форма моделі динаміки лінійної стаціонарної системи має вигляд

$$G_y(j\omega) = W(j\omega) \cdot G_x(j\omega), \quad (3.34)$$

де $G_x(j\omega)$ – комплексний спектр вхідного сигналу, $G_y(j\omega)$ – комплексний спектр вихідного сигналу.



Спектр сигналу отримується за допомогою перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є є розкладанням функції (сигналу) на суму скінченної або нескінченної кількості базисних функцій з ваговими коефіцієнтами, множина яких і називається спектром. При використанні гармонічних функцій як базисних (синусно-косинусний розклад) перетворення Фур'є має вигляд

$$G_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (3.35)$$

Спектр періодичного сигналу

$$G_x(j\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (3.36)$$

Записавши комплексну експоненту у вигляді $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$, отримуємо синусно-косинусний розклад

$$G_x(j\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(\omega t) dt + j \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin(\omega t) dt$$

Найчастіше моделі динаміки розглядаються у дійсній області. Тоді в рівнянні (3.33) використовуються лише модулі спектрів та АФЧХ

$$|G_y(j\omega)| = |W(j\omega)| \cdot |G_x(j\omega)|$$

або

$$|G_y(j\omega)| = A(\omega) \cdot |G_x(j\omega)|. \quad (3.37)$$

Крім перерахованих частотних характеристик використовуються також логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ): *логарифмічні амплітудно-частотні*

характеристики (ЛАЧХ) і логарифмічні фазо-частотні характеристики (ЛФЧХ). Функцію

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| \quad (3.38)$$

називають *логарифмічною амплітудно-частотною функцією*. Графік залежності логарифмічної амплітудно-частотної функції L від логарифма частоти ($\lg \omega$) називають логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою (ЛАЧХ). Логарифмічною фазочастотною характеристикою (ЛФЧХ) називають графік залежності фазочастотної функції φ від логарифма частоти $\lg \omega$.

Логарифмічне подання частотних характеристик має додаткові переваги, оскільки дозволяє отримати результат моделювання у простому графічному вигляді. Справді, логарифмуючи модель (3.37), отримуємо

$$\log |G_y(\omega)| = \log |W(\omega)| + \log |G_x(\omega)|,$$

або

$$\log |G_y(\omega)| = L(\omega) + \log |G_x(\omega)|. \quad (3.39)$$

Додавання характеристик у графічному вигляді показано на прикладі рис. 3.10.

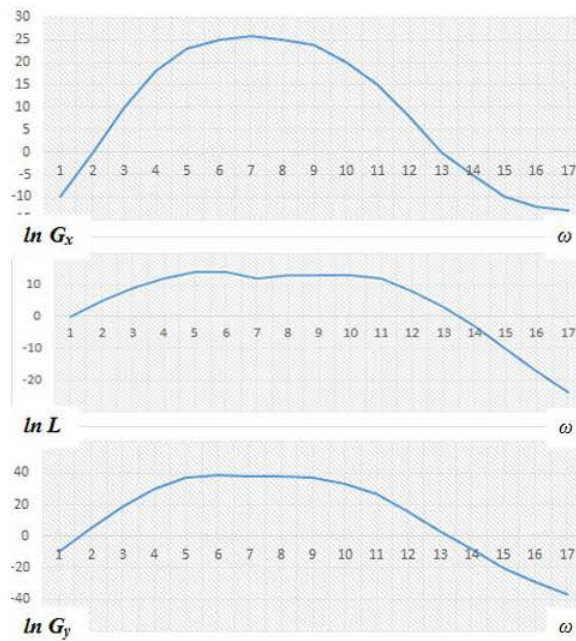


Рисунок 3.10 – Зв'язок між спектрами і ЛАЧХ

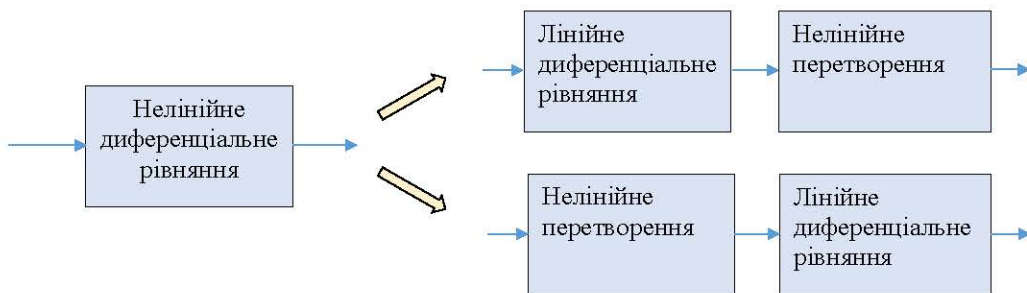
Гармонічний (тобто синусно-косинусний) розклад у спектр не є єдино можливим. Існує нескінченна кількість наборів базисних функцій, які задовольняють умови перетворення Фур'є (ортогональність, обмеженість та деякі інші), але лише деякі з них знайшли застосування. Зокрема, таким базисом є вейвлети, які

вже згадувалися вище (нагадаємо, що вейвлет – функція, яка складається з декількох коливань певної частоти).

Вейвлет-перетворення поділяють на дискретне вейвлет-перетворення (DWT) та неперервне вейвлет-перетворення (CWT). Дискретне вейвлет-перетворення звичайно використовується для кодування сигналів, у той час як CWT – для аналізу сигналів. Саме тому, DWT широко застосовується в інженерній справі і комп'ютерних науках, а CWT – у наукових дослідженнях фізичних процесів. Вейвлет-перетворення наразі взяті на озброєння для величезної кількості різнопланових застосувань, нерідко замінюючи звичайне перетворення Фур'є у багатьох прикладних задачах.

Значно складнішими є моделі динаміки нелінійних систем. Нелінійна динамічна система описується нелінійним диференціальним рівнянням. Таке рівняння не дозволяє в операторному вигляді винести за дужки вхідний та вихідний сигнали, як це зроблено у перетворенні (3.17)→(3.18), отже, неможливо отримати передатну функцію системи. Для отримання моделей нелінійних динамічних систем використовують різні підходи залежно від характеру нелінійності, діапазону зміни вхідних та вихідних сигналів і типу диференціального рівняння:

1. Лінеаризація або кусково-лінійна апроксимація статичної характеристики системи;
2. Розділення нелінійної динамічної моделі на нелінійну статичну і лінійну динамічну частини: подання у вигляді моделі Гаммерштейна (рис. 3.11, а) або моделі Вінера (рис. 3.11, б).



3.2.5 Моделі динаміки дискретних систем

Моделі динаміки цифрових систем є розвитком моделей статички логічних систем. Такі моделі використовуються у теорії *цифрових автоматів*.

Як правило, *моделі динаміки синхронних цифрових автоматів* записуються у рекурсивному вигляді:

$$\begin{cases} S_n = L_S(S_{n-1}, X_n) \\ Y_n = L_Y(S_n) \end{cases} \quad (3.40)$$

де X – вектор вхідних сигналів; Y – вектор вихідних сигналів; S – вектор станів; S_n – у момент t_n , S_{n-1} – у попередній момент t_{n-1} ; L_S, L_Y – відповідні логічні оператори перетворення.

Якщо додати до системи (3.40) ще рівняння для попереднього моменту

$$Y_{n-1} = L_Y(S_{n-1}),$$

то з системи можна вилучити стани автомата

$$Y_{n-1} = L_Y\{L_S[L^{-1}_Y(Y_{n-1}), X_0]\}.$$

Модель цифрового автомата довільного порядку може бути отримана з відповідного диференціального рівняння. Дискретним аналогом похідних є відповідні різниці:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_0) &= \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta t}; \\ \ddot{y}(t_0) &= \frac{\dot{y}(t_0) - \dot{y}(t_{-1})}{\Delta t} = \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{\Delta t^2}; \\ \dddot{y}(t_0) &= \frac{\ddot{y}(t_0) - \ddot{y}(t_{-1})}{\Delta t} = \frac{y_0 - 3y_{-1} + 3y_{-2} - y_{-3}}{\Delta t^3} \end{aligned}$$

тощо. У загальному випадку:

$$y^{(k)}(t_0) = \frac{1}{\Delta t^k} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_{-i}, \quad (3.41)$$

де t_0 – момент надходження останнього даного, поточний момент часу; Δt – інтервал дискретизації.

Підставляючи (3.41) в диференціальне рівняння аналогічне (3.15), отримаємо дискретний вираз рівняння автомата довільного порядку

$$\sum_{j=0}^m \left[\frac{b_j}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i y_{-i} \right] = \sum_{j=0}^n \left[\frac{a_j}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i x_{-i} \right]. \quad (3.42)$$

Виділимо з лівої частини рівняння (3.41) значення вихідної величини у поточний момент часу

$$\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Delta t^j} \left[y_0 + \sum_{i=1}^j (-1)^i C_j^i y_{-i} \right] = \sum_{j=0}^n \left[\frac{a_j}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i x_{-i} \right],$$

або

$$y_0 = \frac{\sum_{j=0}^n \left[\frac{a_j}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i x_{-i} \right] - \sum_{j=1}^m \left[\frac{b_j}{\Delta t^j} \sum_{i=1}^j (-1)^i C_j^i y_{-i} \right]}{\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Delta t^j}}.$$

Змінюючи порядок підрахунку сум у чисельнику, отримуємо

$$y_0 = \frac{\sum_{j=0}^n \left[\sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i \frac{a_i}{\Delta t^j} \right] x_{-i} - \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^j (-1)^i C_j^i \frac{b_i}{\Delta t^j} \right] y_{-i}}{\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Delta t^j}},$$

або

$$y_0 = \sum_{i=0}^n K_{x_i} x_{-i} + \sum_{i=1}^m K_{y_i} y_{-i}, \quad (3.43)$$

$$\text{де } K_{x_i} = \frac{(-1)^i \sum_{j=i}^n C_j^i \frac{a_j}{\Delta t^j}}{\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Delta t^j}}, \quad K_{y_i} = \frac{(-1)^{i+1} \sum_{j=i}^m C_j^i \frac{b_j}{\Delta t^j}}{\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Delta t^j}}. \quad (3.44)$$

Вираз (3.43) є моделлю цифрового автомата. Модель рекурсивна, оскільки поточне значення вихідної величини Y обчислюється з використанням попередніх значень.

Модель (3.43) може також розглядатися як дискретна модель довільної стаціонарної лінійної системи, яка описується передатною функцією (3.31). У цьому випадку початкові значення змінних рекурсивного виразу:

$$\forall x_i = 0, i = 0, -1, \dots, -n; \quad \forall y_i = 0, i = 0, -1, \dots, -m.$$

І навпаки, маючи модель автомата у вигляді (3.42) і розв'язавши систему рівнянь (3.44) відносно коефіцієнтів a_j , b_j , отримуємо модель цифрового автомата у вигляді лінійного диференціального рівняння.

Вхідні і вихідні сигнали цифрового автомата є дискретними. Для їх опису використовуються різні дискретні функції. Останнім часом широко використовується дискретне вейвлет-перетворення. Для DWT переважно використовується система функцій Хаара, наведена на рис. 3.12.

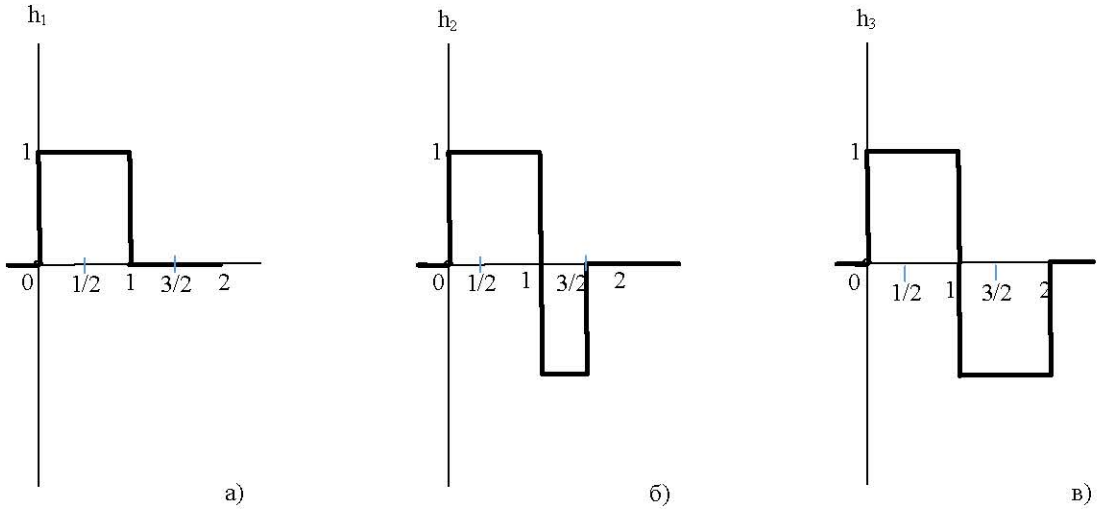


Рисунок 3.12 – Система функцій Хаара

Теоретичною основою сучасного DWT є робота Інґрід Добеші. Класичне дискретне перетворення Фур'є та косинус-перетворення можуть розглядатися як окремий випадок дискретного вейвлет-перетворення (DWT) і взагалі усі вейвлет-перетворення можуть розглядатися як різновид часово-частотного подання.

3.3. Моделі обслуговування

Існує широкий клас дискретних динамічних систем, які отримали загальну назву “*системи масового обслуговування*” (СМО). Процеси у СМО, як правило, складні і найчастіше випадкові. Але необхідність їх моделювання постійно зростає, оскільки сервери комп’ютерних мереж, без яких немислиме сучасне інформаційне суспільство, є типовими представниками СМО.

3.3.1 Поняття системи масового обслуговування

Системи масового обслуговування – це такі системи, в які у випадкові моменти часу надходять *заявки (заявки, вимоги)* на обслуговування, при цьому заявки, що надійшли, обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування.

З позиції моделювання процесу масового обслуговування ситуації, коли утворюються *черги заявок (вимог)* на обслуговування, виникають таким чином. Надійшовши в систему обслуговування заявка приєднується до черги інших (які раніше надійшли) вимог. Канал обслуговування вибирає заявку з тих, що знаходяться в черзі, для того, щоб приступити до її обслуговування. Після завершення процедури обслуговування чергової вимоги канал обслуговування приступає до обслуговування наступної заявки, якщо така є в черзі. Цикл функціонування системи масового обслуговування подібного роду повторюється багаторазово протягом усього періоду роботи системи обслуговування. При цьому передбачається, що перехід системи на обслуговування чергової вимоги після завершення обслуговування попередньої вимоги відбувається миттєво, у випадкові моменти часу.

Прикладами систем масового обслуговування можуть служити:

- пости технічного обслуговування автомобілів;
- сервери, що обслуговують заявки робочих станцій на інформацію або сервіс;
- телефонні станції тощо.

Зауважимо, що саме на основі задач оптимізації кількості операторів телефонних комутаторів на початку ХХ сторіччя данським математиком Агнером Крарупом Ерлангом започаткована теорія масового обслуговування. Наразі актуальність теорії масового обслуговування різко зросла, оскільки вона надає основний апарат для розрахунку параметрів серверів комп’ютерних мереж.

Основними компонентами системи масового обслуговування будь-якого вигляду є:

- вхідний *потік вимог*, що надходять на обслуговування;
- дисципліна черги;
- механізм обслуговування.

За згаданими ознаками розрізняють велику кількість типів СМО. Деякі типи СМО показані на рис. 3.13.

За кількістю каналів СМО поділяють на:

- одноканальні;
- багатоканальні, коли система містить S каналів, призначених для одночасного обслуговування декількох запитів.

Залежно від обмежень, що накладаються на *довжину черги*, розрізняють:

- СМО з обмеженою довжиною черги. При цьому запити, що надходять на вхід системи, коли черга заповнена, вважаються втраченими (СМО з втратами). Окремим випадком є СМО, для яких черга неприпустима;

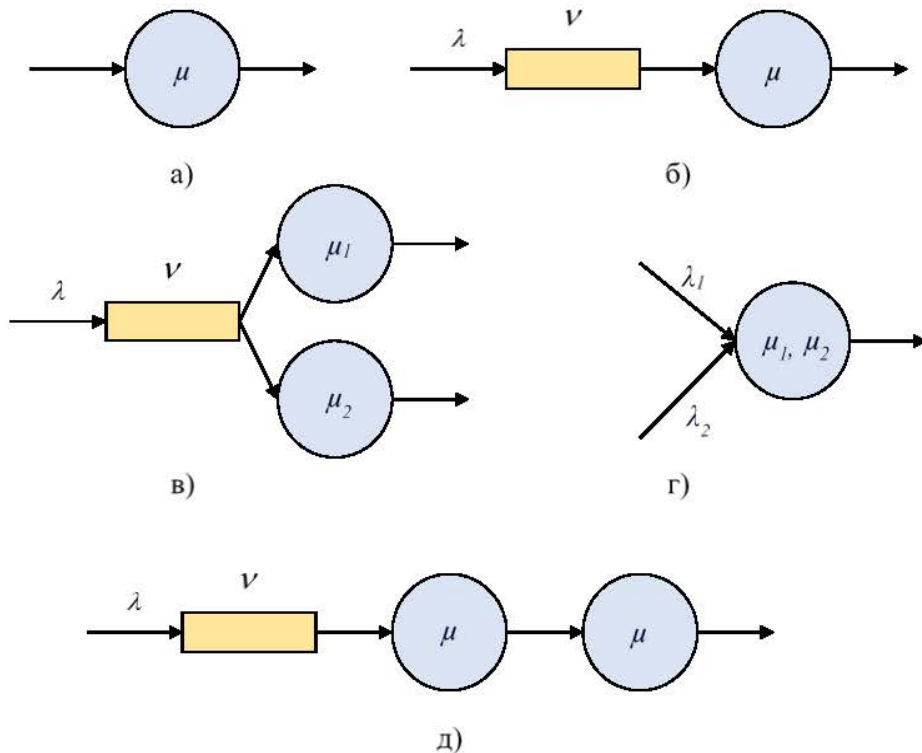
- СМО з необмеженою довжиною черги. При цьому запити знаходяться в стані очікування до тих пір, поки не звільниться якийсь з каналів.

Залежно від усталеного порядку (*дисципліни*) обслуговування, розрізняють:

- СМО з пріоритетним обслуговуванням $O_i(i=1,2,...)$ – чим більше i , тим менший пріоритет;

– СМО з дисципліною «першим надійшов – першим обслуговується» (справедлива дисципліна), а також

- прийшов останнім – обслуговуєшся першим;
- випадковий відбір заявок;
- обмеження часу очікування моменту настання обслуговування.



Залежно від загальної кількості джерел $u_i (i = \overline{1, k})$, кількості запитів, що направляються від них, та повернення запитів, які були обслужені, до джерела, розрізняють:

- закриті СМО (системи з обмеженим вхідним потоком) – призначені для обслуговування обмеженої кількості джерел запитів. Загальна кількість запитів, що циркулюють в системі, є обмеженою;
- відкриті СМО – кількість джерел запитів нескінченно велика або коли одне джерело надсилає необмежену кількість запитів.

Залежно від наявності розподілу процесу обслуговування на стандартні етапи (*фази*) СМО поділяються на однофазні і багатофазні.

Функціональні можливості будь-якої системи масового обслуговування визначаються такими основними факторами:

- ймовірнісним розподілом моментів надходжень заявок на обслуговування (поодиноких або групових);
- ймовірнісним розподілом тривалості обслуговування;
- конфігурацією системи обслуговування (паралельне, послідовне або паралельно-послідовне обслуговування);
- кількістю і продуктивністю каналів обслуговування;
- дисципліною черги.

Критеріями ефективності функціонування систем масового обслуговування, залежно від характеру розв'язуваної задачі, можуть виступати:

- ймовірність негайного обслуговування заявки;
- ймовірність відмови в обслуговуванні заявки;
- відносна і абсолютна пропускна здатність системи;
- середній відсоток заявок, які отримали відмову в обслуговуванні;
- середній час очікування в черзі;
- середня довжина черги тощо.

Випадковий характер потоку вимог і тривалості обслуговування приводить до того, що в СМО відбувається випадковий процес. Для опису *вхідного потоку вимог* потрібно задати ймовірнісний закон, що визначає послідовність моментів надходження вимог на обслуговування, і вказати кількість таких вимог в кожному черговому надходженні. При цьому, як правило, оперують поняттям “ймовірнісний розподіл моментів надходження вимог”. Тут можуть надходити як поодинокі, так і групові вимоги. В останньому випадку звичайно мова йде про систему обслуговування з паралельно-груповим обслуговуванням.

За характером випадкового процесу, що відбувається в системі масового обслуговування, розрізняють системи марковські (напівмарковські) і немарковські. В марковських системах момент надходження чергової вимоги і час її обслуговування не залежать від кількості і часу надходження попередніх вимог (для напівмарковських – можлива ймовірна залежність). У *марковських системах* вхідний потік вимог і вихідний потік обслугованих вимог (заявок) є пуассонівськими. Пуассонівські потоки дозволяють легко описати і побудувати математичну модель системи масового обслуговування.

3.3.2 Характеристики СМО

Усі показники якості обслуговування систем можна умовно розділити на три види.

1. Ймовірнісні характеристики:

- p_n – ймовірність того, що в системі знаходиться n запитів;
- q – ймовірність того, що запит, який надходить, буде втрачений.

2. Моментні характеристики:

- середня кількість запитів у системі $\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$;

– середня кількість запитів у черзі: $\bar{v} = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)p_n$, де s – кількість каналів обслуговування;

– середня кількість запитів, що обслуговуються у системі, $\bar{j} = \sum_{n=0}^s np_n$;

– середня кількість вільних каналів $\bar{r} = \sum_{n=0}^s (n-s)p_n$;

– середній час очікування у черзі $\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \tau dF(\tau)$, де $F(\tau)$ – функція розподілу часу очікування у черзі;

– середня тривалість перебування запиту у системі $\bar{T} = \int_0^{\infty} T dG(T)$, де $G(T)$

ймовірність того, що тривалість перебування в системі менша або дорівнює T .

3. Економічні характеристики якості обслуговування найчастіше подаються у вигляді узагальненого критерію, який враховує збитки, до яких призвели простої каналів та очікування запитів.

Для багатьох типів СМО вже отримані співвідношення між характеристиками потоків та параметрами СМО.

3.3.3 Моделі типових СМО

Найпростіша одноканальна модель

Така модель характеризується експоненціальним розподілом як тривалостей інтервалів між надходженнями вимог, так і тривалостей обслуговування. При цьому щільність розподілу тривалостей інтервалів між надходженнями вимог визначається за формулою

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (3.45)$$

де λ – інтенсивність надходження заявок в систему.

Щільність розподілу тривалостей обслуговування:

$$f_2(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad (3.46)$$

де μ – інтенсивність обслуговування.

Потоки заявок і обслуговувань найпростіші.

Нехай система працює з відмовами. Необхідно визначити абсолютну і відносну пропускну здатність системи.

Уявімо дану систему масового обслуговування у вигляді графу (рис. 3.14), у якого є два стани:

S_0 – канал вільний (очікування);

S_1 – канал зайнятий (йде обслуговування заявки).

Позначимо ймовірності станів:

$P_0(t)$ – ймовірність стану «канал вільний»;

$P_1(t)$ – ймовірність стану «канал зайнятий».

За графом станів (рис. 3.14) складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t). \end{cases} \quad (3.47)$$

з урахуванням нормованої умови $P_0(t) + P_1(t) = 1$.

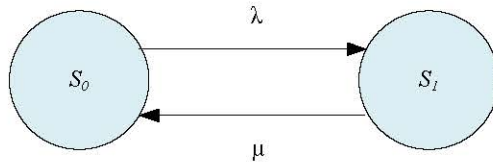


Рисунок 3.14 – Граф станів одноканальної СМО з відмовами

Розв'язок такої системи виглядає так:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad (3.48)$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t). \quad (3.49)$$

Неважко переконатися, що для одноканальної СМО з відмовами ймовірність $P_0(t)$ є ні що інше, як відносна пропускна здатність системи q .

Дійсно, P_0 – ймовірність того, що в момент t канал вільний і заявка, що прийшла до цього моменту, буде обслужена, а отже, для даного моменту часу t середнє відношення числа обслужених заявок до числа заявок, що надійшли також $P_0(t)$ тобто

$$q = P_0(t). \quad (3.50)$$

Після закінчення великого інтервалу часу (при $t \rightarrow \infty$) досягається стаціонарний (сталій) режим:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}. \quad (3.51)$$

Знаючи відносну пропускну здатність, легко знайти абсолютну. Абсолютна пропускну здатність – середня кількість заявок, які може обслужити СМО в одиницю часу:

$$A = \lambda q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}. \quad (3.52)$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні заявки буде дорівнює ймовірності стану «канал зайнятий»:

$$P_{\text{отк}} = P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (3.53)$$

Дана величина $P_{\text{отк}}$ може бути інтерпретована як середня частка необслужених заявок серед поданих.

Одноканальна СМО з очікуванням і обмеженою довжиною черги

Система масового обслуговування має один канал. Вхідний потік заявок на обслуговування – найпростіший потік з інтенсивністю λ . Інтенсивність потоку обслуговування дорівнює μ (тобто в середньому безперервно зайнятий канал видаватиме μ обслужених заявок за одиницю часу). Тривалість обслуговування – випадкова величина, підпорядкована експоненціальному закону розподілу. Потік обслуговувань є найпростішим (пуассонівським) потоком подій. Заявка, що надійшла в момент, коли канал зайнятий, стає в чергу і чекає обслуговування.

Припустимо, що незалежно від того, скільки вимог надходить на вхід системи обслуговування, дана система (черга + вимоги, що обслуговуються) не може вмістити понад N -вимог (заявок), тобто вимоги, що не потрапили в очікування, змушені обслуговуватися в іншому місці. Нарешті, джерело, що породжує заявки на обслуговування, має необмежену (нескінченно велику) ємність.

Граф станів СМО в цьому випадку має вигляд, показаний на рис. 3.15.

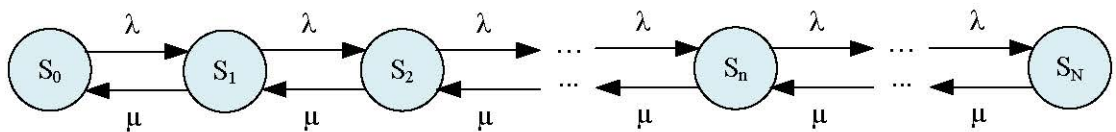


Рисунок 3.15 – Граф станів одноканальної СМО з очікуванням

Стани СМО мають нижчевказану інтерпретацію:

S_0 – канал вільний;

S_1 – канал зайнятий (черги немає);

S_2 – канал зайнятий (одна заявка стоїть у черзі);

S_n – канал зайнятий ($n - 1$ заявок стоїть у черзі);

S_N – канал зайнятий ($N - 1$ заявок стоїть у черзі).

$$q = 1 - P_{OTK} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \right) \rho^N, & \rho \neq 1, \\ \frac{1}{(N+1)}, & \rho = 1; \end{cases} \quad (3.58)$$

– абсолютна пропускна здатність:

$$A = q \cdot \lambda; \quad (3.59)$$

– середня кількість що знаходяться в системі заявок:

$$L_s = \sum_{n=0}^N n \cdot P_n = \begin{cases} \frac{\rho \cdot [1 - (N+1) \cdot \rho^N + N \cdot \rho]}{(1 - \rho) \cdot (1 - \rho^{N+1})}, & \rho \neq 1 \\ \frac{N}{2}, & \rho = 1. \end{cases} \quad (3.60)$$

Тоді

– середній час перебування заявки в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1 - P_N)}; \quad (3.61)$$

– середня тривалість перебування заявки у черзі:

$$W_q = W_s - 1/\mu; \quad (3.62)$$

– середня кількість заявок в черзі (довжина черги):

$$L_q = \lambda(1 - P_N)W_q. \quad (3.63)$$

Одноканальна СМО з очікуванням без обмеження на довжину черги ($N \rightarrow \infty$). Решта умов функціонування СМО залишаються без змін.

Стационарний режим функціонування даної СМО існує при $t \rightarrow \infty$ для будь-якого $n = 0, 1, 2, \dots$ і коли $\lambda < \mu$. Система алгебраїчних рівнянь, що описують роботу СМО при $t \rightarrow \infty$ для будь-якого $n = 0, 1, 2, \dots$, має вигляд:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, & n = 0, \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu)P_n = 0, & n > 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

Розв'язок даної системи рівнянь має вигляд:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

де $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Характеристики одноканальної СМО з очікуванням, без обмеження на довжину черги:

– середня кількість заявок що знаходяться в системі заявок на обслуговування:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad (3.66)$$

– середня тривалість перебування заявки в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{[\mu(1-\rho)]}, \quad (3.67)$$

– середня тривалість очікування заявки в черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{[\mu(1-\rho)]}. \quad (3.68)$$

Моделі з n обслуговувальними каналами

У переважній більшості випадків на практиці системи масового обслуговування є багатоканальними, і отже, моделі з n обслуговувальними каналами (де $n > 1$) викликають безсумнівний інтерес.

Процес масового обслуговування, який описується даною моделлю, характеризується інтенсивністю вхідного потоку, при цьому паралельно може обслуговуватися не більше n заявок. Середня тривалість обслуговування однієї заявки дорівнює $1/\mu$. Вхідний потік є пуассонівським. Режим функціонування того чи іншого каналу обслуговування не впливає на режим функціонування інших каналів обслуговування системи, причому тривалість процедури обслуговування кожним з каналів є випадковою величиною, підпорядкованою експоненціальному закону розподілу. Кінцева мета використання n паралельно під'єднаних обслуговуючих каналів полягає в підвищенні (порівняно з одноканальною системою) швидкості обслуговування заявок за рахунок обслуговування одночасно n клієнтів.

Граф станів багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами має вигляд, показаний на рис. 3.16.

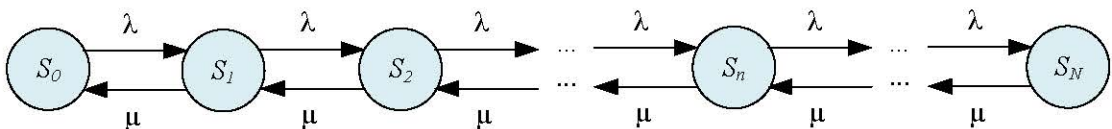


Рисунок 3.16 – Граф станів багатоканальної СМО з відмовами

Стани даної СМО мають таку інтерпретацію:

- S_0 – всі канали вільні;
- S_1 – зайнятий один канал, інші вільні;
-

S_k – зайняті рівно k каналів, решта вільні;

S_n – зайняті всі n каналів, заявка отримує відмову в обслуговуванні.

Рівняння Колмогорова для ймовірностей станів системи $P_0, \dots, P_k, \dots, P_n$ будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1; \\ \dots \\ \frac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot P_k + \mu \cdot (k+1) \cdot P_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1; \\ \dots \\ \frac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n. \end{cases} \quad (3.69)$$

Початкові умови:

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_k(0) = \dots = P_n(0) = 0.$$

Стационарний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} P_k = \frac{\rho^k}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\rho^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \\ P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.70)$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Формули для обчислення ймовірностей P_k називають *формулами Ерланга*.

Визначимо імовірнісні характеристики функціонування **багатоканальної СМО з відмовами в стаціонарному режимі**.

Імовірність відмови визначає формула:

$$P_{відм} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0. \quad (3.71)$$

Заявка отримує відмову, якщо приходить в момент, коли всі n каналів зайняті. Величина $P_{відм}$ характеризує повноту обслуговування вхідного потоку.

Ймовірність того, що заявка буде прийнята до обслуговування (вона ж – відносна пропускна здатність системи), доповнює $P_{відм}$ до одиниці:

$$q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho^n}{n!}. \quad (3.72)$$

Абсолютна пропускна здатність

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_{відм}). \quad (3.73)$$

Середня кількість каналів, зайнятих обслуговуванням

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^n k \cdot P_k = \rho \cdot (1 - P_{\text{відм}}). \quad (3.74)$$

Величина \bar{k} характеризує ступінь завантаження СМО.

Багатоканальна система масового обслуговування з очікуванням

Процес масового обслуговування з очікуванням характеризується таким: вхідний і вихідний потоки є пуассонівськими з інтенсивностями λ і μ відповідно; паралельно можуть обслуговуватися не більше C клієнтів. Система має C каналів обслуговування. Середня тривалість обслуговування одного клієнта дорівнює $1/\mu$.

В усталеному режимі функціонування багатоканальної СМО з очікуванням і необмеженою чергою може бути описано за допомогою системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = \lambda P_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) P_n + (n+1) \mu P_{n+1} & 1 \leq n \leq C \\ 0 = \lambda P_{n-1} - (\lambda + C \cdot \mu) P_n + C \mu P_{n+1} & \end{cases} \quad (3.75)$$

Розв'язок системи рівнянь (3.75) має вигляд:

$$\begin{cases} P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0, & 0 \leq n < C, \\ P_n = \frac{\rho^n}{C! C^{n-c}} P_0, & n \geq C; \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\text{де } P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C! \left[1 - \left(\frac{\rho}{C} \right) \right]} \right\}^{-1}. \quad (3.77)$$

Розв'язок буде дійсним, якщо виконується умова $\left[\frac{\lambda}{\mu C} \right] < 1$.

Імовірнісні характеристики функціонування в стаціонарному режимі **багатоканальної СМО з очікуванням і необмеженою чергою** визначаються за формулами:

– ймовірність того, що в системі знаходиться n клієнтів на обслуговуванні, визначається за формулами (3.75) і (3.77); середня кількість клієнтів в черзі на обслуговування

$$L_q = \left[\frac{C \cdot \rho}{(C - \rho)^2} \right] P_c; \quad (3.78)$$

– середня кількість клієнтів, що знаходяться в системі (заявок на обслуговування і в черзі):

$$L_s = L_q + \rho;$$

– середня тривалість перебування клієнта (заявки на обслуговування) в черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}; \quad (3.79)$$

– середня тривалість перебування клієнта в системі:

$$W_s = W_q + \frac{q}{\mu}, \quad (3.80)$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,044 + \frac{1}{2} = 0,544.$$

Модель обслуговування машинного парку

Модель обслуговування машинного парку являє собою *модель замкненої системи масового обслуговування*.

Досі розглядалися тільки такі системи масового обслуговування, для яких інтенсивність вхідного потоку заявок не залежить від стану системи. У цьому випадку джерело заявок є зовнішнім щодо СМО і генерує необмежений потік вимог. Розглянемо системи масового обслуговування, для яких потік вимог залежить від стану системи, причому джерело вимог є внутрішнім і генерує обмежений потік заявок.

Наприклад, обслуговується машинний парк, що складається з N машин, бригадою R механіків ($N > R$), причому кожна машина може обслуговуватися тільки одним механіком. Тут машини є джерелами вимог (заявок на обслуговування), а механіки – ж каналами обслуговування. Несправна машина після обслуговування використовується за своїм прямим призначенням і стає потенційним джерелом виникнення нових вимог на обслуговування. Очевидно, що інтенсивність λ залежить від того, скільки машин в даний момент знаходиться в експлуатації ($N - k$) і скільки машин обслуговується або стоїть в черзі, чекаючи обслуговування (k).

У моделі ємність джерела вимог слід вважати обмеженою. Вхідний потік вимог виходить з обмеженого числа експлуатованих машин ($N - k$), які у випадкові моменти часу виходять з ладу і вимагають обслуговування. При цьому кожна машина з ($N - k$), що знаходиться в експлуатації, генерує пуассонівський потік вимог з інтенсивністю λ незалежно від інших об'єктів; загальний (сумарний) вхідний потік має інтенсивність $(N - k) \cdot \lambda$. Вимога, що надійшла в систему в момент, коли вільний хоча б один канал, негайно йде на обслуговування. Якщо вимога застає всі канали зайнятими обслуговуванням інших вимог, то вона не покидає систему, а стає в чергу і чекає, поки один з каналів не стане вільним.

Таким чином, в замкнутій системі масового обслуговування вхідний потік вимог формується з вихідного.

Стан S_k системи характеризується загальною кількістю вимог, що знаходяться на обслуговуванні і в черзі, що дорівнює k . Для розглянутої замкнутої системи, очевидно, $k = 0, 1, 2, \dots, N$. При цьому, якщо система перебуває в стані k , то кількість об'єктів, що знаходяться в експлуатації, так само $(N - k)$.

Якщо λ_k – інтенсивність потоку вимог в розрахунку на одну машину, то

$$\lambda_k = \begin{cases} (N - k) \cdot \lambda, & 0 \leq k \leq N, \\ 0, & k > N; \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k \cdot \mu & 0 \leq k \leq R, \\ R \cdot \mu & R \leq k \leq N, \\ 0 & k > N. \end{cases}$$

Система рівнянь, що описують роботу замкнутої СМО в стаціонарному режимі, має вигляд

$$\begin{cases} 0 = -\rho N P_0 + P_1, \\ 0 = (N - k + 1) \rho P_{k-1} - [(N - k) \rho + k] P_k + (k + 1) P_{k+1}, & 0 \leq k \leq R, \\ 0 = (N - k + 1) \rho P_{k-1} - [(N - k) \cdot \rho + R] P_k + R P_{k+1}, & R \leq k \leq N, \\ 0 = \rho P_{N-1} - R P_N. \end{cases} \quad (3.81)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо ймовірність k -го стану:

$$P_k = \begin{cases} \frac{N! \cdot \rho^k}{k! (N - k)!} \cdot P_0 & 0 \leq k \leq R, \\ \frac{N! \cdot \rho^k}{R! R^{k-R} \cdot (N - k)!} \cdot P_0 & R \leq k \leq N. \end{cases} \quad (3.82)$$

Величина P_0 визначається з умови нормування $\sum_{k=0}^N P_k = 1$ отриманих ре-

зультатів за формулами (3.82) для $P_k, k = 1, 2, \dots, N$. Визначимо такі ймовірнісні характеристики системи:

– середня кількість вимог в черзі на обслуговування

$$L_q = \sum_{k=R}^N (k - R) P_k; \quad (3.83)$$

– середня кількість вимог, що знаходяться в системі (на обслуговуванні і в черзі)

$$L_s = \sum_{R=1}^N k P_k; \quad (3.84)$$

– середня кількість механіків (каналів), що простоюють через відсутність роботи

$$\overline{R_n} = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k)P_k; \quad (3.85)$$

– коефіцієнт простою об'єкта (машини) в черзі

$$a_1 = \frac{L_q}{N}; \quad (3.86)$$

– коефіцієнт використання об'єктів (машин)

$$a_2 = 1 - \left(\frac{L_s}{N} \right); \quad (3.87)$$

– коефіцієнт простою каналів обслуговування (механіків)

$$a_3 = \frac{\overline{R_n}}{R}; \quad (3.88)$$

– середній час очікування обслуговування (час очікування обслуговування в черзі)

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1-a_2}{a_2} \right) - \frac{1}{\mu}. \quad (3.89)$$

3.4 Алгоритмічні моделі

Бурхливий розвиток комп'ютерної техніки, проникнення її в усі сфери сучасної цивілізації привернули особливу увагу до тих розділів математичного моделювання, які є теоретичною основою методів комп'ютеризації і програмування. Такою основою є, в першу чергу, теорія алгоритмів.

Теорію алгоритмів можна поділити на класичну і прикладну. У класичній теорії алгоритмів існує безліч формальних методів опису алгоритмів. Серед них можна виділити найзначніші: арифметичне числення предикатів Гьоделя, машини Поста і Тюрінга, автомати Маркова, схеми Янова, блок-схеми. У прикладній теорії алгоритмів розглядаються способи розв'язання прикладних алгоритмічних задач, методи оцінювання характеристик прикладних алгоритмів (складність, збіжність тощо).

3.4.1 Основні поняття теорії алгоритмів

Поняття *алгоритму* є одним з базових понять математики (таких, як число, множина, точка тощо), про які існує лише інтуїтивне уявлення без строгого математичного означення, оскільки будь-яке означення само ґрунтується на базових поняттях.

Інтуїтивне поняття алгоритму містить у собі кілька загальних рис:

1. *Алгоритм* — це процес послідовного отримання результату, який проходить у дискретному часі (*дискретність алгоритму*);
2. Результат, що одержується у певний, відмінний від початкового момент часу, однозначно визначається системою величин, одержаних у попередні моменти часу (*детермінованість алгоритму*);
4. Якщо спосіб одержання наступної величини з якої-небудь заданої величини не дає результату, то слід вказати, що вважається результатом алгоритму (*результативність алгоритму*);
5. Початкова система величин може вибиратись із деякої потенційно нескінченної множини (*масовість алгоритму*).

Алгоритми підрозділяються на декілька типів (рис. 3.17).

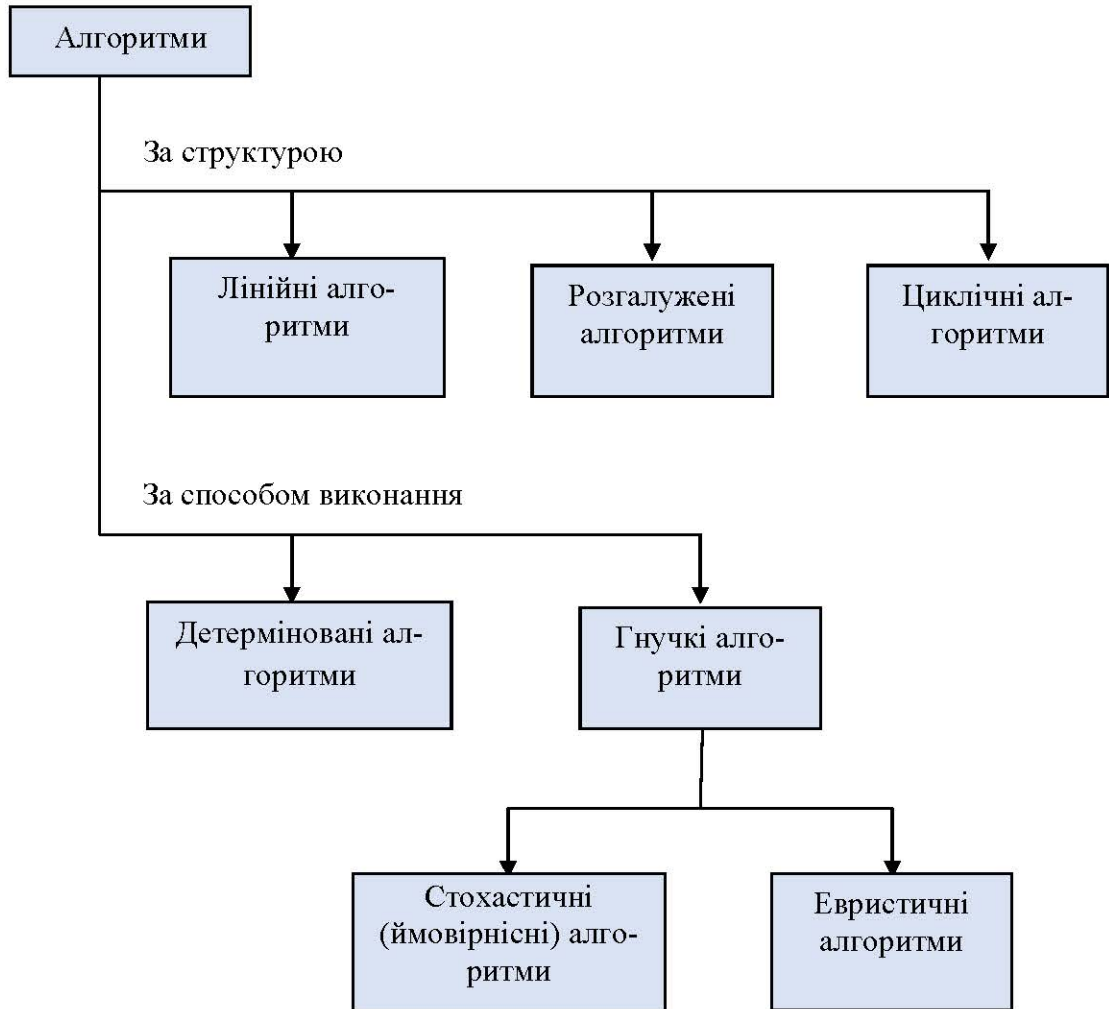


Рисунок 3.17 – Загальна класифікація алгоритмів

Детерміновані, жорсткі алгоритми (наприклад, алгоритм роботи машини, двигуна і т. п.) задають визначені дії, позначаючи їх у єдиній і достовірній послідовності, забезпечуючи тим самим однозначний результат, якщо виконуються ті умови процесу, задачі, для яких розроблений алгоритм.

Ймовірнісний (стохастичний) алгоритм використовує випадкові дані, що виробляються спеціальним генератором, а результати отримуються після статистичної обробки. До стохастичних алгоритмів відносять, наприклад, різноманітні методи випадкового пошуку.

Евристичний алгоритм (еврістика (грец. εвриστικω (heuristiko) — знаходжу, відшукую, відкриваю) – це такий алгоритм, у якому досягнення кінцевого результату програми дій однозначно не визначено, так само як не позначена вся послідовність дій, не виявлені всі дії виконавця. До евристичних алгоритмів від-

носять, наприклад, інструкції і розпорядження. У цих алгоритмах використовуються універсальні логічні процедури і способи прийняття рішень, засновані на аналогіях, асоціаціях і минулому досвіді розв'язання схожих задач.

За структурою алгоритми поділяються на лінійні, розгалужені і циклічні.

Лінійний алгоритм – набір команд (вказівок), які виконуються послідовно в часі одна за одною.

Розгалужений алгоритм – алгоритм, що містить хоча б одну умову, в результаті перевірки якої ЕОМ забезпечує перехід на один із двох можливих кроків.

Циклічний алгоритм – алгоритм, що передбачає багаторазове повторення тієї самої дії (тих самих операцій) над новими вихідними даними. До циклічних алгоритмів зводиться більшість методів обчислень, перебору варіантів.

Алгоритмічна модель – це запис алгоритму функціонування системи у певний спосіб. Таким чином, поняття алгоритмічної моделі є узагальненням поняття алгоритму і його застосуванням для моделювання ширшого класу дискретних процесів і систем, ніж обчислювальні.

Кожен з способів запису алгоритмів має переважну сферу застосування. Найбільш поширені такі форми запису алгоритмів:

- *формальна* (запис за допомогою літерно-цифрових позначень та додаткових символів у вигляді формул). Формальний спосіб застосовується у теоретичних дослідженнях алгоритмів як математичних об'єктів;

- *словесна* (запис природною мовою). Словесний спосіб використовується у різноманітних інструкціях для персоналу;

- *графічна* (зображення за допомогою графічних символів). Графічний спосіб характеризується високою наочністю, тому використовується при необхідності пояснення та евристичного аналізу алгоритму;

- *псевдокоди* (напівформалізовані описи алгоритмів умовною алгоритмічною мовою, що містять у собі як елементи мови програмування, так і фрази природної мови, загальноприйняті математичні позначення тощо). Псевдокоди використовуються при записі алгоритмів, які призначені для реалізації на комп'ютері, але заздалегідь невідомо, яка мова програмування буде обрана для цієї реалізації;

- *програмна* (тексти мовами програмування). Програмний спосіб використовується при реалізації алгоритму на комп'ютері.

У загальному розумінні алгоритм є описом послідовності дій, в результаті якої з визначеного набору початкових даних (вхідних впливів, ресурсів тощо) X буде отриманий певний результат Y

$$X \xrightarrow{A} Y. \quad (3.90)$$

Вираз (3.90) є відображенням одної множини на іншу, отже, алгоритм можна розглядати як узагальнений оператор перетворення множини X на множину Y . Певна відмінність, яка вирізняє алгоритми від інших типів операторів, полягає у їх потенційно необмеженій складності – наразі довжина запису алгоритму

мовою програмування може складати десятки мегабайтів, а отримання результату може вимагати до 10^{10} – 10^{11} елементарних операцій (порівняйте: час існування нашого Всесвіту складає приблизно $4 \cdot 10^{16}$ секунд)!

Алгоритми, автомати і рекурсивні функції

Теорія алгоритмів вивчає основні закономірності роботи алгоритмів, способи доведення їх правильності, способи визначення, чи є у алгоритмічної задачі розв'язок. З іншого боку, теорія алгоритмів займається пошуком алгоритмічно нерозв'язних проблем.

Існує декілька напрямків у теорії алгоритмів, які відрізняються так само, як відрізняються між собою різні алгебри, тобто переліком об'єктів, з якими працюють алгоритми, та операцій, які можуть виконуватися над цими об'єктами.

Основними напрямками теорії алгоритмів є *алгебра рекурсивних функцій* і *теорія автоматів*.

В теорії алгоритмів доведений ізоморфізм цих теорій, тобто, якщо результат отримано за допомогою, наприклад, рекурсивних функцій, то аналогічний результат обов'язково може бути отримано за допомогою теорії автоматів і навпаки. Цей ізоморфізм сформульований англійським вченим Черчем.

Останнім часом цікаві результати в теорії алгоритмів отримали за допомогою алгоритмічної алгебри Глушкова.

Скінченний автомат є перетворювачем, вихід якого залежить не тільки від вхідних і вихідних сигналів, але й від поточного стану автомата, причому кількість вхідних і вихідних змінних, кількість можливих значень цих змінних, а також кількість можливих станів автомата скінченна. Поточний стан автомата зберігається в його пам'яті.

Елементарні автомати можна розглядати як машини, що мають пам'ять у вигляді стрічки та пристрій для зчитування інформації зі стрічки. Стрічка розділена на сегменти, в яких розміщуються певні символи – команди і дані. Автомат, проглядаючи ці сегменти по черзі, виконує окремі обчислення і розв'язує задачі.

Елементарні автомати мають досить обмежені обчислювальні можливості. Більше можливостей мають автомати з нескінченною пам'яттю магазинного типу, але й вони є недостатньо універсальними. Найбільш універсальною моделлю комп'ютерних обчислень є машина Тьюрінга.

Машина Тьюрінга – математичне поняття, введене для формального уточнення інтуїтивного поняття алгоритму. Названа на честь англійського математика Алана Тьюрінга, який і запропонував це поняття в 1936 р. Аналогічну конструкцію машини згодом і незалежно від Тьюрінга ввів американський математик Еміль Пост.

У кожної машини Тьюрінга є стрічка, потенційно нескінченна в обидві сторони (рис. 3.18).

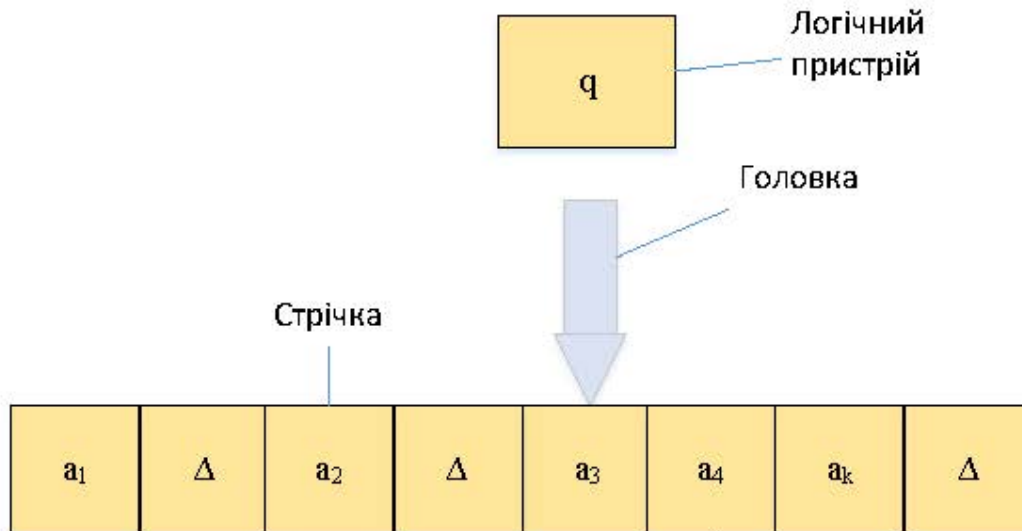


Рисунок 3.18 – Машина Тьюрінга

Є скінченна множина символів стрічки S_0, \dots, S_n , що називається **алфавітом машини**. У кожний момент часу кожна комірка може бути зайнята не більш ніж одним символом. Машина має деяку скінченну множину внутрішніх станів q_0, q_1, \dots, q_n . У кожний момент часу машина знаходиться в тільки одному із цих станів.

Нарешті, є головка, яка у кожний момент часу знаходиться на одній із комірок стрічки. Машина діє не неперервно, а лише в дискретні моменти часу. Якщо в якийсь момент t головка сприймає комірку (тобто знаходиться на комірці), що містить символ S_i , і машина знаходиться у внутрішньому стані q_j , то дія машини визначена.

Тьюрінг показав, що будь-який *алгоритм може бути реалізований відповідною машиною Тьюрінга*.

Машина Поста (МП) – абстрактна обчислювальна машина, запропонована Емілем Леоном Постом, що відрізняється від машини Тьюрінга більшою простотою.

МП складається з головки і розбитої на секції нескінченної в обидва боки стрічки. Кожна секція стрічки може бути або порожня – 0, або позначеною міткою 1. За один крок головка може зрушитися на одну позицію вліво або вправо, поставити або знищити символ у тому місці, де вона стоїть. Робота машини Поста визначається програмою, що складається з кінцевого числа рядків.

Машини Тьюрінга і Поста еквівалентні з точки зору відображення поняття “алгоритм”.

3.4.2 Основи алгоритмічної алгебри

Алгебру алгоритмів запропонував В. М. Глушков у 1965 р.

Алгебра алгоритмів – система, яка складається з двох алгебр u та v , які називаються відповідно алгеброю операторів та алгеброю умов. Елементи алгебри u – це перетворення (оператори) деякої абстрактної множини B , а елементи алгебри v – умови (предикати), визначені на множині B . Алгебру алгоритмів використовують для опису перетворень, виконуваних дискретними перетворювачами. У цьому випадку множина B називається інформаційною множиною.

Основна операція алгебри u – це звичайна операція множення (суперпозиції) операторів. Крім цієї операції, для кожної умови β з v в алгебрі u визначаються ще дві операції, називані β -диз'юнкцією і β -ітерацією операторів. Результатом β -диз'юнкції двох операторів P і Q є оператор R такий, що для будь-якого стану $b \in B$, $bR = bP$, якщо умова β істинна на стані b , $bR = bQ$, якщо $\beta(b)$ хибна й, нарешті, оператор R вважається невизначеним на стані b , якщо $\beta(b)$ не визначено. Результатом β -ітерації $\{P\}_\beta$ оператора P є оператор Q такий, що для будь-якого $b \in B$ має місце $bQ = bP^n$, де n – найменше із чисел $m=0, 1, \dots$ таких, що $\beta(bP^m)$ істинно ($bP^0 = b$ для будь-якого оператора P).

На множині v умов визначені звичайні булеві операції \wedge, \vee, \neg . Наприклад, диз'юнкція $\alpha \vee \beta$ двох умов є новою умовою γ . Ця умова приймає значення «1» на тих елементах множини B , на яких одна з умов α або β приймає значення «1». Значення «0» вона приймає на тих елементах, на яких α та β дорівнюють «0», і не визначена, якщо одна з умов α та β не визначена, а інша дорівнює «0». Крім цих операцій визначається операція $P \cdot \alpha$ множення оператора на умову. Результатом виконання цієї операції є умова β , значення якої дорівнює значенню умови α після виконання оператора P .

Базові алгоритми

Переважає більшість задач і алгоритмів може бути зведена до використання комбінації невеликої кількості типових базових алгоритмів. До таких слід віднести:

- послідовне виконання;
- вибір варіанта дій за умовою;
- циклічне виконання;
- рекурсія;
- ітерація;
- вибір одного значення з множини.

Для реалізації цих прийомів у мовах програмування передбачені спеціальні оператори та засоби.

Лінійні алгоритми (послідовне виконання) використовуються, наприклад, для обчислення значення функції з необмеженою областю визначення та для інших задач із заздалегідь визначеною послідовністю розв'язання.

Алгоритми з розгалуженням (вибір варіанта дій за умовою) використовуються, наприклад, для обчислення значення функції з обмеженою областю

визначення та для інших задач, при вирішенні яких виникає необхідність перевірки умов, а також у випадках вибору варіанта з декількох можливих.

Циклічні алгоритми використовуються при необхідності багаторазового виконання одних і тих же дій.

Рекурсія – це фундаментальне поняття, яке означає покрокове отримання результату, причому на наступному кроці використовується результат, отриманий на попередньому кроці.

Рекурсія може бути отримана трьома способами.

1) Циклічний виклик оператора $x := f(x)$, де змінній x у лівій частині присвоюється нове значення, отримане за допомогою деякої функції f від старого значення.

2) Визначення рекурсивної функції, якщо така можливість передбачена мовою програмування.

У вузькому програмістському розумінні рекурсія – це виклик у процедурі або функції її самої. Головний момент у побудові рекурсивної програми – визначення умови припинення рекурсії.

Ітерація – це процес поступового наближення до правильного розв'язку. Використовується найчастіше для розв'язання рівнянь і систем рівнянь.

Вибір необхідного даного, яке задовольняє певну умову, з набору даних залежить від способу організації цього набору, наприклад *вибір найменшого даного* з масиву, *вибір з файлу рядків* за заданою ознакою.



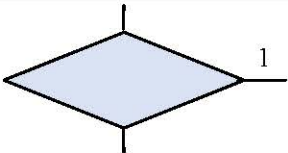





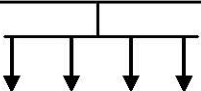


3.4.3 Подання алгоритмічних моделей

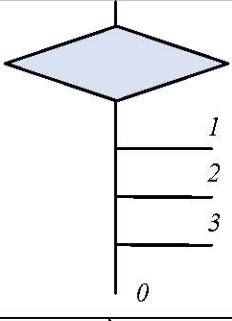
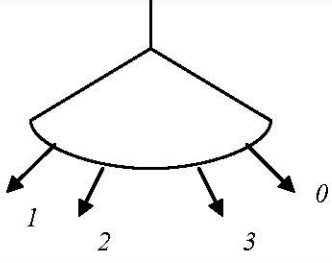
Зміст дій, що їх передбачає алгоритм, суттєво залежить від того, які процеси у системах описує алгоритмічна модель. Розрізняють алгоритми обробки даних (обчислювальні алгоритми), алгоритми вимірювання та збору вимірювальної інформації (алгоритми інформаційно-вимірювальних систем – ІВС), алгоритми передавання даних (протоколи зв'язку), алгоритми управління (в тому числі алгоритми автоматизованих систем управління – АСУ), алгоритми взаємодії з людиною-оператором (інтерфейси з оператором), алгоритми прийняття і узгодження рішень, алгоритми взаємодії груп операторів тощо.

Блок-схеми

Цей спосіб виявився дуже зручним засобом зображення алгоритмічних моделей і одержав широке поширення в науковій і навчальній літературі. Структурна схема алгоритму – графічне зображення алгоритму у вигляді схеми зв'язаних між собою за допомогою стрілок (ліній переходу) блоків – графічних символів, кожний з яких відповідає одному кроку алгоритму. Основні символи блок-схем алгоритмів наведені у таблиці 3.2. У середині блока дається опис відповідної дії.

Таблиця 3.2 – Основні символи блок-схем алгоритмів

Позначення	Зміст
	Процес
	Введення і виведення даних
	Прийняття рішення (перевірка умови)
	Виконання окремого алгоритму
	Виведення результатів на документ
	Початок і кінець алгоритму
	Цикл з параметром
	Лінія переходу
	Початок паралельних процесів
	Цикл з умовою (початок і кінець)
	Розрив алгоритму між сторінками і у межах сторінки

Позначення	Зміст
	Вибір автоматичний
	Вибір вручну

Принцип програмування “зверху донизу” вимагає, щоб блок-схема поетапно конкретизувалася і кожен блок «розписувався» до елементарних операцій. Але такий підхід можна здійснити при розв’язанні нескладних задач. При розв’язанні серйозної задачі блок-схема «розповзеться» до такого ступеня, що її неможливо буде охопити одним поглядом. Блок-схеми алгоритмів зручно використовувати для пояснення роботи вже готового алгоритму, при цьому як блоки беруться дійсно блоки алгоритму, робота яких не вимагає пояснень. Блок-схема алгоритму повинна служити для спрощення зображення алгоритму, а не для ускладнення.

Подання алгоритмічних моделей мережами Петрі

Мережі Петрі – математичний апарат для моделювання динамічних дискретних систем. Вперше описані Карлом Петрі у 1962 році. Мережа Петрі є дводольним орієнтованим графом, який складається з вершин двох типів – позицій і переходів, зв’язаних між собою дугами. Вершини одного типу не можуть бути з’єднані безпосередньо.

Позиція – це стан, в якому знаходиться система або певна її частина. В позиціях можуть розміщуватися мітки (маркери), здатні переміщуватися мережею.

Модель мережі Петрі використовують для зображення і аналізу причинно-наслідкових зв’язків у системі. Для прив’язки до певних моментів часу тих або інших переходів використовуються події. Подією називають спрацьовування переходу, при якому мітки з вхідних позицій цього переходу пересуваються у вихідні позиції. Стан системи формується в результаті реалізації локальних операцій, які називаються *умовами* реалізації подій. Умова має ємність:

- умова не виконана – ємність дорівнює нулю;
- умова виконана – ємність дорівнює одиниці;
- умова виконана з n -кратним запасом – ємність дорівнює n .

У зображеннях мереж Петрі (рис. 3.19) події і умови зображуються символами, які називаються *переходами* (вертикальними або горизонтальними смужками – “бар’єрами”) і *позиціями* (кружками). Умови-позиції і переходи-події пов’язані відносинами залежності, які зображуються за допомогою орієнтованих дуг. Позиції, з яких виходять дуги даного переходу, називають вхідними позиціями. Позиції, до яких ведуть дуги від даного переходу, називають вихідними позиціями. Виконання умов зображується розміщенням відповідної кількості міток у позицію. Перехід дозволений, якщо є як мінімум одна вхідна мітка у кожній з його вхідних позицій.

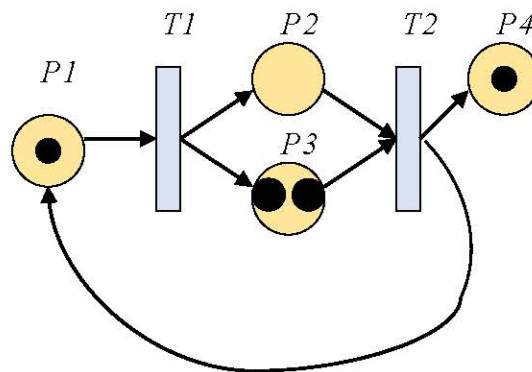


Рисунок 3.19 – Приклад мережі Петрі. Світлими кружками позначені позиції, смужками – переходи, чорними кружками – мітки

Мережі Петрі бувають таких видів:

- часова мережа Петрі – переходи мають вагу, яка означає час спрацьовування (затримки);
- стохастична мережа Петрі – затримки є випадковими величинами;
- функціональна мережа Петрі – затримки визначаються як функції деяких аргументів, наприклад, кількості міток у деяких позиціях, станів деяких переходів;
- кольорова мережа Петрі – мітки можуть бути різних типів, позначених кольорами, тип мітки може бути використаний як аргумент у функціональних мережах;
- інгібіторна мережа Петрі – можливі інгібіторні дуги, які забороняють спрацьовування переходу, тощо.

Основними властивостями мереж Петрі є:

- обмеженість – кількість міток у будь-якій позиції не може перевищити деякого значення K ;
- безпека – окремий випадок обмеженості, $K=1$;

- збереженість – постійність ресурсів $\sum_i A_i N_i$, де N_i кількість маркерів в i -й позиції, A_i – ваговий коефіцієнт;
 - досяжність – можливість переходу мережі з одного заданого стану, який характеризується певним розподілом міток, до іншого;
 - живучість – можливість спрацьовування будь-якого переходу при функціонуванні об'єкта.
- В основі аналізу моделі Петрі лежить аналіз досяжності станів, часу переходу з певного початкового стану у заданий тощо.

Змістовні логічні схеми алгоритмів

Для формалізованого опису алгоритмів роботи систем також використовується *апарат змістовних логічних схем алгоритмів* (ЛСА).

Крім множин функціональних $\{A_i\}$ і логічних $\{w_i\}$ операторів, які використовуються в алгоритмічній алгебрі, в ЛСА об'єднуються оператори, які визначають обмін інформаційними і службовими сигналами між функціональними блоками системи, а також перетворення цих сигналів. Окрім літерних позначень у ЛСА використовують символи, якими позначається порядок виконання операторів або структура апаратної частини системи. Основні елементи ЛСА у порівнянні з іншими способами запису алгоритмічних моделей наведені в таблиці 3.3.

До основних недоліків ЛСА можна віднести необхідність складання і постійного використання списків операторів $\{A_i\}$ і $\{w_i\}$ з розшифруванням їх змісту, відсутність ефективних методів мінімізації записів. Ці недоліки слабо проявляються при відносно простих і загострюються при складних ЛСА.

Перетворення алгоритмічної моделі формалізовані у вигляді алгебраїчної системи:

$$AS = (AM, OP), \tag{3.91}$$

де AM – множина алгоритмічних моделей; OP – множина операцій над ними.

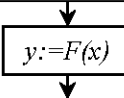
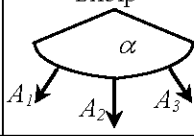

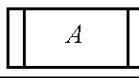
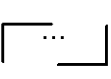
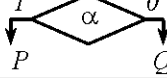
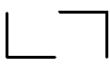
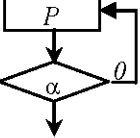
Множина операцій OP складається з двох елементів:

- *paste*($B, n1, n2$) – вставляння блока B в алгоритмічну модель між елементами з номерами $n1$ і $n2$;
- *cut*($n1, n2$) – вирізання блока з алгоритмічної моделі між елементами з номерами $n1$ і $n2$,
- а також поняття одиничної операції 1 , яка не змінює моделі, і оберненої операції op^{-1} , яка задовольняє умову

$$op^{-1}(op(AM)) = AM. \tag{3.92}$$

Еквівалентними перетвореннями алгоритмічної моделі будемо називати таку послідовність операцій над моделлю, яка не змінює змісту результатів роботи системи (хоча можуть змінювати якісні показники як результатів, так і самої системи).

Таблиця 3.3 – Порівняння елементів і позначень алгоритмічних моделей

Елементи ЛСА		Операції системи алгоритмічних алгебр		Типові елементи схем програм	
Зміст	Позначення	Зміст	Позначення	Зміст	Позначення
Функціональний оператор	A_i	Оператор	\hat{y}	функція	$F(x)$
Логічний оператор	w_i	Умова	\hat{g}	логічний вираз (функція)	L
Перетворення сигналів	x/y	Присвоєння		процес визначення значення	
Виконання будь-якого перетворення (ЧИ)	$A_1 A_2 A_3$			вибір 	case x of 1: A_1 2: A_2 3: A_3
Об'єднання перетворення	$[\cdot], \{ \cdot \}$	Множення (композиція)	AB		Begin End
Виконання алгоритму програмним шляхом				окремо визначений алгоритм 	Procedure A
Перенос виконання алгоритму вперед		α -диз'юнкція	$\hat{g}_\alpha(P, Q)$	умовний перехід 	if α then P else Q
Перенос виконання алгоритму назад		α -ітерація ($\alpha \hat{g}$)	$P \hat{g}_\alpha(P)$		repeat P until α

Еквівалентні перетворення здійснюються на основі властивостей алгебри AS:

- $paste(B, n1, n2) cut(n1, n2) \equiv 1$
- $cut(n1, n2) paste(B, n1, n2) \equiv 1$
- $paste(B1, n1, n2) paste(B2, n3, n4) \equiv paste(B2, n3, n4) paste(B1, n1, n2)$ якщо $(n1, n2) \cap (n3, n4) = \emptyset$
- $cut(n1, n2) cut(n3, n4) \equiv cut(n3, n4) cut(n1, n2)$ якщо $(n1, n2) \cap (n3, n4) = \emptyset$
- $En1(op, X, Y) En2(op^{-1}, Y, X) \equiv 1$

3.4.4 Ізоморфізм та гомеоморфізм в мовах програмування як основа комп'ютерного моделювання

Окремим і наразі найважливішим і найпоширенішим способом запису алгоритмічних моделей є комп'ютерні програми, які є поданням моделей алгоритмічною мовою.

Сучасні алгоритмічні мови є переважно універсальними (C++, Pascal, Ada, Java тощо), побудованими відповідно до стандарту ANSI. В свою чергу, стандарт ґрунтується на ідеях Ніколаса Вірта, автора мови Pascal. В основі цих ідей лежить реалізація у мові програмування основних алгебраїчних систем. Це знайшло своє відображення у понятті “типу даних”, яке визначає певну множину даних (цілі числа, реальні або дробові числа, логічні дані, символи тощо) і набір операцій, які можна виконувати над даними кожної множини (наприклад, над цілими числами: додавання, віднімання, множення; над реальними числами: додавання, віднімання, множення, ділення; над логічними даними: кон'юнкція, диз'юнкція, інверсія). Такий підхід забезпечив відповідність комп'ютерних програм фундаментальним математичним законам.

З розвитком комп'ютерних технологій кінцевим етапом будь-якого способу математичного моделювання є програмна реалізація моделі та її дослідження на комп'ютері. Потенційна можливість такої реалізації є основою застосування комп'ютерів. Така можливість доведена Тьюрінгом, який показав, що за допомогою обмеженої кількості простих операцій, які належать певній скінченній множині, можна отримати розв'язок будь-якої алгоритмічно розв'язної задачі. На підставі цього можна стверджувати, для кожної задачі і будь-якої коректної математичної моделі знаходження розв'язку можна отримати ізоморфну програмну форму.

З розвитком мов програмування програмне забезпечення все більше відповідає суті математичного моделювання завдяки запровадженню принципів *об'єктно-орієнтованого програмування*. Введене поняття класу, під яким розуміють множину об'єктів, які характеризуються набором параметрів (“властивостей”) і операцій (“правил”, “методів”) над ними. Поєднання в одному об'єкті параметрів і операцій, яке є запорукою математичної коректності моделювання, називають *інкапсуляцією*. Кожен програмний об'єкт фактично є моделлю деякого реального об'єкта, а взаємодія програмних об'єктів через механізми повідомлень, подій тощо є моделлю реальних процесів.

Технологія об'єктно-орієнтованого програмування дає спеціальний інструмент для створення гомеоморфних моделей систем. Цей інструмент називають властивостями спадкування та поліморфізму класів.

Спадкування – це можливість утворення нового класу, який містить в собі параметри і операції “батьківського” класу, а також додаткові параметри та операції. Між об'єктами “батьківського” і “дочірнього” класів існують відносини гомеоморфізму, оскільки одному батьківському класу може відповідати множина дочірніх класів.

Поліморфізм означає можливість заміни (перезначення) певної операції у дочірньому класі, що теж веде до відносин гомеоморфізму.

3.5 Агрегатні та комплексні функціональні моделі

Звичайний шлях побудови функціональних моделей полягає у моделюванні окремих підсистем та їх взаємодії і отриманні на цій основі цілісної моделі системи. Як зазначалося у підрозділі 1.2, модель системи, яка складається з моделей окремих підсистем, називається агрегатною; цілісна модель називається комплексною, а процес перетворення агрегатної моделі на комплексну називається агрегуванням або композицією.

3.5.1 Формальні перетворення функціональних моделей

У розділі 1 зазначалося, що для одного і того ж об'єкта можуть бути створені різноманітні моделі, які відрізняються як аспектами функціонування об'єкта, що відображаються моделлю, так і множиною врахованих параметрів об'єкта і факторів впливу, а отже і її адекватністю. Але зрештою, якщо декілька моделей описують один і той же об'єкт, то вони повинні бути пов'язані між собою. Цей зв'язок можна розглядати як систему перетворень моделей.

Усі перетворення моделей можна розділити на дві групи:

– ізоморфні перетворення, які змінюють лише форму подання моделі, залишаючи незмінними множини вхідних і вихідних даних, якісні характеристики моделі тощо;

– гомеоморфні перетворення, в результаті яких отримуються моделі з відмінними від початкової моделі характеристиками: більшою або меншою точністю, зміненним набором початкових даних або результатів тощо.

Конкретний зміст оператора перетворення залежить від типу вхідної та вихідної моделей і мети моделювання. Послідовність таких перетворень дозволяє отримати зручну для використання модель. Типовий приклад послідовності перетворень моделей з метою прогнозування стану системи (початкова модель – агрегатна модель нелінійної динамічної системи):

- 1) лінеаризація нелінійностей;
- 2) агрегування моделей підсистем;
- 3) дискретне перетворення;
- 4) подання моделі у рекурсивному вигляді.

3.5.2 Агрегування моделей лінійних систем

Агрегатні моделі широко використовуються при побудові моделей динаміки лінійних систем. Модель системи подається у вигляді передатної функції, яка отримується шляхом композиції передатних функцій підсистем. Композиція здійснюється з використанням правил перетворення структурних схем лінійних систем.

1. *Послідовне з'єднання блоків.* При послідовному з'єднанні вихідна величина кожного попереднього блока є вхідним сигналом наступного блока (рис. 3.20). При перетворенні структурних схем ланцюг з послідовно з'єднаних

блоків можна замінити одним блоком з передатною функцією $W(s)$, що дорівнює добутку передатних функцій окремих блоків

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \dots W_n(s) \quad (3.93)$$

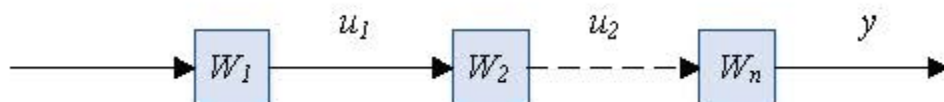


Рисунок 3.20 - Послідовна структура

2. При *паралельному з'єднанні* (рис. 3.21) на вхід всіх блоків подається один і той самий сигнал, а вихідні величини додаються.

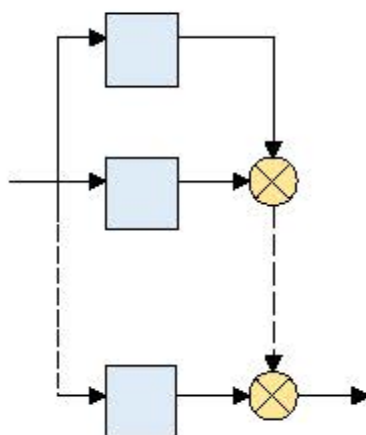


Рисунок 3.21 – Паралельна структура

Ланцюг з паралельно з'єднаних блоків можна замінити одним блоком з передатною функцією $W(s)$, яка дорівнює сумі передатних функцій вхідних в неї ланок:

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s) \quad (3.94)$$

3. Ланка, охоплена *зворотним зв'язком* (рис. 3.22).

Передатна функція $W_3(s)$ замкненого ланцюга з від'ємним зворотним зв'язком

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} \quad (3.95)$$

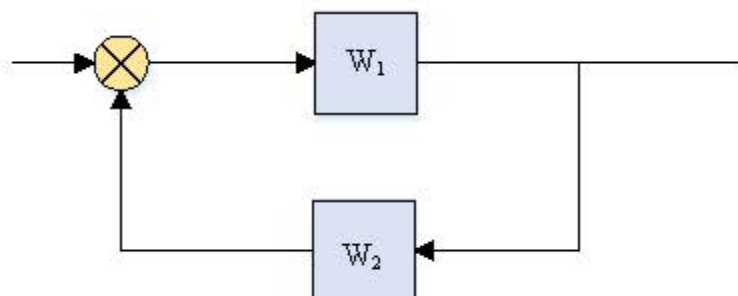
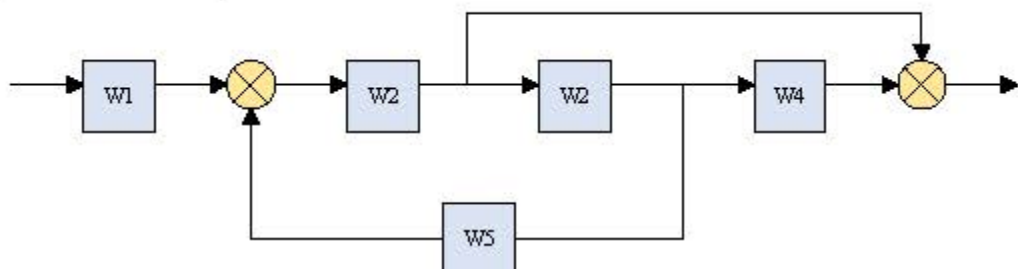


Рисунок 3.22 – Система зі зворотним зв'язком

Якщо зворотний зв'язок додатний, то

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)} \quad (3.96)$$

Але структура багатьох систем не дозволяє зобразити їх як комбінацію послідовного, паралельного з'єднань та зворотного зв'язку. Приклад такої структури показаний на рис. 3.23.



Для агрегування такої системи необхідно здійснити декілька допоміжних перетворень структурної схеми.

4. *Перенесення суматора* (рис. 3.24). При перенесенні суматора за ходом сигналу необхідно додати блок з передатною функцією, яка дорівнює передатній функції ланки, через яку переноситься суматор (рис. 3.24, а). Якщо суматор переноситься проти ходу сигналу, то необхідно додати блок з передатною функцією, яка дорівнює оберненій передатній функції ланки, через яку переноситься суматор (рис. 3.24, б).

5. При *перенесенні вузла* (рис. 3.25, а) також необхідно додати блок. Якщо вузол переноситься по ходу сигналу, то додається блок з передатною функцією, яка дорівнює оберненій передатній функції блока, через який переноситься вузол (рис. 3.25, б). Якщо вузол переноситься проти ходу сигналу, то додається блок з передатною функцією, яка дорівнює передатній функції блока, через який переноситься вузол (рис. 3.25, в).

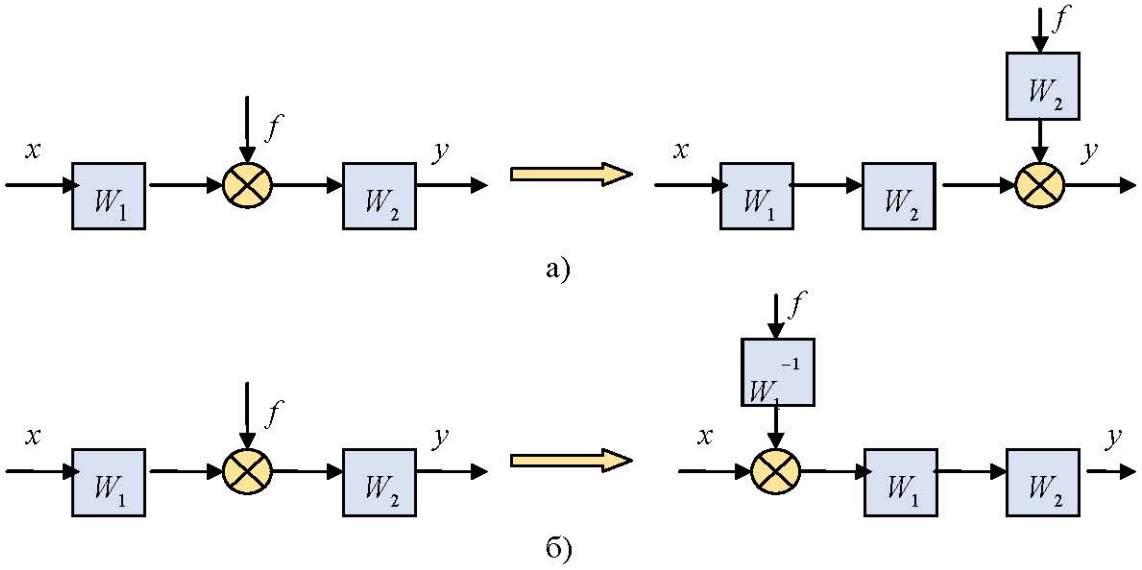


Рисунок 3.24 – Перенесення суматора

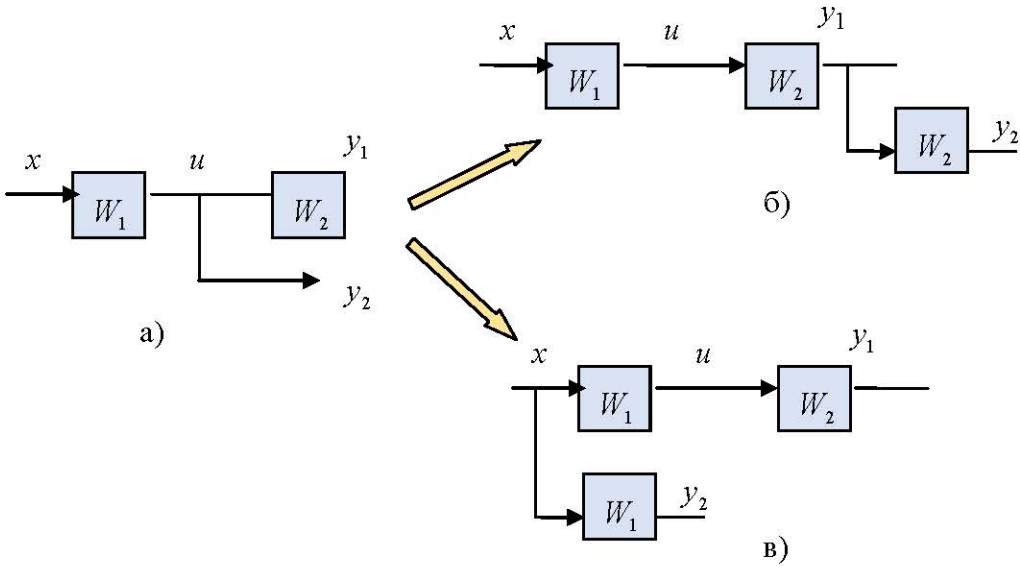


Рисунок 3.25 – Перенесення вузла

Наведені перетворення у процесі агрегування моделей лінійних систем можна розглядати як перехід від системи рівнянь, яка описує окремі підсистеми та їх з'єднання, до одного рівняння, яке описує перетворення вхідного сигналу

системи на вихідний. Наприклад, для системи, зображеної на рис. 3.22, можна записати систему рівнянь

$$\begin{cases} u_1 = x - u_2 \\ y = u_1 \cdot W_1 \\ u_2 = y \cdot W_2 \end{cases} \quad (3.97)$$

У процесі формального агрегування з системи (3.97) усуваємо внутрішні сигнали u_1 і u_2 методом підстановки. Для цього необхідно розв'язати друге рівняння системи відносно u_1 . Після підстановки отримаємо одне рівняння функціональної моделі агрегованої системи

$$y = x \cdot \frac{W_1}{1 + W_1 W_2},$$

яке відповідає моделі (3.50).

3.5.3 Агрегування моделей нелінійних систем

Процес агрегування моделей нелінійних систем значно складніший ніж для систем лінійних. Складність проблеми пояснюється тим, що у багатьох випадках для здійснення агрегування необхідно знайти функцію оберненого перетворення одної чи декількох підсистем. Знаходження оберненої функції виконується шляхом розв'язання рівняння перетворення сигналів. Якщо підсистема нелінійна, то її моделлю є нелінійне диференціальне рівняння. Наразі ж відомі методи розв'язання лише невеликої кількості достатньо простих нелінійних диференціальних рівнянь.

Одним з випадків, для якого існують методи агрегування, є моделі, в яких нелінійна і динамічна частини розділені. Такі моделі мають назву моделей Гамерштейна-Вінера:

– модель Гамерштейна

$$Y(t) = F[x(t), t] \Rightarrow \begin{cases} Y(t) = N[U(t)] \\ U(t) = W \cdot x(t) \end{cases} \quad (3.98)$$

– модель Вінера

$$Y(t) = F[x(t), t] \Rightarrow \begin{cases} Y(t) = W \cdot U(t) \\ U(t) = N[x(t)] \end{cases} \quad (3.99)$$

– модель Гамерштейна-Вінера

$$Y(t) = F[x(t), t] \Rightarrow \begin{cases} Y(t) = N_2[U_2(t)] \\ U_2(t) = W \cdot U_1(t) \\ U_1(t) = N_1[x(t)] \end{cases} \quad (3.100)$$

де F – нелінійна динамічна модель; N – нелінійний статичний оператор; W – лінійний динамічний оператор; U_1, U_2 – допоміжні проміжні сигнали.

Ще одним способом агрегування є наближене розв’язання нелінійних рівнянь. Це може бути здійснене чисельними методами, наприклад, за допомогою засобів аналітичних перетворень математичних пакетів MathCAD, MAPL, MatLab тощо.

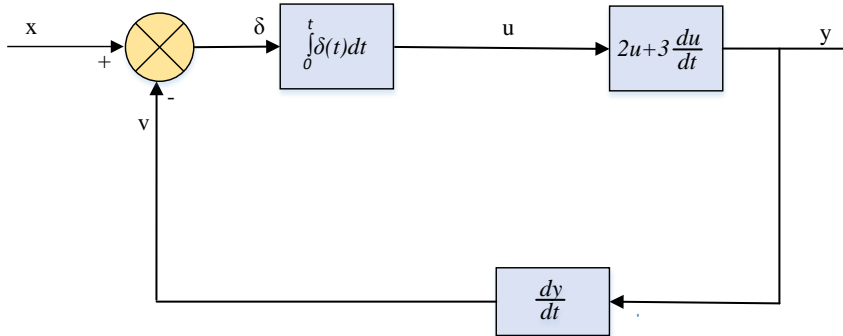
Ключові слова

Статичний режим, статична характеристика, композиція моделі, декомпозиція моделі, сімейство статичних характеристик, лінеаризація, лінійні системи, похибка лінеаризації, лінійна апроксимація, кускова лінеаризація, моделі логіки, унарні операції, бінарні операції, інверсія, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, функціонально повні групи; модель сигналу, модель перетворення сигналу, диференціальне рівняння, стаціонарна система, нестаціонарна система, неавтономне рівняння, принцип суперпозиції, власний оператор, оператор взаємодії, передатна функція, перетворення Лапласа, обернене перетворення Лапласа, частотна передатна функція, амплітудно-фазова частотна характеристика, амплітудно-фазова частотна функція, дійсна частотна функція, уявна частотна функція, дійсна частотна характеристика, уявна частотна характеристика, амплітудно-частотна функція, амплітудно-частотна характеристика, фазочастотна функція, фазочастотна характеристика, годограф, логарифмічна амплітудно-частотна функція, логарифмічна амплітудно-частотна характеристика, логарифмічна фазочастотна характеристика, цифровий автомат, модель динаміки синхронного цифрового автомата; системи масового обслуговування, запит, вимога, вхідний потік вимог, вихідний потік вимог, черга, час очікування у черзі, канали СМО, дисципліна обслуговування, кількість джерел, марковські моделі СМО, немарковські моделі СМО; алгоритм, стохастичний алгоритм, евристичний алгоритм, лінійний алгоритм, розгалужений алгоритм, циклічний алгоритм, алгебра рекурсивних функцій, теорія автоматів, машина Тьюрінга, машина Поста, алгебра алгоритмів, рекурсія, ітерація, вибір, блок-схеми алгоритмів, мережі Петрі; комплексні моделі, агрегатні моделі, композиція моделі, декомпозиція моделі, послідовне з'єднання, паралельне з'єднання, зворотний зв'язок, перенесення суматора, перенесення вузла.

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. За яких умов режим роботи системи можна вважати статичним?
2. Наведіть приклади систем з різними статичними характеристиками.
3. Чи можна вважати статичною характеристику релейної системи з гістерезисом?
4. Які методи лінеаризації ви знаєте?
5. До якого типу статичних характеристик належать характеристики АЦП, ЦАП?
6. Які моделі динаміки сигналів Ви знаєте?
7. Дана лінійна система

Скласти її модель у вигляді диференціального рівняння і знайдіть вихідний сигнал при нульових початкових умовах, якщо вхідний описується залежністю $x(t) = t \cdot \sin(0,1t)$.



8. Дайте означення основних моделей динаміки лінійних систем.
9. Яка різниця між моделями у вигляді функцій і у вигляді характеристик?
10. Як реалізується на комп'ютері модель динаміки лінійної стаціонарної системи?

11. Спектр вхідного сигналу описується експоненціальною функцією $S_x(\omega) = e^{-3\omega}$. Передатна функція лінійної динамічної системи $W(p) = \frac{2p}{3p+1}$.

Знайти спектр вихідного сигналу і побудувати його графік.

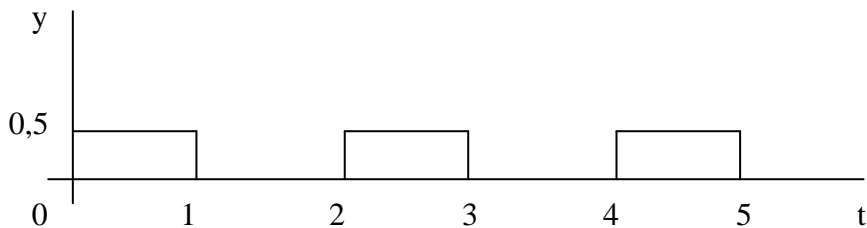
12. Чим відрізняються моделі статички і динаміки цифрових систем?
13. Наведіть приклади систем масового обслуговування.
14. Що таке “марковський процес”?
15. Яку умову в реальній СМО повинно задовольняти співвідношення інтенсивностей вхідного потоку λ і інтенсивності обслуговування μ ?
16. Для системи з обмеженою чергою зобразіть модель СМО у вигляді зваженого графу станів системи.
17. Визначте загальні риси інтуїтивного поняття алгоритму.
18. Охарактеризуйте основні напрямки теорії алгоритмів.
19. Наведіть найбільш поширені форми зображення алгоритмів.
20. Визначте загальні властивості алгоритмів.
21. Опишіть принцип роботи машини Тюрінга та Поста.
22. Дайте означення багатоосновної алгебри, алгебри алгоритмів Глушкова.
23. Наведіть тотожності алгебри алгоритмів.
24. Визначте базові алгоритми та охарактеризуйте їх.
25. Яка функція називається примітивно рекурсивною, частково рекурсивною?
26. Сформулюйте тезу Черча, тезу Тюрінга.
27. Чи є ізоморфними зображення алгоритмічних моделей за допомогою мереж Петрі і блок-схем?
28. Обґрунтуйте зв'язок основних властивостей операторів з можливістю (або неможливістю) виконання композиції або декомпозиції.
29. Дана модель системи у вигляді диференціального рівняння

$$2y''' - 3y'' + y' = x'' + 5x' - x.$$

Знайти передатну функцію системи та АЧХ.

30. Вихідний сигнал системи має вигляд періодичної послідовності

Знайти його спектр.



31. Композиція і декомпозиція є прямою і оберненою задачами. Яка з них є коректною (однозначною), а яка – ні?

32. Сформулюйте правила композиції/декомпозиції в термінах операцій над графами.

Література

1. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем / Алиев Т. И. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
2. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического регулирования / Бесекерский В. А., Попов Е. П. – М. : Наука, 1975. – 768 с.
3. Боровська Т. М. Теорія автоматичного управління : навчальний посібник / Боровська Т. М., Северілов В. А., Васюра А. С. – Вінниця : ВДТУ, 2002. – 96 с.
4. Базы данных. Интеллектуальная обработка информации / [В. В. Корнеев, А. Ф. Гареев, С. В. Васютин, В. В. Райх]. – М. : “Нолидж”, 2000. – 352 с.
5. Воронов А. А. Теория автоматического управления. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / Воронов А. А. – М. : Высш. школа, 1997. – 303 с.
6. Глонь О. В. Комп’ютеризовані системи керування / Глонь О. В., Дубовой В. М., Мітюшкін Ю. І. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 157 с.
7. Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм / В. М. Глушков // Кибернетика. – 1965. – № 5. – С. 1-10.
8. Дубовой В. М. Моделювання систем контролю та керування : навч. посіб. / Дубовой В. М. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 175 с.
9. Дубовой В. М. Спеціальні розділи математики : навч. посіб. / Дубовой В. М., Никитенко О. Д. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 165 с.
10. Кветний Р. Н. Методи комп’ютерних обчислень : навч. посіб. / Р. Н. Кветний – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 148 с.
11. Арсенюк І. Р. Теорія алгоритмів : навчальний посібник / Арсенюк І. Р., Колодний В. В., Яровий А. А. – Вінниця : ВНТУ, 2006. – 150 с.

12. Котов В. Е. Сети Петри / Котов В. Е. – М. : Наука, 1984. – 160 с.
13. Криницкий Н. А. Алгоритмы вокруг нас / Криницкий Н. А. – М. : Наука, 1984. – 224 с.
14. Лазарев И. А. Композиционное проектирование сложных агрегативных систем / Лазарев И. А. – М. : Радио и связь, 1986. – 312 с.
15. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое / Манин Ю. И. – М. : Советское радио, 1979. – 168 с.
16. Назаров А. В. Нейросетевые алгоритмы прогнозирования и оптимизации систем / Назаров А. В., Лоскутов А. И. – СПб. : Наука и Техника, 2003. – 384 с.
17. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов / Новиков Ф. А. – СПб. : Питер, 2001. – 304 с.
18. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Питерсон Дж. – М. : Мир, 1984. – 264 с.
19. Справочник по теории автоматического управления / [под ред. А. А. Красовского] – М. : Наука, 1987. – 712 с.
20. Жерновий Ю. В. Марковські моделі масового обслуговування : тексти лекцій / Жерновий Ю. В. – Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 154 с.
21. Оборский Г. А. Моделирование систем : монографія / Г. А. Оборский, А. Ф. Дащенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин – Одесса : Астропринт, 2013. – 664 с.
22. Усов А. В. Вероятностно-аналитическое моделирование технико-экономических систем : монография / Третьяк А. И., Коновалов А. Л., Дубров К. А. В 2-х частях – Одесса : Астропринт, 2003. – 224 с., 440 с.
23. Усов А. В. Введение в методы оптимизации и теорию технических систем : учебное пособие / Оборский Г. А., Морозов Ю. А., Дубров К. А. – Одесса : Астропринт, 2005 – 496 с.
24. Третьяк А. В. Дифференциально-геометрические методы в теории дискретных систем управления : монография / А. И. Третьяк, А. В. Усов, А. П. Коновалов – Одесса : Астропринт, 2008. – 360 с.
25. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельева, І. І. Становська – Одеса : Пальміра, 2011.– 500 с.
26. Дмитришин Д. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения : учебное пособие / Д. В. Дмитришин, А. В. Усов, Ю. А. Морозов, В. В. Перстнева – Одесса : Астропринт, 2008. – 440 с.
27. Михалев А.И. Цифровая обработка данных: от Фурье к Wavelets / Михалев А.И. – Днепропетровск : Системные технологии, 2007. – 200 с.

4 ІНФОРМАЦІЙНІ МОДЕЛІ

Інформаційна техніка є порівняно новою галуззю, що отримала найбільший розвиток на етапі розробки і застосування засобів зв'язку, електронних обчислювальних машин (ЕОМ) і автоматизованих систем керування (АСУ).

Розвиток інформаційної техніки і технологій в останні роки привів до справжньої суспільної революції, зробивши інформацію доступною і потужною виробничою силою.

Моделі, що описують процеси у інформаційній техніці та інших споріднених сферах називають інформаційними.

4.1 Основні поняття теорії інформації

Є безліч означень поняття інформації від найбільш загального філософського (інформація є відображення реального світу) до найбільш вузького – практичного (інформацією є всі відомості, які є об'єктом збереження, передачі і перетворення).

Під *інформацією (information)* слід розуміти не самі предмети та процеси, а їхні характеристики чи відображення у вигляді чисел, формул, описів, креслень, символів, образів і інших абстрактних об'єктів.

Інформацію можна розрізняти за структурно–метричними властивостями.

До *параметричної інформації* належать набори числових оцінок значень параметрів, результати кількісних визначень при дослідженні, аналізі, контролі й обліку.

До *топологічної інформації* – геометричні образи, карти місцевості, плоскі зображення й об'ємні об'єкти.

Абстрактну інформацію застосовують у дослідженнях на високому теоретичному рівні, коли потрібні узагальнення і символізація.

Найважливішим питанням теорії інформації є встановлення *міри кількості інформації*. Інформаційні міри відповідають трьом основним напрямкам у теорії інформації: структурному, статистичному і семантичному.

Структурна теорія розглядає дискретну будову масивів інформації і їх вимірювання простим підрахунком інформаційних елементів (квантів) комбінаторним методом, що припускає найпростіше кодування масивів інформації. Структурна теорія застосовується для оцінювання можливостей апаратури інформаційних систем (каналів зв'язку, запам'ятовувальних і реєструвальних пристроїв) поза залежністю від умов їх застосування.

Семантична теорія враховує доцільність, цінність, корисність чи істотність інформації. Семантична теорія застосовується для оцінювання ефективності логічного висновку.

Статистична теорія оперує поняттям ентропії як міри невизначеності, що враховує імовірність появи, а отже, і інформативність тих чи інших повідомлень. Статистична теорія оцінює інформаційні системи у конкретних застосуваннях, наприклад, при передаванні по системі зв'язку інформації з певними статистичними характеристиками.

Первинним і неподільним елементом інформації є елементарна двійкова подія – вибір з твердження чи заперечення, істини чи неправди, згоди чи незгоди, наявності чи відсутності якогось явища. Двійковість події дозволяє подавати її умовно в геометричній символіці крапкою і пропуском, в арифметичній символіці – одиницею і нулем, у сигнальній символіці – імпульсом і паузою.

Інші категорії інформації можуть бути подані як сукупності різних подій.

Величина. Величина X є впорядкована в одному вимірі (за шкалою значень) множина подій, причому кожна з них відповідає прийняттю величиною одного певного значення. Величина може бути або дискретною, або неперервною; у першому випадку множина подій зліченна, у другому – незліченна

Функція. Функція $X(T)$, $X(N)$ чи $X_2(X_1)$ є співвідношенням між двома величинами: величиною і часом, простором чи іншою величиною. У цьому розумінні функцію можна трактувати як двовимірне поле подій.

Комплекс. Повний комплекс інформації $X(T, N)$ є відповідність між величиною, з одного боку, і часом з іншого. Таким чином, повний комплекс інформації є тривимірним полем подій.

Як *інформаційні характеристики* систем можуть використовуватися:

1. Кількість інформації;
2. Середня кількість інформації;
3. Продуктивність джерела інформації;
4. Інформаційна пропускна спроможність каналу;
5. Надлишковість джерела інформації;
6. Ентропійна похибка;
7. Ентропія похибки контролю.

Найпоширенішими є *статистичні міри* кількості інформації.

Кількість інформації, що міститься у вихідній величині інформаційної системи при відомій вхідній, визначається виразом

$$I_{Y,X} = H_X - H_{X|Y} = H_Y - H_{Y|X}, \quad (4.1)$$

де H_X , H_Y – *апостеріорні ентропії* відповідно вхідних та вихідних величин; $H_{X|Y}$, $H_{Y|X}$ – *априорні ентропії* відповідно вхідної величини при заданій вихідній і навпаки.

У випадку дискретної величини *середня кількість інформації* дорівнює

$$I_{Y,X} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P_{ij} \log_2 \frac{P_{ij}}{P_j P_i}, \quad (4.2)$$

де n – кількість значень величини; P_i – імовірність того, що вхідна величина X

прийняла i -те значення; P_j – імовірність того, що одержано j -те значення вихідної величини Y ; P_{ij} – сумісна імовірність настання двох подій, яка полягає в тому, що одержали j -те значення вихідної величини Y , а вхідна величина X має i -те значення.

У випадку неперервної величини

$$I_{Y,X} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \log_2 \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)f_Y(y)} dx dy, \quad (4.3)$$

де $f_X(x)$ – щільність розподілу вхідної величини; $f_Y(y)$ – щільність розподілу вихідної величини; $f_{X,Y}(x,y)$ – щільність спільного розподілу значень вихідної величини Y та вхідної величини X .

Загальна інформація, яка отримана на відрізку часу T при n_T значеннях величини X у моменти часу t_i , для яких значення X не корельовані, а процес стаціонарний

$$I_{Y,X}(T) = \sum_{i=1}^{n_T} I_{Y,X}(t_i) = n_T I_{Y,X}. \quad (4.4)$$

Похідна

$$B = \frac{dI_{Y,X}(t)}{dt} = \frac{I_{Y,X}(T)}{T},$$

яка характеризує швидкість отримання інформації, називається, залежно від типу інформаційної системи, *продуктивністю джерела інформації* у вимірювальній техніці, швидкістю передавання інформації у техніці зв'язку тощо.

Інформаційною пропускнуою спроможністю каналу називається максимально можлива швидкість передавання інформації

$$C_n = \frac{[I_{Y,X}(T)]_{\max}}{T}. \quad (4.5)$$

Надлишковість джерела інформації виникає через відхилення закону розподілу від закону, який визначає найбільшу апіорну ентропію (таким законом при необмеженому значенні середнього квадратичного відхилення величини (σ_X) є нормальний, а при обмеженому – рівномірний), та через наявність кореляції між значеннями в окремі моменти. Надлишковість визначається за формулою

$$\gamma = \frac{[I_{Y,X}(T)]_{\max} - I_{Y,X}(T)}{[I_{Y,X}(T)]_{\max}} = 1 - \frac{B}{C_n}. \quad (4.6)$$

Ентропійна похибка (Δ_{eX}) використовується для оцінювання ефективності вимірювальних каналів і відповідає значенню похибки з рівномірним законом розподілу, яка вносить таку ж дезінформаційну дію, що й похибка з даним законом розподілу.

$$\Delta_{eX} = \pm \frac{1}{2} e^{H_{X/Y}} = K_e \sigma_{\Delta_X}, \quad (4.7)$$

де $H_{X/Y}$ – диференціальна ентропія похибки з даним законом розподілу; K_e – ентропійний коефіцієнт; σ_{Δ_X} – середньоквадратична похибка з даним законом розподілу.

Ентропія помилки контролю визначається співвідношенням

$$H_{X/Y} = -[P_{zn} \log P_{zn} + (1 - P_{zn}) \log(1 - P_{zn})], \quad (4.8)$$

де P_{zn} – загальна безумовна ймовірність помилкового судження про стан контрольованого параметра:

$$P_{zn} = P_\alpha P_1 + P_\beta P_2, \quad (4.9)$$

де P_1, P_2 – апіорні ймовірності знаходження контрольованого параметра відповідно в зоні допуску та зовні ($P_1 + P_2 = 1$); P_α, P_β – помилки відповідно першого та другого роду, які визначаються так:

– ймовірність пропуску виходу за зону допуску

$$P_\alpha = \int_{-\infty}^{x_{\min}} f_X(x) \int_{-x+x_{\min}}^{x_{\max}-x} f_{\Delta_X}(\Delta_X) d\Delta_X dx + \int_{x_{\max}}^{+\infty} f_X(x) \int_{-x+x_{\min}}^{x_{\max}-x} f_{\Delta_X}(\Delta_X) d\Delta_X dx; \quad (4.10)$$

– ймовірність “хибної тривоги”

$$P_\beta = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_X(x) \left[\int_{-\infty}^{x-x_{\min}} f_{\Delta_X}(\Delta_X) d\Delta_X + \int_{x_{\max}-x}^{+\infty} f_{\Delta_X}(\Delta_X) d\Delta_X \right] dx, \quad (4.11)$$

де x_{\max} і x_{\min} – границі допуску на контрольований параметр; $f_X(x)$ і $f_{\Delta_X}(\Delta_X)$ – закони розподілу ймовірностей контрольованого параметра X та похибки контролю Δ_X .

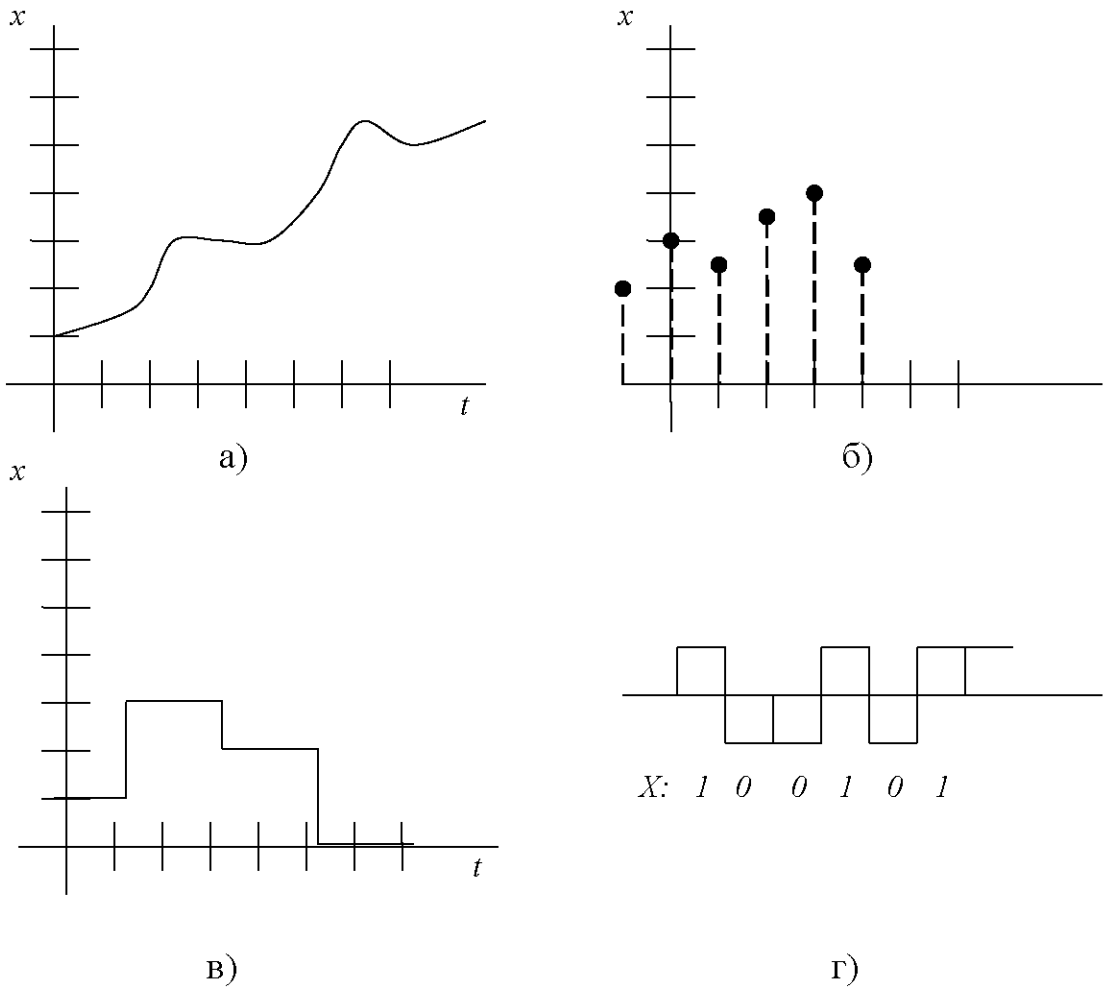
У документографічних системах під інформацією розуміються відомості, що містяться в різноманітних документах фіксованої форми. Відповідно одиницею вимірювання інформації є документ, показник і реквізит. Інформація підрозділяється на первинну (вхідну), проміжну і підсумкову (вихідну).

Сама по собі *інформація* може бути віднесена до сфери абстрактних категорій, подібних, наприклад, до математичних формул. Однак проявляється вона завжди в матеріально–енергетичній формі за допомогою певних носіїв.

Сигнал – це фізичний процес, характеристики якого несуть інформацію про стан системи та впливові величини. Характеристики сигналу, які несуть відповідну інформацію, називають *інформативними параметрами*. Вибір інформативного параметра залежить від типу сигналу. Використовують сигнали:

– електричні, оптичні, магнітні, механічні, теплові;

– аналогові (неперервні), дискретні, квантовані, цифрові, як показано на рис. 4.1; з використанням синусоїдального, імпульсного або іншого базису.



Теорія сигналів є однією з найфундаментальніших теорій сучасної прикладної науки. Вона зародилася відповідно до потреб техніки зв'язку і стала джерелом створення сучасної теорії інформації, теорії випадкових процесів, теорії прийняття рішень та інших фундаментальних і прикладних напрямків науки.

Процес надання інформативному параметру значення, яке повинен містити сигнал, називають *модуляцією*. Відповідно використовують *амплітудну, частотну і фазову* модуляцію синусоїдальних сигналів, *амплітудну, частотну і різні види широтної модуляції імпульсних сигналів* тощо.

Якщо інформативний сигнал є носієм інформації про процес $x(t)$, то моделі

сигналу при модуляції синусоїдального носія $A_0 \sin(\omega_0 t)$ матимуть вигляд:

- амплітудна модуляція

$$y(t) = [A_0 + x(t)] \cdot \sin(\omega_0 t); \quad (4.12)$$

- частотна модуляція

$$y(t) = A_0 \sin\{[\omega_0 + x(t)] \cdot t\}; \quad (4.13)$$

- фазова модуляція

$$y(t) = A_0 \sin[\omega_0 t + x(t)]. \quad (4.14)$$

Основи теорії сигналів складають моделі перетворення сигналів у процесі модуляції, передавання, обробки та демодуляції. Найчастіше в теорії сигналів використовується *спектральне подання сигналів*.

Основою для інформаційної теорії сигналів є ряд фундаментальних теорем:

1. *Теорема Котельникова–Шеннона* про максимальний інтервал дискретизації детермінованих сигналів, необхідний для їх точного відновлення

$T_{\max} = \frac{1}{2f_0}$, де f_0 – верхня гранична частота спектра сигналу;

2. *Теорема Железнова* про максимальний інтервал дискретизації випадкових сигналів, необхідний для їх відновлення з необхідною точністю $T = \tau$, де τ – інтервал кореляції процесу;

3. *Теорема Шеннона* про максимальну швидкість передавання інформації в умовах завад $c = f_0 \log\left(1 + \frac{P_c}{P_s}\right)$, де P_c – потужність сигналу, P_s – потужність завади.

Співвідношення, доведені у цих теоремах, повинні задовольняти інформаційні моделі будь-яких систем.

4.2 Бази даних і знань як інформаційні моделі

Для автоматизованих систем керування виробництвом, установами, адміністративними територіями тощо характерні задачі прийняття рішень на основі великої кількості даних, накопичених за великий проміжок часу. Найчастіше ці дані зберігаються у вигляді баз даних (БД), операції з якими виконуються за допомогою систем управління базою даних (СУБД). Узагальнена структура системи прийняття керівних рішень з використанням СУБД зображена на рис. 4.2.

Алгоритм прийняття рішення можна розглядати як перетворення F задання X на рішення Y з параметрами, які отримуються на основі бази даних B і опису ситуації I

$$Y = F(I, B)[X] \quad (4.15)$$

Таким чином, набори даних I і B є інформаційною моделлю системи прийняття рішення.

Алгоритм прийняття рішень у такій системі залежить від призначення системи і особливостей її застосування, отже, для різних систем алгоритми відрізняються. Деяку іншу структуру має інформаційна модель системи прийняття рішень на основі бази знань.

База знань складається з набору відомих фактів (бази даних) і набору відомих залежностей між ними (правил). Алгоритм прийняття рішень на основі фактів і правил практично не залежить від призначення системи управління. Конкретні особливості системи впливають лише на структуру бази даних і вид правил.

Головне питання, яке розглядається при побудові бази даних як інформаційної моделі, – вибір адекватного і одночасно зручного опису типу зв'язку між елементами даних.

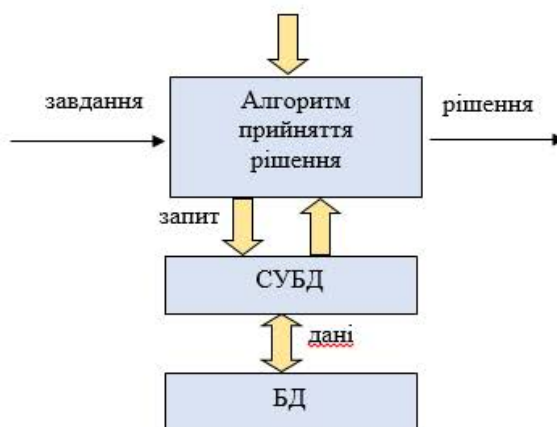


Рисунок 4.2 – Система прийняття рішень

Сучасні СУБД ґрунтуються на використанні *моделей даних* (МД), які дозволяють описувати об'єкти предметних областей і взаємозв'язки між ними. Існують три основні МД і їх комбінації, на яких ґрунтуються СУБД: реляційна (РМД), мережева (ММД), ієрархічна (ІМД).

Основна відмінність між цими моделями даних полягає у способах опису взаємодії між об'єктами й атрибутами. Взаємозв'язок виражає відношення між множинами даних. Використовують взаємозв'язки “один до одного”, “один до багатьох” і “багато до багатьох”. “Один до одного” – це взаємно однозначна відповідність, яка встановлюється між одним об'єктом і одним атрибутом. “Багато до багатьох” – це відповідність між багатьма об'єктами й багатьма атрибутами. Взаємозв'язки між об'єктами й атрибутами зручно зображувати у вигляді графів.

На персональних комп'ютерах в основному використовують СУБД, які підтримують *реляційну модель даних*. Відповідно до реляційної моделі база даних подається у вигляді сукупності таблиць, над якими можуть виконуватися операції, що формулюються у термінах реляційної алгебри і реляційного числення. В реляційній моделі операції над об'єктами бази даних мають теоретико-множинний характер.

Основними елементами реляційної БД є *атрибути, кортежі, відношення*. Відношенням називається деяка сукупність об'єктів, яка характеризується однаковим набором атрибутів. Зручно подавати відношення як таблицю, де кожний рядок є кортеж і кожний стовпець є атрибут. Стовпці таблиці – це елементи даних, а рядки – записи.

Таким чином, реляційна база даних подається четвіркою $\langle E, A, C, R \rangle$, де E – множина відношень, A – множина атрибутів, C – множина кортежів, R – мно-

жина зв'язків.

Відношення може бути подане у вигляді файлу. Записи у файлі відповідають кортежам. Вони складаються з полів, які відповідають атрибутам відношення. Зв'язок між відношеннями здійснюється через *ключі*. Відношення не повинно мати двох кортежів, в яких збігаються всі атрибути ключа.

Найчастіше реляційні бази даних зображуються у вигляді ER-моделі (Entity-Relationship Model). Ця модель подає відношення і зв'язки між ними через ключі у графічному вигляді.

Основна перевага реляційного підходу – його простота й доступність, незалежність даних, гнучкість, теоретичне обґрунтування на основі реляційної алгебри.

В *мережній моделі даних* елементарні дані і відношення між ними подаються у вигляді орієнтованого графу (вершини – дані, дуги – відношення). Основні елементи мережної бази даних – тип запису і тип набору.

Запис – сукупність логічно пов'язаних полів, яка характеризується іменем і полями, що входять до нього. *Поле* називається єдина неподільна одиниця інформації, яка характеризується ідентифікатором, типом і довжиною.

Запис може існувати в БД не тільки самостійно, але й бути одночасно детальним або головним записом деяких наборів залежно від того, чи описаний його тип як тип головного запису або детального запису набору. В записах можуть міститися довільні елементи даних, значення яких залежать від значень інших елементів даних того запису, в який входить даний запис.

Основні переваги мережної моделі даних – простота реалізації відношень “багато до багатьох”. Основний недолік – її складність. При реорганізації БД можлива втрата незалежних даних.

Ієрархічна модель даних основана на понятті *дерев*, які складаються з вершин і ребер. Вершина дерева ставиться у відповідність сукупності атрибутів даних, що характеризують деякий об'єкт. Вершини і ребра дерева утворюють ієрархічну структуру, яка складається з n рівнів.

Першу вершину називають *кореневою вершиною*. Вона задовольняє умови:

1. Ієрархія починається з кореневої вершини;
2. Кожна вершина відповідає одному або декільком атрибутам;
3. На рівнях з більшим номером знаходяться залежні вершини. Вершина попереднього рівня є початковою для нових залежних вершин;
4. Кожна вершина, яка знаходиться на рівні i , з'єднана з однією вершиною рівня $i-1$, за винятком кореневої вершини;
5. Коренева вершина може бути пов'язана з однією або кількома залежними вершинами;
6. Доступ до кожної вершини здійснюється через кореневу єдиним шляхом;

7. Існує довільна кількість вершин кожного рівня.

Основні переваги ієрархічної моделі даних: простота побудови і використання, забезпечення певного рівня незалежності даних, простота оцінювання характеристик. Основні недоліки: відношення “багато до багатьох” реалізується дуже складно, дає громіздку структуру і вимагає зберігання надлишкових даних, ієрархічна впорядкованість ускладнює операції вилучення і занесення даних, доступ до будь-якої вершини можливий лише через кореневу, що збільшує час доступу.

Існує декілька способів здійснення операцій з інформаційними моделями у вигляді баз даних. Серед них оперування з даними за допомогою інтегрованого діалогового середовища системи управління базою даних (СУБД), оперування за допомогою спеціалізованої проблемно-орієнтованої програми; оперування за допомогою запитів на спеціальній мові (SQL). Останній спосіб в зв'язку з розповсюдженням мережних інформаційних технологій поступово набуває найбільшого розповсюдження.

SQL (англ. Structured Query Language — мова структурованих запитів) — універсальна комп'ютерна мова, яка застосовується для створення, модифікації і управління даними в реляційних базах даних.

SQL ґрунтується на реляційній алгебрі. Основними операціями, за допомогою яких модифікується база даних, є вставка, вилучення і модифікація.

Мова SQL поділяється на три частини:

- оператори означення даних;
- оператори маніпулювання даними;
- оператори визначення доступу до даних.

Запити до бази даних повертають результат у вигляді таблиць, які теж можуть використовуватися як об'єкт запитів.

У загальному випадку запит до бази даних можна подати як операторне перетворення

$$\langle E', A', C', R' \rangle F(S) \{ \langle E, A, C, R \rangle \}, \quad (4.16)$$

де S – множина параметрів запиту.

Вираз (4.16) є формальним записом інформаційної моделі системи.

В системах з використанням елементів штучного інтелекту широко застосовуються інформаційні моделі у вигляді *баз знань*. База знань звичайно складається з двох частин: бази фактів і бази правил. *База фактів* – це фактично база даних про предметну область (загальні дані) і конкретну систему. *База правил* встановлює логічні зв'язки між фактами у вигляді

якщо (факт1, факт2, ... фактN), *то* фактX.

Наявність логічних зв'язків між фактами є головною відмінністю баз знань від баз даних, адже одною з головних вимог до баз даних є їх «нормальна фор-

ма», яка саме і передбачає відсутність будь-яких функціональних або логічних зв'язків між даними.

Отримання логічного висновку на основі бази знань може здійснюватися шляхом послідовного застосування правил. Тоді з початкових фактів отримують спочатку проміжні, а зрештою, і остаточні висновки. Можливий також спосіб отримання висновку, при якому правила об'єднуються за допомогою логічних операцій. Такий логічний вираз є оператором над базою знань, який встановлює зв'язок між початковими даними і висновком–результатом.

4.3 Семантичні мережі і гіпертекстові системи

Семантичні технології забезпечують існування певного рівня абстракції над існуючими інформаційними ресурсами. Цей рівень дозволяє здійснювати зв'язок даних, змісту і процесів між різними видами ізольованих структур даних та інформації. Основою семантики є онтології, що призначені для формалізації предметних областей. Аналіз онтологій є складною задачею, оскільки передбачає обробку великих обсягів даних та логічних тверджень, які містяться у онтологіях.

Останнім часом дослідження семантичних інформаційних моделей здійснюється переважно стосовно гіпертекстових структур і гіпермедіа, які є основою Web-систем.

4.3.1 Поняття про семантичні моделі

Семантичні складові статей гіпертекстових систем формують так звані семантичні мережі. Семантичні технології подають знання за допомогою онтологій і забезпечують зв'язки, правила, логіку та умови, що зазначені в онтології. Тому онтології можна вважати основою семантичної мережі.

Онтологія – формальна специфікація інформаційної моделі предметної області. Онтологія складається з класів сутностей предметної області, властивостей цих класів, зв'язків між цими класами і тверджень, побудованих із цих класів, їх властивостей і зв'язків між ними.

Існують різні класифікації онтологій:

1. семантична:

- за рівнем виразності;
- за ступенем формальності;
- за рівнем детальності подання;

2. прагматична:

- за ступенем залежності від конкретної задачі чи предметної області;
- за мовою подання онтологічних знань;
- за предметною областю;
- за метою створення.

Наведемо коротку характеристику кожної класифікації.

Семантична класифікація

1. За рівнем виразності.

Глибинні онтології. Глибинні онтології сильно аксіоматизовані. Мета аксіоматизації – уникнення термінологічної і концептуальної неоднозначностей. Кожна глибинна онтологія може мати поверхневу версію. Багато онтологій предметних областей є глибинними, оскільки повинні підтримувати процеси побудови складних висновків.

Поверхневі онтології. Це прості структури примітивів або композиції термінів з відповідними означеннями. Вони слабо аксіоматизовані, оскільки значення терміна, використовуване всередині співтовариства, зазвичай, більш-менш відомо усім його членам.

2. За ступенем формальності.

Ця класифікація схожа з класифікацією за рівнем виразності мови опису онтології, проте не еквівалентна їй.

Неформальні. Це онтології, які описуються в документі будь-якою природною мовою. Незважаючи на відсутність формальних правил задання, такі онтології також можуть бути суттєво наповненими, несуперечливими і точними.

Частково формалізовані. Такі онтології, хоча і формалізовані, але дуже слабо структуровані.

Сильно формалізовані. Онтології для вирішення інженерних завдань. Здають формальну семантику термів (таких, як кількість і одиниця виміру) в дозволених мовою точних і несуперечливих виразах.

3. За рівнем детальності подання.

Низько деталізовані. Онтологія може бути побудована на основі термінів і декількох типів зв'язків.

Високо деталізовані. Онтологія може містити набагато більше деталей, охоплюючи правила, за якими терміни можуть бути пов'язані між собою.

Прагматична класифікація

1. За ступенем залежності від конкретної задачі чи предметної області.

Верхнього рівня. Такі онтології описують найбільш загальні поняття (простір, час, матерія, об'єкт, подія, дія і т. д.), які не залежать від конкретної проблеми чи області.

Орієнтовані на предметну область. У ряді дисциплін наявні стандартні онтології, які можуть використовуватися експертами з предметних областей для спільного використання та анотування інформації у своїй галузі. Наприклад, у галузі медицини створені такі великі стандартні структуровані словники, як SNOMED і семантична мережа Системи уніфікованої медичної мови (Unified Medical Language System). Також з'являються великі спільноцільові онтології, наприклад, онтологія UNSPSC, що надає термінологію товарів і послуг.

Орієнтовані на завдання. Це онтології, що використовуються конкретною програмою і містять терміни, які застосовуються при розробці програмного забезпечення, що виконує конкретне завдання. Вони відображають специфіку додатка, але можуть також містити деякі загальні терміни (наприклад, в графічному редакторі будуть і специфічні терміни – палітра, тип заливки, накладання шарів тощо, і загальні – зберегти і завантажити файл).

Прикладні онтології описують концепти, які залежать як від онтології завдань, так і від онтології домена. Прикладом може слугувати онтологія для автомобілів, будівельних матеріалів, обчислювальної техніки [114].

2. За мовою подання онтологічних знань.

RDF – мова, розроблена в рамках проекту Semantic Web. Основне призначення мови – опис метаданих документів, що розміщуються в мережі Internet. RDF використовує базову модель подання даних “об’єкт – атрибут – значення”, здатну зіграти роль універсальної мови опису семантики ресурсів і зв’язків між ними.

DAML OIL – семантична мова розмічування веб-ресурсів, яка розширює стандарти RDF і RDF Schema за рахунок повніших примітивів моделювання.

OWL (Web Ontology Language) – мова подання онтологій наступного, після DAML OIL покоління. Має більший набір можливостей, ніж XML, RDF, RDF Schema і DAML OIL.

KIF (Knowledge Interchange Format, або формат обміну знаннями) – спеціальна мова, призначена для обміну знаннями між різними комп’ютерними системами. Розроблялась для опису загального формату подання знань, незалежного від конкретних систем.

СусL (мова опису онтології Сус) – гібридна мова, в якій об’єднані властивості фреймів і логіки предикатів.

OCML (Operational Conceptual Modeling Language) мова підтримує побудову декількох типів конструкцій подання знань. Вона дозволяє задавати специфікацію функцій, зв’язків, класів, екземплярів і правил. Вона також містить механізми для опису онтологій і методів вирішення завдань – основні технології, розроблені у сфері подання знань.

Ontolingua – надає розподілене середовище для спільного перегляду, створення, редагування, зміни і використання онтологій.

3. За предметною областю.

Онтологія відбиває такі загальні знання про предметну область, як ієрархія класів понять і семантичні відношення на цих класах. Для кожної предметної області онтології створюються експертами з урахуванням ієрархії понять і традицій області.

4. За метою створення.

Онтології додатка. Використовуються під час виконання конкретного додатка, що використовується в роботі блока побудови міркувань. Онтології додатка можуть також описувати конкретні світи (семантичні описи, бази знань, метадані, семантичні метадані чи просто екземпляри).

Посилальні онтології. Використовуються під час розробки додатків, для взаємного розуміння і тлумачення між агентами, що належать до різних співтовариств, для встановлення консенсусу між співтовариствами, які потребують введення нового терміна, чи просто для пояснення значення терміна новому учасникові співтовариства.

4.3.2 Моделі гіпертекстових систем

Основою Інтернет–ресурсів є гіпертекст (ГТ) – одна з фундаментальних моделей подання знань у текстовій формі. Якщо одновимірний текст – однонаправлений рядок символів, то багатовимірний текст (ГТ) є нелінійним, містить точки розгалуження, що дозволяють здійснювати перегляд в декількох напрямках. Відповідно, гіпертекстова система – система, що складається з специфікації інтерфейсу взаємодії з ГТ, визначає принципи та примітиви ГТ (формалізація точок розгалуження та зв'язків між ними), а також принципи зберігання, доставки та знаходження об'єктів ГТ.

Особливості ГТ:

- текст розділений на фрагменти, що є його семантичними одиницями (sets, сети), між якими встановлюються іменовані зв'язки;
- ГТ можна переглядати, рухаючись різними траєкторіями, утвореними зв'язаними сетами;
- переходи вибираються користувачем.

Отже, гіпертекст – форма організації семантичної інформації, що передбачає її фрагментацію та зв'язування.

У гіпертекстовому документі може бути подано декілька рівнів деталізації матеріалу. Такі документи моделюються деревами чи мережами. У графовій моделі ГТ вершини відповідають фрагментам тексту, а ребра – можливим переходам між ними. Кожен шлях на графі показує окрему послідовність перегляду матеріалу.

Згідно з протоколом передачі гіпертексту Hypertext Transport Protocol (HTTP) текст, записаний мовою розмітки гіпертексту Hypertext Markup Language (HTML), є мінімальною одиницею даних, призначеною для міжмашинного обміну. Файл, що містить текст з HTML–розміткою, є гіпертекстовим документом і називається HTML– або WEB–сторінкою. HTML–сторінка містить опис структури документа, до складу якого у вигляді уніфікованого покажчика ресурсу (Uniform Resource Locator – URL) можуть входити посилання на інші гіпертекстові фрагменти. Взаємопов'язана сукупність HTML–сторінок, розташованих на одному WEB–сервері, утворює WEB–сайт.

Гіпертекстовий документ, поданий у HTML, може містити не тільки текстову, але й графічну інформацію, інтерактивні елементи, програмний код мовами програмування (JavaScript, VBScript).

Основні моделі гіпертексту були розроблені і запропоновані у 1990–х роках для забезпечення однозначного та систематизованого опису структури систем гіпермедіа. Залежно від призначення, всі моделі можна розділити на дві основні групи:

- гіпербазові моделі (hyperbase models);
- шарові моделі гіпермедіа (layered hypermedia models).

Залежно від способу подання розглядають такі типи моделей ГТ:

- формалізована модель;
- умовно–типова модель.

Основна задача *гіпербазових моделей* полягає у моделюванні зв'язування даних, а шарових – у моделюванні внутрішньої архітектури систем гіпермедіа.

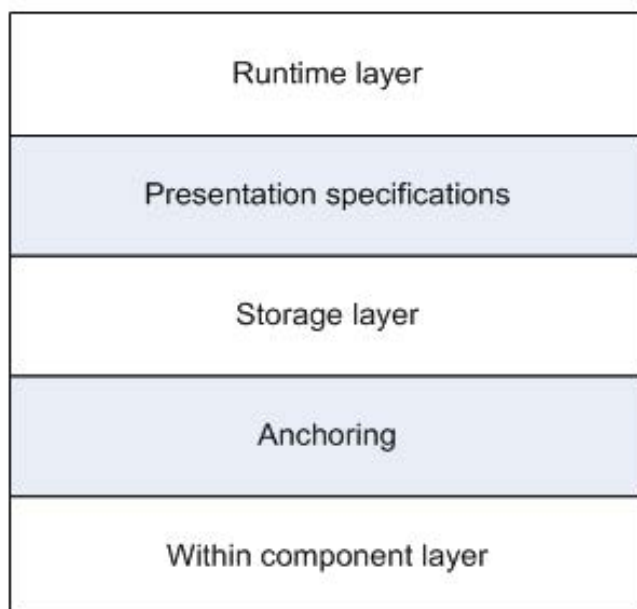
В основі гіпербазових моделей лежать результати досліджень концептуальних моделей даних для опису та оперування інформацією гіпертекстових мереж. Їх основна концепція полягає у поданні інформаційних фрагментів у вигляді вузлів і зв'язків для формалізації відношень між ними.

Шарові *моделі гіпермедіа* являють собою еталонні моделі для розробки систем управління гіпертекстом. Шари в такій моделі відповідають різним вимірам моделювання, а саме: моделі структури і моделі подання даних. Модель Dexter – одна з найвідоміших в даному класі. Ця модель пропонує еталонну архітектуру шляхом запровадження загального словника для порівняння різних гіпертекстових систем та моделей. Як показано на рис. 4.3, в основі моделі є три шари:

–шар зберігання даних (*storage layer*) – основний шар в моделі Dexter. Подає структуру вузол – зв'язок гіпертекстової мережі як “базу даних” компонентів, пов'язаних між собою посиланнями;

–шар часу виконання (*runtime layer*) – належить до динамічних компонентів, а саме: містить засоби перегляду, доступу та модифікації структури мережі;

–внутрішньоконпонентний шар (*within component layer*) – належить до внутрішньої структури та вмісту кожного компонента.



зображення 4.3 – Шарова архітектура за моделлю Dexter

Інтерфейс між шаром часу виконання та шаром зберігання даних називається специфікацією подання (*presentation specification*). Інтерфейс між шаром зберігання даних та внутрішньокomпонентним шаром називається специфікацією прив'язки (*anchoring specification*), пов'язаний з ідентифікацією початкових і кінцевих розташувань посилань у змістовній частині вузлів. Інші моделі, розроблені в цьому напрямку, здебільшого розширюють модель Dexter.

У *форматованій моделі* IT інформаційно-довідкова стаття (ІДС) відповідає інформаційному об'єкту, зміст якого характеризується смисловою єдністю та логічною цілісністю. Вона може містити інформацію, подану в різних формах: текст, таблиці, фрагменти програмного коду (макриси, скрипти), інтегровані інтерактивні об'єкти, посилання на подібні об'єкти, що підключаються до ІДС при її завантаженні.

На рис. 4.4 наведено загальний випадок, де як ІДС використовуються і тестові фрагменти і мультимедійні об'єкти.



Рисунок 4.4 – Графова модель гіпермедіа

Елементи ІДС (слова, комірки таблиць, піктограми, зображення, кнопки та ін.) можуть бути гіперпосиланнями.

Для ідентифікації ресурсів у мережі Інтернет використовується URL, що задає адреси відповідних ресурсів. Гіперпосилання, що вказують на фрагменти поточного ресурсу, є локальними, ті, що вказують на зовнішні джерела, мають назву глобальних.

4.3.3 Критерії оцінювання гіпертекстових структур

Розглянемо критерії оцінювання гіпертекстових структур на прикладі системи, граф якої зображено на рис. 4.5.

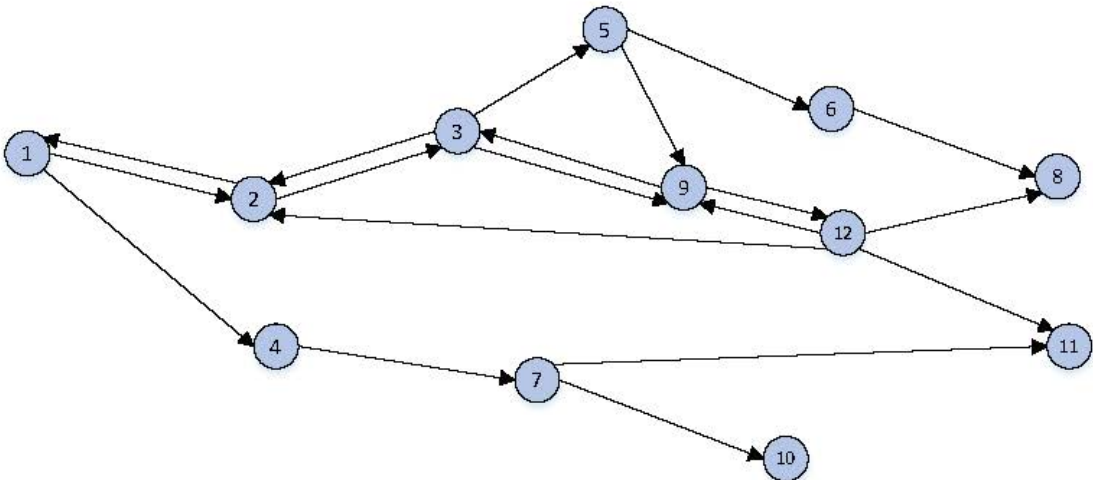


Рисунок 4.5 – Приклад орієнтованого графу

Індекс інформаційної компактності відображає ступінь перетину гіпертекстової структури зв'язками.

Високий рівень компактності характеризує такі гіпертекстові структури, в яких на будь-який з інформаційних блоків можна з легкістю потрапити з будь-

якого іншого блока (що, зазвичай, забезпечується численними перехресними зв'язками). Слід зазначити, що надмірно висока компактність може призвести до повної дезорієнтації користувача гіпертекстової системи. В свою чергу, низька інформаційна компактність сприяє випаданню з поля зору багатьох фрагментів гіпертексту чи призводить до втрати досяжності окремих фрагментів.

Індекс інформаційної компактності, визначається так:

$$Cp = \frac{CD_{\max} - CD}{CD_{\max} - CD_{\min}} \quad (4.17)$$

де CD_{\max} – максимально можливе число кроків, які необхідно зробити за посиланнями, що зв'язують усі вузли гіпертексту;

CD_{\min} – мінімальне можливе число кроків, які зв'язують усі вузли гіпертексту (в тому випадку, коли всі вузли гіпертексту зв'язані зі всіма);

CD – показник шляхів в графі.

Значення індексу інформаційної компактності варіюється в межах $[0; 1]$ і допускає порівняння систем гіпертекстових документів між собою.

Частка відсутніх шляхів Q_m у графі. Максимальна кількість відсутніх шляхів дорівнює $n^2 - n$, мінімальна – 0. Абсолютне значення критерію є незручним. Більш інформативним критерієм є нормована частка відсутніх шляхів

$$K_m = \frac{Q_m}{n^2 - n} \quad (4.18)$$

Значення частки відсутніх шляхів варіюється в межах $[0; 1]$ і допускає порівняння систем гіпертекстових документів між собою. Для розрахунку коефіцієнта відсутніх шляхів у графі необхідним є попереднє визначення матриці відстаней.

Цикломатичне число характеризує відмінність структури графу від деревоподібної і визначається за формулою

$$Cn = m(G) - n(G) + p, \quad (4.19)$$

де $m(G)$ – число ребер, $n(G)$ – число вершин, p – число зв'язних компонент графу.

Цикломатичне число показує найменшу кількість ребер графу, які необхідно видалити, щоб він перетворився у дерево. Для сильнозв'язного графу $p=1$. Кістяковим деревом зв'язного графу G є будь-який його підграф, що містить усі вершини графу G і є деревом. Якщо G – зв'язний граф, що містить $n(G)$ вершин і $m(G)$ ребер, то кістякове дерево графу G (якщо воно існує) повинно містити $n(G) - p$ ребер.

Таким чином, будь-яке кістякове дерево графу G є результатом видален-

ня з графу $m(G) - (n(G) - p) = m(G) - n(G) + p$ ребер.

Визначення цикломатичного числа дозволяє знайти число незалежних маршрутів в гіпертекстовій структурі.

Індекс стратифікації введений для характеристики лінійності гіпертексту. Фактично індекс стратифікації дозволяє оцінити рівень зв'язності елементів, що стоять на різних рівнях ієрархії.

Обчислення відносного індексу стратифікації базується на операціях з матрицею відстаней орграфу, для побудови якої введемо такі позначення:

- нехай $G(V, E)$ – орграф;
- $d(u, v)$ – відстань між вершинами u та v в орграфі G ;
- a_i – сума відстаней від u_i до всіх v . Таким чином, a_i – сума значень i -го рядка матриці відстаней D ;
- b_j – сума відстаней від v_j до всіх u в D . Таким чином, b_j – сума кінцевих значень j -го стовпця матриці відстаней D ;
- загальна відстань $(\sum_i \sum_j d_{ij}, d_{ij} \neq \infty)$ в орієнтованому графі G – сума кінцевих відстаней $d(v_i, v_j)$. Тобто, $(\sum_i \sum_j d_{ij}, d_{ij} \neq \infty)$ – сума всіх кінцевих елементів матриці відстаней.

Для оцінки гіпертексту використовують абсолютну стратифікацію

$$AP = \sum_i |s_i|.$$

4.4 Інформаційні потоки

Інформаційним потоком від вузла S_i до вузла S_j інформаційної системи будемо називати функцію $i_{ij}(t)$, що задовольняє умови:

$$\int_t^{t+\tau} i_{ij}(t) dt = I_{ij}(\tau) \quad 0 \leq i_{ij}(t) \leq v_{ij}, \quad (4.20)$$

де τ – час транзакції передачі інформації від вузла S_i до вузла S_j ; $I_{ij}(\tau)$ – кількість переданої інформації за час транзакції.

Якщо інформація передається в дискретному вигляді неподільними блоками (розмір блока визначається протоколом передачі: біт, байт, слово, пакет, повідомлення), то інформаційний потік обчислюється в середньому за період *транзакції*

$$i(t) = \frac{I_0(t, P)}{\Delta t}. \quad (4.21)$$

Якщо інформація передається в аналоговому вигляді, то інформаційний потік

$$i(t) = \frac{dI(t, P)}{dt}, \quad (4.22)$$

де I – кількість інформації; t – час її одержання; P – ймовірність працездатності системи.

Для моделювання інформаційних потоків у *документографічних системах* використовуються методи функціонально–операційного аналізу, аналізу норм вироблення рішення, модуль–метод, семіотичний аналіз, метод схем інформаційних зв'язків, матричний метод і ряд інших. Найбільше поширення одержала матрична модель.

Матрична модель будується у вигляді таблиці, що відбиває види документів, якими обмінюються підсистеми, перелік показників вхідних документів, що беруть участь у формуванні показників вихідних документів, частоту формування кожного документа, трудомісткість формування і значимість кожного показника та ряд інших допоміжних даних. Матрична модель перетворюється в орієнтований граф, у вершинах якого розташовані абоненти (процеси) інформаційної системи, а дуги відповідають переданим документам.

Аналіз інформаційних потоків зводиться до аналізу інтенсивності взаємодії виконуваних інформаційних процесів і сегментів інформації (документів). При цьому будують матрицю

$$Q_k^i = \begin{cases} 1, \text{при } B = \text{істина} \\ 0, \text{при } B = \text{хибність}, \end{cases} \quad (4.23)$$

де $B = \text{істина}$, якщо k -й сегмент використовується для реалізації i -го процесу.

На підставі матриці (4.20) будується матриця інтенсивностей використання інформаційних потоків

$$q_{ki} = n_k \cdot Q_k^i, \quad (4.24)$$

де n_k – частота використання сегмента.

В результаті побудови таких матриць і їх зіставлення з аналогічними матрицями вихідних інформаційних потоків мінімізують надлишковість інформаційних потоків.

Інформаційна модель *систем зв'язку* вперше була розроблена К. Шенноном і заклала основу теорії передавання інформації. Згодом теорія інформації була розвинута з метою поширення поняття інформації на інші галузі техніки. Відповідно до цієї теорії інформація передається у вигляді повідомлень від джерела до приймача каналом зв'язку за допомогою *інформативних сигналів*.

Фундаментальні співвідношення для оцінювання інформаційних характеристик *каналів зв'язку* послужили основою для створення інформаційних моделей інших видів інформаційних систем.

У теорії зв'язку розглядаються інформаційні аспекти передавання повідомлень дискретними каналами без завад і з завадами.

У каналі з *завадами* після прийому повідомлення залишається апостеріорна невизначеність стану $H_{X/Y}$ джерела інформації. Тому

$$I_{X,Y} = H_X - H_{X/Y} = -\sum_{i=1}^n p(z_i) \log_a p(z_i) + P_0 \log_a P_0 + (1 - P_0) \log_a (1 - P_0), \quad (4.25)$$

де P_0 – ймовірність правильного прийому повідомлення; n – число можливих станів X джерела повідомлень; $p(z_i)$ – ймовірність стану x_i ; a – основа логарифму. При $a=2$ ентропія й інформація вимірюються в бітах.

Інформаційний потік у дискретному каналі зв'язку

$$i = F_0 \cdot I_{X,Y}, \quad (4.26)$$

де F_0 – гранична частота передавання елементарних повідомлень $I_{X,Y}$, яка залежна від фізичних характеристик каналу.

Канал зв'язку характеризується *пропускною спроможністю*:

$$C = F_0 \cdot \max[I_{X,Y}]. \quad (4.27)$$

Ймовірність правильного прийому P_0 залежить від характеристик завад у

каналі зв'язку і способу кодування інформації. Існує безліч моделей каналів: гаусівські канали, канали з групуванням завад, канали із завмираннями тощо, що відрізняються статистичними характеристиками завад. Для кожного виду каналів використовуються методи кодування, що забезпечують максимум P_0 .

Пропускна спроможність гаусівського каналу з завадами у вигляді білого шуму відповідає *теоремі К. Шеннона*

$$C = F_0 \cdot \log(1 + P_C / P_{\Pi}), \quad (4.28)$$

де P_C – потужність інформативного сигналу; P_{Π} – потужність завад.

У моделях систем телекомунікацій інформаційні потоки задають на графі, вузли якого зіставляються з вузлами системи, а дуги – з каналами зв'язку. При цьому припускають виконання співвідношень:

1) вимога до пропускної спроможності каналу між вузлами k і l

$$i_{kl} \leq C_{kl}; \quad (4.29)$$

2) вимога адитивності і передачі, що не спотворює інформацію

$$\sum_{i=1}^n i_{lk} = \sum_{r=n+1}^{n+m} i_{kr}, \quad (4.30)$$

де n – число потоків i_{lk} , що входять у вузол k ; m – число потоків i_{kr} , що виходять з вузла k .

Наведені вимоги передбачають вимірювання інформаційних потоків у структурних одиницях – словах, повідомленнях або пакетах повідомлень рівної довжини, а також відсутність обробки інформації у вузлах системи. При використанні статистичної міри інформації вимога адитивності виконується тільки для незалежних повідомлень, що в реальних умовах експлуатації систем виконується не завжди.

Основні задачі, які розв'язуються в теорії телекомунікаційних систем, – це задачі *телетрафіку*. У цих задачах оцінюється інформаційне навантаження системи. Основи теорії телетрафіку закладені А. К. Ерлангом. Відповідно до цієї теорії телекомунікаційна система розглядається як система масового обслуговування. В результаті розв'язання задач телетрафіку визначають оптимальні пропускні спроможності каналів зв'язку, мінімальні маршрути при передаванні повідомлень між несуміжними вузлами, оцінюються характеристики ефективності обслуговування заявок (час проходження повідомлення в системі, ймовірність втрати повідомлення тощо).

Останнім часом питання інформаційних потоків глибоко розглядаються в рамках проектування і аналізу *протоколів передавання даних*.

Вимірвальні канали різноманітних автоматичних і автоматизованих систем призначені для одержання вимірвальної інформації. Поняття *вимірвальної інформації* було введено К.Б. Карандєєвим. Згодом зусиллями багатьох учених були створені основи інформаційно–енергетичної теорії вимірювань.

В інформаційно–енергетичній теорії вимірювань інформація розуміється в класичному статистичному розумінні як міра зменшення невизначеності апріорних знань про значення вимірюваної величини при одержанні результату вимірювання. В енергетичному аспекті розглядаються витрати енергії на одержання вимірювальної інформації.

Продуктивність джерела вимірювальної інформації (інформаційний потік)

$$i_{X,Y} = \frac{dI_{X,Y}(t)}{dt}. \quad (4.31)$$

Інформаційні моделі *обчислювальних мереж* залежать від архітектурних особливостей їх побудови і протоколів передавання й обробки інформації. Архітектура обчислювальних систем і мереж зазнала значних зміни за період розвитку обчислювальної техніки. Найбільше поширення одержали локальні мережі зі спільним каналом, або моноканалом, через який абоненти мережі з'єднуються один з одним за принципом “кожен з кожним”. Абоненти обмінюються даними, розділеними на кадри. Формат кадру передбачає ряд полів. Усі поля містять кількість інформації, кратну 1 байтові. Байт – це найрозповсюдженіша в обчислювальній техніці одиниця кількості інформації в адитивній *структурній мірі* Хартлі. Відповідно до структурної теорії інформації основну роль у її вимірюванні відіграє запис інформації за допомогою комбінацій кодових символів – кодування. Найважливіші характеристики кодування – алфавіт, глибина і довжина коду. В обчислювальній техніці використовуються коди з глибиною 2 і алфавітом (0,1), або двійкові коди. Довжина коду визначається конструктивними особливостями елементної бази ЕОМ. Наразі при обміні даними між ЕОМ використовуються 8–розрядні коди. Це визначено стандартами на інтерфейси і протоколи обміну даними з метою забезпечення сумісності потоків даних з технічними засобами ЕОМ будь–яких типів. За допомогою 1 кодової комбінації з 8 розрядів можна закодувати $N=2^8$ даних. Відповідно кількість інформації в одній кодовій комбінації в структурній мірі

$$Q = \log_2 N = 8 \text{ бітів} = 1 \text{ байт.}$$

Структурна міра Q збігається зі *статистичною I* за умови рівної ймовірності кодових комбінацій і відсутності надлишковості інформації.

Поняття інформаційного потоку в обчислювальних системах використовується, в основному при розробці й аналізі алгоритмів обслуговування зовнішніх пристроїв комунікаційними каналами процесора. При цьому використовуються різні моделі обслуговування, однак змістовні аспекти інформації враховуються лише з погляду наявності у потоків даних пріоритетів на обслуговування.

Інформаційні моделі *систем керування і прийняття рішень* одержали поширення відносно недавно. Проблема оцінювання кількості інформації, створеної автоматичною системою в результаті обробки емпіричних даних, набула особливої актуальності з розвитком автоматизованих систем керування. Існуючі

структурні і статистичні оцінки не дозволяють врахувати інтелектуальні витрати на розв'язання задачі керування і значимість одержуваного результату. У зв'язку з цим А. М. Колмогоровим запропоновано вимірювати кількість інформації, що отримується в результаті обробки даних, складністю алгоритму отримання результату. За А. М. Колмогоровим *алгоритмічна інформація* визначається як різниця *алгоритмічних ентропій*

$$A(v:x) = K(x) - K(x/y), \quad (4.32)$$

а алгоритмічна ентропія визначається складністю відтворення об'єкта x :

$$\begin{aligned} K(x) &= \min_l l(p_1), \quad G(p_1) = x; \\ K(x/y) &= \min_l l(p_2), \quad G(p_2, y) = x, \end{aligned} \quad (4.33)$$

де p_1 – алгоритм одержання результату при відсутності вихідних даних; p_2 – алгоритм одержання результату обробки інформації при вихідних даних y ; l – довжина алгоритму; G – деяка обчислювана функція.

Чисельне значення кількості інформації залежить від вибору функції G . Фактично G є сукупністю засобів операційної системи ЕОМ, що виконує алгоритм p . У теоретичних роботах для досягнення єдності одержуваних результатів використовуються кілька мір складності алгоритмів, що виражаються довжиною нормального алгоритму в заданому алфавіті, числом станів машини Тьюрінга й інші. Відомо, що між різними мірами складності існує функціональна залежність.

Модель А. М. Колмогорова зручна при дослідженні одиничних інформаційних процесів обробки даних, але погано узгоджується з моделями масових процесів сприйняття і передавання інформації.

Ключові слова

Інформаційна модель, інформація, параметрична інформація, топологічна інформація, абстрактна інформація, інформаційна система, інформаційний критерій ефективності, міра кількості інформації, структурна теорія інформації, статистична теорія інформації, семантична теорія інформації, кількість інформації, апіорна ентропія, апостеріорна ентропія, середня кількість інформації, продуктивність джерела інформації, інформаційна пропускна спроможність каналу, надлишковість джерела інформації, ентропійна похибка, ентропія помилки контролю, сигнал, інформативні параметри, модуляція, модуляція імпульсних сигналів, амплітудна модуляція, частотна модуляція, фазова модуляція, теорія сигналів, демодуляція, спектральне подання сигналів, теорема Котельникова, теорема Железнова, теорема Шеннона, передавання інформації, прийняття рішень, база даних, система управління базою даних, база знань, факти, правила, модель даних, реляційна модель даних, атрибут, кортеж, відношення, ключ, мережна модель даних, запис, поле, ієрархічна модель даних, дерево, інформаційний потік, транзакція, документографічна система, вимірювальний канал, вимірювальна інформація, інформаційно–енергетична теорія, продуктивність джерела вимірювальної інформації, система зв'язку, інформативний сигнал, канал зв'язку, канал з завадами, система телекомунікацій, слово, повідомлення, пакет повідомлень, телетрафік, протокол передавання даних, обчислювальна мережа, міра інформації, алгоритмічна інформація, алгоритмічна ентропія.

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. Яка інформаційна міра застосовується у комп'ютерних системах?
2. Якщо файл містить 1000 байтів у статистичній мірі, то скільки інформації буде містити його копія на диску?
3. Розрахуйте ентропійні коефіцієнти нормального і трикутного диференціальних законів розподілу ймовірностей?
4. Наведіть приклади систем, які доцільно характеризувати ймовірністю помилки.
5. Порівняйте ширину спектрів сигналів з амплітудною, частотною і фазовою модуляцією.
6. Відомо, що завадостійкість частотно модульованого сигналу більша за завадостійкість амплітудно модульованого. Поясніть це на основі теореми Шеннона.
7. Згідно з теоремою Котельникова, телефонним каналом, який працює у тональному частотному діапазоні (300–3000 Гц) можна передавати інформацію з максимальною швидкістю $2 \cdot 3000 = 6000$ [біт/с]. Чи не протирічить існування модемів зі швидкістю передавання 9600–52000 біт/с теоремі Котельникова?
8. Наведіть приклади поширених СУБД. Яка модель даних у них використовується?
9. Охарактеризуйте нормальні форми реляційної бази даних. Для чого за-

стосовується нормалізація?

10. У багатьох випадках природною моделлю даних є ієрархічна, а найпростішою – реляційна. Як за допомогою реляційної СУБД змодельовати ієрархічну структуру?

11. Порівняйте означення інформаційного потоку на основі трьох мір кількості інформації. Яке з цих означень дає найбільше чисельне значення потоку, а яке найменше?

12. Процес створення тексту можна зобразити ймовірнісним графом, в якому кожна вершина відповідає певному складу української мови, а вага ребра відповідає ймовірності наступного складу. Як на основі такого графу визначити інформаційний потік при читанні тексту?

13. Комп'ютерні архіватори файлів працюють на принципі усунення надлишковості інформації. Як змінюється інформаційний потік при передаванні заархівованої інформації при її вимірюванні в статистичних і структурних одиницях?

Література

1. Дубовой В. М. Моделювання систем контролю та керування : навч. посіб. / Дубовой В. М. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 175 с.
2. Анализ измерительных информационных систем. / [Маликов В. Т. Дубовой В. М., Кветный Р. Н., Исмагуллаев П. Р.] – Ташкент : ФАН, 1984. – 176 с.
3. Бесслер Р. Проектирование сетей связи / Бесслер Р., Дойч А. – М. : Радио и связь, 1988. – 267 с.
4. Блэк Ю. Сети ЭВМ: протоколы, стандарты, интерфейсы / Блэк Ю. – М. : Мир, 1990. – 506 с.
5. Бриллюэн Л. Наука и теория информации / Бриллюэн Л. – М.Т : Физматгиз, 1960. – 392 с.
6. Дубовой В. М. Основи застосування ЕОМ в інженерній діяльності / Дубовой В. М., Кветний Р. Н. – К. : ІСД МО України, 1994. – 285 с.
7. Кавалеров Г. И. Введение в информационную теорию измерений / Кавалеров Г. И., Мандельштам С. М. – М. : Энергия, 1974. – 376 с.
8. Колмогоров А. Н. К логическим основам теории информации / Колмогоров А. Н. // Проблемы передачи информации 1969. – Т. 5. – №3. – С. 3–7.
9. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» / Колмогоров А. Н. // Проблемы передачи информации, 1965. Т–1. – №1. – С. 1–7.
10. Костюк В. И. Проектирование информационных моделей в гибких системах / В. И. Костюк, А. И. Дешко, Б. В. Игнатенко – К. : Вища школа, 1987. – 176 с.
11. Кузьмин И. В. Основы теории информации и кодирования / Кузьмин И. В., Кедрус В. А. – К. : Вища шк., 1986. – 238 с.
12. Мартин Н. Математическая теория энтропии / Мартин Н., Ингленд Дж.

– М. : Мир, 1988. – 350 с.

13. Марков А. С. Базы данных. Введение в теорию и методологию : учебник / Марков А. С., Лисовский К. Ю. – М. : Финансы и статистика. – 2006. – 512 с.

14. Карпова Т. С. Базы данных: модели, разработка, реализация / Т. С. Карпова. – СПб. : Питер, 2001. – 304 с.

15. Лившиц Б. С. Теория телетрафика / Лившиц Б. С., Пшеничников А, П., Харкевич А. Д. – М. : Связь, 1979. – 224 с.

16. Новицкий П. В. Основы информационной теории измерительных устройств / Новицкий П. В. – Л. : Энергия, 1968. – 248 с.

17. Рабинович В. И. Информационные характеристики средств измерения и контроля / Рабинович В. И., Цапенко М. П. – М. : Энергия, 1968. – 96 с.

18. Стратонович Р. Л. Теория информации / Стратонович Р. Л. – М. : Сов.радио, 1975. – 424 с.

19. Темников Ф. Е. Теоретические основы информационной техники : учеб. пособие для вузов / Ф. Е. Темников, В. А. Афонин, В. И. Дмитриев. – М. : Энергия, 1979. – 512 с.

20. Трауб Дж. Информация, неопределенность, сложность / Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьянниковский Х. – М. : Мир, 1988. – 183 с.

21. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи / Фано Р. – М. : Мир, 1965. – 438 с.

22. Хартли Р. В. Л. Передача информации. / Р. В. Л. Хартли // Теория информации и ее приложения. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 5–35.

23. Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике / Шеннон К. Э. – М. : Иностран. лит., 1963. – 829 с.

24. Эшби У. Р. Введение в кибернетику / Эшби У. Р. – М. : Изд. иностран. лит, 1959. – 432 с.

25. Кунченко–Харченко В. І. Документалістика. Кунченко–Харченко В. І. – Черкаси : ЧДТУ, 2006. – 147 с:

26. Комова М. В. Документознавство : навчальний посібник // Національний університет «Львівська політехніка», Інститут гуманітарних і соціальних наук. Львів–Київ : «Тріада плюс», «Алерта», 2007. – 296 с.

27. Лидовский В. В. Теория информации : учебное пособие Лидовский В. В. – М. : Компания Спутник+, 2004 [ISBN 5–93406–661–7](#)

28. Якимов А. В. Теплофизика механической обработки : учебник / Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. – К. : “Наукова думка” 1991. – 270 с.

29. Григоров М. А. Проблемы моделирования и управления движением транспортных потоков в крупных городах : монографія / Григоров М. А., Дашченко А. Ф. – Одесса : Астропринт, 2004. – 272 с.

30. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельева, І. І. Становська – Одеса: Пальміра, 2011. – 500 с.

ЧАСТИНА 2. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ МОДЕЛЮВАННЯ

У попередніх розділах було розглянуто основні види моделей та особливості їх подання при комп'ютерному моделюванні. Різноманітність моделей висуває проблему вибору виду та побудови такої моделі, яка є адекватною конкретному об'єкту та системі і зручною з огляду на задачу, для розв'язання якої вона будується. Процес вибору та побудови моделі об'єкта називають його ідентифікацією.

5 ПОНЯТТЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

На початку процесу побудови моделі необхідно відповісти на декілька питань, які визначають подальший процес моделювання:

1. Що є об'єктом моделювання?
2. Для чого буде використовуватись модель?
3. Які властивості об'єкта повинна відображати модель?
4. За допомогою яких засобів буде здійснюватися отримання результатів моделювання?
5. Які вимоги висуваються до основних характеристик моделі?

Побудова моделі складається з двох етапів: визначення узагальненої моделі всіх об'єктів заданого класу та визначення її характеристик для конкретного об'єкта на основі різноманітної інформації. Останній етап є *ідентифікацією*, тобто встановленням взаємно однозначної відповідності між об'єктом і його моделлю.

Задача ідентифікації формулюється таким чином: за результатами спостережень за вхідними впливами і вихідними величинами об'єкта побудувати оптимальну, в деякому сенсі, її модель.

Іншими словами, якщо об'єкт описується деяким оператором F_t , апіорі невідомим, то, маючи виміряні значення характеристик входу і виходу Θ_Y, Θ_X , необхідно побудувати оцінку F_t оператора об'єкта, оптимальну в сенсі деякого критерію. Отже, задачі ідентифікації і використання моделі є взаємно оберненими:

– задача використання моделі – визначити характеристики реакції об'єкта залежно від характеристик вхідних впливів

$$\Theta_Y = F[\Theta_X]$$

– задача ідентифікації – визначити вид та характеристики оператора перетворення на основі відомих Θ_Y, Θ_X

$$F = A(\Theta_X, \Theta_Y),$$

де A – алгоритм ідентифікації.

Може виникнути питання – навіщо здійснювати дві обернених операції, якщо X і Y відомі? Але при ідентифікації відома реакція Y лише на деякі впливи X , а отримана в результаті модель дає можливість визначити реакцію Y майже на будь-які впливи X (якщо модель адекватна!). Прикладом є побудова лінійної статичної характеристики. Для цього достатньо мати дві пари (x_1, y_1) , (x_2, y_2) і побудувати пряму за двома точками. Отримана характеристика дасть можливість визначити y для будь-якого $x \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Ідентифікація починається з вибору класу моделі і поступового його звуження на основі експериментальних даних, доки цей клас не буде містити одну модель, яка і буде шуканою моделлю конкретного об'єкта.

Існують два підходи до задачі визначення класу моделі. Перший підхід – аналітичний, складається з аналізу принципів, на яких основана робота досліджуваного об'єкта. В цьому випадку характеристики моделі отримують розрахунком. Другий підхід полягає в проведенні над досліджуваними об'єктами ряду експериментів з наступною математичною обробкою отриманої інформації. Обидва ці підходи не усувають, а взаємно доповнюють один одного. Тільки застосовуючи їх одночасно, вдається отримати прості, але достатньо адекватні математичні моделі.

5.1 Задачі ідентифікації

Успіх ідентифікації об'єкта суттєво залежить від співвідношення двох факторів: об'єму апріорної інформації про структуру об'єкта та об'єму вимірюваної інформації. Ці два види інформації необхідні при синтезі моделі, однак вони відіграють різні ролі. Апріорні відомості допомагають визначити структуру моделі, тобто її вигляд (число входів та виходів, характер зв'язку між ними тощо). Таку процедуру називають ідентифікацію в широкому розумінні, чи *структурною ідентифікацією*. Особливо важливе визначення структури для багатовимірних і багатозв'язних об'єктів. У той же час для локальних об'єктів визначення структури може бути зведене до визначення порядку диференціального рівняння, що описує об'єкт. Крім того, оцінюються входні сигнали і збурення, що діють на об'єкт (їхні принципіві властивості – регулярність або стохастичність, точки прикладення тощо).

Задачу визначення параметрів моделі на основі спостережень роботи об'єкта при заданій структурі моделі називають ідентифікацією у вузькому розумінні чи *параметричною ідентифікацією*. Наприклад, є деякий об'єкт і відома

5 Поняття ідентифікації

система рівнянь, яка описує його. Необхідно визначити тільки коефіцієнти рівнянь.

Зв'язок між параметричною і структурною ідентифікаціями для деяких типів моделей показаний у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Характеристики, що підлягають ідентифікації

Тип моделі	Вид моделі	Структурні характеристики	Параметричні характеристики
Функціональні моделі	Модель статички	Вид залежності, кількість аргументів, степінь полінома, область визначення, база знань	Коефіцієнти функціональної залежності, ваги правил, функції належності
	Модель логіки	Логічне рівняння	-
	Модель динаміки (передатна функція)	Степінь чисельника і знаменника	Коефіцієнти при степенях p
	Модель обслуговування	Тип СМО, кількість каналів і фаз, наявність черг	Параметри потоків і обслуговування
	Алгоритмічна модель	Вид алгоритму, структури і типи вхідних і вихідних даних	Значення даних і параметрів алгоритму
Структурні моделі	Зважений граф	Кількість вершин і ребер, матриця суміжності	Ваги ребер
Інформаційні моделі	База даних	Перелік відношень, атрибутів, ключів	Кількість даних, Значення даних
	Інформаційний потік	Структура даних (формат пакета і т. п.)	Кількість даних, швидкість передавання, величина потоку тощо

З поширенням комп'ютеризованих систем і об'єктів все актуальнішою стає задача алгоритмічної ідентифікації. Вона полягає у знаходженні алгоритму функціонування об'єкта на основі аналізу його поведінки. Задача алгоритмічної ідентифікації близька до задачі структурної ідентифікації, оскільки, відповідно до

теорії алгоритмів, будь-який алгоритм може бути реалізований у вигляді дискретного автомата.

5.1.1 Структурна ідентифікація

Задача структурної ідентифікації є значно складнішою за задачу параметричної ідентифікації. Передусім це зумовлено математичною некоректністю (тобто неоднозначністю розв'язку) цієї задачі у більшості випадків. Тому при розв'язанні задачі структурної ідентифікації крім об'єктивної експериментальної інформації користуються також суб'єктивними загальнонауковими принципами:

- принцип мінімалізму, відповідно до якого з усіх можливих варіантів структури моделі, які відповідають експериментальним даним, обирають найпростішу (цей принцип ще називають «лезо Оккама»: *«Не слід залучати нові сутності без крайньої на те необхідності»*);

- принцип адекватної складності, за яким складність моделі системи повинна відповідати складності самої системи;

- принцип симетрії і математичної краси, за яким перевагу віддають моделям, що мають властивості симетрії, формулам, що добре запам'ятовуються, тощо;

- принцип подібності, за яким структуру моделі обирають за аналогією з моделями інших подібних об'єктів.

На першому етапі звичайно з'ясовують, до якого класу належить модель – до класу структурних, функціональних або інформаційних моделей.

На другому етапі уточнюють клас моделі відповідно до видів моделей, розглянутих у підрозділах 2, 3 і 4 цього посібника. Зокрема, для структурних моделей визначають вигляд графу: зважений чи незважений, орієнтований чи неорієнтований тощо. Якщо об'єкти моделювання з однаковою структурою можуть мати різні властивості, то як структурну модель доцільно використовувати зважений граф, якщо однакові – то незважений. Якщо об'єкт моделювання є таким, що може працювати як у прямому, так і у оберненому режимах (впливи подаються на виходи, а стани змінюються на входах), то структурну модель доцільно подавати неорієнтованим графом.

Для функціональних моделей обирають, чи належатиме вона до класу моделей статички, динаміки, обслуговування або алгоритмічних моделей. Очевидно, якщо після зміни вхідних впливів стан системи ще деякий час продовжує змінюватись, то обирають модель динаміки, якщо ні – модель статички. Якщо для запуску певних процесів у системі важливий лише факт появи впливу на її вході і не важлива величина цього впливу, то обирають модель обслуговування. Якщо система працює дискретно, вхідні дані і результати мають складну структуру і зв'язок між ними охоплює складні логічні умови, то обирають алгоритмічну модель.

Для інформаційних моделей на другому етапі структурної ідентифікації на основі аналізу логічних зв'язків між даними обирають тип моделі – реляційна, ієрархічна чи мережна.

В процесі подальшої структурної ідентифікації складних систем може бути здійснена декомпозиція моделі (наприклад, на статичну і динамічну частини, або на лінійну динамічну і цифрову частини), а окремі її частини подані моделями інших типів.

5.1.2 Параметрична ідентифікація

Під параметричною ідентифікацією моделі мається на увазі процес визначення її параметрів $C = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ у процесі нормальної експлуатації об'єкта чи спеціальних експериментів з ним.

Параметрична ідентифікація структурної моделі полягає у визначенні ваг ребер графу. У більшості випадків значення ваг ребер графу є незалежними і для їх отримання необхідно робити вимірювання та/або розрахунки для кожного ребра окремо. Сутність цих вимірювань і розрахунків залежить від змісту, який вкладається у поняття ваги ребра для конкретної моделі. Це може бути вимірювання часу руху від одного пункту (вершини графу) до іншого; відстань між пунктами (вершинами); струм, що тече між вузлами електричного кола, тощо.

Проте необхідно обов'язково перевіряти відповідність отриманих значень ваг ребер певним інтегральним умовам.

Якщо шлях між вершинами характеризується вагою, яка функціонально пов'язана з вагами ребер, і вага шляху відома, то необхідно перевіряти виконання цієї залежності. Наприклад, якщо вагою ребра є відстань між пунктами, то повинна виконуватися умова

$$D_i = \sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}, \quad (5.1)$$

де d_{ij} – вага j -го ребра на i -му шляху; n_i – кількість ребер на i -му шляху; D_i – загальна довжина i -го шляху.

Для поточкових графів повинен виконуватися 1-й закон Кірхгофа для кожного вузла (вершини):

$$\sum_{j=1}^{m_i} v_{ij} = 0, \quad (5.2)$$

де v_{ij} – вага j -го ребра (потік) в i -му ребрі; m_i – кількість ребер, інцидентних i -му вузлу.

На жаль, через похибки вимірювань умови (5.1) і (5.2) майже ніколи не виконуються і виникає нев'язка

$$D_i = \sum_{j=1}^{n_i} d_{ij} + \Delta_i, \quad (5.3)$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} v_{ij} = \Delta_i. \quad (5.4)$$

Цю нев'язку слід розподілити по вагах ребер:

$$d_{ij}^* = d_{ij} + \delta_{ij}, \quad j = 1 \dots n_i, \quad (5.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \delta_{ij} = \Delta_i. \quad (5.6)$$

Аналогічно для поточкових графів:

$$v_{ij}^* = v_{ij} + \delta_{ij}, \quad j = 1 \dots n_i, \quad (5.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \delta_{ij} = \Delta_i. \quad (5.8)$$

Задачі (5.5), (5.6) і (5.7), (5.8) мають багато розв'язків, проте у графі звичайно існує багато шляхів (для поточкових графів – вузлів), і для кожного повинні виконуватися ці співвідношення. Оскільки одне й те ж ребро може належати різним шляхам (бути інцидентним до різних вузлів) то для розподілу нев'язок необхідно розв'язувати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_k} \delta_{1j} = \Delta_1, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n_k} \delta_{kj} = \Delta_k, \end{cases} \quad (5.9)$$

де k – кількість шляхів у графі.

Аналогічно для поточкових графів.

У системі (5.9) кількість рівнянь дуже рідко дорівнює кількості невідомих δ_{ij} , оскільки кількість ребер майже ніколи не дорівнює кількості шляхів (вузлів). Тому для її розв'язання доцільно використовувати метод оцінювання (див. п.12.3), при якому ця задача зводиться до мінімізації критерію

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\delta_{ij})^2}. \quad (5.10)$$

Параметрична ідентифікація функціональної моделі полягає у визначенні параметрів функціональних залежностей. Структура моделі при цьому відома (визначена на стадії структурного синтезу – аналітичного чи експериментального): $Y = A(X, U, C)$, оператор A припускається заданим.

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вхідних параметрів об'єкта і його математичної моделі може бути розбитий на три підмножини

$$X^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_k),$$

$$X^{(2)} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+l}),$$

$$X^{(3)} = (x_{k+n+1}, x_{k+n+2}, \dots, x_{k+n+p}),$$

де $X = X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)}$ і $X^{(1)} \cap X^{(2)} = \emptyset$, $X^{(1)} \cap X^{(3)} = \emptyset$,
 $X^{(2)} \cap X^{(3)} = \emptyset$.

Підмножина $X^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ утворює сукупність нерегульованих, але вимірюваних параметрів об'єкта, ця підмножина є вхідним вектором об'єкта (рис. 5.1).

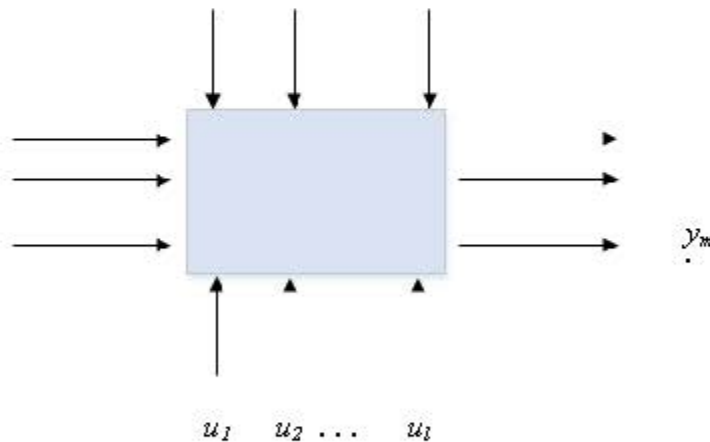


Рисунок 5.1 – Узагальнена модель об'єкта

Підмножина $X^{(2)} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+l})$ – сукупність параметрів, які не тільки вимірюються, але й можуть бути змінені певним чином. Позначимо ці параметри $u_1 = x_{k+1}, u_2 = x_{k+2}, \dots, u_l = x_{k+l}$, а вектор $U = (u_1, u_2, \dots, u_l)$ назовемо вектором керування.

На будь-який реальний об'єкт діє також група неконтрольованих і некерованих випадкових параметрів $X^{(3)} = (x_{k+l+1}, x_{k+l+2}, \dots, x_{k+l+p})$, поява яких зумовлена сукупністю випадкових змін в навколишньому середовищі (температура навколишнього середовища, неконтрольований знос апаратури тощо). Цю групу параметрів позначимо через $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$ і назвемо її вектором збурення.

В деяких випадках неможливо безпосередньо виміряти найбільш інформативні параметри об'єкта. Тоді необхідно вибрати такі вимірювані опосередковані параметри, які б давали можливість з необхідною точністю визначати стан об'єкта.

5.2 Ідентифікаційний експеримент

Для складних реальних об'єктів в більшості випадків повністю чи частково відсутня *априорна інформація* про структуру об'єкта, і її потрібно отримати за тими самими реалізаціями вхідних і вихідних змінних, за якими визначаються параметри моделі об'єкта.

Джерелом інформації про об'єкт в будь-якому випадку є дослід (експеримент). Розрізняють два види дослідів: пасивний і активний.

Пасивним називається той експеримент, який проводиться шляхом спостереження змін стану об'єкта під дією зовнішніх впливів в процесі його нормального функціонування.

Активний експеримент передбачає генерування діючих на об'єкт *тестових сигналів* потрібної форми, що скорочує тривалість експерименту і спрощує наступне визначення параметрів моделі. Ці сигнали поділяються на регулярні і випадкові.

Часто для отримання даних про процес використовують *активно-пасивний реєстраційний експеримент*. Він полягає в тому, що коливання вносять лише по деяких каналах; при цьому не ставиться задача строгої стабілізації інших параметрів. Наявність елементів активного експерименту дозволяє розширити діапазон зміни параметрів процесу, що забезпечує більшу достовірність отриманих даних.

Деякі моделі можуть бути отримані еволюційними методами. Такі методи використовуються при моделюванні складних систем, для яких відомі закони розвитку і початковий стан. Еволюційне моделювання близьке за змістом до прогнозування, але відрізняється дуже великою розмірністю задачі. Такий спосіб моделювання незамінний при синтезі і ідентифікації моделей замкнених екосистем, космічних об'єктів, розповсюдження епідемій тощо. Однією з найбільших проблем еволюційного моделювання є великий обсяг розрахунків. Для його реалізації використовуються найпотужніші комп'ютери, а у відповідальних випадках – суперкомп'ютери.

5.2.1 Пасивна ідентифікація функціональної моделі

Схема пасивного експерименту наведена на рис. 5.2, а.

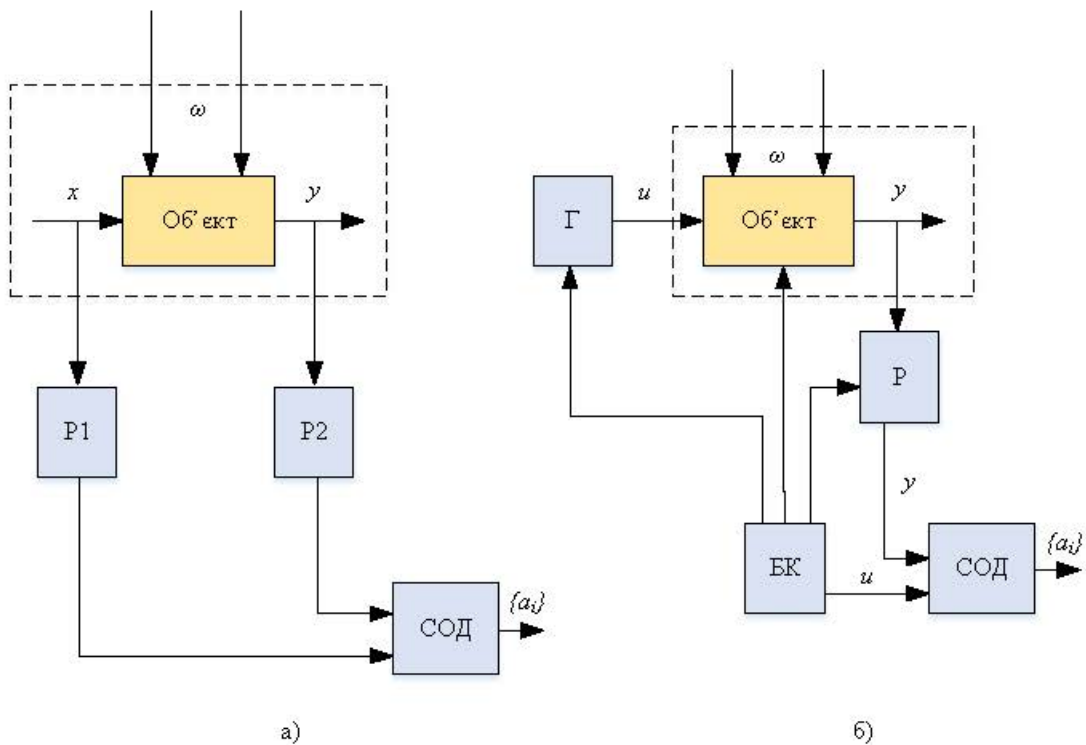


Рисунок 5.2 – Схеми експериментів: а) пасивний експеримент,
б) активний експеримент

Р – реєстратор, СОД – система обробки даних, Г – генератор тестових сигналів, БК – блок керування, $\{a_i\}$ – вектор шуканих параметрів

Перевагою пасивного методу ідентифікації є відсутність порушень природного режиму функціонування об'єкта, недоліком – неможливість створення *тестових сигналів* бажаного вигляду, більша тривалість експерименту і (іноді) збільшення обсягу обчислень при визначенні параметрів. Наприклад, якщо деякий об'єкт знаходиться під дією 5 незалежних випадкових впливів, кожен з яких розподілений за нормальним законом у діапазоні $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$, а вимірювання параметрів стану здійснюється раз на секунду з похибкою 1%, то для отримання статистично достовірної реакції (тобто розмір вибірки не менше 30) на рідку подію «усі вхідні впливи знаходяться на границі діапазону» необхідно проводити спостереження під час пасивного експерименту безперервно протягом

$$T_{ne} = 30 / \left[\int_{m+3\sigma-0,016\sigma}^{m+3\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \right]^5 \approx \frac{30}{\left[\frac{0,06}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3^2}{2}} \right]^5} =$$

=22565269073747728354 секунд ≈ 70 млрд років,

що у 5 разів більше за час існування Всесвіту!

Процес отримання моделі статички у суто математичному сенсі називають апроксимацією. Найпоширенішим методом параметричної ідентифікації є апроксимація за методом найменших квадратів, тобто визначення параметрів евристично заданої функції за критерієм мінімуму середнього квадратичного відхилення цієї функції від експериментальних точок. При дуже маленькій кількості точок (до 5) може також використовуватися інтерполяційний підхід до ідентифікації моделі статички.

Обробка результатів пасивного експерименту при великій кількості даних виконується статистичними методами. Для створення моделей статички при пасивному експерименті використовуються також методи кореляційного і регресійного аналізу, методи оцінювання параметрів моделі на основі критерію максимуму правдоподібності, мінімуму середнього ризику тощо. Ці методи є окремими випадками апроксимації за певних умов: нормальність розподілу ймовірностей експериментальних даних, близькість ідентифікованої залежності до лінійної тощо. Для визначення моделей динаміки об'єкта на основі пасивного експерименту найчастіше використовують зв'язок між спектральною щільністю потужності вхідних і вихідних сигналів і передатною функцією системи. Детальніше методи статистичної ідентифікації розглянуто у розділі 6.

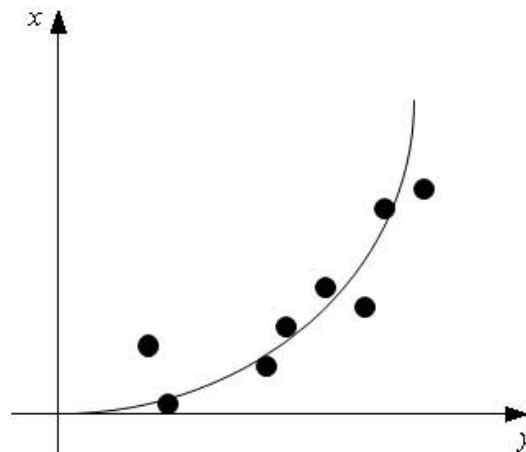
Інтерполяційна ідентифікація найчастіше виконується за допомогою формули Лагранжа

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] \quad (5.11)$$

де n – кількість експериментальних точок; (x_i, y_i) – значення аргументу і функції в i -тій експериментальній точці.

Очевидно, степінь полінома Лагранжа дорівнює $(n - 1)$. При збільшенні степеня швидко зростає обчислювальна похибка, тому використовувати інтерполяцію для кількості точок $n > 5$ і відповідно, степеня полінома більшого 4 недоцільно.

Приклад апроксимації при невеликій кількості даних (експериментальних точок) показаний на рис. 5.3.



д апроксимації результатів пасивного експерименту при отриманні моделі статики

З рисунка видно, що результати пасивного експерименту розташувалися на площині $y_o(x)$ таким чином, що нагадують параболічну залежність. Таким чином, аналітичний вираз моделі статики будемо шукати у вигляді $y_n = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Відповідно до методу найменших квадратів критерій пошуку оптимальних коефіцієнтів апроксимації $\{a_0, a_1, a_2\}$ запишеться у вигляді

$$\sigma = \sum_{i=1}^n [a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_o(x_i)]^2. \quad (5.12)$$

Після підстановки усіх експериментальних точок отримаємо залежність $\sigma(a_0, a_1, a_2)$. Далі розв'язується задача пошуку таких значень параметрів $\{a_0, a_1, a_2\}$, які забезпечать мінімум СКВ. Для цього можуть застосовуватися різні методи, зокрема аналітичний (на основі прирівнювання до нуля частинних похідних і розв'язування отриманої системи рівнянь), регулярні пошукові методи (наприклад, метод перебору або метод градієнта), методи випадкового пошуку (наприклад, метод Монте-Карло або генетичний алгоритм) та інші.

Детальніше про інтерполяційну та апроксимаційну обробку даних можна прочитати у розділі 7.

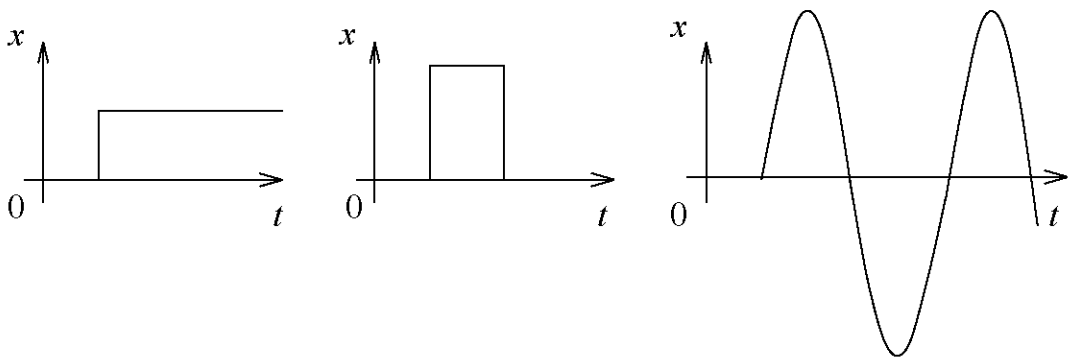
Часто як дані пасивного експерименту використовують записи в експлуатаційних журналах технологічного обладнання. Однак до такої інформації потрібно ставитися критично через можливі помилки в записі, допущені експлуатаційниками, а також похибки за рахунок неодноразової реєстрації даних вимірювань, особливо при великій кількості даних.

5.2.2 Активна ідентифікація функціональної моделі

Схема активного експерименту наведена на рис. 5.2, б.

Як зазначалося вище, активний експеримент передбачає *генерування* діючих на об'єкт *тестових сигналів* потрібної форми, моделювання їх перетворень об'єктом і обробку результатів перетворення. Тестові сигнали поділяються на регулярні і випадкові.

До *регулярних сигналів* відносять *aperiodичні* (ступінчаста функція рис. 5.4, а, прямокутний імпульс рис. 5.4, б та інші) та *періодичної дії* (рис. 5.4, в). Перші використовуються для знаходження коефіцієнтів диференціальних рівнянь, другі – для визначення амплітудно-фазових частотних характеристик об'єктів (рис. 5.4).



При використанні вхідного тестового сигналу у вигляді ступінчастої функції отримують вихідний сигнал, який відтворює перехідну характеристику об'єкта. Залежно від вигляду перехідної характеристики моделі задаються найчастіше одним з трьох видів передавальної 1 функції:

- у вигляді передавальної функції інерційної ланки першого порядку (рис. 5.5, а)

$$W_0(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{Tp + 1}, \quad (5.13)$$

де K, T, τ – коефіцієнт підсилення, постійна часу і запізнювання, що повинні бути визначені в околі номінального режиму роботи об'єкта.

- другого порядку з запізнюванням (рис. 5.5, б)

$$W_0(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}; \quad (5.14)$$

– для об'єкта моделювання без самовирівнювання (рис. 5.5, в) передавальна функція має вигляд

$$W_0(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{p}. \quad (5.15)$$

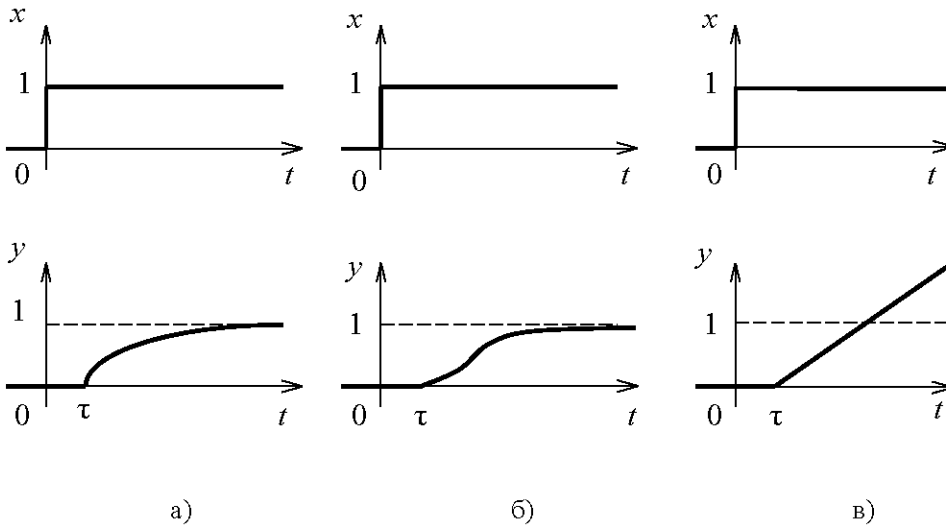
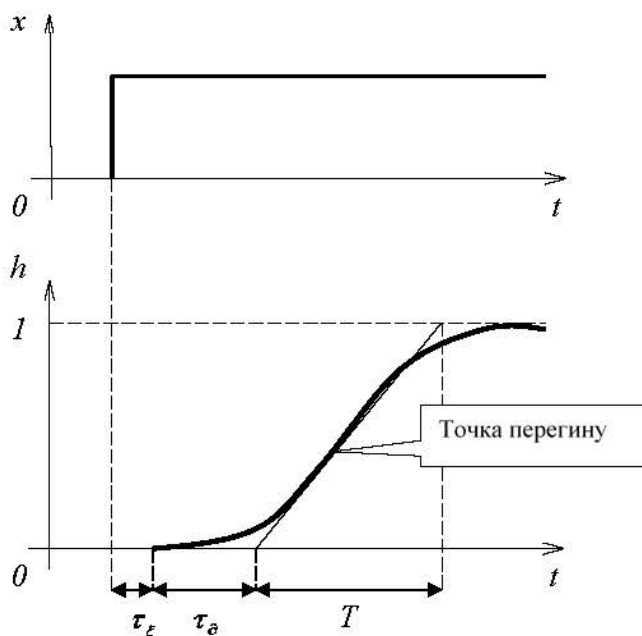


Рисунок 5.5 - Типові перехідні характеристики

Перед початком обробки передатну характеристику рекомендується про- нормувати (діапазон зміни нормованої кривої $[0, 1]$) і виділити з її початкової ділянки величину чистого часового запізнювання. Розглянемо для прикладу нормовану перехідну характеристику об'єкта, у якій заздалегідь визначений динамічний коефіцієнт підсилення K як відношення збільшення вихідного сигналу до збільшення вхідного в околі робочої точки, після чого перехідну характеристику про- нормовано (рис. 5.6).



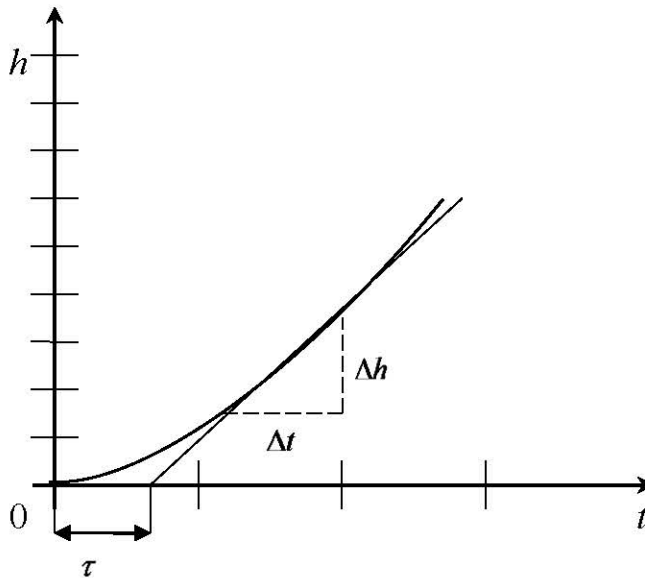
Визначення динамічних характеристик об'єктів за переходною характеристикою можна робити багатьма методами. Застосуємо метод дотичної до точки перегину переходної характеристики.

У даному випадку точка перегину відповідає переходу від режиму прискорення до режиму уповільнення темпу наростання вихідного сигналу. Постійна часу T і динамічне запізнювання τ_δ визначаються за графіком рис. 5.4. Запізнення τ визначаємо як суму чистого запізнювання і динамічного запізнювання, тобто $\tau = \tau_\xi + \tau_\delta$.

Методику визначення параметрів динамічної моделі (5.6) об'єкта без самовирівнювання розглянемо на прикладі рис. 5.7. Для об'єкта без самовирівнювання коефіцієнт підсилення визначається як відношення сталої швидкості зміни вихідної величини до величини стрибка входного сигналу

$$K = \frac{\Delta h / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} \quad (5.16)$$

Точнішими, але складнішими методами ідентифікації на основі переходної характеристики є метод Орманса, метод Сімою та інші.



Частотні методи визначення динамічних характеристик ґрунтуються на тому, що на вхід об'єкта подаються періодичні сигнали з відомими частотою й амплітудою. Для цього найчастіше використовуються спеціальні генератори синусоїдальних сигналів з частотою, яка змінюється за лінійним законом, і осцилографи-характеріографи.

Частотні методи визначення динамічних характеристик об'єкта припускають наявність двох етапів, на яких визначаються:

1. Амплітудно-фазова частотна характеристика об'єкта

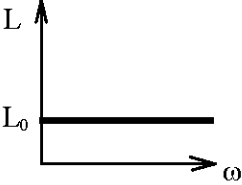
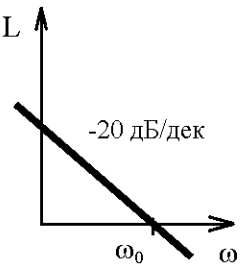
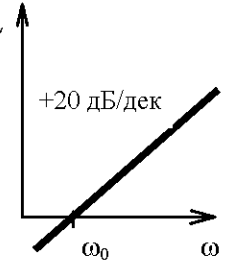
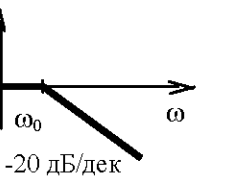
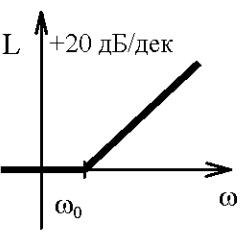
$$A(\omega) = \frac{A_y(\omega)}{A_x(\omega)}, \quad \Phi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega), \quad (5.17)$$

де $A_x(\omega)$, $\varphi_x(\omega)$ – амплітуда і фаза вхідного синусоїдального сигналу з кутовою частотою ω ; $A_y(\omega)$, $\varphi_y(\omega)$ – амплітуда і фаза вихідного синусоїдального сигналу;

2. Передавальна функція об'єкта.

Найпростішим способом ідентифікації на основі результатів активного експерименту є побудова асимптотичної логарифмічної амплітудно-частотної характеристики (ЛАЧХ) $L = \lg A(\omega)$ і розбиття її на елементарні складові. Елементарні ланки і відповідні ЛАЧХ і передавальні функції наведені у таблиці 5.2.

Таблиця 5.2 – Типові елементарні ланки

Тип ланки	Передавальна функція	ЛАЧХ	Параметри
Пропорційна	k		$k = e^{L_0}$
Інтегральна	$\frac{1}{Tp}$		$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Диференціальна	Tp		$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Аперіодична	$\frac{1}{Tp + 1}$		$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Форсуюча	$Tp + 1$		$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Тип ланки	Передавальна функція	ЛАЧХ	Параметри
Коливальна	$\frac{1}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}$ $T_2^2 - 4T_1 < 0$		$\omega_0 = \sqrt{ T_2^2 - 4T_1 }$

Загальна передавальна функція отримується як добуток передавальних функцій елементарних ланок.

Приклад знаходження передавальної функції на основі результатів активного експерименту з застосуванням синусоїдальних тестових сигналів змінної частоти показаний на рис. 5.8.

На рис. 5.8, а показана експериментальна амплітудно-частотна характеристика об'єкта моделювання. На рис. 5.8, б показана побудована на її основі асимптотична ЛАЧХ, де $L = \lg A$; $\omega = 2\pi f$, причому кутові частоти відкладені у десятковому логарифмічному масштабі; асимптоти (дотичні) мають нахил, кратний $\pm 20\text{дБ/дек}$; ω_i – частоти перетину асимптот (дотичних). На рис. 5.8, в – показані елементарні складові з таблиці 5.2, на які послідовно розбита асимптотична ЛАЧХ.

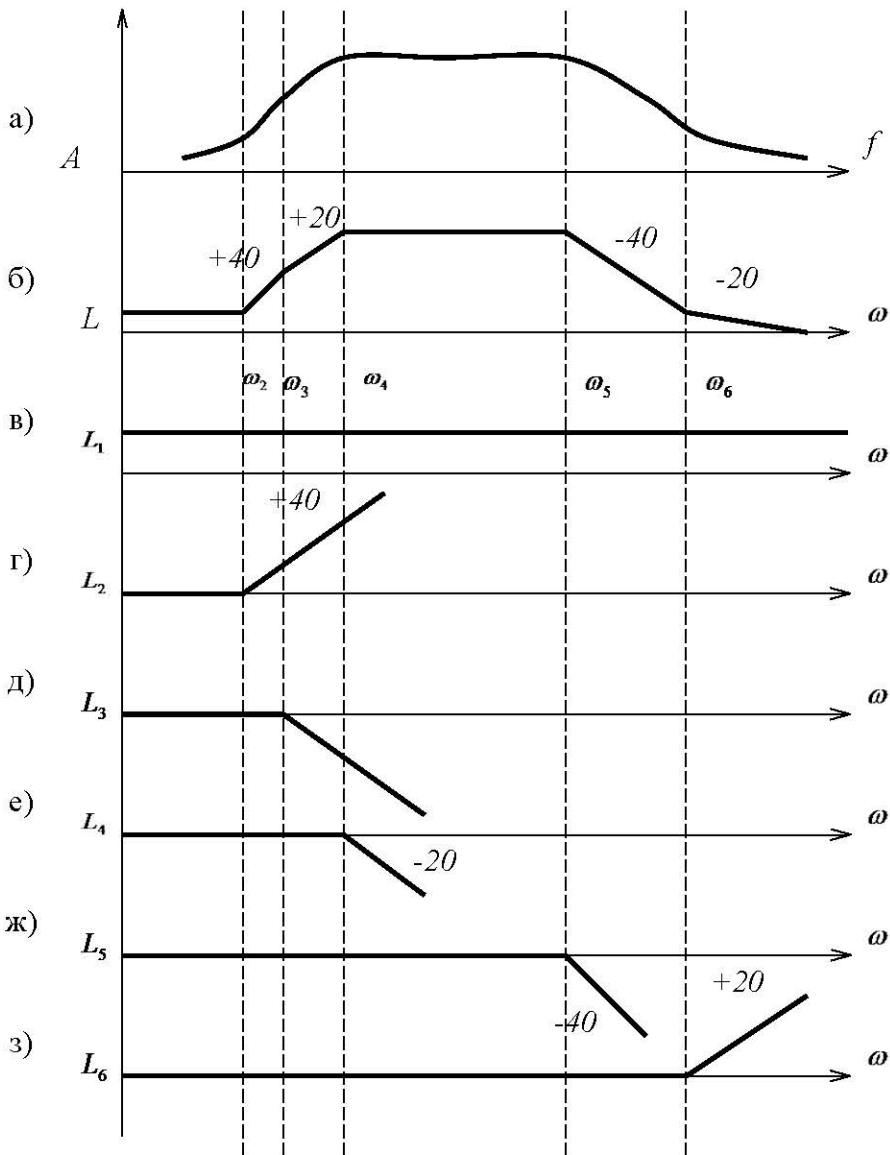
В результаті отримаємо передавальну функцію як добуток передавальних функцій елементарних складових вигляду

$$W(p) = k \cdot \left(\frac{2\pi}{\omega_2} p + 1 \right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_3} p + 1} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_4} p + 1} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_5} p + 1} \right)^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{\omega_6} p + 1 \right).$$

Такий спосіб отримання передавальної функції містить як структурний, так і параметричний етапи ідентифікації, оскільки порядок передавальної функції визначається кількістю і типом елементарних складових, а її параметри – значеннями частот ω_i .

Активний експеримент забезпечує високу достовірність інформації, однак експерименти, пов'язані з дослідженням реакції, наприклад, на ступінчасті або синусоїдальні коливання, важко проводити на типових гідравлічних, енергетичних і теплових об'єктах, оскільки подібні експерименти можуть порушити процес або вивести його зі звичайного режиму в аварійний. Крім того, при про-

веденні активних експериментів важко в реальних виробничих умовах стабілізувати параметри процесу на заданому рівні протягом певного відрізка часу.



5.2.3 Ідентифікація алгоритмічної моделі

Хоча алгоритмічна ідентифікація за змістом близька до структурної ідентифікації, але є набагато складнішою, а у певних випадках ця складність пере-

вищує можливості сучасних комп'ютерів. Прикладом такої задачі є знаходження алгоритму дешифрування інформації при сучасних засобах захисту.

На першому етапі алгоритмічної ідентифікації з'ясовують, чи є алгоритм рекурсивним. Рекурсивний алгоритм відповідає моделі динамічної системи, а нерекурсивний – статичної. Результати роботи нерекурсивного алгоритму залежать лише від поточних вхідних даних. Результати роботи рекурсивного алгоритму залежать як від вхідних даних, так і від попередніх результатів (попередніх вхідних даних). Зауважимо, що рекурсивна модель, в якій поточні результати залежать тільки від безпосередньо попередніх, називається марковською.

У найпростішому випадку нерекурсивного алгоритму ідентифікація здійснюється на основі складання таблиці відповідності «вхідні дані – результати» і обрання методу апроксимації отриманої табличної залежності. Алгоритмічне зображення результату апроксимації і вважають за алгоритмічну модель.

При бінарних (логічних) вхідних і вихідних даних апроксимація звичайно здійснюється за допомогою методу Вейча-Карно. Метод передбачає вибір функціонального базису, складання досконалої диз'юнктивної або кон'юнктивної нормальної форми та її мінімізацію.

Алгоритмічна ідентифікація найчастіше використовується в процесі аналізу алгоритмів, які реалізовані у вигляді програмного забезпечення (програмного коду). Розрізняють динамічний і статичний аналізи.

Динамічний аналіз коду – аналіз програмного забезпечення, що виконується за допомогою виконання програм на реальному або віртуальному процесорі (на відміну від статичного аналізу). Утиліти динамічного аналізу можуть вимагати завантаження спеціальних бібліотек, перекомпіляцію програмного коду. Деякі утиліти можуть документувати виконуваний код в процесі виконання або перед ним. Для більшої ефективності динамічного аналізу потрібне введення до тестованої програми достатньої кількості вхідних даних, щоб дослідити усі розгалуження програмного коду. Також потрібно подбати про мінімізацію впливу документування на виконання програми (враховуючи вплив на часові характеристики).

Приклади утиліт аналізу коду:

- jTracert, Java-агент, який документує код існуючих додатків, що працюють у віртуальній машині JVM, і автоматично будує діаграми послідовності (sequence diagrams);

- Holodeck від компанії Security innovation – інструмент моделювання помилок для динамічного аналізу і тестування уразливості / безпеки програм Windows;

- VB Watch додає до програми код динамічного аналізу в програми мовою Visual Basic для моніторингу їх продуктивності, стека викликів, траси виконання, екземплярів об'єктів, змінних і покриття коду.

Статичний аналіз коду – аналіз програмного забезпечення, який виконується (на відміну від динамічного аналізу) без реального виконання досліджу-

ваних програм. У більшості випадків аналіз проводиться над вихідним кодом, хоча іноді аналізу піддається об'єктний код. Термін зазвичай застосовують до аналізу, який виконується спеціальним програмним забезпеченням, тоді як ручний аналіз називають «program understanding», «program comprehension» (розумінням програми).

Залежно від використовуваного інструмента глибина аналізу може варіюватися від визначення поведінки окремих операторів до аналізу, що містить весь вихідний код.

Останнім часом статичний аналіз все більше використовується у верифікації властивостей програмного забезпечення, використовуваного в комп'ютерних системах високої надійності, особливо критичних для життя (safety-critical). Також застосовується для пошуку коду, що потенційно містить вірусне або інше потенційно небезпечне програмне забезпечення.

5.2.4 Ідентифікація інформаційної моделі

Як зазначалося вище, інформаційна модель – це набори даних (модель статистики) та потоки даних (модель динаміки). Найпоширенішою є ідентифікація структури наборів даних, які подаються у вигляді гіпертексту – структура Інтернет-ресурсів.

Проблема аналізу взаємозв'язків між веб-сайтами є темою досліджень провідних пошукових систем, як Google, Bing, Яндекс тощо. Крім того, низка інших компаній пропонує свої продукти (як комерційні, так і з відкритим програмним кодом) для інтеграції з пошуковими системами для більш ефективного пошуку в мережі.

Сервіс TouchGraph™ GoogleBrowser містить багато корисної інформації (як візуальної, так і статистичної) про веб-сайти та взаємозв'язки між ними. Отримані результати відображаються у вигляді графу. Користувач може заздалегідь задати кількість результатів (до 30) і глибину пошуку зв'язків. Якщо глибина дорівнює 1, то виводиться список сайтів, пов'язаних безпосередньо з вказаним в запиті. Якщо ж глибина пошуку дорівнює 2 і більше (максимальне число рівнів досягає 10), то зв'язки шукаються для першого сайту і для кожного з пов'язаних з ним вузлів другого рівня і т. д.

Сервіс Walk2Web візуалізує взаємозв'язки між сайтами, подаючи процес пошуку інформації. Необхідно тільки ввести в рядок пошуку адресу сайту, що цікавить, і всі посилання, які хоч якось до нього стосуються, будуть у розпорядженні користувача. Після того, як в рядок пошуку була введена назва потрібного сайту, на екрані з'являється невелика схема, за допомогою якої користувач може рухатися далі. Сервіс не працює з пошуковими системами, а показує інформацію лише для заданих сайтів.

Для пошуку зв'язків між змістом веб-сторінок, який не відображений у гіперпосиланнях, використовуються методи семантичного аналізу.

Основою семантики є онтології, що призначені для формалізації предметних областей. Онтологія предметної області описує ключові слова (терміни) предметної області і зв'язок між ними. Аналіз онтологій є складною задачею великої розмірності, оскільки передбачає обробку великих обсягів даних та логічних тверджень, які містяться у онтологіях.

Ідентифікацію потоків даних ще називають аналізом трафіку. Аналізатор трафіку, або сніффер – програмно-апаратний пристрій, призначений для перехоплення і подальшого аналізу, або тільки аналізу мережевого трафіку, призначеного для інших вузлів. Сніффер може аналізувати тільки те, що проходить через його мережеву карту. Також всередині одного сегмента мережі Ethernet всі пакети розсилаються всім машинам, через це можна перехоплювати чужу інформацію.

Перехоплення трафіку може здійснюватися:

- звичайним «прослуховуванням» мережевого інтерфейсу (метод ефективний при використанні в сегменті концентраторів (хабів) замість комутаторів (світців), а також у WiFi-мережах, в іншому випадку метод малоефективний, оскільки на сніффер потрапляють лише окремі пакети);
- підключенням сніффера в розрив каналу;
- відгалуженням (програмним або апаратним) трафіку і спрямуванням його копії на сніффер;
- через аналіз побічних електромагнітних випромінювань і відновлення таким чином трафіку (використовується у засобах електромагнітної розвідки).

Сніфери застосовуються як в позитивних, так і в деструктивних цілях. Аналіз трафіку, який пройшов через сніффер, дозволяє:

- виявити паразитний, вірусний і закільцьований трафік, наявність якого збільшує завантаження мережного обладнання та каналів зв'язку;
- виявити в мережі шкідливе і несанкціоноване програмне забезпечення, наприклад, мережеві сканери, троянські програми тощо;
- перехопити незашифрований (а часом і зашифрований) трафік користувача з метою отримання паролів і іншої інформації;
- локалізувати несправність мережі або помилку конфігурації мережевих агентів.

Ключові слова

Ідентифікація, задача ідентифікації, структурна ідентифікація, параметрична ідентифікація; апіорна інформація, вага ребра, нев'язка, пасивний експеримент, активний експеримент, апроксимація, тестовий сигнал, генерування тестових сигналів, регулярний сигнал, аперіодичний сигнал, періодичний сигнал, випадковий сигнал, білий шум, активно-пасивний реєстраційний експеримент; метод Орманса, метод Сімою; типові ланки, рекурсивний алгоритм, марковська модель, метод Вейча-Карно, динамічний аналіз коду, статичний аналіз коду, інформаційна модель, гіпертекст, семантичний аналіз, онтологія, аналіз трафіку, сніффер, перехоплення трафіку.

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. Які характеристики системи відносять до структурних?
2. Які характеристики системи відносять до параметричних?
3. Як за допомогою зміни значень параметрів описати структурні характеристики?
4. Як оцінити степінь адекватності структурної ідентифікації?
5. Чи завжди задача структурної ідентифікації має однозначний розв'язок?
6. Як можна організувати активний експеримент для структурної ідентифікації логічного об'єкта?
7. Що можна використати як тестові сигнали для структурної ідентифікації графової моделі?
8. Який тип експерименту (активний чи пасивний) використовується при дослідженні стану здоров'я людини?
9. Назвіть декілька галузей науки, де активні експерименти принципово неможливі (принаймні, при сучасному рівні розвитку науки і техніки).

Література

1. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування : навчальний посібник / В. М. Дубовой. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 308 с.
2. Грановский В. А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / Грановский В. А., Сирая Т. Н. – Л. : Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.
3. Карабутов Н. Н. Адаптивная идентификация систем: информационный синтез / Карабутов Н. Н. – М. : КомКнига, 2006. – 384 с.
4. Адаптивные системы идентификации / [А. Г. Кику, В. И. Костюк, В. Е. Краскевич и др.] ; под ред. В.И.Костюка – К. : Техніка, 1975. – 288 с.

5. Мітюшкін Ю. І. Soft Computing: ідентифікація закономірностей нечіткими базами знань : монографія / Мітюшкін Ю. І., Мокін Б. І., Ротштейн О. П. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2002. – 145 с.
6. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів : навчальний посібник / Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 300 с.
7. Справочник по теории автоматического управления / [под ред. А. А. Красовского] – М. : Наука, 1987. – 712 с.
8. Симою М. П. Определение коэффициентов передаточных функций линейризованных звеньев систем регулирования. / М. П. Симою // Автоматика и телемеханика, – 1957. – № 6. – С. 514–527.
9. Томас Х. Кормен Алгоритмы: построение и анализ : INTRODUCTION TO ALGORITHMS. / Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн [2-е изд.]. – М.: Вильямс, 2006. – 1296 с.– ISBN 0-07-013151-1.
10. Основи дискретної математики / [Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський та ін.] – К. : Наукова думка, 2002. – 580 с.
11. Якимов А. В. Теплофизика механической обработки : учебник / Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. – К. : Наукова думка, 1991. – 270 с.
12. Григоров М. А. Проблемы моделирования и управления движением транспортных потоков в крупных городах : монография / Григоров М. А., Дащенко А. Ф. – Одесса : Астропринт, 2004. – 272 с.
13. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельєва, І. І. Становська – Одеса : Пальміра, 2011.– 500 с.

6 МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Методи ідентифікації на основі детермінованих, чітко визначених даних зручні, проте їх застосування обмежене. На практиці дані, що використовуються для ідентифікації, отримуються або в результаті вимірювань і містять випадкову похибку, або в результаті експертних оцінок і містять суб'єктивну складову. Тому найчастіше для ідентифікації застосовуються або методи статистики, або штучного інтелекту.

6.1 Статистична ідентифікація

Статистична методи ідентифікація використовується як для обробки даних пасивного експерименту – за умови достатньо великої кількості даних, або для обробки даних активного експерименту – за умови використання випадкових тестових сигналів.

Розглянемо *статистичну постановку задачі ідентифікації*, вважаючи, що вплив (вхідна змінна) $X(t)$ і реакція (вихідна змінна) $Y(t)$ представляють собою випадкові функції або випадкові величини.

Нехай для одновимірного об'єкта, характеристикою якого є оператор A_t (рис. 6.1), можуть бути виміряні випадкові функції входу $X(t)$ і виходу $Y(t)$. Тоді задача ідентифікації зводиться до визначення оператора A_t за результатами вимірювання цих функцій, причому через стохастичний характер функції визначається не сам оператор A_t , а його статистична оцінка A_t^* . Оскільки оцінка оператора A_t^* використовується як характеристика невідомого оператора A_t , необхідно наблизити оцінку оператора A_t^* до істинного значення оператора A_t в розумінні деякого критерію, тобто повинна бути виконана умова близькості випадкової функції $Y^*(t) = A_t^* X(t)$ до випадкової функції $Y(t)$, яка є вихідною змінною об'єкта.

При активній статистичній ідентифікації вхідні *випадкові сигнали* $u(t)$ створюються спеціальними *генераторами* і за своїми характеристиками близькі до *білого шуму*. Використання таких сигналів спрощує наступне визначення динамічних характеристик.

Для успішного проведення активного експерименту необхідно дотримуватись таких умов:

- точність, з якою задаються незалежні вхідні змінні x , які не є випадковими величинами, повинна бути високою. До точності вимірювань вхідної випадкової величини висуваються менш жорсткі вимоги;

- кожна з незалежних змінних не повинна бути лінійною комбінацією решти незалежних змінних;

– інтервал між значеннями вхідних змінних не повинен бути меншим (або дорівнювати) похибці, з якою задають цей інтервал.

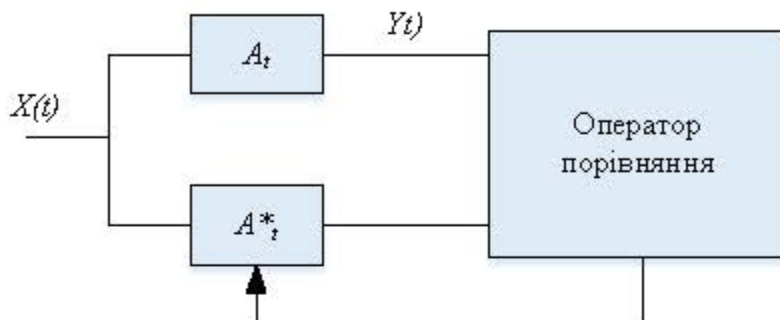


Рисунок 6.1 – Схема процесу ідентифікації

6.1.1 Статистична оцінка законів розподілу випадкових величин

При функціонуванні системи або її елемента протягом деякого часу t випадкова величина X може прийняти n певних значень. Сукупність значень випадкової величини називається *статистичною вибіркою* об'єму n . Якщо розташувати окремі значення випадкової величини X в зростаючому або спадному порядку і вказати щодо кожного значення, як часто воно зустрічалося в даній сукупності, то вийде емпіричний розподіл випадкової величини, або варіаційний ряд, на підставі якого визначаються: аналітична форма невідомої щільності ймовірності $f(x)$, функція розподілу $F(x)$ і оцінюються її параметри.

Розглянемо детальніше процедуру побудови варіаційного ряду.

Весь діапазон значень неперервної випадкової величини X розбивається на інтервали. Далі підраховується кількість значень m_i випадкової величини X , що припадає на кожний інтервал, і визначається частота її потрапляння в даний інтервал за формулою 6.1:

$$p_i^* = \frac{m_i}{n} \quad (6.1)$$

Якщо випадкова величина X приймає значення, що потрапляє на межу i -го та $(i+1)$ - інтервалів, то це значення враховується в числі потраплянь в $(i+1)$ -й інтервал.

Оптимальна довжина інтервалу визначається за формулою 6.2:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.21 \cdot 1.6n} \quad (6.2)$$

де $x_{\max} - x_{\min}$ – розмах варіації випадкової величини X .

Число інтервалів буде $k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x}$.

Якщо k не ціле число, то як кількість інтервалів потрібно взяти найближче до k ціле число, не менше за k . Варіаційні ряди можуть бути зображені графічно у вигляді полігону розподілу і гістограми.

Полігони розподілу найчастіше використовуються для зображення дискретних варіаційних рядів.

Гістограми найчастіше використовуються для зображення варіаційних рядів з неперервними значеннями випадкової величини X . При зменшенні величини кожного інтервалу гістограма буде наближатися до деякої плавної кривої, що відповідає графіку функції щільності розподілу випадкової величини X .

На основі гістограми звичайно роблять припущення про вид закону розподілу ймовірностей. Параметри закону розраховують статистичною обробкою даних.

1. Середнє значення змінної визначається за формулою

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (6.3)$$

де x_i – емпіричне значення змінної x ; n – число спостережень.

2. Дисперсія

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (6.4)$$

При невеликій кількості даних ($n < 30$)

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Правильність визначення виду закону розподілу ймовірностей обов'язково перевіряють за допомогою критеріїв узгодження. Найпоширенішим є критерій Стьюдента, який використовує розподіл помилок обчислення ймовірностей χ^2 (хі-квадрат).

6.1.2 Кореляційний аналіз

Кореляційний аналіз призначений для виявлення лінійних статистичних залежностей між параметрами системи (кореляція на множині параметрів) і для ідентифікації моделі динаміки системи (кореляція у часі).

Статистичний зв'язок полягає в тому, що одна випадкова змінна реагує на зміну значення іншої змінної відповідною зміною свого закону розподілу ймовірності (порівняйте: між x та y існує *функціональна залежність*, якщо кожному можливому значенню x відповідає однозначно визначене значення y). Най-

частіше розглядається зміна не всього закону, а окремих його моментів, наприклад

$$M(Y / X = x) = \varphi_Y(x).$$

Тоді статистична залежність між випадковими процесами – *модель регресії* – має вигляд:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon, \quad (6.5)$$

де $y(t)$ – реальне значення випадкового процесу; $\bar{y}(t)$ – значення випадкового процесу, отримане за допомогою функції регресії $\bar{y}(x) = M(Y/x) = \varphi_Y(x)$; ε – випадкова величина, що характеризує вплив неврахованих факторів, найчастіше – білий шум.

Дослідження кореляційних зв'язків ми називаємо кореляційним аналізом. Але не кожна функція або кореляція відповідає причинній залежності між явищами. Тому потрібне обов'язкове дослідження причинно-наслідкових зв'язків.

Завдання кореляційного аналізу.

– Вимірювання ступеня зв'язності (тісноти, сили) двох і більше явищ. Тут мова йде, в основному, про підтвердження вже відомих зв'язків.

– Відбір факторів, що роблять найбільш істотний вплив на результативну ознаку на основі вимірювання тісноти зв'язку між явищами.

– Виявлення невідомих причинних зв'язків. Кореляція безпосередньо не виявляє причинних зв'язків між явищами, але встановлює ступінь необхідності цих зв'язків і достовірність суджень про їх наявність. Причинний характер зв'язків з'ясовується за допомогою логічно-професійних міркувань, які розкривають механізм зв'язків.

Нехай x, y – випадкові величини, які мають спільний нормальний розподіл. Зв'язок між x та y можна описати за допомогою *коефіцієнта кореляції*:

$$\rho = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = M \left\{ \frac{X - M(x)}{\sigma_x} \cdot \frac{Y - M(y)}{\sigma_y} \right\}, \quad (6.6)$$

де $M(*)$ – математичне сподівання (операція усереднення); K_{xy} – взаємна коваріаційна функція випадкових величин; σ_x, σ_y – середні квадратичні відхилення.

При обмеженій вибірці розраховується вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)\sigma_x \sigma_y}, \quad (6.7)$$

де n – розмір вибірки.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Коефіцієнт кореляції приймає значення на проміжку (-1;1).
2. Коефіцієнт кореляції не залежить від одиниць вимірювання величин та від кількості спостережень.

3. Якщо коефіцієнт кореляції $r_{xy} > 0$, то має місце позитивна кореляція, тобто зі збільшенням значень однієї змінної (x) значення іншої (y) відповідно збільшується, а при зменшенні – навпаки.

4. Якщо коефіцієнт кореляції $r_{xy} < 0$, то має місце негативна кореляція, тобто зі збільшенням значень (x) значення (y) відповідно зменшуються.

5. Якщо величини x і y незалежні, то $r_{xy} = 0$.

6. Якщо $r_{xy} = 0$, то випадкові величини x і y є некорельовані, але це не означає, що вони незалежні, між ними може існувати нелінійна залежність, яка при розкладанні її у степеневий ряд не має лінійного члена. Якщо є підґрунтя для посилення, що між x і y існує статистична залежність, яка близька до деякої функції $f(x)$, то можна спробувати шукати кореляцію $r_{x'y}$ між змінною $x' = f(x)$ і y . Категоричніший висновок можна зробити на основі дослідження повніших характеристик випадкових величин (процесів), а саме: законів розподілу ймовірностей. Процеси є незалежними, якщо

$$f(x, y) = f(x) * f(y) \quad (6.8)$$

або

$$f(y/x) = f(y).$$

При вивченні явища, залежного від багатьох факторів, для характеристики тісноти зв'язку використовується *коефіцієнт множинної кореляції*:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y - y_{/x_i x_j})^2}{n\sigma_y^2}}. \quad (6.9)$$

Кореляційне відношення використовується для оцінювання тісноти зв'язку між двома явищами, зокрема для визначення тісноти зв'язку вихідного ряду y_i з теоретичним рядом.

Залишкова дисперсія визначається за такою формулою

$$\sigma_{\text{зал}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{iT})^2}{n-1}, \quad (6.10)$$

де y_{iT} – теоретичні значення змінної.

Залишкова дисперсія характеризує ту частину розсіювання змінної y , яка виникає через різного роду випадковості і вплив неврахованих факторів.

Коефіцієнт детермінації слугує для оцінювання точності регресії, тобто відповідності отриманого рівняння регресії наявними емпіричними даними, і обчислюється за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_{зал}^2}{\sigma_{нов}^2}, \quad (6.11)$$

де $\sigma_{нов}^2$ – повна дисперсія, тобто $\sigma_{нов}^2 = \sigma_Y^2$.

Змінюється R^2 в межах від 0 до 1, тобто

$$0 \leq R^2 \leq 1.$$

Модель вважається тим точнішою, чим ближче R^2 до 1.

Коефіцієнт детермінації характеризує статистичну залежність навіть у тих випадках, коли лінійна частина цієї залежності відсутня.

Чутливість однієї змінної до іншої $\beta_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x^2}$.

Кореляційний аналіз найчастіше є першим етапом статистичної ідентифікації, і його результати використовуються у інших видах аналізу: спектральному, факторному, регресійному.

6.1.3 Факторний аналіз

При побудові моделі будь-якої системи завжди постає питання, які впливи на систему (*фактори*) є суттєвими і повинні бути враховані в моделі, а якими можна знехтувати без втрати адекватності та значного зменшення точності. Задача може бути розв'язана повним перебором усіх можливих комбінацій значень факторів. Але трудомісткість такого підходу зростає пропорційно факторіалу від кількості факторів. Методи *факторного аналізу* дозволяють розв'язати цю проблему з меншою трудомісткістю.

Для проведення факторного аналізу інформація повинна бути подана у вигляді двовимірної таблиці чисел (матриця вхідних даних). Рядки цієї матриці повинні відповідати окремим спостереженням $X(i=1, 2, \dots, n)$, стовпці – вихідним величинам $Y(j=1, 2, \dots, m)$.

Основна модель факторного аналізу має вигляд

$$X = \{V, U\}$$

$$Y_j = a_{j1}V_1 + a_{j2}V_2 + \dots + a_{jp}V_p + d_j U_j \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad (6.12)$$

де y_j – j -а вихідна величина; V_1, V_2, \dots, V_p – загальні фактори (вхідні випадкові величини, які мають нормальний закон розподілу); U_j – характерний фактор; $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jp}$ – факторні навантаження, які характеризують степінь впливу кожного фактора (це саме ті параметри моделі, які підлягають визначенню); d_j – навантаження характерного фактора.

Термін «загальний фактор» підкреслює, що кожен такий фактор має суттєве значення для аналізу всіх величин y_j .

Термін «характерний фактор» показує, що він стосується тільки даної j -ї вхідної величини. Це спеціальна величина, яка не може бути виражена через фактори V_k .

Факторні навантаження $a_{j1}, a_{j2} \dots a_{jp}$ характеризують величину впливу того чи іншого загального фактора на варіацію даної величини. Основна задача факторного аналізу – визначення факторних навантажень. Факторна модель належить до класу апроксимувальних. Параметри моделі повинні бути такими, щоб найкращими чином з точки зору певного критерію, апроксимувати функцію зв'язку між спостереженими величинами.

Дисперсію вхідної величини σ_j^2 можна розкласти на складові: частину, зумовлену дією загальних факторів h_j^2 , і частину, зумовлену діями j -го характерного фактора d_j^2 .

Якщо загальний і характерний фактори не корелюють між собою, а значення факторів нормалізовані, то дисперсію j -ої вхідної величини можна подати у вигляді

$$\sigma_j^2 = 1 + \underbrace{a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \dots + a_{jk}^2 + \dots + a_{jp}^2}_{h_j^2} + d_j^2, \quad (6.13)$$

де a_{jp}^2 – частина дисперсії величини y_j , яка припадає на k -й фактор.

Повний внесок k -го фактора у сумарну дисперсію вхідних величин

$$D_k = \sum_{j=1}^m a_{jk}^2 \quad (k=1,2,\dots,p). \quad (6.14)$$

Внесок загальних факторів в сумарну дисперсію $D = \sum_{k=1}^p D_k$.

Використовуючи модель (6.13), запишемо вираз для кожної з вихідних величин:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + \dots + a_{1p}V_p + d_1U_1, \\ y_2 = a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + \dots + a_{2p}V_p + d_2U_2, \\ \dots \\ y_m = a_{m1}V_1 + a_{m2}V_2 + \dots + a_{mp}V_p + d_mU_m. \end{cases} \quad (6.15)$$

Коефіцієнти системи (6.16) – факторні навантаження – можна подати у вигляді матриці, кожний рядок якої відповідає вихідній величині, а стовпець – фактору. Вихідною інформацією для побудови факторної моделі (6.13) є *матриця вибіркових парних коефіцієнтів кореляції*. Таблиця таких коефіцієнтів кореляції називається факторною структурою.

Факторні навантаження можна виразити через коефіцієнти кореляції:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{y_j V_1} = a_{j1} + a_{j2} r_{V_1 V_2} + \dots + a_{jp} r_{V_1 V_p}, \\ \dots \\ r_{y_j V_k} = a_{j1} r_{V_k V_1} + a_{j2} r_{V_k V_2} + \dots + a_{jp} r_{V_k V_p}, \\ \dots \\ r_{y_j V_p} = a_{j1} r_{V_p V_1} + a_{j2} r_{V_p V_2} + \dots + a_{jp} \\ r_{y_z U} = d_j \end{array} \right. \quad (6.16)$$

де $r_{y_j V_k}$ – коефіцієнт кореляції між j -ю вихідною величиною і k -м фактором;
 $r_{V_k V_p}$ – коефіцієнт кореляції між k -м і p -м факторами.

Якщо припустити, що загальні фактори між собою некорельовані, то рівняння (6.16) можна записати у вигляді

$$r_{y_j V_k} = a_{jk} \quad (j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, p), \quad (6.17)$$

тобто факторні навантаження дорівнюють елементам факторної структури.

Наявність попарної кореляційної залежності між факторами називають мультиколінеарністю.

Мультиколінеарна залежність присутня, якщо коефіцієнт парної кореляції $r_{V_j V_k} \geq 0,70/0,80$.

Негативний вплив мультиколінеарності полягає в нижческазаному:

- 1) ускладнюється процедура вибору головних чинників;
- 2) спотворюється зміст коефіцієнта множинної кореляції (він припускає незалежність факторів);
- 3) ускладнюються обчислення при побудові самої моделі;
- 4) знижується точність оцінки параметрів регресії, спотворюється оцінка дисперсії.

Наслідком зниження точності є ненадійність коефіцієнтів регресії і частково неприйнятність їх використання для інтерпретації як міри впливу відповідного фактора на залежну змінну. Оцінки коефіцієнтів стають дуже чутливими до вибірових спостережень. Невелике збільшення обсягу вибірки може призвести до дуже сильних змін у значеннях оцінок. Крім того, помилки оцінок входять у формули критерію значущості, тому застосування самих критеріїв стає також ненадійним. Зі сказаного зрозуміло, що дослідник повинен намагатися встановити стохастичну мультиколінеарність і, по можливості, усунути її.

Для вимірювання мультиколінеарності можна використовувати коефіцієнт множинної детермінації.

При відсутності мультиколінеарності факторів

$$\eta = \sum_{i=1}^m d_{yj}, \quad (6.18)$$

де d_{yj} – коефіцієнт парної детермінації, обчислюється за формулою (6.11).

При наявності мультиколінеарності співвідношення (6.18) не виконується. Тому як міра мультиколінеарності використовується різниця

$$M = \eta - \sum_{i=1}^m d_{yj}. \quad (6.19)$$

Чим менша ця різниця, тим менша мультиколінеарність.

Для усунення мультиколінеарності використовується метод виключення змінних. Цей метод полягає в тому, що сильно корельовані фактори усуваються з регресії і вона заново оцінюється. Відбір змінних, що підлягають виключенню, проводиться за допомогою коефіцієнтів парної кореляції. Досвід показує, що якщо $|r_{yj}| \geq 0,70$, то одну зі змінних можна виключити.

Використовуючи побудовану факторну модель, можна знову обчислити коефіцієнти кореляції між вихідними величинами і порівняти їх з початковими коефіцієнтами кореляції. Різниця між ними є залишковим коефіцієнтом кореляції.

У випадку незалежності факторів для обчислення коефіцієнтів кореляції між параметрами достатньо взяти суму добутків відповідних факторних навантажень:

$$r'_{jk} = a_{j1} a_{k1} + a_{j2} a_{k2} + \dots + a_{jp} a_{kp} \quad (j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, p),$$

де r'_{jk} – коефіцієнт кореляції між j -ю і k -ю вхідними величинами.

Залишковий коефіцієнт кореляції

$$\bar{r}_{jr} = r_{jr} - r'_{jr}. \quad (6.20)$$

Матриця залишкових коефіцієнтів кореляції називається залишковою матрицею чи матрицею залишків

$$\bar{R} = R - R',$$

де \bar{R} – матриця залишків; R – матриця вибірових парних коефіцієнтів кореляції чи повна матриця; R' – матриця обчислених за коефіцієнтів кореляції.

Має місце співвідношення між дисперсією вхідних величин, дисперсією факторів і факторними навантаженнями

$$\sum_{k=1}^p D_k = \sum_{j=1}^m h_j^2 = \sum_{ir} a_{ik}^2 = D.$$

Матрицю факторних навантажень можна отримати різними способами. Найбільше розповсюдження отримав метод головних факторів. Цей метод ос-

нований на принципі послідовних наближень і дозволяє досягти будь-якої точності.

Редукованою матрицею називається матриця вибірових коефіцієнтів кореляції \tilde{R} , у якій по головній діагоналі стоять значення дисперсій загальних факторів h_k^2 ($1, 2, \dots, p$):

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} h_1^2 r_{21} r_{31} \dots r_{m1} \\ r_{12} h_2^2 r_{32} \dots r_{m2} \\ \dots \dots \dots \\ r_{1m} r_{2m} \dots h_m^2 \end{bmatrix}.$$

Редукована і повна матриця пов'язані співвідношенням

$$\tilde{R} = R - \{D\}, \quad (6.21)$$

де $\{D\}$ – матриця дисперсій, зумовлених характерними факторами.

Процедура знаходження факторних навантажень, тобто матриці A , складається з декількох кроків: на першому кроці шукають факторні навантаження при першому факторі так, щоб сума внесків даного фактора в сумарну загальну дисперсію

$$D_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{p1}^2$$

була максимальною. Максимум D_1 повинен бути знайдений за умови

$$r_{j\xi} = \sum_{k=1}^p a_{jk} a_{\xi k} \quad (j, \xi = 1, 2, \dots, m), \quad (6.22)$$

де $r_{j\xi} = r_{\xi j}$; r_{jj} – дисперсія h_j^2 загального параметра z_j .

Потім розраховують матрицю коефіцієнтів кореляції з врахуванням тільки першого фактора $R'_2 = a_1 a_1'$. Маючи таку матрицю, отримаємо першу матрицю залишків: $R_1 = \tilde{R} - R'_1$.

На другому кроці визначають навантаження на другому факторі так, щоб сума внесків другого фактора у залишкову загальну частину (тобто повну загальну частину без врахування тої частини, яка припадає на частину першого фактора) була максимальною. Сума квадратів навантажень при другому факторі

$$D_2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{p2}^2.$$

Максимум D_2 знаходять за умови

$$\bar{r}_{j\xi}^1 = \sum a_{jk}^1 a_{\xi k}^1 \quad (j, \xi = 1, 2, \dots, m),$$

де $\bar{r}_{j\zeta}^1$ – коефіцієнт кореляції з першої матриці залишків; $a_{jk}^1, a_{\zeta k}^1$ – факторні навантаження з урахуванням другого фактора.

Потім розраховують матрицю коефіцієнтів кореляції з урахуванням другого фактора і обчислюють другу матрицю залишків: $\bar{R}_2 = \bar{R}_1 - R_2'$ і так далі.

Адекватність факторної моделі оцінюється за матрицею залишків (якщо величини її коефіцієнтів малі, то модель вважається адекватною).

6.1.4 Регресійний аналіз

Регресійний аналіз призначений для побудови моделі статистики шляхом статистичної обробки результатів пасивного експерименту.

Одностороння імовірнісна залежність між випадковими величинами – це регресія. Регресія є окремим випадком апроксимації, коли для побудови залежності використовується достатня для статистичного аналізу кількість експериментальних даних.

Види регресії

1. За кількістю змінних розрізняється:
 - проста регресія $y = f(x)$ – регресія між двома змінними y і x ;
 - множинна регресія $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – регресія між залежною змінною y і декількома впливовими факторами x_1, x_2, \dots, x_m .
2. За формою залежності:
 - лінійна регресія, виражається лінійною функцією параметрів;
 - нелінійна регресія, виражається нелінійною функцією параметрів.
3. За типом впливу величин:
 - безпосередня регресія: в цьому випадку залежна змінна і впливові фактори пов'язані безпосередньо одна з одною;
 - непряма регресія: у цьому випадку впливовий фактор діє на залежну змінну через ряд інших змінних;
 - помилкова регресія: виникає при формальному підході до досліджуваних явищ без з'ясування того, які причини зумовлюють даний зв'язок.

Поняття «регресія» тісно пов'язане з «кореляцією». У кореляційному аналізі оцінюється сила зв'язку, а в регресійному аналізі досліджується його форма.

Завдання регресійного аналізу

- Встановлення форми залежності (лінійна або нелінійна);
- Визначення функції регресії і встановлення впливу факторів на залежну змінну. Важливо не тільки визначити форму регресії, вказати загальну тенденцію зміни залежної змінної, але і з'ясувати, яка була б дія на залежну змінну головних чинників, якби інші не змінювалися і якби були виключені випадкові елементи;

– Оцінка невідомих значень залежної змінної, тобто розв'язання задач екстраполяції та інтерполяції.

Вихідні передумови регресійного аналізу та властивості оцінок

Передумова 1. При знаходженні оцінок змінної у припускається існування залежності змінної у тільки від тих факторів, які увійшли в модель (регресію). Вплив інших факторів і випадковостей враховується випадковою збурювальною змінною z . При цьому вважаємо, що середнє значення змінної z дорівнює нулю.

Передумова 2. Передбачається, що вплив неврахованих факторів постійний. Так, при розгляді часових рядів в різні періоди ці невраховані фактори справляють однаковий вплив.

Передумова 3. Відсутня автокореляція між збурювальними змінними.

Передумова 4. Число спостережень має перевищувати число параметрів регресії, інакше оцінювання цих параметрів неможливе.

Передумова 5. Передбачається одностороння залежність змінної у від факторів $x_i (i = \overline{1, m})$.

Передумова 6. Залежна змінна і фактори $x_i (i = \overline{1, m})$ розподілені нормально.

За допомогою регресійного аналізу при зазначених вище передумовах знаходять оцінки параметрів, що найкраще узгоджуються з дослідними даними. Ці оцінки повинні мати нижчезказані властивості.

1. *Незміщеність оцінок* параметрів регресії. Оцінка параметрів регресії називається незміщеною, якщо при збільшенні числа спостережень оцінка параметра наближається до його математичного сподівання. Треба відзначити, що оцінки, отримані методом найменших квадратів, мають властивість незміщеності.

2. *Ефективність оцінок* параметрів регресії. Незміщена оцінка параметра регресії називається незміщеною ефективною, якщо вона серед всіх інших незміщених оцінок цього ж параметра має найменшу дисперсію.

3. *Достатність оцінки.* Якщо β являє собою достатню оцінку параметра, то не існує іншої оцінки цього параметра, яку можна отримати за вибіркою з деякою генеральної сукупності і яка дала б додаткову інформацію про нього. Р. Фішер показав, що кількість вимірювальної інформації, що міститься в деякій оцінці, дорівняє оберненій величині від її дисперсії. Таким чином, поняття достатності еквівалентно вимозі мінімальної дисперсії. Достатня оцінка з необхідністю має бути ефективною і, таким чином, також незміщеною.

Вибіркові рівняння регресії

Умовне математичне сподівання випадкової величини $M(Y|X)$ є функція від X , яка називається функцією регресії і дорівнює $f(x)$, тобто

$$M(Y|X) = \bar{y}_x = f(x); \quad (6.23)$$

аналогічно

$$M(X|Y) = \bar{x}_y = \varphi(y). \quad (6.24)$$

Графічне зображення $f(x)$ або $\varphi(y)$ називається лінією регресії, а записані рівняння (6.23) і (6.24) – рівняннями регресії.

Оскільки умовне математичне сподівання M випадкової величини Y є функція від x , то його оцінка \bar{y} (умовна середня) також є функцією від x . Позначимо цю функцію через

$$\bar{y}_x = f^*(x). \quad (6.25)$$

Рівняння (6.25) визначає вибіркоче рівняння регресії y на x . Сама функція $f^*(x)$ називається вибірковою регресією Y на X , а графік $f^*(x)$ – вибірковою регресією.

Функція регресії незворотна, тому що мова йде про середні величини для деякого конкретного значення фактора.

Лінійна регресія

Нехай задана система випадкових величин X і Y .

Модель регресії має вигляд:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon, \quad (6.26)$$

де $y(t)$ – реальне значення випадкового процесу; $\bar{y}(t)$ – значення випадкового процесу, отримане за допомогою функції регресії; ε – випадкова величина, що характеризує вплив неврахованих факторів, найчастіше – білий шум.

Функція регресії випадкової змінної y відносно x – це умовне математичне сподівання $M(Y/x)$ випадкової змінної y , тобто

$$\bar{y}(x) = M(Y/x) = \varphi(x, b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Крива регресії є емпіричною оцінкою функції регресії.

Для знаходження параметрів регресії застосовується метод найменших квадратів. Практичний спосіб визначення коефіцієнтів рівняння регресії ґрунтується на припущеннях:

- 1) лінійна залежність між змінними;
- 2) значення помилки нормально розподілене з середньою і постійною дисперсією D ;
- 3) всі процеси є стаціонарними.

Тоді функція лінійної регресії має вигляд:

$$M_{y/x} = M_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} [x - M_x] \quad (6.27)$$

де $\beta = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ – коефіцієнт регресії.

Залишкова дисперсія лінійної регресії

$$D_{y/x} = D_y(1 - r_{xy}^2) \quad (6.28)$$

При побудові багатовимірних залежностей використовується *коефіцієнт множинної регресії*.

Множинна лінійна регресія має такий вигляд:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m, \quad (6.29)$$

де y – функція регресії; x_1, x_2, \dots, x_m – незалежні змінні; a_1, a_2, \dots, a_m – коефіцієнти регресії; a_0 – вільний член рівняння; m – число факторів, що входять в модель.

Метод найменших квадратів застосовується і для знаходження параметрів множинної регресії. У цьому випадку число лінійних рівнянь зростає, і такі системи рівнянь вирішуються за допомогою ЕОМ.

Важливим етапом побудови регресійної моделі є *аналіз залишків* (похибок) у вигляді різниць $y_i - y_i^*$. Можна виділити найхарактерніші результати аналізу залишків.

1. Виявлення *викидів*, тобто різних екстремальних значень відхилення y_i від розрахункового значення y_i^* . При виявленні викиду необхідно повторити експеримент в точці викиду, попередньо перевіривши правильність його умов. Якщо викид стійкий, то його потрібно чи відкинути і перерахувати коефіцієнти моделі без нього, чи зайнятись дослідженням природи його існування.

2. Виявлення деякого *тренду* в залишках, тобто тенденції в їх зміні з плином часу. Наприклад, в залишках спостерігається тенденція до лінійного зростання. Для покращення моделі підраховують поправку у вигляді різниці $\left(\frac{y_i - y_i^*}{y_i^*} - a_i \right)$, де $a_i = k \cdot N$, $k = \operatorname{tg} \alpha$, α – кут нахилу усередненої “лінії залишків” до осі абсцис, N – номер експерименту.

3. Виявлення різкого зсуву рівня процесу. В цьому випадку можна з’ясувати причину різкого стрибка похибки, а потім розбити вибірку на дві і для кожного рівня побудувати модель.

4. Виявлення змін в дисперсії помилки. Якщо дисперсії помилки неоднорідні, то знайдена середня дисперсія може недостовірно описувати частину експериментальних даних.

5. Дослідження залишків для перевірки того, чи описуються вони нормальним законом розподілу. В цьому випадку можна перевірити випадковість значень.

Етапи побудови багатофакторної кореляційно-регресійної моделі

Розробка моделі і дослідження процесів повинні виконуватися за такими етапами:

- А) апріорне дослідження проблеми;
- Б) формування переліку факторів і їх логічний аналіз;
- В) збір вихідних даних та їх первинна обробка;
- Г) специфікація функції регресії
- Д) відбір головних факторів;
- Е) оцінювання функції регресії.

Розглянемо докладніше зміст етапів.

А. *Апріорне дослідження проблеми.* Відповідно до мети роботи конкретизуються явища, процеси, залежність між якими підлягає оцінюванню.

На цьому етапі дослідження повинні бути сформульовані осмислені і прийнятні гіпотези про залежність явищ.

Б. *Формування переліку факторів і їх логічний аналіз.* Для визначення найбільш розумного числа змінних у регресійній моделі, перш за все, орієнтуються на міркування професійно-теоретичного характеру. Виходячи з фізичного змісту явища, виробляють класифікацію змінних на залежну і впливові фактори.

В. *Збір вихідних даних та їх первинна обробка.* При побудові моделі вихідна інформація може бути зібрана в трьох видах:

- динамічні (часові) ряди;
- просторова інформація – інформація про роботу декількох об'єктів в одному розрізі часу.

Г. *Специфікація функції регресії.* На даному етапі дослідження дається конкретне формулювання гіпотези про форму зв'язку (лінійний або нелінійний, простий або множинний і т. д.). Для цього використовуються різні критерії для перевірки спроможності гіпотетичного виду залежності. На цьому етапі перевіряються передумови кореляційно-регресійного аналізу.

Д. *Відбір головних чинників.* Вибір факторів – основа для побудови багатофакторної кореляційно-регресійної моделі.

На етапі формування переліку чинників і їх логічного аналізу збираються всі можливі фактори, зазвичай більше 20–30 факторів. Але це незручно для аналізу, і модель, що містить 20–30 чинників, буде нестійкою.

Мало чинників – теж погано. Це може призвести до помилок при прийнятті рішень в ході аналізу моделі. Тому необхідно вибирати більш раціональний перелік факторів. При цьому проводять аналіз чинників на мультиколінеарність.

Для відбору факторів використовується факторний аналіз.

Е. *Оцінювання функції регресії.* Тут визначаються числові значення параметрів регресії і обчислюється ряд показників, що характеризують точність регресійного аналізу.

6.1.5 Спектральний аналіз

Для ідентифікації моделі динаміки лінійних систем використовують автота- взаємно- кореляційні функції. Проте це вимагає досить складних математич-

них перетворень. Значно простіше (як з огляду на складність обробки даних, так і на практичну реалізацію експериментів) здійснювати ідентифікацію на основі спектрів сигналів (для детермінованих сигналів в умовах активного експерименту), або на основі спектральних щільностей (для випадкових сигналів в умовах пасивного експерименту).

Методика ідентифікації моделі динаміки $W(p)$ на основі спектрів вхідного і вихідного детермінованих сигналів наведена у пункті 5.2.2. Гармонічний спектр детермінованого сигналу є функцією амплітуд гармонічних складових від частоти $A(\omega)$. Проте у пасивному експерименті практично не зустрічаються детерміновані сигнали. А для випадкових сигналів спектр не є коректною характеристикою, оскільки на кожному проміжку часу він різниться. Тому для стохастичних сигналів знаходять і використовують для ідентифікації усереднену спектральну характеристику – спектральну щільність.

Спектральна щільність $G(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ – це частотна функція, що характеризує спектральний (частотний) склад процесу і являє собою частотну характеристику для середніх значень квадратів амплітуд гармонік, на які може бути розкладений випадковий процес. Спектральна щільність являє собою перетворення Фур'є від кореляційної функції

$$G_{xx}(j\omega) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.30)$$

$$G_{xy}(j\omega) = \int_0^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.31)$$

Відповідно $G_{xx}(\omega)$ – це автоспектральна щільність, а $G_{xy}(\omega)$ – взаємна спектральна щільність.

Примітка. Щоб визначити кореляційну функцію $R_{xx}(\tau)$ за відомою спектральною щільністю $G_{xx}(\omega)$ використовується обернене перетворення Фур'є

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(j\omega) e^{-j\omega\tau} dj\omega. \quad (6.32)$$

Для взаємної кореляційної функції аналогічно.

Для $\tau=0$ маємо

$$R_{xx}(0) = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(j\omega) dj\omega. \quad (6.33)$$

За своїм фізичним змістом спектральна щільність є величиною, яка пропорційна середній потужності процесу в інтервалі частот від ω до $\omega+d\omega$. На рис. 6.2 зображені характеристики $R(\tau)$ і $|G(j\omega)|$ для різних випадкових процесів.

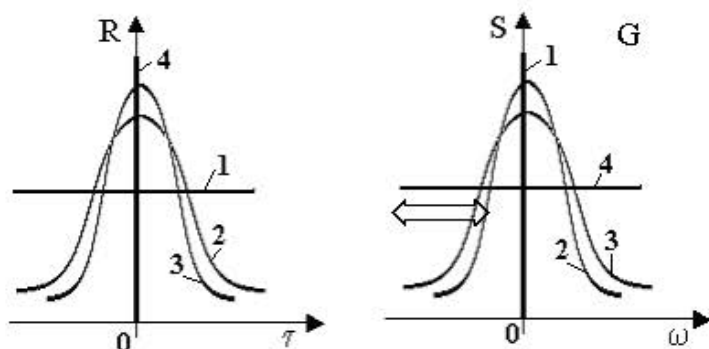


Рисунок 6.2 – Графіки спектральних щільностей і кореляційних функцій для різних випадкових процесів

Криві 4 на рис. 6.2. відповідають випадковому процесу, коли зв'язок між наступними значеннями $x(t)$ зовсім відсутній. Такий випадковий процес називається білим шумом, тобто $|G(\omega)| = const$, а $R(\tau \neq 0) = 0$.

Отже, для дослідження об'єктів і систем з випадковим входним впливом необхідно обчислення або кореляційних функцій $R(\tau)$, або спектральних щільностей $G(j\omega)$ входних і вихідних змінних.

Для встановлення взаємозв'язку між кореляційними функціями змінних входу і виходу системи, а також взаємозв'язки між їх спектральними щільностями використовується відоме інтегральне рівняння (інтеграл Дюамеля), на підставі якого

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} R_{xx}(\tau_1)g(\tau - \tau_1)d\tau_1 \quad (6.34)$$

де $g(\tau)$ – імпульсна перехідна функція системи; τ_1 – допоміжний час інтегрування.

З наведених вище виразів можна отримати зв'язок між спектральними щільностями входної і вихідної величин об'єкта при випадкових стаціонарних процесах

$$\begin{aligned} G_{xy}(j\omega) &= G_{xx}(j\omega) \cdot W(j\omega); \\ G_{yy}(j\omega) &= G_{xy}(j\omega) \cdot W^*(j\omega); \\ |G_{yy}(\omega)| &= |W(j\omega)|^2 \cdot |G_{xx}(j\omega)|, \end{aligned} \quad (6.35)$$

де $W(j\omega)$ – частотна передатна функція системи; $W^*(j\omega)$ – комплексно спряжена частотна передатна функція.

Таким чином, передатну функцію системи можна визначити на основі спектральних щільностей стаціонарного випадкового процесу на вході і виході системи

$$W(j\omega) = \frac{G_{xy}(j\omega)}{G_{xx}(j\omega)}$$

Якщо відомі лише модулі спектральних щільностей (це буває, коли приладами реєструються лише амплітудні характеристики сигналів), то може бути визначена амплітудно-частотна характеристика системи

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{\frac{|G_{yy}(j\omega)|}{|G_{xx}(j\omega)|}} \quad (6.36)$$

Знаходження передатної функції на основі її модуля може здійснюватися аналогічно до викладеної у п. 5.2.2 методики отримання виразу передатної функції за допомогою активного експерименту з синусоїдальними сигналами.

6.2 Інтелектуальні засоби ідентифікації

Інтелектуальний підхід до моделювання передбачає в першу чергу використання таких способів та особливостей побудови моделі, які підсвідомо використовує людина при створенні своєї уяви про навколишній світ. Серед них слід відзначити:

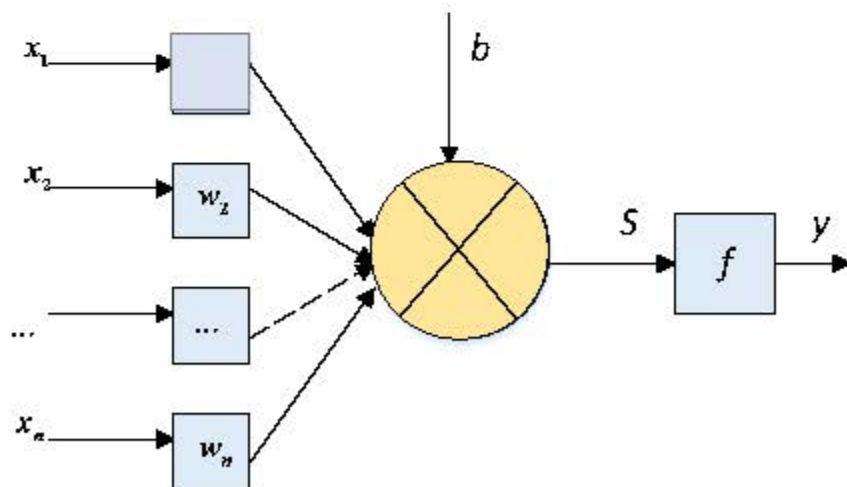
- поступове покращення моделі (навчання);
- використання відносно простих математичних операцій;
- образне уявлення про навколишній світ.

На сьогоднішньому етапі повністю відтворити людську свідомість неможлива, але деякі засоби мають з нею певну схожість. До таких засобів можна віднести нейронні мережі, нечіткі моделі, моделі на основі продукційних правил тощо.

6.2.1 Ідентифікація шляхом навчання нейронних мереж

Нейронною мережею називають структуру, що складається зі зв'язаних між собою нейронів.

Нейрон (рис. 6.3) – це складова частина нейронної мережі. Він складається з елементів трьох типів. Математично елементи нейрона: множники (синапси), суматор і нелінійний перетворювач. *Синапси* здійснюють зв'язок між нейронами, множать вхідний сигнал на число, що характеризує силу зв'язку, – вагу синапсу. *Суматор* виконує додавання сигналів, що надходять по синаптичних зв'язках від інших нейронів, і зовнішніх вхідних сигналів. *Нелінійний перетворювач* реалізує нелінійну функцію одного аргументу – виходу суматора. Ця функція називається "*функція активації*" (рис. 6.4).



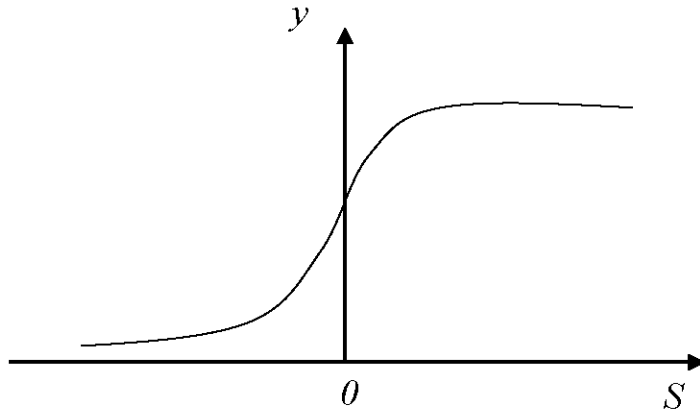


Рисунок 6.4 - Сигмоїдна функція активації

Нейрон у цілому реалізує скалярну функцію векторного аргументу. Математична модель нейрона:

$$\begin{cases} S = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b, \\ y = f(S) \end{cases}, \quad (6.37)$$

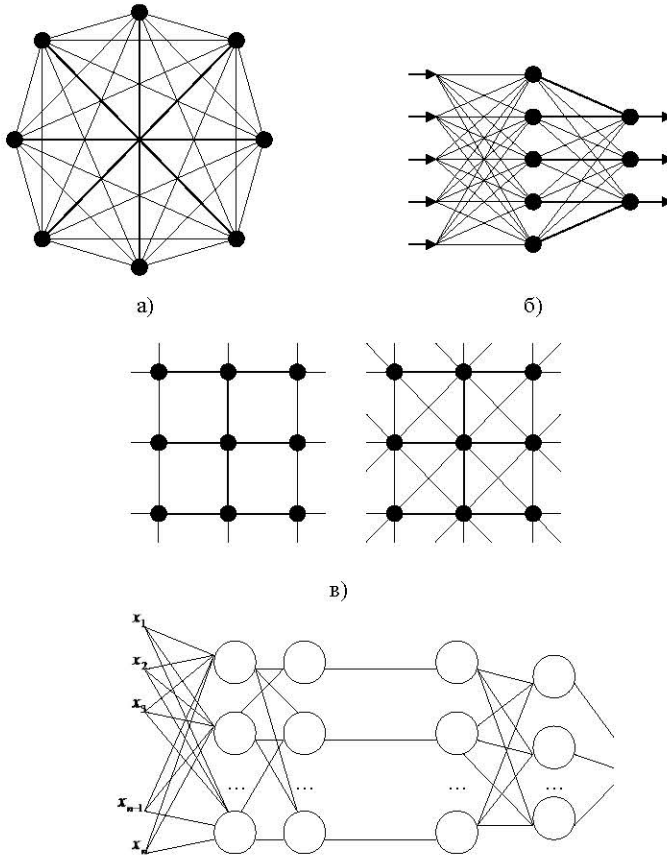
де w_i – вага синапсу, ($i=1,2,\dots,n$); b – значення зсуву; S – результат підсумовування; x_i – компонента вхідного вектора (вхідний сигнал), ($i=1,2,\dots,n$); y – вихідний сигнал нейрона; n – число входів нейрона; f – нелінійне перетворення (функція активації).

У загальному випадку вхідний сигнал, вагові коефіцієнти і значення зсуву можуть приймати дійсні значення. Вихід (y) визначається видом функції активації і може бути як дійсним, так і цілим (при функції активації релейного типу). У багатьох практичних задачах входи, ваги і зсуви можуть приймати лише деякі фіксовані значення.

Синаптичні зв'язки з додатними вагами називають *збудливими*, з від'ємними вагами – *гальмівними*.

Нейронні мережі можуть мати різні архітектури. Можна виділити три основних типи нейронних мереж:

- повнозв'язні мережі (рис. 6.5, а),
- багатошарові мережі (рис. 6.5, б),
- слабкозв'язні мережі (мережі з локальними зв'язками, рис. 6.5, в).



У *слабкозв'язних* мережах нейрони розташовуються у вузлах прямокутних ґрат. Кожен нейрон зв'язаний з чотирма чи вісьмома своїми найближчими сусідами.

У *повнозв'язній* мережі кожен нейрон зв'язаний з усіма іншими (на входи кожного нейрона подаються вихідні сигнали інших нейронів).

У *багатшарових* мережах нейрони об'єднуються в шари. *Шар* – це сукупність нейронів зі спільним входнім сигналом. Зовнішні входні сигнали подаються на входи нейронів першого шару, а виходами мережі є вихідні сигнали останнього шару. Крім входного і вихідного шарів у багатшаровій нейронній мережі є один чи декілька проміжних (прихованих) шарів. Зв'язки від виходів нейронів деякого шару m до входів нейронів наступного шару $(m+1)$ називаються *послідовними*.

Якщо нейрони кожного шару мережі мають однакову функцію активації, то таку нейронну мережу називають *однорідною*.

Нейронні мережі з локальними зв'язками. Нейрони в таких мережах розташовуються у вузлах прямокутних ґрат. Кожен нейрон зв'язаний з невеликим числом (4 чи 8) своїх сусідів.

Неструктуровані нейронні мережі. До цієї групи відносять всі моделі нейронних мереж, які не можна віднести ні до однієї з попередніх груп.

Кожна група нейронних мереж може бути використана для розв'язання лише деякого обмеженого класу практичних задач. Так багатошарові і повнозв'язні нейронні мережі з сигмоїдними функціями використовуються для розпізнавання образів і адаптивного керування; нейронні мережі з локальними зв'язками – для обробки зображень і деяких інших задач. Для розв'язання задач лінійної алгебри використовуються багатошарові мережі.

Найбільшою мірою теоретично обґрунтовані тришарові нейронні мережі з сигмоїдними функціями. На основі теореми Колмогорова-Арнольда доведено, що такі мережі можуть реалізовувати будь-які відображення вхідного сигналу у вихідний.

Апаратна реалізація нейронної мережі може бути виконана на нейрочіпах – мікросхемах, що містять фрагменти нейронних мереж, або на ПЛІС – програмованих логічних інтегральних схемах.

Нейронна мережа може бути реалізована не тільки апаратно, але й програмно, у вигляді відповідного алгоритму. Для побудови такої мережі, орієнтованої на розв'язання конкретної задачі, використовуються процедури формування нейронних мереж. Ці процедури забезпечують введення характеристик моделей нейронів і структур нейронних мереж. Як правило, у кожній окремій програмі реалізована лише частина з описаних моделей нейронів і нейронних мереж.

Вибір структури нейронної мережі еквівалентний процедурі структурної ідентифікації.

В процесі параметричної ідентифікації необхідно провести налаштування параметрів мережі – *навчання нейронної мережі*. Налаштування здійснюється за навчальною вибіркою, що складається з пар (<вхід>, <бажаний вихід>) – навчальних прикладів.

Якщо в ненавчену нейронну мережу ввести вхідний сигнал одного з прикладів навчальної вибірки, то вихідний сигнал мережі буде істотно відрізнятися від бажаного вихідного сигналу, визначеного в навчальній вибірці. Функція помилки чисельно визначає подібність всіх поточних вихідних сигналів мережі і відповідних бажаних вихідних сигналів навчальної вибірки. Найбільш розповсюдженою функцією помилки є середньоквадратичне відхилення.

Мета навчання – мінімізувати функцію помилки, тобто знайти такі значення параметрів мережі, при яких поточні вихідні сигнали мережі мінімально відрізняються від відповідних бажаних вихідних сигналів, заданих навчальною вибіркою. Отже, задача навчання є задачею оптимізації.

Навчання – це ітераційна процедура, яка при реалізації на звичайних комп'ютерах вимагає значного часу. Алгоритми навчання істотно розрізняються

за швидкістю збіжності. Однією з найважливіших характеристик нейронних мереж є швидкість збіжності алгоритмів навчання, що реалізовані в програмі.

Найпоширенішим способом навчання нейронної мережі є застосування алгоритму зворотного поширення помилки.

Алгоритм зворотного поширення помилки застосовується для багатошарового перцептрона. У такій мережі є множина входів x_1, \dots, x_n , множина виходів *Outputs* і множина внутрішніх вузлів. Перенумеруємо всі вузли (включаючи входи і виходи) числами від 1 до N (наскрізна нумерація, незалежно від топології шарів). Позначимо через $w_{i,j}$ вагу, що стоїть на ребрі, яке сполучає i -й і j -й вузли, а через o_i – вихід i -го вузла. Якщо нам відомий навчальний приклад (правильні відповіді мережі $t_k, k \in \text{Outputs}$), то функція помилки, отримана за методом найменших квадратів, матиме вигляд

$$E(\{w_{i,j}\}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \text{Outputs}} (t_k - o_k)^2 \quad (6.38)$$

Для налаштування ваги нейронів коректуються після кожного навчального прикладу i , таким чином, відбувається рух у багатовимірному просторі ваг. Щоб дістатися до мінімуму помилки потрібно рухатися у бік, протилежний градієнту, тобто на підставі кожного прикладу додавати до кожної ваги

$$\Delta w_{i,j} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{i,j}}, \quad (6.39)$$

де $0 < \eta < 1$ – множник, що задає швидкість руху.

Похідна підраховується так. Нехай спочатку $j \in \text{Outputs}$, тобто, відповідна вага входить в нейрон останнього рівня. Вага $w_{i,j}$ впливає на вихід мережі тільки як частина суми

$$S_j = \sum_i w_{i,j} x_i, \quad (6.40)$$

де сума береться на входах j -го вузла. Тому

$$\frac{\partial E}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial E}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial S_j}{\partial w_{i,j}} = x_i \frac{\partial E}{\partial S_j}. \quad (6.41)$$

Аналогічно, S_j впливає на загальну помилку тільки виходу j -го вузла o_j . Тому

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial S_j} &= \frac{\partial E}{\partial o_j} \cdot \frac{\partial o_j}{\partial S_j} = \left\{ \frac{\partial}{\partial o_j} \left[\frac{1}{2} \sum_{k \in \text{Outputs}} (t_k - o_k)^2 \right] \right\} \cdot \left[\frac{\partial o_j}{\partial S_j} \right] = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial o_j} (t_j - o_j)^2 \right] \cdot [o_j(1 - o_j)] = \\ &= -o_j(1 - o_j)(t_j - o_j). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Якщо ж j -й вузол не на останньому рівні, то у нього є виходи, позначимо їх через $Children(j)$. У цьому випадку

$$\frac{\partial E}{\partial S_j} = \sum_{k \in Children(j)} \frac{\partial E}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial S_j}, \quad (6.43)$$

і

$$\frac{\partial S_k}{\partial S_j} = \frac{\partial S_k}{\partial o_j} \frac{\partial o_j}{\partial S_j} = \omega_{i,j} \frac{\partial o_j}{\partial S_j} = \omega_{i,j} o_j (1 - o_j). \quad (6.44)$$

Похідна $\partial = \frac{\partial E}{\partial S_k}$ обчислюється аналогічно для вузла наступного рівня (від

Δ_k вона відрізняється відсутністю множника $-\eta x_{i,j}$).

Саме через особливість обчислення поправок алгоритм називається алгоритмом зворотного поширення помилки (backpropagation):

– для вузла останнього рівня (для внутрішнього вузла мережі)

$$\delta_j = -o_j(1 - o_j) \sum_{k \in Outputs(j)} \delta_k w_{j,k};$$

– для всіх інших вузлів $\Delta w_{i,j} = -\eta \delta_j x_i$.

На вхід алгоритму, крім зазначених параметрів, потрібно задавати структуру мережі. На практиці дуже хороші результати показують мережі досить простої структури, що складаються з двох рівнів нейронів – прихованого рівня (*hidden units*) і нейронів-виходів (*output units*); кожен вхід мережі з'єднаний з усіма прихованими нейронами, а результат роботи кожного прихованого нейрона подається на вхід кожному з нейронів-виходів. У такому випадку достатньо подавати на вхід кількість нейронів прихованого рівня.

Алгоритм: *BackPropagation* (η , α , $\{x_i^d, t^d\}_{i=1, d=1}^{n,m}$, *NUMBER_OF_STEPS*), де α – коефіцієнт інерціальності для згладжування різких стрибків при переміщенні по поверхні цільової функції:

1. Ініціалізувати (w_{ij}) маленькими випадковими значеннями, (Δw_{ij}), $i, j = 0$.

2. Повторити *NUMBER_OF_STEPS* разів:

Для всіх d від 1 до m :

1. Подати $\{x_i^d\}$ на вхід мережі і підрахувати виходи

2. o_j кожного вузла.

3. Для всіх $k \in Outputs$ $\delta_k = o_k(1 - o_k) \cdot (t_k - o_k)$.

3. Для кожного рівня l , починаючи з передостаннього:

Для кожного вузла j рівня l обчислити

$$\delta_j = o_j(1 - o_j) \sum_{k \in Children(j)} \delta_k w_{j,k}.$$

4. Для кожного ребра мережі (i, j)

$$\Delta w_{i,j} = \alpha \Delta w_{i,j} + (1 - \alpha) \eta \delta_j o_i.$$

$$w_{i,j} = w_{i,j} + \Delta w_{i,j}.$$

3. Видати значення w_{ij} .

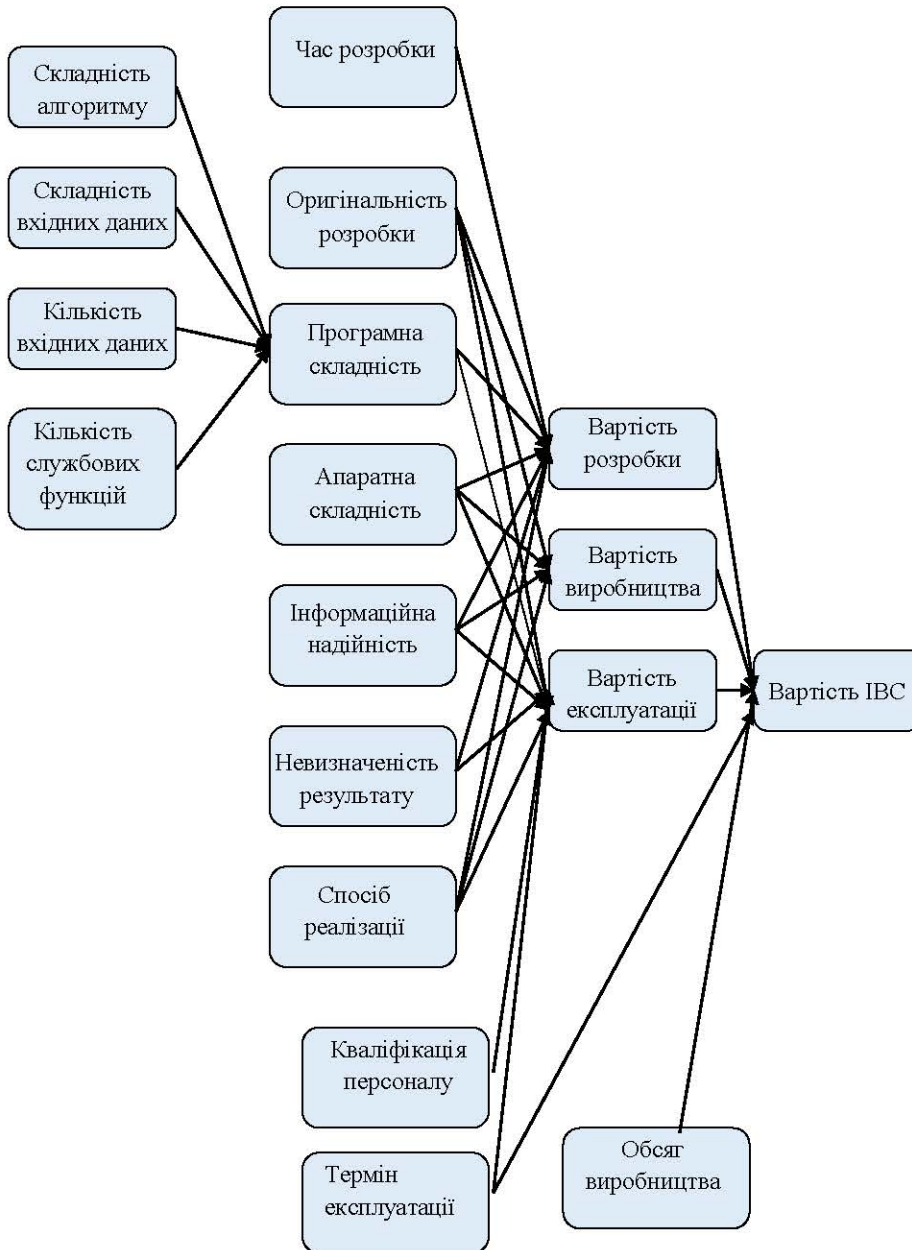
Алгоритм зворотного розповсюдження помилки достатньо простий, але має багато недоліків. По-перше, це алгоритм багатокритеріальної оптимізації (критеріями є помилки для кожного набору даних навчальної вибірки), причому критерії застосовуються послідовно – отже, немає гарантії, що навчання колись закінчиться. По-друге, навчання нейронної мережі до прийнятної точності може вимагати дуже великої вибірки і багато часу. По-третє, якість навчання суттєво залежить від вибору навчальних прикладів.

6.2.2 Нечітка ідентифікація

У багатьох випадках принаймні частина даних, за якими необхідно ідентифікувати модель, задається експертами у лінгвістичній формі «великий», «малий», «середній» тощо. У таких випадках може бути побудована нечітка регресійна модель.

Ще одним інтелектуальним засобом є *ідентифікація* математичної моделі у вигляді *нечіткої бази знань*. Нечітка база знань будується на основі висновків експерта і містить продукційні правила «якщо-то» (див. п. 4.2). Частина «якщо» містить нечіткі входні змінні моделі, частина «то» містить результати. Нечіткі входні змінні можуть приймати значення з невеликої множини термів, а можливість використання у даному правилі іншого терму з тим самим результатом характеризується функцією належності (див. п. 5.2. Набір правил разом з відповідними функціями належності і складають модель системи у вигляді нечіткої бази знань.

Процес ідентифікації починається зі створення структурно-логічної схеми залежності вихідних змінних від входних. Приклад структурно-логічної схеми нечіткої моделі залежності вартості інформаційно-вимірювальної системи (ІВС) від різноманітних факторів показано на рис. 6.6.



Структурно-логічна схема розробляється у напрямку від результату до вхідних даних. Спочатку експерт визначає, які головні фактори визначають результат (у наведеному прикладі вартість ІВС залежить від вартості розробки, вартості виробництва, вартості експлуатації, терміну експлуатації і обсягу виробництва). Далі на схемі визначають другорядні фактори, які впливають на зазначені головні (у наведеному прикладі вартість розробки ІВС залежить від часу розробки, оригінальності розробки, програмної складності, апаратної складності, ін-

формаційної надійності, невизначеності результатів (точності ІВС) і способу реалізації) і так далі, доки усі впливові фактори не будуть такими, що експерт зможе їх безпосередньо оцінити.

На основі структурно-логічної схеми будується структура бази знань у вигляді сукупності таблиць. Кожна таблиця відображає окрему частину структурно-логічної схеми «фактори-результат».

Далі база знань наповнюється правилами. До набору правил у базі знань висуваються певні вимоги:

1. Кожен терм кожної нечіткої змінної повинен зустрітися у базі знань не менше одного разу;
2. У базі знань не повинні зустрічатися правила, які при однакових входних даних дають різний результат.

Мінімальна кількість правил, які задовольняють дані умови, $P_{\min} = \max_i n_{Ti}$, де n_{Ti} – кількість термів i -ї нечіткої змінної, $i=1 \dots m$, m – кі-

лькість нечітких змінних. Максимальна кількість правил $P_{\max} = \prod_{i=1}^m n_{Ti}$. Чим більше правил, тим точніший результат, але тим більше часу необхідно для ідентифікації і обробки даних.

Звичайно кількість правил обирають так. Якщо розглядати кожну комбінацію значень нечітких змінних як точку у m -вимірному просторі, а з урахуванням функцій належності, які мають певний розкид, як m -вимірні кубики, то мінімально необхідна кількість правил повинна своїми m -вимірними кубиками покрити увесь простір значень нечітких змінних.

Експертне оцінювання усіх елементів бази знань повинно здійснюватися за певними методологічними нормами.

Метод експертних оцінок включає в себе три складові.

1. Інтуїтивно-логічний аналіз задачі. Будується на логічному мисленні та інтуїції експертів, які ґрунтуються на їх знаннях і досвіді. Цим пояснюється високий рівень вимог, що висуваються до експертів.

2. Розв'язання та видача кількісних або якісних оцінок. Ця процедура є завершальною частиною роботи експерта.

3. Обробка результатів розв'язання. Отримані від експертів оцінки повинні бути оброблені з метою одержання підсумкової оцінки проблеми. Залежно від поставленої задачі змінюється кількість виконуваних на цьому етапі розрахункових і логічних процедур.

Етапи підготовки і проведення експертизи

Якість одержуваних експертних оцінок значною мірою визначається підготовкою експертизи, а також застосовуваними методами обробки інформації, що отримується від експертів.

Можна виділити основні етапи підготовки та проведення експертизи. До них належать:

- формулювання мети експертного аналізу;
- формування групи організаторів експертизи;
- розробка процедур проведення експертного оцінювання;
- підбір експертів;
- отримання експертних оцінок;
- обробка результатів опитування та аналіз отриманих даних;
- встановлення ступеня досягнення мети експертизи.

Отримання експертних оцінок. Поняття шкали. Типи шкал

Рациональне використання інформації, що отримується від експертів, можливе за умови перетворення її у форму, зручну для подальшого аналізу. Одна з головних труднощів при оцінюванні полягає в тому, що крім явищ, об'єктів, факторів, стан яких може бути виражено кількісно (в гривнях, Кг, км, % і т. п.), доводиться оцінювати якісні фактори, рівень яких не можна точно визначити. Частина інформації, що не піддається кількісному вимірюванню, необхідно подати у вигляді непрямих оцінок.

Якщо експерт здатний порівняти і оцінити будь-які об'єкти, явища, чинники, варіанти дій, приписавши кожному з них деяке число, то кажуть, що він володіє певною системою переваг. Залежно від того, за якою шкалою задані ці переваги, експертні оцінки містять більший або менший обсяг інформації та мають різну придатність до математичної формалізації.

Шкала – це інструмент (прийнята система правил) оцінювання (вимірювання) будь-яких об'єктів чи явищ.

Розрізняють чотири типи шкал:

1. *Номінальна (класифікаційна) шкала.* Реалізує найпростіший тип вимірювання. У цьому випадку проводиться порівняння властивостей об'єкта (явища) з ознакою-еталоном, результатом є впорядкування за двоелементною шкалою, де кожному з об'єктів (явищ) присвоюється бал, що дорівнює нулю або одиниці.

Прикладом вимірювання за номінальною шкалою може служити проведення заліку. У цьому випадку експерт-викладач оцінює рівень знань студентів і виносить рішення: залік (об'єкту-студенту присвоюється бал, який дорівнює одиниці) або незалік (об'єкту-студенту присвоюється бал, який дорівнює нулю).

2. *Порядкова (рангова) шкала.* Мета полягає в упорядкуванні об'єктів (явищ), а точніше, у виявленні за допомогою експертів прихованої впорядкованості, яка, за припущенням, властива множині об'єктів. Результатом оцінювання є рішення про те, що який-небудь об'єкт (явище) переважає інший за якимось критерієм.

Прикладом може служити визначення переможців і призерів будь-якого конкурсу. Тут експерти повинні вирішити, що учасник, який посів перше місце, виявився кращим (з точки зору цілей конкурсу) за учасника, що посів друге місце. Учасник, що посів друге місце, у свою чергу, визнається кращим відносно третього і т. д.

3. *Інтервальна (різницева) шкала*. Оцінка за даною шкалою дозволяє не тільки визначити, що один об'єкт (явище) переважає інший, але також визначити: на скільки переважає. Нульова точка і одиниця вимірювання вибираються при цьому довільно.

Яскравим прикладом оцінювання за інтервальною шкалою є проведення іспиту. Тут експерт-викладач, оцінюючи рівень знань студентів, повинен не тільки вирішити, що один студент знає матеріал краще іншого, але сказати: наскільки краще. Вимірювання фактично здійснюється за шкалою з чотирьох балів ("незадовільно", "задовільно", "добре", "відмінно").

4. *Абсолютна шкала (шкала відносин)*. У даному випадку передбачається, що відомо абсолютне значення властивостей об'єкта, тобто відома справжня нульова точка. Шкала використовується для тих факторів, які можуть бути подані кількісно.

Наприклад, за допомогою такої шкали експерти можуть оцінити розмір прибутку, що може бути отриманий в результаті реалізації проекту.

Залежно від сутності досліджуваних об'єктів для їх оцінювання можуть бути використані різні шкали.

Способи вимірювання об'єктів

Розглянемо в першу чергу способи вимірювання, що дозволяють розташувати об'єкти за порядковою або інтервальною шкалою, оскільки саме такий тип оцінок найчастіше використовується при проведенні експертизи. Це пояснюється тим, що оцінка за номінальною шкалою припускає лише два варіанти відповідей – ТАК, НІ. За шкалою відносини вимірюються фактори, що мають кількісний характер. Значення цих факторів часто можна отримати розрахунковим шляхом без використання експертних оцінок.

Виділимо способи вимірювання об'єктів, які найчастіше застосовуються при оцінюванні за порядковою або інтервальною шкалою: ранжування, парне порівняння, безпосередня оцінка.

1. *Ранжування* – це розташування об'єктів у порядку зростання або зменшення будь-якої притаманної їм властивості. Ранжування дозволяє вибрати з досліджуваної сукупності факторів найбільш істотний.

Якщо є n об'єктів, то в результаті їх ранжування j -им експертом кожен об'єкт отримує оцінку x_{ij} – ранг, який приписується i -му об'єкту j -им експертом.

Значення x_{ij} знаходяться в інтервалі від 1 до n . Ранг найкращого об'єкта (найважливішого чинника) дорівнює одиниці, найменш значущого – n .

Ранжуванням, що здійснене j -тим експертом, називається послідовність рангів $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$.

Перевагою методу є його простота, а недоліком – обмежені можливості використання. При оцінюванні великої кількості об'єктів експертам дуже важко будувати ряд, оскільки доводиться враховувати безліч складних зв'язків.

2. *Парне порівняння* – це встановлення переваги об'єктів при порівнянні всіх можливих пар. Тут не потрібно, як при ранжуванні, впорядковувати всі об'єкти – необхідно в кожній з пар виявити більш значущий об'єкт або встановити їх рівність.

Парне порівняння можна проводити при великій кількості об'єктів, а також у тих випадках, коли відмінність між об'єктами настільки незначна, що практично неможливо виконати їх ранжування.

При використанні методу найчастіше складається матриця розміром $n \times n$, де n – кількість порівнюваних об'єктів. Загальний вигляд матриці парних порівнянь показаний у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Загальний вигляд матриці парних порівнянь

Об'єкти	1	2	...	j	...	n	Σ
1	1	0		1		0	
2	2	1				2	
...							
n	2	0					

При порівнянні об'єктів матриця заповнюється елементами a_{ij} так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{якщо об'єкт } i \text{ переважає об'єкт } j, \\ 1, & \text{якщо об'єкти рівнозначні,} \\ 0, & \text{якщо об'єкт } j \text{ переважає об'єкт } i. \end{cases}$$

Сума $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ (по рядку) дозволяє оцінити відносну значимість об'єктів. Той

об'єкт, для якого сума виявиться найбільшою, може бути визнаний найбільш важливим (значущим).

3. *Безпосереднє оцінювання*. Часто буває бажаним не тільки впорядкувати (ранжувати об'єкти аналізу), а й визначити, наскільки один фактор більш значущий, ніж інші.

У цьому випадку діапазон зміни характеристик об'єкта розбивається на окремі інтервали, кожному з яких приписується певна оцінка (бал), наприклад, від 0 до 10. Тому метод безпосереднього оцінювання іноді називають також бальним методом.

Число інтервалів, на які розбивається діапазон зміни властивості, може бути різним для різних експертів. Крім того, метод дозволяє давати одну і ту ж оцінку (тобто поміщати в один і той же інтервал) різним об'єктам.

Обробка результатів опитування експертів

Залежно від цілей експертизи при обробці оцінок можуть вирішуватися такі проблеми:

- формування узагальненої оцінки;
- визначення відносних ваг об'єктів;
- встановлення ступеня узгодженості думок експертів і ін.

Формування узагальненої оцінки

Нехай група експертів оцінила об'єкт, тоді x_j – оцінка j -го експерта, $j=1, \dots, m$, де m – число експертів.

Для формування узагальненої оцінки групи експертів найчастіше використовуються середні величини. Наприклад, медіана M_E , за яку приймається така оцінка, відносно якої число більших оцінок дорівнює числу менших.

Може використовуватися також точкова оцінка для групи експертів, що обчислюється як середнє арифметичне:

$$\bar{x}_e = \frac{\sum_{j=1}^m x_j}{m}.$$

Визначення відносних ваг об'єктів

Іноді потрібно визначити, наскільки той чи інший фактор (об'єкт) важливий (істотний) з точки зору будь-якого критерію. У цьому випадку говорять, що потрібно визначити вагу кожного фактора.

Один з методів визначення ваги полягає в такому. Нехай x_{ij} – оцінка фактора i , яка надана j -м експертом, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$, n – кількість факторів (об'єктів), m – кількість експертів. Тоді вага i -го об'єкта, підрахована за оцінками усіх експертів,

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^m w_{ij}}{m}, \quad i = \overline{1, n},$$

де w_{ij} – вага i -го об'єкта, підрахована за оцінками j -го експерта

$$w_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^n x_{ij}}, \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m.$$

Встановлення ступеня узгодженості думок експертів

У разі участі в опитуванні декількох експертів розбіжності в їхніх оцінках неминучі, проте величина цієї розбіжності має важливе значення. Групова оцінка може вважатися достатньо надійною тільки за умови достатності узгодженості відповідей окремих фахівців.

Для аналізу розкиду і узгодженості оцінок застосовуються міри розкиду:

- варіаційний розкид

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

де x_{\max} – максимальна оцінка об'єкта; x_{\min} – мінімальна оцінка об'єкта;

- середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x}_j)^2}{m-1}},$$

де x_j – оцінка, надана j -м експертом;

- коефіцієнт варіації

$$V = \frac{\sigma}{x_e} \cdot 100\%.$$

Узгодженість між ранжуваннями двох експертів можна оцінити коефіцієнтом Спірмена:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_{ij} - x_{ik})^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

де x_{ij} – ранг, присвоєний i -му об'єкту j -м експертом; x_{ik} – ранг, присвоєний i -му об'єкту k -м експертом; d_i – різниця між рангами, присвоєними i -му об'єкту.

Величина ρ може змінюватися в діапазоні від -1 до +1. При повному збігу оцінок коефіцієнт дорівнює 1. Рівність коефіцієнта -1 спостерігається при найбільшій розбіжності у думках експертів.

Коли необхідно визначити узгодженість у ранжуваннях великої (більше двох) кількості експертів, розраховується коефіцієнт конкордації

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 (n^3 - n)},$$

$$\text{де } S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{ij} - \frac{1}{2} m(n+1) \right)^2.$$

Коефіцієнт W змінюється в діапазоні від 0 до 1. Його рівність одиниці означає, що всі експерти присвоїли об'єктам однакові ранги. Чим ближче значення коефіцієнта до нуля, тим менш узгодженими є оцінки експертів.

Для забезпечення спільної роботи бази правил з механізмом вводу-виводу використовуємо систему, структура якої наведено на рис. 6.7:

- фазифікатор вирішує задачу перетворення чітких значень x , у нечіткі визначення вхідних величин \tilde{x} ;
- машина нечіткого логічного висновку, що на основі правил бази знань визначає значення вихідної змінної y у вигляді нечіткої множини \tilde{y} , яка відповідає нечітким значенням вхідних змінних \tilde{x} ;
- композиція. Всі нечіткі висновки всіх правил поєднуються для того, щоб сформувати одну нечітку множину для виходів всіх правил;
- дефазифікатор перетворює вихідну нечітку множину \tilde{y} в конкретне (чітке) число y .

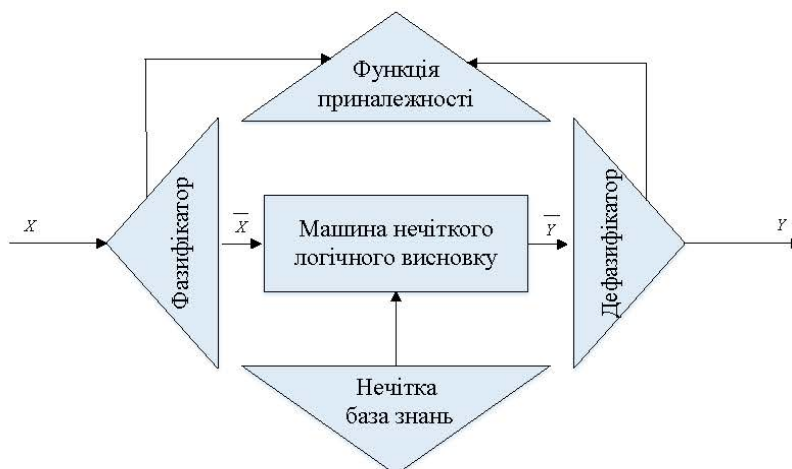


Рисунок 6.7 – Типова структура моделі нечіткого виведення

Якщо база знань сформована і функції належності усіх нечітких даних визначені, то знаходження виходу при заданих значеннях входів здійснюється за допомогою макси-мінного правила нечіткого висновку (5.42). Існують різні способи отримання нечіткого висновку: Мамдані, Цукамото, Ларсена, Сугено. Найпоширенішим є висновок Мамдані. Для цього з бази нечітких даних вибираються рядки з однаковими значеннями результату і з них утворюється диз'юнктивна нормальна форма

$$\forall y_j \in Y : \mu_y(y = y_j) = \bigcup_{j: y=y_j} \bigcap_{i=1}^5 \mu_{x_{ij}}. \quad (6.45)$$

Операція \bigcap виконується шляхом пошуку мінімуму, а операція \bigcup – шляхом пошуку максимуму.

Нехай, наприклад, дані про незалежні нечіткі аргументи оцінені експертами і занесені до таблиці 6.4. Якісні фактори можуть бути оцінені термами {“відсутній”, “малий”, “нижче середнього”, “середній”, “вище середнього”, “великий”}, яким для зручності ставиться у відповідність шкала у діапазоні (1, 6).

Припустимо, що всі експерти, які надавали наведені дані, мають однаковий ступінь впевненості в кожному з них, який можна подати у вигляді трикутної функції належності

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \frac{D/2 - x_i + x}{D/2}, & \max(1, x_i - D/2) \leq x \leq x_i \\ \frac{D/2 + x_i + x}{D/2}, & x_i \leq x \leq \min(D, x_i + D/2) \end{cases},$$

де D – діапазон шкали (у нашому випадку $D=6$).

Таблиця 6.2 – База знань

Номер правила	Вхідні дані					Результат
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	5	4	4	5	5	4
2	2	3	1	5	4	2
3	3	3	2	4	5	3
4	5	5	5	5	4	4
5	2	3	1	5	3	1
6	2	3	2	4	3	2
7	4	4	4	6	2	6
8	4	3	4	5	3	3
9	4	4	3	3	2	5
10	3	3	5	3	4	3

Нехай тепер задана інша експертна оцінка аргументів

Таблиця 6.3 – Значення аргументів

x_{10}	x_{20}	x_{30}	x_{40}	x_{50}	y
3	4	2	2	5	

Визначимо для цього набору аргументів функцію належності результату.

Користуючись даними таблиці 6.4, знаходимо $\mu_y (y = 1 \dots 6)$:

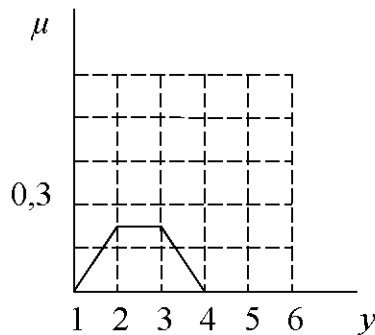
$$\mu_y (y = 1) = \max_{j:y_j=1} \left[\min_{i=1}^5 \mu_{x_{ij}} (x_{i0}) \right] = \max_{j=5} [\min (\mu_{x_{15}=2} (x_{10} = 3), \mu_{x_{25}=3} (x_{20} = 4), \mu_{x_{35}=1} (x_{30} = 2), \mu_{x_{45}=5} (x_{40} = 2), \mu_{x_{55}=3} (x_{50} = 5))] = \max_{j=5} [\min (0.7, 0.7, 0.7, 0.1)] = \max [0] = 0;$$

$$\mu_y (y = 1) = \max_{j:y_j=1} \left[\min_{i=1}^5 \mu_{x_{ij}} (x_{i0}) \right] = \max_{j=5} [\min (\mu_{x_{15}=2} (x_{10} = 3), \mu_{x_{25}=3} (x_{20} = 4), \mu_{x_{35}=1} (x_{30} = 2), \mu_{x_{45}=5} (x_{40} = 2), \mu_{x_{55}=3} (x_{50} = 5))] = \max_{j=5} [\min (0.7, 0.7, 0.7, 0.1)] = \max [0] = 0;$$

$$\mu_y (y = 2) = \max_{j:y_j=2} \left[\min_{i=1}^5 \mu_{x_{ij}} (x_{i0}) \right] = \max_{j=2,6} \{ \min [\mu_{x_{12}=2} (x_{10} = 3), \mu_{x_{22}=3} (x_{20} = 4), \mu_{x_{32}=1} (x_{30} = 2), \mu_{x_{42}=5} (x_{40} = 2), \mu_{x_{52}=4} (x_{50} = 5)], \min [\mu_{x_{16}=2} (x_{10} = 3), \mu_{x_{26}=3} (x_{20} = 4), \mu_{x_{36}=2} (x_{30} = 2), \mu_{x_{46}=4} (x_{40} = 2), \mu_{x_{56}=3} (x_{50} = 5)] \} = \max_{j=2,6} \left[\min_{j=2} (0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7), \min_{j=6} (0.7, 0.7, 1, 0.3, 0.3) \right] = \max [0, 0.3] = 0.3.$$

Аналогічно для $y = 3 \dots 6$.

Таким чином, функція належності показаний на рис. 6.8.



З графіка видно, що найможливіший рівень значення функції для даного прикладу є $y=2,5$, тобто між “малим” і “нижчим середнього”. Конкретний результат моделювання отримується за допомогою операції *дефазифікації*. Ця операція може здійснюватися різними способами і давати відповідно різні результати:

- центроїдний метод (Center of Area):

для неперервної вихідної змінної

$$y = \frac{\int_{\Omega} y \mu_y(y) dy}{\int_{\Omega} \mu_y(y) dy}, \quad (6.46)$$

для дискретної змінної

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \mu_y(y_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_y(y_i)}; \quad (6.47)$$

– максимум функції належності

$$y: \max_y \mu_y(y).$$

Висновок на основі бази знань може здійснюватися також з урахуванням ваги правил. Вага правила встановлюється коефіцієнтом в інтервалі $[0, 1]$ і обирається залежно від достовірності правила (враховуючи джерело його походження). Тоді база знань для наведеного прикладу матиме вигляд

Таблиця 6.4 – Форма бази знань з вагами правил

Номер правила	Вхідні дані					Результат	Вага правила
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	d
...

Висновок здійснюватиметься за правилом

$$\forall y_j \in Y : \mu_y(y = y_j) = \bigcup_{j: y=y_j} \left[d_j \cdot \prod_{i=1}^5 \mu_{x_{ij}} \right], \quad (6.48)$$

тобто, перед знаходженням максимуму належності серед результатів застосування окремих правил ці результати (тобто мінімальні значення належності у рядку) множаться на вагу відповідного правила.

6.2.3 Узгодження моделей

Побудова формальних моделей зазвичай здійснюється шляхом висунення гіпотез про характер процесів і навколишнього середовища для зведення вихідної задачі на природній мові до однієї з типових схем моделювання. Зазвичай виконання всіх цих припущень перевіряється для кожного конкретного випадку

застосування моделі. При цьому, природно, відсутні як точне виконання цих гіпотез на практиці, так і відповідні кількісні характеристики ступеня застосовності моделі для кожної конкретної ситуації, тому в модель об'єкта вони не входять. Тим часом такі характеристики дуже важливі, особливо за наявності декількох моделей і необхідності їх узгодження та координації.

В даний час як основа мови, що дозволяє провести узгодження в умовах невизначеності, як вже зазначалося вище, широке застосування отримала теорія нечітких множин. Застосування цієї теорії тим більш виправдано, якщо є різні вихідні припущення про характер невизначеності параметрів процесу.

Нехай розв'язок для кожної з m моделей задано нечіткою множиною D_i на множині розв'язків X , тоді узгоджений розв'язок D може бути поданий як перетин окремих нечітких розв'язків:

$$D = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_m.$$

Для кожного нечіткого розв'язку D_i задається функція належності $\mu_{D_i}(x)$, що отримана в результаті дослідження застосовності моделі або вихідного припущення для процесу.

Факт виконання k припущень про характер процесів враховується введенням показника $L_i = L_{i1}, L_{i2}, \dots, L_{ik}$, де $0 \leq L_{ij} \leq 1$. При цьому, якщо припущення j про процес для моделі i ідеально виконується, $L_{ij} = 1$, якщо це припущення не виконується, $L_{ij} = 0$, в інших випадках $0 < L_{ij} < 1$. Тоді підсумкова функція належності виглядатиме [5]:

$$\mu_D(x) = [\mu_{D_1}(x)]^{L_1} \wedge \dots \wedge [\mu_{D_m}(x)]^{L_m}.$$

Параметри L_i , що характеризують нечіткість моделей при порушенні умов їх існування, можуть бути визначені з урахуванням дисперсії моделей, яка обчислюється в результаті ідентифікації моделей для реальних об'єктів. У випадку, якщо показник L_i неможливо визначити об'єктивно, він може бути визначений на основі експертних оцінок і повинен характеризувати ступінь здійсності припущень, точність і застосовність моделі в даній конкретній ситуації.

6.3 Ідентифікація хаотичних систем

Нелінійні динамічні системи широко представлені в сучасних технологічних і природних процесах, незважаючи на детермінізм їх визначення, можуть проявляти хаотичні властивості. При цьому надзвичайно малі збурення у вхідних впливах і параметрах самої системи призводять до значних, але кінцевих збурень вихідного сигналу. Це призводить до певних труднощів при конструюванні і передбаченні поведінки таких систем.

При математичному та комп'ютерному моделюванні систем динамічного хаосу виникають специфічні для них проблеми. Насамперед – потрібно забезпечити наявність працездатного критерію адекватності моделі. Для задач ідентифікації наявність такого критерію є наріжним каменем. Найчастіше використовувані при моделюванні поведінки динамічних систем критерії, засновані на звичних мірах в просторі вихідних сигналів, виявляються непрацездатними. З іншого боку, такі спеціальні характеристики хаотичних систем, як фрактальна розмірність, показник Ляпунова, перетин Пуанкаре, недостатньо інформативні для задачі ідентифікації через обмежений діапазон зміни, велику похибку при їх вимірюванні для реальних систем та суттєву обчислювальну складність.

6.3.1 Параметрична ідентифікація хаотичної динамічної системи Дуффінга

Розглянемо особливості задачі синтезу критерію ідентифікації нелінійної динамічної системи – нелінійної коливальної системи Дуффінга, яка проявляє властивості динамічного хаосу.

Постановка задачі

Розглянемо нелінійну динамічну систему Дуффінга:

$$\ddot{x} + c_0 \dot{x} + \Omega_0^2 x + \beta x^3 = u(t), \quad (6.49)$$

або її ж із збереженням фізичних розмірностей:

$$m\ddot{x} + v\dot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = F(t). \quad (6.50)$$

Тут m – маса об'єкта, $x(t)$ – координата (вихідний сигнал), $u(t) = U \sin(\omega_m t)$ – зовнішня збурювальна сила, до k_1 – коефіцієнт лінійної компоненти повертаючої сили, k_3 – коефіцієнт при нелінійній частини, Ω_0 – власна частота при відсутності нелінійності, v і c_0 – розмірний і безрозмірний коефіцієнти демпфірування, β – безрозмірний коефіцієнт нелінійної частини.

У даній задачі як ідентифікований параметр буде використовуватися коефіцієнт β . Параметри об'єкта і вхідного сигналу були обрані таким чином ($U = 1$,

$\omega_{in} = 1$, $c_0 = 0.05$, $\Omega_0 = 1$, $\beta \approx 2$), щоб виявлялася хаотична динаміка. Вихід об'єкта $\mathbf{O}(x_0)$ спостерігається з похибкою $\omega(t)$ – випадковим сигналом з рівномірним розподілом, амплітудою $\omega_a = 0.05$ і характерним часом автокореляції $t_\omega = 0,1$. Вихід моделі $\mathbf{M}(x_m(t))$ вимірюється точно.

На рис. 6.9 наведені фрагменти вихідних сигналів системи (6.49) при близьких значеннях параметра β . Незважаючи на невелику різницю в значеннях параметрів і сильному впливі періодичного вхідного сигналу, виходи сильно розрізняються, що виключає можливість застосування класичних критеріїв ідентифікації.

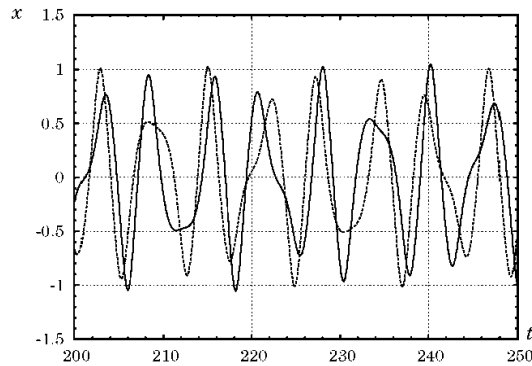


Рисунок 6.9 – Вихідні сигнали системи вигляду (6.49) при значеннях параметра $\beta = 1,9$ і $\beta = 2,0$

Слід відзначити, що дана система проявляє хаотичні властивості тільки при малих значеннях c_0 . При більшому впливі дисипативної складової система (6.49) якісно не відрізняється від лінійної коливальної системи, і для її ідентифікації застосовуються відомі критерії.

На рис. 6.10 наведений фазовий портрет даної системи для $t \in [0; 500]$. При більшому часі моделювання графік практично повністю "зафарбовує" обмежену область, що є непрямим підтвердженням хаотичних властивостей системи.

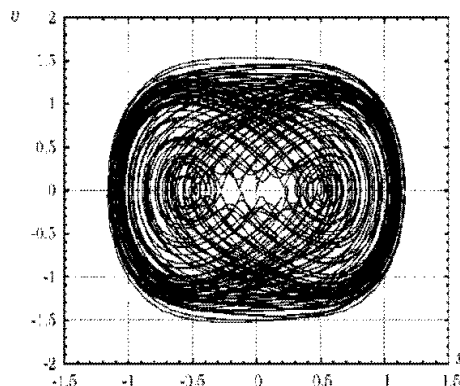


Рисунок 6.10 – Фазовий портрет системи вигляду (6.49)

Ставиться задача розробки такого виду критерію, на підставі якого можна було б використовувати існуючі методи ідентифікації.

Вимоги ідентифікації в реальному часі без суттєвих обчислювальних витрат, високої завадостійкості і універсальності обґрунтовують застосування як базових адаптивно-пошукових методів ідентифікації.

Аналіз властивостей системи

Для працездатності методів ідентифікації необхідно, щоб критерій ідентифікації $F(x_o(t), x_m(t))$:

- визначався не миттєвим виходом системи, а деякою інтегральною величиною;
- в свою чергу, ця величина повинна явно залежати від значення ідентифікованого параметра;
- мати достатню стійкість до шумів;
- обчислення критерію за вимірними величинами $x_o(t)$, $x_m(t)$ не повинно вимагати істотних обчислювальних витрат.

Насамперед відзначимо, що при незмінних параметрах системи і вхідного сигналу, незважаючи на те, що система та її оточення постійно обмінюються енергією, середнє значення повної енергії системи залишається сталим. У повну енергію вносять свій внесок кінетична

$$E_k = m \frac{\dot{x}(t)^2}{2} \quad (6.51)$$

і потенціальна енергія

$$E_p = \int_0^x (k_1 x + k_3 x^3) dx = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_3 x^4}{4}. \quad (6.52)$$

Як випливає з (6.52), ідентифікована величина β (в розмірному вигляді їй відповідає параметр k_3) безпосередньо входить тільки в вираз для потенційної енергії, причому її вплив відіграє більше значення при максимальних значеннях x .

Скористаємося тим, що вплив параметра β найбільш істотний при максимальних значеннях x , і отже, визначає величину

$$A = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x^2(t) dt, \quad (6.53)$$

де τ – досить великий інтервал усереднення.

У свою чергу, дану величину просто вимірювати, оскільки через велике значення τ (зазвичай порядку декількох десятків періодів вхідного сигналу) вплив шумів вимірювання мінімальний. За критерій ідентифікації при цьому можна вважати як величину $|A_o - A_m|$, так і $(A_o - A_m)^2$.

6.3.2. Адаптивно-пошукова ідентифікація хаотичної динамічної системи Ресслера

Розглянемо ще один тип хаотичної системи – систему Ресслера на прикладі хімічного реактора. Використаємо для синтезу критерію якості ідентифікації та побудови системи метод адаптивно-пошукової ідентифікації.

Постановка завдання

Розглянемо нелінійну динамічну систему Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + a \cdot y \\ \dot{z} = b + z \cdot (x - c) \end{cases} \quad (6.54)$$

Тут x, y, z – змінні стану системи, які відповідають концентраціям основних реагентів в модельованій хімічній системі. Відповідно a, b, c – параметри, що визначають динаміку системи (в даній системі визначаються константами хімічної рівноваги і концентраціями допоміжних реагентів).

При моделюванні даної системи припустимо $a = 0.25, b = 1$. У цьому випадку параметр c визначає тип динаміки системи. Визначення значення даного параметра і буде метою задачі ідентифікації.

Вихід об'єкта $O(x_o)$ спостерігається з похибкою $\omega(t)$ – випадковим сигналом з рівномірним розподілом, амплітудою $\omega_a = 0,05$ і інтервалом автокореляції $\tau_\omega = 0,1$. Виходи моделей $M_t(x_{mt}(t))$ і $M_b(x_{mb}(t))$ вимірюються точно.

У даній системі немає вхідного сигналу $u(t)$. Це пояснюється тим, що, за рахунок підтримки постійних концентрацій допоміжних компонент, постійного поповнення вихідних речовин і видалення продуктів реакції, система має власне джерело енергії, яке забезпечує динаміку системи і при відсутності вхідного сигналу.

Аналіз властивостей системи

Як і інші системи хаотичної динаміки, система Ресслера не дозволяє побудувати систему ідентифікації, основу на формуванні критерію якості ідентифікації як міри близькості значень вихідних сигналів об'єкта $x_o(t)$ і моделі $x_m(t)$. Більше того, сам вигляд поведінки даної системи може значно змінюватись при малих змінах параметрів, здійснюючи перехід від хаотичного до складно-періодичного і назад.

При малих значеннях параметра ($c \approx 2$) система проявляє регулярну динаміку, здійснюючи коливальний рух навколо точки нестійкості рівноваги. При збільшенні значення параметра c відбувається подвоєння періоду, поведінка системи стає все складнішою, і в певному діапазоні значень параметра система демонструє хаотичну динаміку.

На рис. 6.11 наведені портрети динаміки системи (6.54) при близьких значеннях параметра c , а на рис. 6.12 – спектральні характеристики, побудовані за значеннями $x(t)$.

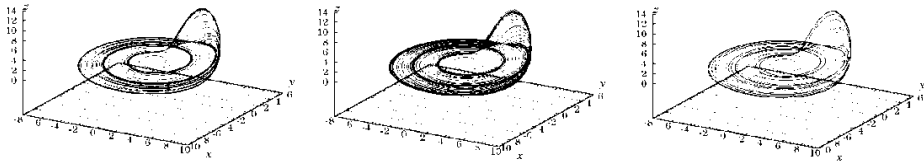


Рисунок 6.11 – Портрет динаміки системи при значеннях параметра $c = 5.58$, $c = 5.59$ і $c = 5.60$

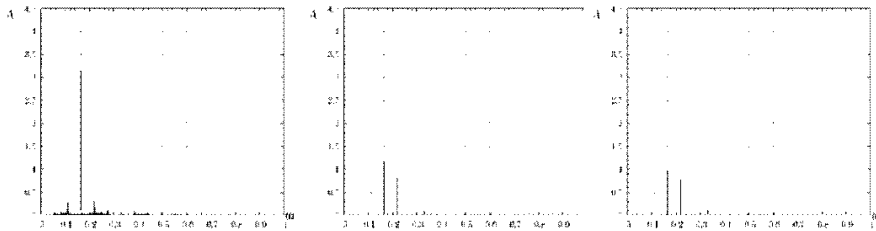


Рисунок 6.12 – Спектр системи при $c = 5.58$, $c = 5.59$ і $c = 5.60$

При значенні параметра $c = 5.58$ спектр системи має в певних областях неперервний характер, причому ця неперервність зберігається при моделюванні на значних часових інтервалах. Це дає підстави зарахувати систему до систем хаотичної динаміки.

При збільшенні параметра c всього на 0,2% спектр системи практично являє собою набір обмеженої кількості частот, і система демонструє складно-періодичний рух. Однак на фазовому портреті при обмеженому інтервалі моделювання графік візуально більш щільно заповнює область атрактора. При збільшенні параметра c ще на 0,2% спектральна характеристика практично не змінюється, проте візуально спостерігається значно менш щільне заповнення фазового простору.

Слід зазначити, що такий поділ видів динаміки системи допустимий тільки в ідеальному випадку, коли повністю відсутні завади, і система спостерігається необмежений час. У разі обмеження часу вимірювання неможливо розрізнити неперервний спектр від ряду близько розташованих частот. Якщо ж у самій системі (6.54) діють малі неконтрольовані збурення, то різниця між хаотичним і складно-періодичним рухом практично зникає.

Розглянута система (6.54) являє собою модель гіпотетичної хімічної реакції, причому вона відбувається в особливих умовах, які практично неможливо реалізувати. Це не дає скористатися очевидними законами збереження або ж

іншими фізичними інваріантами для визначення критерію працездатної системи ідентифікації.

Тим не менш, аналіз як вихідної системи рівнянь, так і результатів чисельного моделювання, дозволяє знайти принаймні один з працездатних критеріїв. Насамперед відзначимо, що ідентифікований параметр c безпосередньо входить тільки в рівняння для $z(t)$. При моделюванні динаміки системи можна помітити, що при періодичному режимі роботи величина z мала. При збільшенні значення параметра c спостерігається зростання аттрактора уздовж осі аплікату. Чисельний експеримент показав, що характерним критерієм є $\max(A_z)$, а значення таких інтегральних величин, як $\left| \overline{z(t)} \right|$, $\left| \overline{z^2(t)} \right|$, недостатньо сильно залежать від параметра c .

Необхідний час вимірювання максимального значення $z(t)$ в розглянутій системі становить близько 100–150 періодів, що відповідають найбільш вираженій частоті в спектрі системи. Тим не менш, це не є гарантованою оцінкою, оскільки для системи хаотичної динаміки не можна точно передбачити, коли буде досягнутий максимум якоїсь зі змінних стану.

Ключові слова

Статистична задача ідентифікації, кореляційний аналіз, функціональна залежність, статистичний зв'язок, коваріаційна функція, кореляційна функція, коефіцієнт кореляції, ергодичний процес, коефіцієнт детермінації, чутливість, множинне кореляційне відношення, множинний індекс кореляції, факторна дисперсія, залишкова дисперсія, спектральна щільність потужності, частотна передатна функція, фактор, факторний аналіз, загальні фактори, характерний фактор, факторні навантаження, матриця вибіркового парних коефіцієнтів кореляції, залишковий коефіцієнт кореляції, адекватність факторної моделі, регресійний аналіз, функція регресії, крива регресії, коефіцієнт регресії, залишкова дисперсія, коефіцієнт множинної регресії, аналіз залишків, викид, тренд; нейронна мережа, нейрон, синапс, суматор, функція активації, навчання нейронної мережі, імітація функціонування мережі, нечітка ідентифікація, база знань, база нечітких даних, диз'юнктивна нормальна форма, експерт, ступінь упевненості, шкала, експертна оцінка, функція належності, лінеаризована форма, коефіцієнт лінеаризації, комбінована стохастична і нечітка невизначеність, адекватність моделі; узгодження моделей, хаотична динамічна система Дуффінга, хаотична динамічна система Ресслера, критерій ідентифікації, фазовий портрет.

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. Оцініть кількість статистичних даних, яка необхідна для визначення коефіцієнта кореляції r_{xy} з похибкою 1%.

2. Оцініть кількість даних, яка необхідна для побудови факторної моделі з трьома факторами.

3. Якщо x – вхідний сигнал системи, а y – вихідний, то кореляційну функцію слід розраховувати за формулою $\int_0^{\infty} x(t-\tau)y(t)dt$, а не $\int_0^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt$. Чому?

4. Складіть загальний аналітичний вираз перетворення, яке виконує двохарова нейронна мережа.

5. Побудуйте нейронну мережу для моделювання розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Який вигляд повинна мати їх функція активації?

6. Як впливає довіра до експерта на вигляд функції належності експертної оцінки?

7. Сформулюйте задачу ідентифікації моделі в умовах комбінованої невизначеності.

8. В результаті пасивного експерименту отримані коваріаційні функції вхідного та вихідного сигналів системи

$$R_{xx} = e^{-\tau}, \quad R_{xy} = e^{-2\tau}.$$

Знайти частотну передатну функцію системи.

9. Як здійснюється генерування даних з заданими статистичними характеристиками?
10. Як здійснюється моделювання лінійних динамічних підсистем?
11. Як здійснюється моделювання нелінійних підсистем?

Література

1. Адаптивные системы идентификации / [А. Г. Кику, В. И. Костюк, В. Е. Краскевич и др.]; под ред. В. И. Костюка – К. : Техніка, 1975. – 288 с.
2. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
3. Букетов А. В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем : навчальний посібник / Букетов А. В. – Тернопіль : СМП Тайп, 2009. – 260 с.
4. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и её инженерные приложения / Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. – М. : Наука, 1991. – 384 с.
5. Воронов А. А. Теория автоматического управления : в 2-х томах / Воронов А. А. – М. : Энергия, 1986. – Т.2 – 503 с.
6. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування : навчальний посібник / В. М. Дубовой. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 308 с.
7. Иванова В. М. Математическая статистика / [Иванова В. М., Калинина В. Н., Нешумова Л. А., Решетникова И. О.] – М. : Высш. школа, 1981. – 371 с.
8. Михалёв А. И. Адаптивно-поисковая идентификация хаотической динамической системы Дуффинга / Михалёв А. И., Гуда А. И. // Адаптивные системы автоматического управления. – 2008. – № 12 (32). – С. 166–171.
9. Михалёв А. И. Синтез критерия идентификации нелинейных динамических систем на физических принципах / Михалёв А. И., Гуда А. И., Новикова Е. Ю. // Адаптивные системы автоматического управления. – 2007. – № 11(31). – С. 136–142.
10. Мітюшкін Ю. І. Soft Computing: ідентифікація закономірностей нечіткими базами знань : монографія / Мітюшкін Ю. І., Мокін Б. І., Ротштейн О. П. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2002. – 145 с.
11. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів : навчальний посібник / Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 300 с.
12. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров / Мун Ф. – М. : Мир, 1990. – 312 с.

13. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / [Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф. и др.]. ; под ред. Поспелова Д. А. – М. : Наука, 1986. – 312 с.
14. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / Пугачев В. С. – М. : Наука, 1979. – 496 с.
15. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечёткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети / Ротштейн А. П. – Винница : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999. – 320 с.
16. Справочник по теории автоматического управления под ред. А. А. Красовского – М. : Наука. – 1987. – 712 с.
17. Терентьев С. В. Экономико-математические методы Методы экспертных оценок [Электронный ресурс] : ОрелГТУ, кафедра "Информационные системы" / С. В. Терентьев. Режим доступа : – <http://emm.ostu.ru/lect/lect7.html#vopros5>
18. Уотермен Д. Руководство по экспертным системам / Уотермен Д. (пер. с англ.) – М. : Мир, 1989. – 388 с.
19. Штовба С. Д. Проектирование нечётких систем средствами MATLAB / Штовба С. Д. – <http://www.twirpx.com/about/faq/downloading/> М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
20. Третьяк А. И. Вероятностно-аналитическое моделирование технико-экономических систем : монография в 2-х частях / Третьяк А. И., Коновалов А. Л., Дубров К. А. – Одесса : Астропринт, 2003. – 224 с., 440 с.

7 МЕТОДИ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Дуже важливою задачею в процесі ідентифікації математичних моделей є обробка експериментальних даних, які отримані під час активних або пасивних ідентифікаційних експериментів. Для цього застосовуються різноманітні методи та алгоритми, вибір яких зумовлений видом об'єкта моделювання, моделі та наявними обчислювальними потужностями комп'ютерних засобів.

7.1 Інтерполяція

Мета інтерполяції (*interpolation*) – побудувати функцію $F(x)$, яка приймає в окремих точках $x_i[a, b]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) (вузли інтерполяції) значення

$$F(x_0) = y_0, \quad F(x_1) = y_1, \quad \dots, F(x_i) = y_i, \quad \dots, F(x_n) = y_n, \quad (7.1)$$

що збігаються з раніше заданими (частіше за все, отриманими з експерименту) значеннями в цих точках невідомої функції $y = f(x)$. Геометрично це означає, що потрібно знайти криву $y = F(x)$ певного типу, яка проходить через систему точок $M(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) (рис. 7.1).

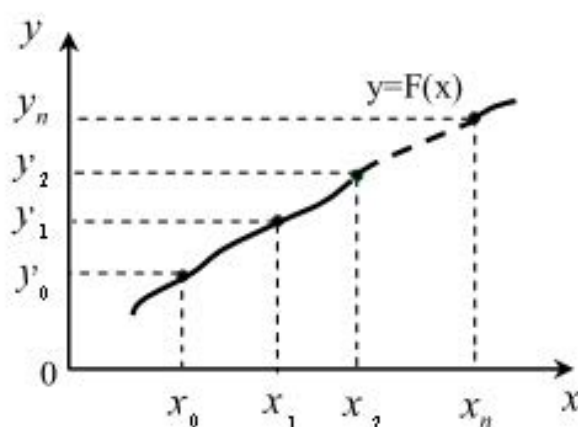


Рисунок 7.1 – Інтерполяція

В загальних випадках ця задача має нескінченну множину розв'язків чи зовсім не має розв'язку, але вона стає однозначною, якщо замість довільної функції $F(x)$ шукати поліном $P_n(x)$ степеня не вище n , який задовольняє умову (7.1), тобто

$$P_n(x_0) = y_0, \quad P_n(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P_n(x_i) = y_i, \quad \dots, \quad P_n(x_n) = y_n.$$

Інтерполяційну формулу $y = F(x)$ використовують для наближеного обчислення значень функції $f(x)$ для $x \neq x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Треба відзначити, що є інтерполяція в вузькому розумінні, коли $x \in [x_0, x_n]$, та *екстраполяція*, коли x знаходиться за межами інтервалу $[x_0, x_n]$ тобто $x < x_0$ чи $x > x_n$.

Говорячи про процедуру інтерполювання, обов'язково потрібно вказати обмеження, які накладаються на набір базових точок. Початкова сітка точок повинна описувати лише плавну функцію. Відповідно до умов конкретної задачі обов'язково повинні задаватися значення похідної функції у крайових точках вхідної сітки для отримання однозначного результату.

До основних методів інтерполяції належать:

1) *лінійна інтерполяція (linear interpolation)*. Найбільш простий і швидкий метод, в якому задані вузлові точки з'єднуються прямими;

2) *інтерполяція із застосуванням багаточлена (interpolation using polynomial)*. Використовується багаточлен n -го порядку, який в загальному випадку має вигляд

$$P(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

де a_i , $i = \overline{0, n}$ – постійні коефіцієнти.

Всі методи знаходження інтерполяційного багаточлена зводяться до отримання постійних коефіцієнтів. До таких методів належать:

- a. Інтерполяція різницевиими методами;
- b. Ермітова поліноміальна інтерполяція;
- c. Інтерполяція Лагранжа;

3) *поліноміальна інтерполяція сплайнами (polynomial spline interpolation)*. Вузлові точки з'єднуються з використанням багаточлену заданого порядку, який обирається залежно від методу. До найбільш поширених методів інтерполяції сплайнами належать:

- a. Класичні кубічні сплайни;
- b. Ермітові сплайни;
- c. В-сплайни;
- d. Криві Без'є.

7.1.1 Різницеві методи

Існує багато кінцево-різницевих методів інтерполяції. Найбільш поширеним є метод Ньютона для інтерполяції “уперед” (метод Ньютона – Грегорі). Інтерполяційний поліном в цьому випадку має вигляд:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + C_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Коефіцієнти C_i знаходять з рівнянь:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

які дозволяють записати систему

$$\begin{cases} C_0 = y_0, \\ C_0 + C_1(x_1 - x_0) = y_1, \\ C_0 + C_1(x_2 - x_0) + C_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2, \\ \dots \\ C_0 + C_1(x_n - x_0) + \dots + C_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}) = y_n. \end{cases} \quad (7.2)$$

Це лінійна система рівнянь з трикутною матрицею.

Якщо прийняти крок $x_{i+1} - x_i = h$, то в області змінювання $x \in [x_0, x_n]$ отримаємо одновимірну рівномірну сітку та зможемо скористатись різницеvim зображенням системи (7.2), яке приводить до таких різницевих виразів для коефіцієнтів:

$$C_0 = y_0,$$

$$C_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

де Δy_0 – права різниця першого порядку в точці y_0 ;

$$C_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2},$$

де $\Delta^2 y_0$ – права різниця другого порядку;

$$C_j = \frac{\Delta^j y_0}{(j!)h^j},$$

де $\Delta^j y_0$ – права різниця j -го порядку.

Тоді

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \quad (7.3)$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

З практичної точки зору для визначення різниць вищих порядків використовують вираз:

$$\Delta^j y_i = \Delta(\Delta^{j-1} y_i) = \Delta^{j-1} y_{i+1} - \Delta^{j-1} y_i.$$

При $n = 1$ з (7.3) отримуємо формулу для лінійної інтерполяції

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0),$$

а якщо $n = 2$ – формулу параболічної чи квадратичної інтерполяції

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Якщо дана необмежена кількість значень функції x , то кількість n може бути будь-якою. Практично в цьому випадку n вибирають так, щоб різниця $\Delta^n y_i$ була постійною з заданою точністю. За початкове значення X_0 можна приймати будь-яке табличне значення аргументу x . Коли кількість значень функції скінченна, то кількість n обмежена та не може бути більше кількості значень функції y , зменшеної на одиницю.

Формула (7.3) носить назву першої інтерполяційної формули Ньютона. Цей вираз незручний для інтерполяції в околі останніх значень y . В цьому випадку, як правило, використовують другу інтерполяційну формулу Ньютона, яка отримана при використанні лівих різниць від останнього значення (x_n, y_n) (інтерполяція “назад”). Тоді інтерполяційний поліном має вигляд:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & C_0 + C_1(x - x_n) + C_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ & + C_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots \\ & \dots + C_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \end{aligned}$$

Коефіцієнти C_j визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} C_0 &= y_n \\ C_1 &= \frac{\Delta y_{n-1}}{h} = \frac{\nabla y_n}{h}, \end{aligned}$$

де ∇y_n – ліва різниця першого порядку в точці y_n ,

$$C_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} = \frac{\nabla^2 y_n}{2h^2},$$

де $\nabla^2 y_n$ – ліва різниця другого порядку,

$$C_j = \frac{\Delta^j y_{n-j}}{j!h^j} = \frac{\nabla^j y_n}{j!h^j},$$

де $\nabla^j y_n$ – ліва різниця j -го порядку.

Кінцевий вираз для другої інтерполяційної формули Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Інтерполяційні формули Ньютона можуть бути використані для екстраполяції функції. Якщо $x < x_0$, то зручно використовувати першу інтерполяційну формулу Ньютона, причому

$$\frac{x - x_0}{h} < 0.$$

Якщо $x > x_n$, то використовують другу інтерполяційну формулу Ньютона, де

$$\frac{x - x_n}{h} > 0.$$

Таким чином, перша інтерполяційна формула Ньютона, як правило, використовується для інтерполяції “уперед” та екстраполяції “назад”, а друга – для інтерполяції “назад” та екстраполяції “уперед”.

В формулах Ньютона використовують ліві та праві різниці. Використання центральних різниць для отримання інтерполяційних формул приводить до формул Гаусса, Стірлінга та Бесселя.

Треба відзначити, що центральні різниці використовуються не в звичайному вигляді, а шляхом застосування правих різниць при поступовому зсуві індексів вліво.

Ці формули зручно розглядати на $(2n+1)$ рівновіддалених вузлах інтерполяції

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n,$$

причому

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h \quad (i = -n, -(n-1), \dots, n-1),$$

а для функції $y = f(x)$ відомі її значення в цих вузлах $y_i = f(x_i)$.

Потрібно побудувати поліном $P(x)$ степеня не вище $2n$ такий, що

$$P(x_i) = y_i.$$

Поліном $P(x)$ відшукується у вигляді:

$$P(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + C_3(x - x_0)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + C_{2n-1}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n). \quad (7.4)$$

Аналогічно інтерполяційним формулам Ньютона знаходимо

$$\begin{aligned} C_0 &= y_0; \\ C_1 &= \frac{\Delta y_0}{h}; \\ C_2 &= \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}; \\ &\dots \dots \dots \\ C_{2n-1} &= \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!h^{2n-1}}; \\ C_{2n} &= \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів в (7.4), отримаємо першу інтерполяційну формулу Гаусса, яка містить різниці (таблиця 7.1):

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-2}, \dots$$

Аналогічно можна отримати другу інтерполяційну формулу Гаусса, яка містить центральні різниці:

$$\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$$

Використавши середнє арифметичне першої та другої інтерполяційних формул Гаусса, отримаємо формулу Стірлінга. Ці формули дозволяють вивести інтерполяційну формулу Бесселя. Взагалі, використання інтерполяційних формул з центральними різницями доцільно всередині інтервалу, тоді як на його краях, як правило, використовують формули Ньютона. Застосування цих формул розглядається в таблиці 7.1.

Похибки інтерполяції для формул Ньютона можна оцінити відповідно для першої та другої формул як:

$$\Delta_n(x) = \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0,$$

$$\Delta_n(x) = \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_n,$$

де $q = \frac{x - x_n}{h}$.

Таблиця 7.1 – Застосування різницевих формул інтерполяції

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	Примітки
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$	Друга формула Ньютона
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		Формула Стірлінга
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	Формула Бесселя
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_1$	Перша формула Ньютона
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	

Для формули Стірлінга:

$$\Delta(x_n) = \frac{\Delta^{2n+1} y_{-(n-1)} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2(2n+1)!} q(q^2 - 1)(q^2 - 2^2) \dots (q^2 - n^2).$$

Для випадку нерівновіддалених значень аргументу можна отримати

інтерполяційні формули, вживаючи визначення поділених різниць. Наприклад, відношення

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

називається поділеною різницею першого порядку, а відношення

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

називається поділеною різницею другого порядку.

Поділені різниці порядку n отримуються з рекурентного відношення:

$$[x_i, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - [x_i, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}.$$

Можна отримати інтерполяційну формулу Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу:

$$P(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

7.1.2 Інтерполяція за Лагранжем

Інтерполяція за Лагранжем (Lagrange interpolation) застосовується в загальному випадку для довільно розташованих вузлів.

Інтерполяційний поліном для методу Лагранжа поданий у вигляді:

$$P_n(x) = y_0 b_0(x) + y_1 b_1(x) + \dots + y_n b_n(x),$$

де всі $b_j(x)$ ($j=0, \dots, n$) – поліноми степеня n , коефіцієнти яких можна знайти з допомогою $(n+1)$ рівняння:

$$P_n(x_i) = y_i,$$

внаслідок чого отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 b_0(x_0) + y_1 b_1(x_0) + \dots + y_n b_n(x_0) = y_0; \\ \dots \\ y_0 b_0(x_n) + y_1 b_1(x_n) + \dots + y_n b_n(x_n) = y_n. \end{cases}$$

Якщо значення $b_j(x_i)$ обирається так, що

$$b_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

то записана система рівнянь буде задовільна.

Ця умова означає, що будь-який поліном $b_j(x)$ дорівнює нулю при кожному x_i , крім такого, що дорівнює x_j . Тому в загальному випадку поліном $b_j(x)$ має такий вигляд:

$$b_j(x) = C_j(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n).$$

Якщо $b_j(x_j)=1$, то коефіцієнти C_j визначаються з виразу:

$$C_j = 1/(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n).$$

Для полінома, який шукаємо, отримаємо:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}.$$

Вводячи позначення

$$L_j(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n),$$

записуємо

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)}.$$

Треба відзначити дві головні властивості поліномів Лагранжа:

$$1) \sum_{j=0}^n \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} = 1;$$

2) якщо $P_n(x)$ лінійно залежить від y_j , то слушний принцип суперпозиції: інтерполяційний поліном суми декількох функцій дорівнює сумі інтерполяційних поліномів доданків.

Залишковий член інтерполяційної формули

Припускаючи вузли інтерполяції відмінними один від другого, а функцію $f(x)$ такою, що має неперервну похідну порядку $n+1$ на проміжку $[a, b]$, де розміщені вузли інтерполяції, можна записати залишковий член інтерполяційної формули

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

на цьому проміжку у вигляді

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

де $\xi \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1 = \min(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\alpha_2 = \max(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Тоді

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|,$$

де $M_{n+1} = \max_{x \in [\alpha_1, \alpha_2]} |f^{(n+1)}(x)|$.

7.1.3 Сплайн-інтерполяція

Інтерполяція багаточленом Лагранжа або Ньютона на всьому відрізку з використанням великого числа вузлів інтерполяції часто призводить до неточного наближення, що пояснюється значним накопиченням похибок в процесі обчислень. Крім того, через розбіжність процесу інтерполяції збільшення числа вузлів не завжди приводить до підвищення точності. Для того, щоб уникнути великих похибок, увесь відрізок розбивають на часткові відрізки і на кожному з часткових відрізків приблизно замінюють функцію $f(x)$ багаточленом невисокого степеня (так звана кусково-поліноміальна інтерполяція).

Одним із способів інтерполяції на всьому відрізку є інтерполяція за допомогою сплайн-функцій. *Сплайн-функцією* або *сплайном* називають кусково-поліноміальну функцію, що визначена на відрізку і має на цьому відрізку деяке число неперервних похідних.

Слово “сплайн” (англійське “spline”) означає гнучку лінійку, що використовується для проведення гладких кривих через задані точки площини. Основною перевагою сплайнів є можливість локально змінювати форму кривої на виділеному проміжку значень.

Коли відрізок $[a; b]$ досить великий, то не можна підвищувати точність інтерполяції за рахунок збільшення порядку інтерполяційного полінома. Це пов'язано з тим, що у полінома n -го порядку може бути $n-1$ точка екстремуму. При $n \rightarrow \infty$ графік полінома починає сильно коливатись і $|f(x) - P_n(x)|$ не наближається до нуля. Таке явище називають *феноменом Рунге*.

Тому більш перспективним є застосування кусково-поліноміальної інтерполяції, при якій апроксимувальна функція складається з окремих поліномів, як правило, однакового невеликого порядку, визначених кожен на своїй частині відрізка $[a; b]$.

Розглянемо інтерполяцію *кусково-лінійною* та *кусково-квадратичною* функціями.

Нехай $f(x)$ задана на системі вузлів $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ й необхідно для розв'язання задачі інтерполяції побудувати кусково-лінійну функцію $\varphi(x)$, виходячи з умови критерію $\varphi(x_i) = y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Кусково-лінійною функцією (лінійним сплайном) називається функція:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, & x \in [x_0, x_1] \\ a_2 x + b_2, & x \in [x_1, x_2] \\ \dots & \dots \\ a_n x + b_n, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Для знаходження n пар її коефіцієнтів маємо систему з $2n$ лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 = y_0 \\ a_1 x_1 + b_1 = y_1 \\ a_2 x_1 + b_2 = y_1 \\ a_2 x_2 + b_2 = y_2 \\ \dots \\ a_n x_{n-1} + b_n = y_{n-1} \\ a_n x_n + b_n = y_n \end{cases}$$

Графік кусково-лінійної функції має вигляд (рис. 7.2):

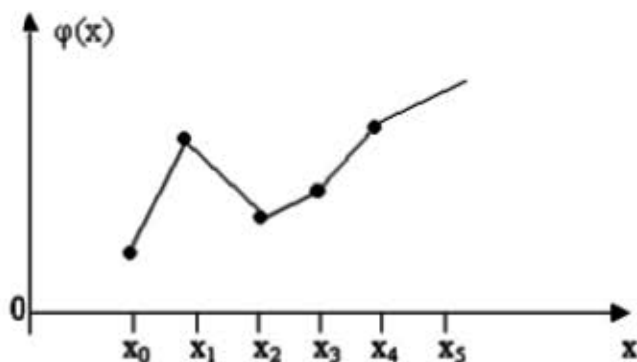


Рисунок 7.2 – Графік кусково-лінійної функції

Кусково-лінійна функція $\varphi(x)$ всередині інтервалу (x_{i-1}, x_i) , $i = \overline{1, n}$ неперервна й диференційовна, а в точках x_i , $i = \overline{0, n-1}$ неперервна, але не

диференційовна.

Розглянемо кусково-квадратичну функцію.

Нехай $f(x)$ задана таблично на відрізку $[a;b]$, але $n=2m$ (парне) $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$.

Кусково-квадратичною функцією (квадратичним сплайном) називається функція:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1, & x \in [x_0, x_2] \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2, & x \in [x_2, x_4] \\ \dots \\ a_m x^2 + b_m x + c_m, & x \in [x_{2m-2}, x_{2m}] \end{cases}.$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів $a_k, b_k, c_k, k = \overline{1, m}$ формується система рівнянь на основі критерію інтерполяції $\varphi(x_i) = y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Ця система складається з m систем:

$$\begin{cases} a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_k x_{2k-1}^2 + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_k x_{2k}^2 + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases}.$$

Наприклад, при $k=1$:

$$\begin{cases} a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = y_0 \\ a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = y_1 \\ a_1 x_2^2 + b_1 x_2 + c_1 = y_2 \end{cases}.$$

Графічно ця функція має вигляд (рис. 7.3):

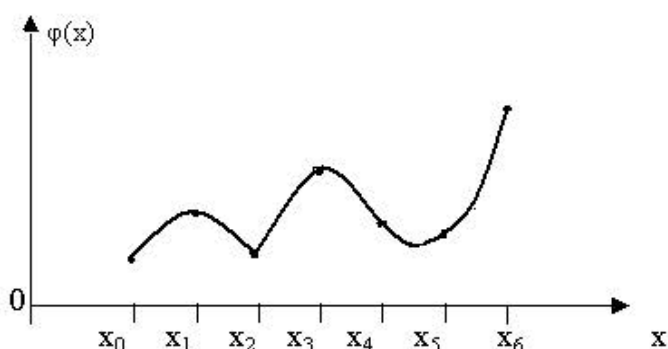


Рисунок 7.3 – Графік кусково-квадратичної функції

Кусково-квадратична функція всередині кожного інтервалу (x_{i-2}, x_i) є неперервною та диференційовною двічі, а в точках x_i неперервна, але недиференційовна.

Узагальненням розглянутих функцій є сплайни.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана система вузлів $a_0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$.

Сплайном $S_m(x)$ називається функція, яка визначена на відрізку $[a; b]$, належить класу l раз неперервно-диференційовних функцій й така, що на кожному відрізку $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1, n}$ вона є поліномом порядку m .

Різницю $(m-l)$ називають *дефектом сплайна*, що показує різницю між порядком поліномів, які його складають, і ступенем гладкості загальної функції.

Якщо сплайн побудований за деякою функцією $f(x)$ таким чином, що $S_m(x_i) = f(x_i)$, то сплайн називають *інтерполяційним*. Вузли сплайна й вузли інтерполяції функції можуть не збігатися.

Очевидно, що кусково-лінійна функція є інтерполяційним сплайном порядку 1 й дефекту 1, а кусково-квадратична функція є інтерполяційним сплайном порядку 2, дефекту 2.

7.1.3.1 Класичний кубічний сплайн

Розглянемо найбільш відомий й поширений інтерполяційний сплайн порядку 3 дефекту 1. В машинобудівному кресленні ці сплайни застосовуються багато років, тому що це і є лекала чи гнучкі лінійки, які деформуються так, щоб з їх допомогою можна було провести криву через задані точки (x_i, y_i) . Можна показати (вживаючи теорію згину бруса при малих деформаціях), що сплайн – це група поєднаних кубічних багаточленів, в місцях поєднання яких перша та друга похідні неперервні. Такі функції називаються **кубічними сплайнами**. Для їх побудови необхідно задати коефіцієнти, які однозначно визначають поліном у проміжку між двома точками.

Наведемо *математичний опис кубічних сплайнів*.

Нехай на відрізку $[a, b]$ дійсної осі Ox задана сітка $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, в вузлах якої визначені значення $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ функції $f(x)$. Потрібно побудувати на відрізку $[a, b]$ неперервну функцію – сплайн $S(x)$, яка задовольняє такі вимоги:

1) На кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн $S(x)$ є багаточленом $S_i(x)$ третього степеня:

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i. \quad (7.5)$$

2) У вузлах x_i сплайн $S_i(x)$ приймає задані значення y_i , $i = \overline{0, n}$, тобто

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, i = \overline{1, n}$$

$$S_i(x_i) = y_i, i = \overline{1, n}. \quad (7.6)$$

Умови (7.6) потрібні для проходження сплайнів через вузли заданої сітки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. Попередні дві умови утворюють $2n$ рівнянь.

3) У внутрішніх вузлах x_i , $i = \overline{1, n-1}$ сплайн має неперервну першу і другу похідні, тобто:

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), i = \overline{1, n-1};$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), i = \overline{1, n-1}.$$

В точках спряження сплайнів, їх перші та другі похідні повинні бути рівними. Таких умов $2n-2$. Для знаходження сплайна потрібно знайти коефіцієнти a_i , b_i , c_i , d_i багаточленів $S_i(x)$, $i = \overline{1, n-1}$, тобто $4n$ невідомих, які задовольняють $4n-2$ рівнянь.

Для отримання розв'язку системи потрібно два додаткових рівняння. Їх отримують, визначивши значення кривизни графіка сплайна на кінцях:

$$S''(x_0) = k_1,$$

$$S''(x_n) = k_2$$

Якщо $k_1 = k_2 = 0$, тоді такий сплайн називають природним. Коли є додаткові відомості про поведінку функції на кінцях інтервалу інтерполяції, то записуються інші крайові умови. Таким чином, кубічний сплайн, "склеєний" з кубічних парабол, проходить через задані точки, є гладеньким і має неперервну кривизну.

Для побудови кривої (7.5) знаходять чотири коефіцієнти. Запишемо вираз (7.5) у формі, що запропонована Чарльзом Ермітом і дозволяє зменшити кількість обчислювальних операцій.

Введемо позначення:

$$h_i = x_{i+1} - x_i; \quad \omega = \frac{x - x_i}{h_i}; \quad \bar{\omega} = 1 - \omega, \quad (7.7)$$

де h_{i+1} – довжина підінтервалу; ω і $\bar{\omega}$ – допоміжні змінні; x – проміжна точка на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$.

Штучною змінною $\omega \in [0, 1]$ виконується нормалізація змінної x на кожному відрізку інтерполювання між двома вузловими точками сітки.

Якщо $x = x_i$, то $\omega = \frac{x_i - x_i}{h_{i+1}} = 0$; якщо $x = x_{i+1}$, то $\omega = \frac{x_{i+1} - x_i}{h_{i+1}} = 1$.

Тобто, коли x приймає всі значення в інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$, змінна ω змінюється від 0 до 1, а змінна $\bar{\omega} = 1 - \omega$ змінюється від 1 до 0.

Поліноміальний сплайн третього степеня, що має неперервну першу та другу похідні на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, запишеться:

$$S_{i+1}(x) = \omega y_{i+1} + \bar{\omega} y_i + h_{i+1}^2 ((\omega^3 - \omega) y'_{i+1} + (\bar{\omega}^3 - \bar{\omega}) y'_i). \quad (7.8)$$

Номер сплайна збігається з індексом кінцевої точки відрізка $[x_i, x_{i+1}]$. Для запису виразу сплайна на сусідньому i -му відрізку достатньо в (7.8) зменшити всі індекси на одиницю:

$$S_i(x) = \omega y_i + \bar{\omega} y_{i-1} + h_i^2 ((\omega^3 - \omega) y'_i + (\bar{\omega}^3 - \bar{\omega}) y'_{i-1}). \quad (7.9)$$

Змінні ω і $\bar{\omega}$ визначаються відповідно до конкретного відрізка інтерполяції, тому вирази (7.8) та (7.9) містять фактично різні змінні ω і $\bar{\omega}$. Знайдемо значення сплайна $S_{i+1}(x)$ на кінцях відрізка $[x_i, x_{i+1}]$.

Маємо $x = x_i$ є початком для відрізка $[x_i, x_{i+1}]$, тому $\omega = 0$, $\bar{\omega} = 1$ і, відповідно до (7.6), $S_i(x_i) = y_i$.

На кінці відрізка $[x_i, x_{i+1}]$ $\omega = 1$, $\bar{\omega} = 0$, отримаємо $S_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$.

Для інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$ точка x_i є кінцевою, тому $\omega = 1$, $\bar{\omega} = 0$, з формули (7.9) отримаємо $S_i(x_i) = y_i$.

Отже, виконується умова неперервності функції $S(x)$ у вузлах спряження кубічних багаточленів, і функція $S(x)$ інтерполірує задані значення незалежно від вибору похідних y'_i . Для зручності запису в подальших розділах зробимо заміну $y'_i = m_i$.

Для того, щоб визначити коефіцієнти m_i , $i = \overline{0, n}$, продиференціюємо (7.8) двічі як складну функцію від x , враховуючи, що $\omega' = \left(\frac{x - x_i}{h_{i+1}} \right)' = \frac{1}{h_{i+1}}$ та

$\bar{\omega}' = (1 - \omega)' = -\frac{1}{h_{i+1}}$. Тоді

$$\begin{aligned} S'_{i+1}(x) &= \omega' y_{i+1} + \bar{\omega}' y_i + h_{i+1}^2 [(3\omega^2 \omega' - \omega') m_{i+1} + (3\bar{\omega}^2 \bar{\omega}' - \bar{\omega}') m_i] = \\ &= \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_i}{h_{i+1}} + h_{i+1}^2 [(3\omega^2 - 1) \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}} - (3\bar{\omega}^2 - 1) \frac{m_i}{h_{i+1}}] = \end{aligned}$$

$$= \Delta_{i+1} + h_{i+1}[(3\omega^2 - 1)m_{i+1} - (3\omega^{-2} - 1)m_i] ,$$

де $\Delta_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$.

Зменшуючи індекс на одиницю, отримаємо:

$$S'_i(x) = \Delta_i + h_i((3\omega^2 - 1)m_i - (3\omega^{-2} - 1)m_{i-1}). \quad (7.10)$$

Для сплайна (7.9) виконується умова рівності другої похідної у внутрішніх точках інтерполяційної сітки. Тому для знаходження невідомих коефіцієнтів m_i записують систему рівнянь $S'_i(x) = S'_{i+1}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, використовуючи (7.10). Однозначний розв'язок системи отримаємо введенням додаткових крайових умов.

7.1.3.2 Створення сплайнових параметричних кривих

Особливість сплайнових параметричних кривих полягає у вираженні невідомих коефіцієнтів сплайна через похідні у визначених точках кривої. Такий прийом зменшує кількість невідомих полінома. Також потрібно відмітити простоту переходу запису параметричних кривих від одного до багатьох вимірів.

Криві і поверхні можуть бути подані явно, неявно і параметрично. Параметричне подання дуже широко застосовується в комп'ютерній графіці через простоту та універсальність. В наступних підрозділах наведено приклади знаходження невідомих коефіцієнтів та безпосередньо самих параметричних кривих.

Нехай необхідно побудувати кубічну параметричну криву, визначену трьома точками та тангенсом нахилу кривої в середній точці (рис. 7.4).

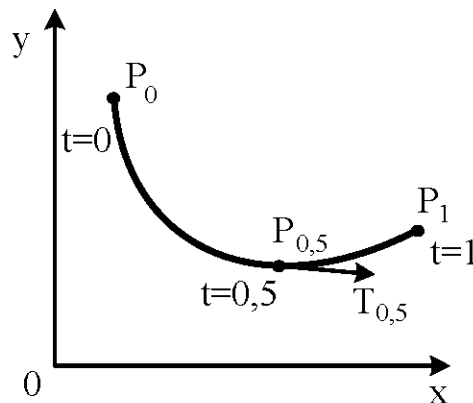


Рисунок 7.4 – Типова крива при побудові сплайна за трьома точками і значенням похідної в середній точці

Спершу побудуємо криву для змінної $x(t)$ (рис. 7.5). На криву накладається чотири обмеження для знаходження всіх чотирьох параметрів.

$$\begin{cases} x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A; \\ x(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A; \\ x(0,5) = \begin{bmatrix} 0,5^3 & 0,5^2 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot A; \\ x'(0,5) = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0,5^3 & 2 \cdot 0,5^2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A. \end{cases} \quad (7.11)$$

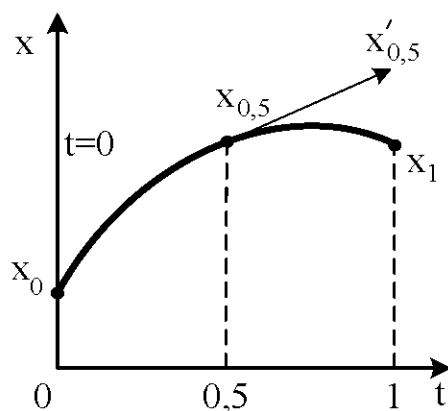


Рисунок 7.5 – Побудова кривої для змінної $x(t)$

Запишемо рівняння (7.11) в матричному вигляді.

$$G_x = Coef \cdot A;$$

$$G_x = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(0,5) \\ x'(0,5) \end{bmatrix} \quad Coef = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,125 & 0,25 & 0,5 & 1 \\ 0,75 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

З рівняння (7.12) досить просто знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів A :

$$A = G_x \cdot Coef^{-1}. \quad (7.13)$$

Підставивши (7.12) у вираз (7.13), отримаємо:

$$x(t) = T \cdot G_x \cdot Coef^{-1}. \quad (7.14)$$

Матрицю $Coef^{-1}$ зазвичай називають базисною. Для зручності запису

виконаємо заміну $Coef^{-1} = M$. В нашому випадку матриця M дорівнює:

$$M = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & -4 \\ 8 & -4 & -4 & 6 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Помноживши матрицю T та матрицю M , отримаємо сім'ю базових функцій $f_1(x), \dots, f_4(x)$. Вони виконують роль основних складових компонентів для створення геометричних утворень з різними ваговими коефіцієнтами. Тобто,

$$\begin{aligned} x(t) &= [f_1(t) \ f_2(t) \ f_3(t) \ f_4(t)] \cdot G_x; \\ f_1(t) &= -4t^3 + 8t^2 - 5t + 1; \\ f_2(t) &= -4t^2 + 4t; \\ f_3(t) &= -4t^3 + 6t^2 - 2t; \\ f_4(t) &= 4t^3 - 4t^2 + 1. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Зобразимо функції (7.15) на рис. 7.6.

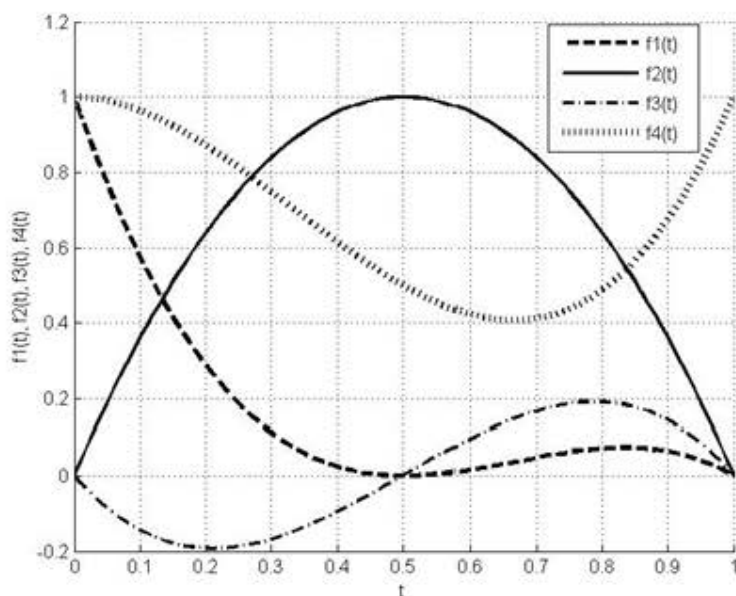


Рисунок 7.6 – Базові функції

Невідомі коефіцієнти для змінних $y(t)$ та $z(t)$ знаходяться аналогічно. Базова матриця та базові функції залишаються незмінними, змінюється лише геометричний вектор G . Тому загальне параметричне рівняння матиме вигляд:

$$z(t) = T \cdot M \cdot G_z;$$

$$P(x) = T \cdot M \cdot G.$$

$$x(t) = T \cdot M \cdot G_x;$$

$$y(t) = T \cdot M \cdot G_y;$$

В цьому прикладі розглядається побудова **ермітової кривої (Hermitian curve)** (рис. 7.7), яка задається координатами двох крайових точок та значеннями їх похідних (дотичних).

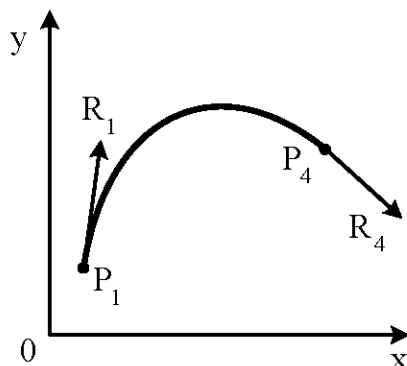


Рисунок 7.7 – Приклад побудови ермітової кривої

Визначимо рівняння для побудови ермітової кривої через геометричний вектор $G_h = [P_1 \ P_4 \ R_1 \ R_4] \cdot T$. Виконаємо дії, аналогічні попередньому прикладу. Запишемо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot A; \\ x(1) = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \cdot A; \\ x'(0) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot A; \\ x'(1) = [3 \ 2 \ 1 \ 0] \cdot A. \end{cases} \quad (7.16)$$

В матричному вигляді рівняння (7.16) запишеться $G_x = Coef \cdot A$. Звідки коефіцієнт A розраховується як $A = G_x \cdot M$, $Coef^{-1} = M$. В нашому випадку матриця M дорівнює

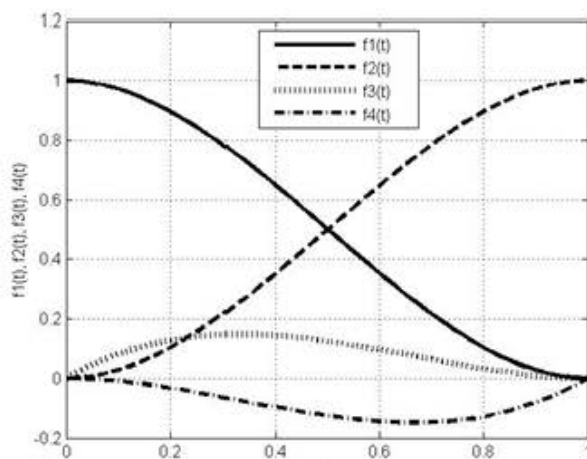
$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подібно до попереднього прикладу розрахуємо параметричну криву, помноживши матрицю T на матрицю M . Отримаємо сім'ю базових функцій

$f1(x), \dots, f4(x)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= [f1(t) \quad f2(t) \quad f3(t) \quad f4(t)] \cdot G_x; \\ f1(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1; \\ f2(t) &= -2t^3 + 3t^2; \\ f3(t) &= t^3 - 2t^2 + t; \\ f4(t) &= t^3 - t^2. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Зобразимо функції (7.17) на рис. 7.8.



Рисунк 7.8 – Базові ермітові функції

Криві Без'є (Bezier Curves) – головний елемент побудови криволінійних форм у всіх без винятку програмах комп'ютерної графіки; за їх допомогою можна досить точно апроксимувати будь-яку лінію змінної кривизни.

Крива Без'є – це один з найпоширеніших видів гладких параметричних кривих. Ці криві знайшли широке застосування в сучасних CAD-системах. Також вони стали невід'ємною частиною операційної системи Windows (наприклад, вони використовуються для відображення шрифтів), і тому функція побудови кривих Без'є входить в стандартний набір функцій Windows GDI+. Криві Без'є за своєю сутністю є варіацією ермітових кривих. Вони вказані чотирма точками (рис. 7.9).

Визначимо рівняння для побудови ермітової кривої через геометричний вектор

$$G_h = [Ph_1 \quad Ph_4 \quad Rh_1 \quad Rh_4] \cdot T; \quad \begin{cases} Ph_1 = P_1; \\ Ph_4 = P_2; \\ Rh_1 = 3(P_2 - P_1); \\ Rh_4 = 3(P_4 - P_3). \end{cases} \quad (7.18)$$

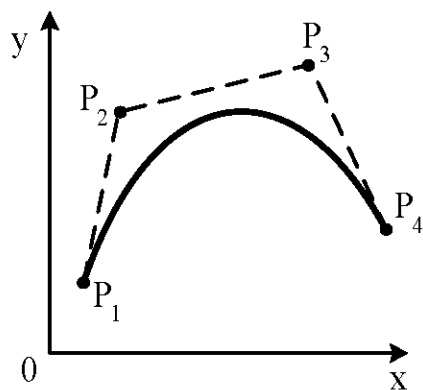


Рисунок 7.9 – Крива Без'є

Виконаємо дії, аналогічні попередньому прикладу. Напишемо систему рівнянь для розрахунку невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{bmatrix} Ph_1 \\ Ph_4 \\ Rh_1 \\ Rh_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}.$$

Загальне параметричне рівняння запишеться у вигляді:

$$P(t) = T \cdot M \cdot Pb,$$

$$\text{де } Pb = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сім'я базових функцій $f_1(x), \dots, f_4(x)$ для кривих Без'є записується:

$$P(t) = f_1(t) \cdot P_1 + f_2(t) \cdot P_2 + f_3(t) \cdot P_3 + f_4(t) \cdot P_4;$$

$$f_1(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1;$$

$$f_2(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t;$$

$$f_3(t) = -3t^3 + 3t^2;$$

$$f_4(t) = t^3.$$

(7.19)

Зобразимо функції (7.19) на рис. 7.10.

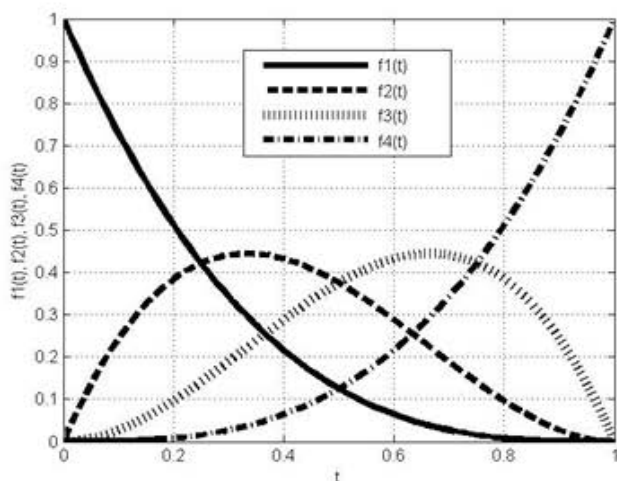


Рисунок 7.10 – Базові функції Без'є

Базові функції Без'є мають властивість опуклості. Крива ніколи не проходить через ламану, сформовану чотирма заданими вершинами. Функції Без'є задовольняють умови опуклості, а саме:

- $0 \leq f_i(t) \leq 1; t \in [0,1];$
- $f_1(t) + \dots + f_n(t) = 1.$

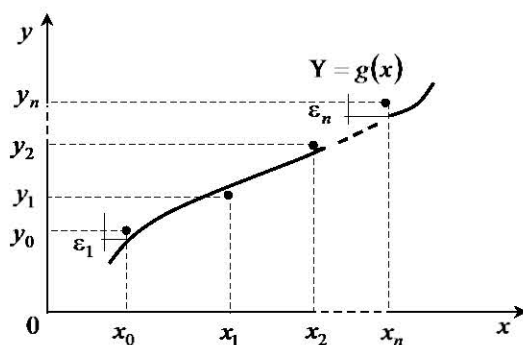
7.2 Апроксимація даних

Апроксимація (approximation) взагалі – це наближений опис однією функцією (апроксимувальною) заданого вигляду іншої функції (апроксимованої), яка задається у будь-якому вигляді (при апроксимації даних вона задається у вигляді масивів даних).

Існує два головних підходи до апроксимації даних. При одному з них вимагають, щоб апроксимувальна крива (можливо, кусково-гладка) проходила через всі точки, які задані таблицею. Це можна зробити з допомогою методів інтерполяції, які були розглянуті в попередньому підрозділі. При іншому підході дані апроксимують простою функцією, яка використовується при всіх табличних значеннях, але не обов'язково, щоб вона проходила через всі точки. Такий підхід зветься припасуванням кривої, яку прагнуть провести так, щоб її відхилення від табличних даних був мінімальним. Як правило, користуються методом найменших квадратів (МНК), тобто зводять до мінімуму суму квадратів різниць між значенням функції, яка визначена обраною кривою, та таблицею.

Нехай у таблиці задана $(n+1)$ точка $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ і треба знайти апроксимувальну криву $g(x)$ в діапазоні $x_0 \leq x \leq x_n$ (рис. 7.11). В цьому випадку похибка в кожній табличній точці буде

$$\varepsilon_i = g(x_i) - y_i.$$



Тоді сума квадратів похибок визначається виразом:

$$E = \sum_{i=0}^n [g(x_i) - y_i]^2.$$

Як правило, функцію $g(x)$ обирають у вигляді лінійної комбінації

вибраних функцій $g_k(x)$

$$g(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \dots + C_k g_k(x).$$

Умова мінімуму E визначається рівнянням:

$$\frac{\partial E}{\partial C_1} = \frac{\partial E}{\partial C_2} = \dots = \frac{\partial E}{\partial C_k} = 0.$$

Відомо, що

$$E = \sum_{i=0}^n [C_1 g_1(x_i) + C_2 g_2(x_i) + \dots + C_k g_k(x_i) - y_i]^2,$$

ця умова еквівалентна системі рівнянь:

$$\frac{\partial E}{\partial C_1} = 2 \sum [C_1 g_1(x_i) + \dots + C_k g_k(x_i) - y_i] g_1(x_i) = 0;$$

.....

$$\frac{\partial E}{\partial C_k} = 2 \sum [C_1 g_1(x_i) + \dots + C_k g_k(x_i) - y_i] g_k(x_i) = 0.$$

Цю систему можна записати у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \sum g_1^2(x_i) & \sum g_1(x_i)g_2(x_i) & \dots & \sum g_1(x_i)g_k(x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum g_1(x_i)g_k(x_i) & \dots & \dots & \sum g_k^2(x_i) \end{bmatrix} * \quad (7.20)$$

$$* \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum g_1(x_i)y_i \\ \dots \\ \sum g_k(x_i)y_i \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці в лівій частині та вектора-стовпця в правій визначаються табличними даними, тому отримана система k лінійних рівнянь з k невідомими може бути розв'язана.

Якщо перейти до матричної форми запису, то формула методу найменших квадратів матиме вигляд:

$$C = [U^T \cdot U]^{-1} \cdot U^T \cdot Y,$$

$$\text{де } C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ C_k \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_k(x_1) \\ g_1(x_2) & \dots & g_k(x_2) \\ \dots & & \dots \\ g_1(x_n) & \dots & g_k(x_n) \end{bmatrix}.$$

Вибір виду функції $g(x)$ повинен здійснюватися з урахуванням характеру табличних даних (періодичності, властивості симетрії, існування асимптотики).

Іноді таблицю розбивають на декілька частин та добирають окрему апроксимувальну криву для кожної частини. Такий підхід задовольняє ті випадки, коли дані відповідають різним фізичним станам системи.

Залишкова середня квадратична похибка апроксимації оцінюється:

$$\Delta = \sqrt{E/(n+1)}.$$

Якщо при побудові апроксимувальної функції використовуються ортогональні поліноми, для яких

$$\sum g_j(x_i)g_k(x_i) = 0, \quad \text{якщо } j \neq k,$$

то система (7.5) спрощується, і матриця стає діагональною. Коефіцієнти визначаються зі співвідношень

$$C_j = \sum_{i=0}^n g_j(x_i)y_i / \sum_{i=0}^n g_j^2(x_i).$$

Це спрощує задачу, і тому в багатьох стандартних програмах для припасування кривих використовують ортогональні поліноми.

Метод найменших квадратів може бути застосований, якщо функція $g(x)$ матиме нелінійний характер. При цьому потрібно використовувати заміни, що дозволять лінеаризувати функцію і знайти коефіцієнти за допомогою МНК. У таблиці 7.2 наведені типові лінеаризувальні заміни.

Таблиця 7.2 – Лінеаризувальні заміни до функції $y^* = Ax^* + B$

Апроксимувальна функція	Необхідна заміна
$y = \frac{A}{x} + B$	$x^* = \frac{1}{x}, y^* = y$
$y = \frac{D}{x+C}$	$x^* = xy, y^* = y$

	$C = -\frac{1}{A}, D = -\frac{B}{A}$
$y = \frac{1}{Ax+B}$	$x^* = x, y^* = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{Ax+B}$	$x^* = \frac{1}{x}, y^* = \frac{1}{y}$
$y = A \ln x + B$	$x^* = \ln x, y^* = y$
$y = C \cdot e^{Ax}$	$x^* = x, y^* = \ln y, C = e^B$
$y = C \cdot x^A$	$x^* = \ln x, y^* = \ln y, C = e^B$
$y = (Ax+B)^{-2}$	$x^* = x, y^* = y^{\frac{1}{2}}$
$y = C \cdot x \cdot e^{-Dx}$	$x^* = x, y^* = \ln \frac{y}{x}, C = e^B, D = -A$
$y = \frac{L}{1+C \cdot e^{-Ax}}$	$x^* = x, y^* = \ln \left(\frac{y}{L} - 1 \right), C = e^B$

7.3 Статистична обробка даних

При обробці результатів виникає необхідність оцінювання характеристик випадкової величини (перед вивченням цього розділу рекомендовано ознайомитись з розділом 1.5.2.1 підручника).

Як оцінка \bar{X} невідомого математичного сподівання m_X випадкової величини X використовується середнє арифметичне результатів N незалежних випробувань

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N},$$

а для оцінки дисперсії D_x при достатньо великій кількості експериментальних даних ($N \geq 30$) співвідношення

$$\bar{D}_x = \bar{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}.$$

При припущенні нормального закону розподілу величини X можна показати, що величина

$$T = \frac{\bar{x} - m_X}{\sigma_X / \sqrt{N}}$$

має t -розподіл Стюдента з $k=N-1$ ступенями свободи (ступінь свободи в статистиці визначається як різниця між кількістю дослідів та кількістю коефіцієнтів моделі, які можна обчислити за результатами цих експериментів незалежно один від одного, наприклад, у нормального розподілу два параметри, у Пуассонівського – один і т.д.) Звідси можна визначити надійний інтервал для значення X : за відомими значеннями надійної імовірності P з таблиці 7.3 знаходимо ε , звідки

$$\Delta = \varepsilon * \frac{D_X}{\sqrt{N}}.$$

Таким чином, якщо випадкова величина x розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням m_x і дисперсією D_X , то значення x знаходиться в інтервалі $(m_x - \Delta, m_x + \Delta)$ з імовірністю P .

Для оцінювання виду закону розподілу при довільному законі розподілу найширше застосування мають критерії Колмогорова та Пірсона (критерій Стюдента застосовується тільки при нормальному законі розподілу), що

дозволяють на основі порівняння емпіричної функції розподілу $f_x^*(x)$, одержаної у вигляді гістограми в результаті обробки експериментальних даних, з гіпотетичною $f_x(x)$, яка відповідає запропонованій гіпотезі, зробити висновки про їх збігання чи незбігання при рівні значущості α , який визначається як імовірність того, що буде відхилена достовірна гіпотеза.

Таблиця 7.3 – Значення ε для інтервалу $-\varepsilon < t < \varepsilon$, де величина t має розподіл Стьюдента залежно від надійної імовірності P і числа ступенів свободи k

k	$P=0,90$	$P=0,95$	$P=0,99$
1	6,310	12,71	63,7
2	2,920	4,30	9,92
3	2,350	3,18	5,84
4	2,130	2,77	4,60
5	2,020	2,57	4,03
6	1,943	2,45	3,71
7	1,895	2,36	3,50
8	1,860	2,31	3,36
9	1,833	2,26	3,25
10	1,812	2,23	3,17
11	1,796	2,20	3,11
12	1,782	2,18	3,06
13	1,771	2,16	3,01
14	1,761	2,14	1,98
15	1,753	2,13	2,95
16	1,746	2,12	2,92
17	1,740	2,11	2,90
18	1,734	2,10	2,86
19	1,729	2,09	2,86
20	1,725	2,08	2,84
22	1,717	2,07	2,82
24	1,711	2,06	2,80
26	1,706	2,06	2,78
28	1,701	2,05	2,76
30	1,697	2,04	2,75
40	1,684	2,02	2,70
60	1,671	2,00	2,66
120	1,658	1,98	2,62
240	1,645	1,96	2,58

В критерії Колмогорова мірою є величина

$$\lambda = \left| f_X(x) - f_X^*(x) \right|_{\max} \sqrt{N},$$

яку порівнюють з критичним значенням, заданим з таблиці 7.4.

Таблиця 7.4 – Критичні значення λ залежно від рівня значущості

α	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,001	0,001
$\lambda_{кр}$	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

При $\lambda < \lambda_{кр}$ гіпотеза про збігання $f_X(x)$ и $f_X^*(x)$ приймається.

В критерії Пірсона обчислюється величина

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^k \frac{[f_X(x_i) - f_X^*(x_i)]^2}{f_X(x_i)},$$

де k – кількість розрядів гістограми (дискретних значень $f_X(x_i)$).

З таблиці 7.5 визначають критичне значення χ^2 , зважаючи на α і число ступенів свободи

$$r = k - l - 1,$$

де l – число параметрів, що їх містить в собі закон розподілу (як вже відмічалось :для нормального $l=2$, Пуассонівського $l=1$ і т.д.).

При $\chi^2 < \chi_{кр}^2$ гіпотеза приймається.

Якщо порівнюють аналітично одержані закони розподілу ймовірностей, то мірою їх близькості слугує значення середньої квадратичної похибки.

Для оцінювання взаємозалежності випадкових величин, між якими існує стохастичний зв'язок, використовується коефіцієнт кореляції (correlation coefficient) (n – обсяг вибірки)

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

При визначенні взаємозалежності значень випадкових величин в різні моменти часу коефіцієнт кореляції оцінюється за формулою

$$r_{X(\tau)} = \frac{\frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^{n-m} [x(t_i) - m_x][x(t_i + \tau) - m_x]}{D_X},$$

де $x(t_i)$ – значення випадкової величини X в момент часу t_i , а $x(t_i + \tau)$ – в момент часу, який відрізняється від t_i на інтервал τ . Таким чином, $x(t_i) = x_i$, $x(t_i + \tau) = x_j$, τ – інтервал часу між i та j значеннями x , $i - j = m$.

Таблиця 7.5 – Критичні точки розподілу x – випадкова величина, яка розподілена за законом χ^2 з ступенями свободи k

Число ступенів свободи k	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,975$	$\alpha = 0,99$
1	6,6	6,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81

Інтервал кореляції визначається як відрізок часу, за який кореляційна функція зменшується на 95%.

Обчислення коефіцієнту кореляції (нормованої кореляційної функції) та кореляційної функції за відомими масивами даних x та y за допомогою наведених формул не викликає труднощів, а апроксимація вигляду кореляційної функції типовими кореляційними функціями (таблиця 7.6) може здійснюватися за методом найменших квадратів.

Таблиця 7.6 – Типові кореляційні функції

Вигляд	Параметри
$R_x(\tau) = \sigma_X^2 (1 - \alpha \tau),$ $\tau < 1/\alpha$	$\alpha = (\sigma_X^2 - R_x(\tau^*)) / \sigma_X^2 \tau,$ $R_x(\tau^*) - \text{відоме значення кореляційної}$ функції
$R_x(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha \tau }$	$\alpha = \frac{1}{\tau^*} \ln \frac{\sigma_x^2}{R(\tau^*)}$
$R_x(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}$	$\alpha = \frac{1}{\tau^*} \sqrt{\ln \frac{\sigma_x^2}{R_x(\tau^*)}}$
$R_x(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\alpha \approx 4,5 / \tau_k^{\max}$
$R_x(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } \cos \beta \tau$	$\alpha = \frac{\ln \frac{\sigma_x^2 \cos \frac{\pi \tau_2^*}{2\tau_1^*}}{R_x(\tau_2^*)}}{\tau_2^*}, \beta = \pi / 2\tau_1^*$ <p>при двох відомих значеннях кореляційної функції $R_x(\tau)$, причому $R_x(\tau_1^*) = 0$.</p>

7.4 Цифрова обробка сигналів

7.4.1 Загальні відомості та поняття

Часто при вирішенні задач ідентифікації складних об'єктів за допомогою ідентифікаційних експериментів виникає необхідність відновлення корисних сигналів на фоні завад. Такі задачі розглядаються у спеціальній сфері застосувань обчислювальної техніки – цифровій обробці сигналів (ЦОС) (*digital signal processing*). Спорідненими для цифрової обробки сигналів є теорія інформації, зокрема, теорія оптимального прийому сигналів і теорія розпізнавання образів. При цьому в першому випадку основним завданням є виділення сигналу на фоні шумів і завад різної фізичної природи, а в другому – автоматичне розпізнавання, тобто класифікація та ідентифікація сигналу.

При цифровій обробці використовується подання сигналів у вигляді послідовностей чисел або символів. Мета такої обробки може полягати в оцінюванні характерних параметрів сигналу або в перетворенні сигналу у форму, яка в деякому сенсі є зручнішою. Такі формули класичного чисельного аналізу, як формули інтерполяції, інтегрування й диференціювання, безумовно є алгоритмами цифрової обробки. Наявність швидкодіючих комп'ютерів сприяє розвитку все більш складних і раціональних алгоритмів обробки сигналів; останні ж успіхи в технології інтегральних схем обіцяють високу економічність побудови дуже складних систем цифрової обробки сигналів. Цифрова обробка сигналів застосовується в таких різних галузях, як біомедицина, акустика, звукова локація, радіолокація, сейсмологія, зв'язок, системи передачі даних, ядерна техніка і багатьох інших.

Цифрова обробка сигналів є альтернативою традиційній аналоговій. До її найважливіших якісних переваг відносять можливість реалізації будь-яких як завгодно складних (оптимальних) алгоритмів обробки з гарантованою і незалежною від дестабілізуювальних факторів точністю; програмованість та функціональна гнучкість; можливість адаптації до сигналів, що обробляються; технологічність.

Розвиток нової точки зору на цифрову обробку сигналів було прискорено відкриттям в 1965 р. ефективних алгоритмів для обчислень перетворень Фур'є. Цей клас алгоритмів став відомий як швидке перетворення Фур'є (ШПФ, *fast Fourier transform*). Можливості ШПФ були значними з декількох точок зору. Багато алгоритмів обробки сигналів, отриманих на цифрових ЕОМ, вимагали часу обробки на декілька порядків більшого, ніж реальний час. Часто це було пов'язане з тим, що спектральний аналіз був важливою складовою частиною обробки сигналів, а ефективні засоби для його виконання не були відомі. Алгоритм швидкого перетворення Фур'є зменшив час обчислення перетворення Фур'є на кілька порядків. Це дозволило створити дуже складні алгоритми обробки сигналів у реальному часі.

Методами ЦОС є математичні співвідношення або алгоритми, відповідно до яких виконуються обчислювальні операції над цифровими сигналами. До

них належать алгоритми цифрової фільтрації, спектрально-кореляційного аналізу, модуляції та демодуляції сигналів, адаптивної обробки та ін.

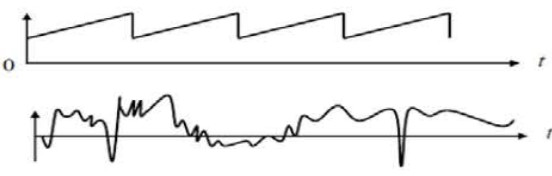
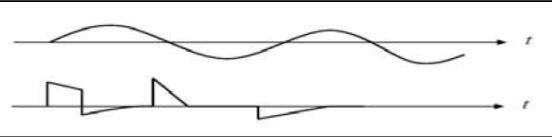
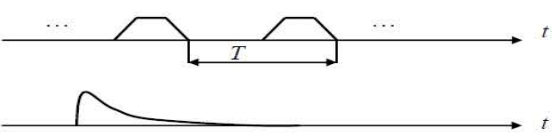
Засобами реалізації ЦОС є жорстка логіка, програмовані логічні інтегральні схеми, мікропроцесори загального призначення, мікроконтролери, персональні комп'ютери (комп'ютерна обробка сигналів) та цифрові сигнальні процесори. В

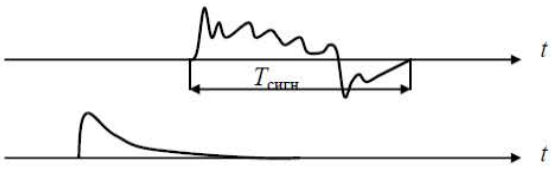
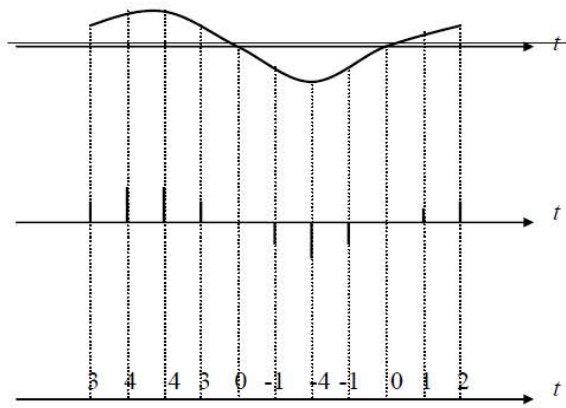
У технічних галузях знань термін «сигнал» (signal, від латинського signum – знак) часто використовується в широкому діапазоні значень, без дотримання строгої термінології. Під ним розуміють і технічний засіб (матеріальний носій) для передачі, обігу і використання інформації – електричний, магнітний, оптичний сигнал; і фізичний процес, що являє собою матеріальне відображення інформаційного повідомлення – зміна певного параметра носія інформації (напруги, частоти, потужності електромагнітних коливань, інтенсивності світлового потоку тощо) у часі, у просторі або залежно від зміни значень будь-яких інших аргументів (незалежних змінних).

Всі ці поняття можна об'єднати одним технічним терміном: сигнал – це фізична величина, що містить у собі певні відомості про певний об'єкт або процес.

Множина сигналів надзвичайно різноманітна. Проте, вибираючи певні критерії розбіжності, можна навести приблизну класифікацію сигналів (таблиця 7.8). Однак слід пам'ятати, що у реальному житті сигнали часто не вкладаються в рамки чистої класифікації. Наприклад, будь-який реальний детермінований сигнал має випадкову шумову складову.

Таблиця 7.8 – Класифікація сигналів

	Тип (клас) сигналів	Геометричне зображення
1.	а) Детерміновані (значення $s(t)$ відомо в будь-який момент часу t) б) Випадкові (передбачити точно значення $s(t)$ неможливо)	
2.	а) Неперервні (без розривів першого роду) б) Імпульсні (з розривами першого роду)	
3.	а) Періодичні (період T) б) Неперіодичні $T = \infty$	

4.	а) Кінцевої довжини $(T_{\text{сигн}})$ б) Нескінченної довжини $T_{\text{сигн}} = \infty$	
5.	а) Аналогові (існують у будь-який момент часу t і можуть приймати будь-яке значення в інтервалі $[S_{\text{min}}, S_{\text{max}}]$) б) Дискретні (існують тільки в дискретні моменти t_k , тобто є послідовністю імпульсних відліків) в) Цифрові (послідовність цифрових відліків)	

7.4.2 Загальна структура системи цифрової обробки аналогових сигналів

В цьому розділі розглянуто загальну структуру та складові компоненти системи ЦОС. Без цього буде важко зрозуміти логіку математичних підходів та моделей перетворення сигналів в сучасних системах обробки даних та зображень.

Системи ЦОС безпосередньо оперують із послідовностями цифрових кодів, які називають цифровими сигналами. Такі сигнали обробляються процесором ЦОС, що є операційним або обчислювальним ядром системи. Алгоритмічна обробка аналогових сигналів цифровими засобами припускає їхнє попереднє перетворення в цифрову форму, а в системах з аналоговим виходом – із цифрової форми в аналогову. Загальній структурній схемі системи цифрової обробки аналогових сигналів (рис. 7.12) відповідає ланцюжок функціональних перетворень сигналу виду: $A/A \Rightarrow A/\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}/A \Rightarrow A/A$ (“аналог/аналог”, “аналог/цифра”, “цифра/цифра», “цифра/аналог”, “аналог/аналог”), реалізованих відповідно аналоговим фільтром нижніх частот ФНЧ1, аналого-цифровим перетворювачем АЦП, процесором ЦОС, цифроаналоговим перетворювачем ЦАП і аналоговим фільтром нижніх частот ФНЧ2.

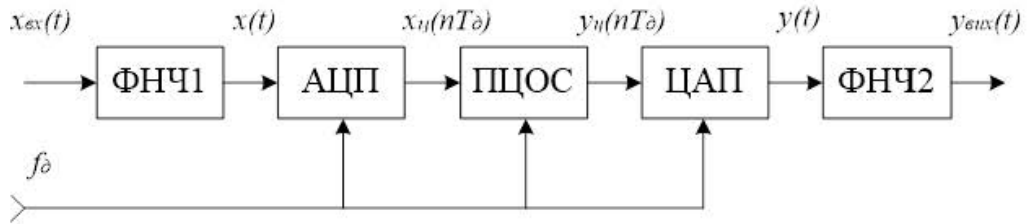


Рисунок 7.12 – Загальна структура системи ЦОС

Вхідний сигнал системи ЦОС $x_{ex}(t)$ надходить на АЦП через аналоговий фільтр нижніх частот ФНЧ1 із частотою зрізу ω_3 . Фільтр обмежує смугу частот вхідного сигналу (охоплюючи й супутні йому шуми та завади) максимальною частотою $\omega_m \approx \omega_3$, що задовольняє умову $\omega_m < \omega_D / 2$, де $\omega_D = 2\pi f_D$ – частота дискретизації сигналу. Він послабляє спотворення накладання при дискретизації сигналів з необмеженим за частотою спектром і називається протимаскувальним.

Аналого-цифрове перетворення (*analog-to-digital conversion*) містить дискретизацію сигналу за часом, квантування за рівнем і цифрове кодування (рис. 7.13).

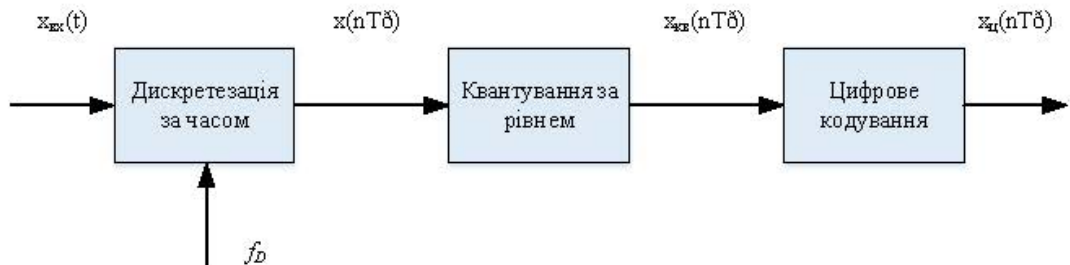


Рисунок 7.13 – Послідовність операцій аналого-цифрового перетворення сигналу

У результаті утворюється дискретний сигнал $x(nT_{\delta})$, що відповідає вибіркам аналогового сигналу $x(t)$ у дискретні рівновіддалені моменти часу nT_{δ} , дискретний квантований сигнал $x_{кв}(nT_{\delta})$, що відрізняється кінцевою множиною прийнятих ним значень, і цифровий сигнал $x_u(nT_{\delta})$ у вигляді послідовності цифрових двійкових кодів із числом розрядів, що відповідають розрядності АЦП. Процесором ЦОС, відповідно до заданого алгоритму цифрової обробки (оператором Φ), вхідний цифровий сигнал $x_u(nT_{\delta})$ перетвориться у вихідний цифровий сигнал системи $y_u(nT_{\delta}) = \Phi[x_u(nT_{\delta})]$.

Дискретизація за часом, або просто дискретизація (digitization) є процедурою взяття миттєвих значень – відліків аналогового сигналу $x(t)$ з інтервалом часу, що дорівнює періоду дискретизації T_Δ . Приклад дискретизованого сигналу наведено на рис. 7.14.

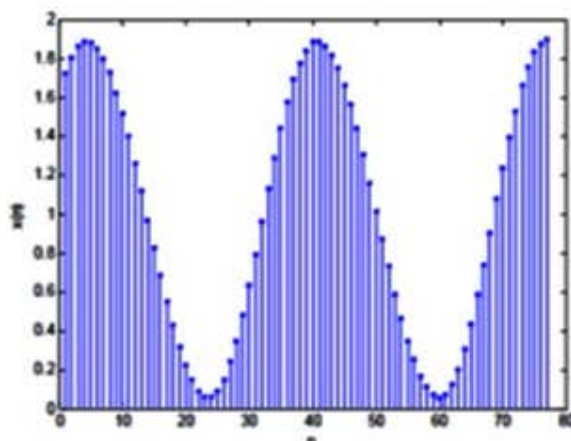


Рисунок 7.14– Дискретизований сигнал

Квантування за рівнем (квантування – quantization) здійснюється з метою подання точних значень відліків $x_y(nT_\Delta)$ у вигляді двійкових чисел кінцевої розрядності – квантованих відліків $x_y(nT_\Delta)$. Для цього динамічний діапазон дискретного сигналу $x(nT_\Delta)$ розбивається на кінцеве число дискретних рівнів – рівнів квантування – і кожному відліку за певним правилом привласнюється значення одного з найближчих рівнів, між якими він виявляється. Рівні квантування кодуються двійковими числами розрядності b , що залежить від числа рівнів квантування R

$$R \leq 2^b.$$

Сукупність квантованих відліків $x_y(nT_\Delta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ називають *цифровим сигналом* (digital signal).

7.4.3 Дискретні та неперервні сигнали

Більшість реальних сигналів (наприклад, звукових) є неперервними функціями. Для цифрової обробки таких сигналів їх потрібно перевести в цифрову форму. Один із способів зробити це – рівномірно за часом виміряти значення сигналу на певному проміжку часу і ввести отримані значення амплітуд. Якщо робити вимірювання досить часто, то за значеннями отриманого дискретного сигналу можна буде досить точно відновити вигляд вихідного неперервного сигналу.

Дискретні сигнали (discrete signal) $x_d(t)$ утворюють шляхом множення аналогового сигналу $x(t)$ на так звану функцію дискретизації $y(t)$, яка являє собою періодичну послідовність коротких імпульсів, що слідують з кроком дискретизації Δt (рис. 7.15, а). В ідеальному випадку як функція дискретизації використовується періодична послідовність дельта-функцій (рис. 7.15, б).

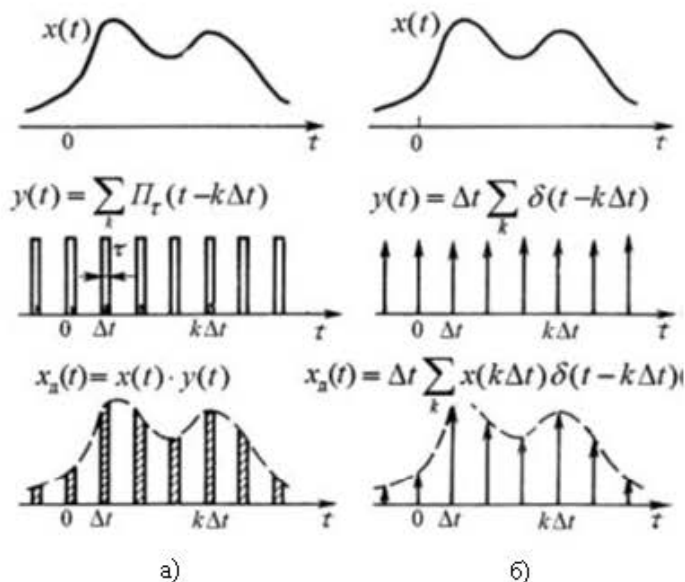


Рисунок 7.15– Дискретизація сигналу

Процес вимірювання величини сигналу через рівні проміжки часу називається рівномірною (за часом) дискретизацією. Багато пристроїв для введення даних здійснюють дискретизацію.

Наприклад, звукова карта дискретизує сигнал з мікрофона, сканер дискретизує сигнал, що надходить з фотоелемента. У результаті дискретизації неперервний (аналоговий) сигнал перетворюється у послідовність значень. Пристрій, що виконує цей процес, називається аналого-цифровим перетворювачем (АЦП, analogue-to-digital converter, ADC). Частота, з якою АЦП здійснює вимірювання значень аналогового сигналу і видає його цифрові значення, називається частотою дискретизації.

Інтервал $T = k\Delta t$ $T = k\Delta t$ називають періодом дискретизації, частотою дискретизації є обернена величина

$$f_n = \frac{1}{T}.$$

Значення послідовності в моменти часу nT називають відліками сигналу. Дискретний сигнал може бути представлений як у дійсній формі, так і у комплексній. В останньому випадку його дійсна та уявна частини описуються дійсними послідовностями

$$x(nT) = x_1(nT) + fx_2(nT).$$

Математично дискретний сигнал визначають:

- функцією дискретного часу nT_δ : $x(nT_\delta) = x(t) | t = nT_\delta, n = 0, 1, 2, \dots$, що відповідає вибіркам аналогового сигналу в дискретні періодично повторювані моменти часу;
- функцією номера вибірки n : $x(n) = x(nT_\delta) | T_\delta = 1$, що в загальному випадку не пов'язана з часом;
- функцією неперервного часу t :

$$x(t) = x(t) f_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_\delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_\delta) \delta(t - nT_\delta),$$

що її отримують множенням аналогового сигналу $x(t)$ на функцію дискретизації $f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_\delta)$ у вигляді періодичної послідовності імпульсів з періодом, що дорівнює:

$$\delta(t - nT_\delta) = \begin{cases} \infty, & t = nT_\delta \\ 0, & t \neq nT_\delta \end{cases}.$$

Графічно дискретні сигнали передаються функцією номера вибірки n або дискретного часу nT_δ (рис. 7.16).

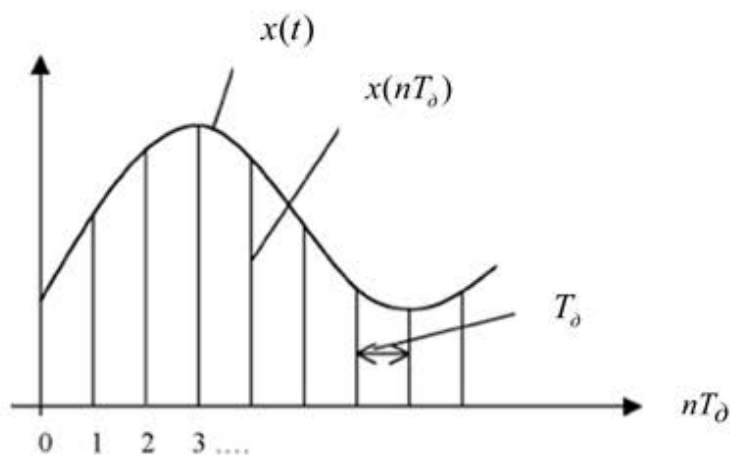


Рисунок 7.16 – Графік неперервного та дискретного сигналу

7.4.4 Теорема Котельникова

Для того, щоб відновити вихідний неперервний сигнал з дискретизованого з малими похибками, необхідно раціонально вибрати крок дискретизації. Тому при перетворенні аналогового сигналу в дискретний обов'язково виникає питання про величину кроку дискретизації. Якщо аналоговий сигнал має низькочастотний спектр, обмежений деякою верхньою частотою F_g (тобто функція $u(t)$ має вигляд кривої, яка плавно змінюється, без різких змін амплітуди), то навряд чи на деякому невеликому часовому інтервалі дискретизації Δt ця функція може істотно змінюватися за амплітудою.

Очевидно, що точність відновлення аналогового сигналу за послідовністю його відліків залежить від величини інтервалу дискретизації. Чим він коротше, тим менше буде відрізнятися функція $u(t)$ від плавної кривої, що проходить через точки відліків. Однак зі зменшенням інтервалу дискретизації істотно зростає складність і обсяг обчислень. При досить великому інтервалі дискретизації Δt зростає ймовірність спотворення або втрати інформації при відновленні аналогового сигналу.

Оптимальна величина інтервалу дискретизації встановлюється **теоремою Котельникова**, яка має важливе теоретичне та практичне значення: дає можливість правильно здійснити дискретизацію аналогового сигналу та визначає оптимальний спосіб його відновлення на приймальному кінці за відліковим значенням.

Відповідно до однієї з найбільш відомих і простих інтерпретацій теореми Котельникова довільний сигнал $s(t)$, спектр якого обмежений деякою частотою F_g , може бути повністю відновлений за послідовністю своїх відлікових значень, що слідує з інтервалом часу

$$\Delta t = \frac{1}{2F_g}.$$

Інтервал дискретизації Δt та частоту F_g часто називають інтервалом і частотою Найквіста. Аналітично теорема Котельникова подається рядом

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t}(t - k\Delta t)}{\pi \Delta t(t - k\Delta t)}$$

де k – номер відліку; $s(k\Delta t)$ – значення сигналу в точках відліку.

Фізичний зміст цієї теореми стає зрозумілим, якщо розглянути спектри сигналів $S(t)$ і $S_D(t)$.

З рис. 7.17 видно, що $S_D(f)$ містить у собі $S(f)$ і ще нескінченне число копій $S(f)$, зсунутих одна відносно одної на частоту дискретизації f_D . Якщо пропустити сигнал $S_D(f)$ через фільтр нижніх частот, амплітудно-частотна характеристика якого показана на цьому ж рисунку, на виході ФНЧ залишиться тільки $S(f)$, тобто відновиться вихідний сигнал $s(t)$.

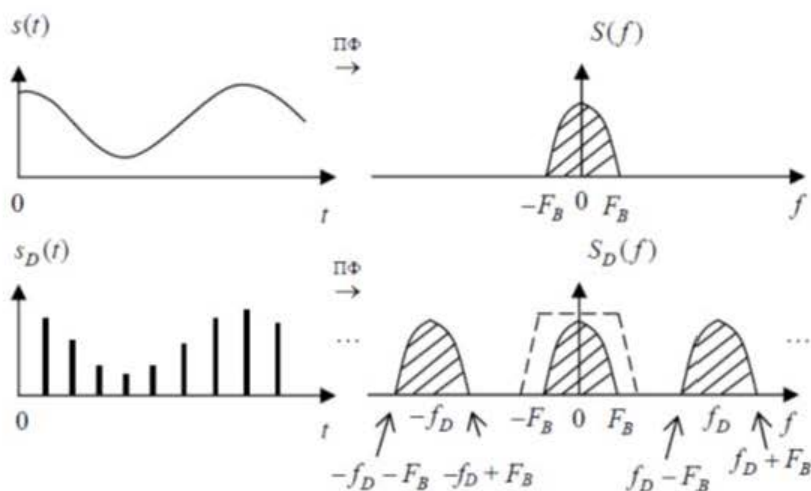


Рисунок 7.17 – Теорема Котельникова

При $f_D > 2F_e$ копії не перетинаються з основним пелюстком спектра $S_D(f)$ і таке відновлення можливе.

При $f_D = 2F_e$ копії стикаються з основним пелюстком, однак виділення вихідного сигналу $s(t)$ ще можливе за допомогою ідеального ФНЧ із нескінченною крутизною спаду амплітудно-частотної характеристики (АЧХ).

При $f_D < 2F_e$ пелюстки спектра $S_D(f)$ перекриваються і відновлення вихідного сигналу $s(t)$ є неможливим.

На практиці частоту f_D завжди вибирають більшою, ніж $2F_e$, тому що будь-який фільтр має далеко не нескінченну крутизну спаду АЧХ.

Спектр реального сигналу рідко має точну верхню границю F_e . Найчастіше $S(f)$ зменшується зі зростанням частоти, асимптотично наближуючись до нуля. У такому випадку на вході пристрою дискретизації поміщають ФНЧ, що має частоту, яка дорівнює ефективній ширині спектра вихідного аналогового сигналу. Його призначення – забрати залишки спектра за межами F_e і тим самим уникнути перекриття пелюстків спектра $S_D(f)$.

На практиці ця теорема має величезне значення. Наприклад, відомо, що більшість звукових сигналів можна з деякою мірою точності вважати сигналами

з обмеженим спектром. Їх спектр, в основному, лежить нижче 20 кГц. Це означає, що при дискретизації з частотою не меншою 40 кГц ми можемо достатньо точно відновити вихідний аналоговий звуковий сигнал за його цифровими відліками. Абсолютної точності досягти не вдасться, тому що в природі не буває сигналів з ідеально обмеженим спектром.

Пристрій, який інтерполює дискретний сигнал до неперервного, називається цифроаналоговим перетворювачем (ЦАП, *digital-to-analogue converter*). Ці пристрої застосовуються, наприклад, в програвачах компакт-дисків для відтворення звуку з цифрового звукового сигналу, записаного на компакт-диск. Частота дискретизації звукового сигналу під час запису на компакт-диск становить 44100 Гц. Таким чином, і ЦАП на CD-плеєрі працює на частоті 44100 Гц.

7.4.5 Дискретні перетворення сигналів

Крім звичного подання сигналів і функцій у вигляді залежності їх значень від певних аргументів (часу, лінійної або просторової координати тощо) при аналізі й обробці даних широко використовується математичний опис сигналів за аргументами. Можливість такого опису визначається тим, що будь-який як завгодно складний за своєю формою сигнал, що не має нескінченних значень на своєму інтервалі, можна подати у вигляді суми більш простих сигналів, і, зокрема, у вигляді суми найпростіших гармонічних коливань, що виконується за допомогою перетворення Фур'є. Відповідно, математично розкладання сигналу на гармонічні складові описується функціями значень амплітуд і початкових фаз коливань за неперервним або дискретним аргументом. Сукупність амплітуд гармонічних коливань розкладання називають амплітудним спектром сигналу, а сукупність початкових фаз – фазовим спектром. Обидва спектри разом утворюють повний частотний спектр сигналу, що за точністю математичного подання тотожний динамічній формі опису сигналу.

Крім гармонічного ряду Фур'є застосовуються й інші види розкладання сигналів: за функціями Уолша, Адамара, Вейвлета та інших, крім того, існують розкладання за поліномами Чебишова, Лаггера, Лежандра та інших. У ЦОС широко використовується дискретне перетворення Фур'є (ДПФ, *discrete Fourier transform*) і алгоритм його швидкого обчислення – швидке перетворення Фур'є (ШПФ). Вони дозволяють адекватно описувати в частотних координатах всі, крім наймиттєвіших (< 1 с), сигнали, при цьому зрізані за частотою Фур'є-компоненти описують дані більш правдоподібно, ніж будь-які інші степеневі ряди.

7.4.5.1 Спектр Фур'є неперервних та дискретних сигналів

Нехай $x(t)$ – неперервний сигнал, що задовольняє умову $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.

Сигнал $x(t)$ у цьому випадку може бути поданий у вигляді інтегрального розкладу за системою комплексних синусоїдальних функцій – інтеграла Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (7.21)$$

де $X(\omega)$ – комплексна функція, що визначає амплітуду та фазову затримку комплексної синусоїди з частотою ω : $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$. У загальному випадку ця функція визначена на всій осі частот $\omega \in [-\infty, \infty]$ і називається вона Фур'є-спектром сигналу $x(t)$.

У свою чергу Фур'є-спектр $X(\omega)$ може бути отриманий з вихідного сигналу $x(t)$ за допомогою співвідношення:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7.22)$$

Співвідношення (7.21), (7.22) являють собою пари інтегральних перетворень Фур'є, причому (7.22) – пряме перетворення Фур'є, (7.21) – обернене перетворення Фур'є.

Відмітимо, що сигнал $x(t)$ и Фур'є-спектр $X(\omega)$ – дві взаємно однозначні характеристики, перша є часовим поданням сигналу, друга – частотним. Часове подання більш наочне та звичне для повсякденного сприйняття, друге – менш наочне, але винятково корисне при математичному описі перетворень сигналів у лінійних системах з постійними параметрами.

Основні властивості Фур'є-спектра $X(\omega)$:

1. Функція $X(\omega)$ в загальному випадку є комплексною:

$$X(\omega) = \operatorname{Re} X(\omega) + i \operatorname{Im} X(\omega) = |X(\omega)| e^{i \arg X(\omega)} = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}.$$

Функцію $A(\omega) = |X(\omega)|$ називають амплітудним спектром (іноді магнітудою спектра), вона визначає дійсну амплітуду синусоїди із частотою ω , що бере участь у формуванні сигналу. Функцію

$\Phi(\omega) = \arg X(\omega) = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} X(\omega)}{\operatorname{Re} X(\omega)} \right)$ називають фазовим спектром, вона показує

фазовий зсув, якому варто піддати комплексну синусоїду частоти ω перед підсумовуванням при відновленні вихідного сигналу;

2. Внаслідок дійсності сигналу $x(t)$ функція $X(\omega)$ має комплексно-спряжену симетрію

$$X(\omega) = X^*(-\omega),$$

$$\operatorname{Re} X(\omega) = \operatorname{Re} X(-\omega), \quad \operatorname{Im} X(\omega) = -\operatorname{Im} X(-\omega),$$

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|, \quad \operatorname{Arg} X(\omega) = -\operatorname{Arg} X(-\omega);$$

3. Енергія спектра Фур'є обмежена й дорівнює енергії вихідного сигналу (рівність Парсеваля):

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty.$$

У теорії неперервних лінійних систем з постійними параметрами широко використовується поняття перетворення Лапласа (s-перетворення)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (7.23)$$

функції, визначеної на комплексній s-площині: $s = v + j\omega$.

При цьому пряме перетворення Фур'є (7.22) може розглядатися як перетворення Лапласа, обчислене на уявній осі в s-площині:

$$X(\omega) = X(s = j\omega).$$

У зв'язку з цим, у літературі часто можна зустріти позначення для Фур'є-спектра – $X(j\omega)$, в якому є вказівка на те, що це спектр саме неперервного сигналу.

В теорії дискретних лінійних систем замість s-перетворення Лапласа широко використовується поняття Z-перетворення дискретного сигналу

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (7.24)$$

Z-перетворення має сенс для тих значень комплексної змінної z, при яких ряд (7.24) збігається.

Z-перетворення лінійне, завдяки чому воно успішно використовується при описі лінійних дискретних систем. Вихідна послідовність може бути відновлена за допомогою оберненого Z-перетворення

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz,$$

де C – замкнутий контур, що охоплює все особливі точки функції $X(z)z^{n-1}$.

Спектр Фур'є дискретних сигналів. Спектром Фур'є послідовності $x(n)$ називають комплексну функцію $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \quad (7.25)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (7.26)$$

Вираз (7.26) показує, як вихідна послідовність може бути зібрана з дискретизованих комплексних синусоїд різних частот, узятих з вагами $X(e^{j\omega})$. Порівняння (7.25) з (7.24) показує, що спектр Фур'є $X(e^{j\omega})$ є просто Z -перетворенням, обчисленим на одиничному колі $Z = e^{j\omega}$ в комплексній Z -площині. Властивості спектра Фур'є дискретних сигналів подібні до властивостей спектра Фур'є неперервних сигналів. Однак є принципова відмінність. Спектр $X(e^{j\omega})$ періодичний за частотою з періодом 2π . Тому його значення розглядають на одному періоді – або $[-\pi, \pi]$ або $[0, 2\pi]$.

7.4.5.2 Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) є базовим алгоритмом цифрової обробки сигналів у частотній області. Завдяки наявності ефективних алгоритмів його обчислення – алгоритмів швидкого перетворення Фур'є – ДПФ широко використовується для цілей цифрової фільтрації та спектрально-кореляційного аналізу сигналів.

Для сигналу, заданого у вигляді дискретної послідовності $S(n)$, пряме й обернене дискретне перетворення Фур'є мають вигляд

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) \exp\left[-j \frac{2\pi nk}{N}\right], \quad k = \overline{0, N-1}; \quad (7.27)$$

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp\left[j \frac{2\pi nk}{N}\right], \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (7.28)$$

де k – номер гармоніки із частотою f_k , N – обсяг вибірки. $S(k)$, визначений як комплексний спектр сигналу, можна подати у вигляді

$$S(k) = A(k) - jB(k) = C(k)e^{-j\varphi(k)}, \quad (7.29)$$

де амплітудно-частотна (АЧХ) і фазочастотна (ФЧХ) характеристики сигналу відповідно визначаються

$$C(k) = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)}; \quad (7.30)$$

$$\varphi(k) = \arctg \frac{B(k)}{A(k)} + 2\pi n. \quad (7.31)$$

Обернене ДПФ можна також виконати за допомогою співвідношення

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C(k) \cos \left[\varphi(k) + \frac{2\pi}{N} kn \right], \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (7.32)$$

Виходячи з (7.32), оцінювання форми сигналу при використанні тільки інформації про його ФЧХ можна зробити за допомогою формули

$$\hat{S}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left(\varphi(k) + \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k \right).$$

Якість відновлення сигналів можна поліпшити, додатково використовуючи в (7.32) різні вагові функції, наприклад, трикутну, експонентну й ін. Тоді вираз (7.32) можна переписати в такій формі

$$\hat{S}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(k) \cdot \cos \left(\varphi(k) + \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k \right), \quad (7.33)$$

де $W(k)$ – прийнята вагова функція.

Похибку, що виникає при відновленні сигналу, можна оцінити за середнім значенням квадрата похибки:

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (\hat{S}(n) - S(n))^2}{\sum_{n=0}^{N-1} S^2(n)}.$$

Іншою відомою формою запису ДПФ є рівняння:

$$F(\Delta\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta x) \delta(x - k\Delta * x) e^{-j2\pi k\Delta\xi\Delta x} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \frac{2x_{\max} * k *}{N} \frac{1}{2x_{\max} n}} =$$

$$k * \sum_{k=0}^{N-1} x_k * e^{-j \frac{2\pi}{N} kn},$$

$$\text{де } \begin{cases} \frac{2x_{\max}}{N} = \Delta x \\ \frac{1}{2x_{\max}} = \Delta\xi \end{cases}.$$

Тоді легко отримати, що

$$\Delta x * \Delta \xi = \frac{1}{N}.$$

Подібним способом можна отримати і для оберненого перетворення

$$x_m = k \sum F_n * e^{j \frac{2\pi}{N} nm},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Таким чином, в матричній формі:

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N X,$$

$$E_N = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ W^0 & W^3 & W^6 & \dots & W^{3(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

де $W^k = e^{-j2\pi k/N}$, а сама матриця ядра ДПФ називається матрицею дискретних експоненціальних функцій (ДЕФ, *discrete exponential function*). При цьому рядки матриці визначають набір ортогональних функцій або базис розкладання.

При виконанні перетворення Фур'є рядки матриці ядра задають набір ортогональних функцій, за якими виконується розкладання вихідного сигналу. Кожний елемент вектора результату визначає внесок відповідної ортогональної функції у формування вихідного сигналу. Для перетворення Фур'є, як і для будь-якого ортогонального перетворення, визначник матриці ядра перетворення E_N відмінний від "0", що дозволяє виконати як пряме, так і обернене перетворення

$$\begin{cases} F = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N X \\ X = \frac{1}{\sqrt{N}} E_N^{-1} F \end{cases},$$

$$\text{оскільки } \frac{1}{N} E_N * E_N^{-1} = \frac{1}{N} I_N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислення перетворень Фур'є вимагає дуже великого числа множень (приблизно N^2) і обчислень синусів. Існує спосіб виконати ці перетворення значно швидше: приблизно за $N \cdot \log_2 N$ операцій множення. Цей спосіб називається *швидким перетворенням Фур'є*. Алгоритм ШПФ – це спосіб швидкого обчислення ДПФ $X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn}$, що дозволяє усунути притаманну ДПФ надмірність. Дані перетворення ґрунтуються на властивостях комплексної експоненти $e^{-j(2\pi/N)kn}$, для зручності позначають W_N^{kn} ($W_N^{kn} = e^{-j(2\pi/N)kn}$), її симетрії $W_N^{(N-k)n} = W_N^{(N-n)k} = (W_N^{kn})^*$ і періодичності $W_N^{(N+k)(N+n)} = W_N^{kn}$ з періодом, який дорівнює довжині оброблюваної реалізації сигналу N (числу точок ШПФ). Відповідно до останньої властивості експоненті $W_N^{pkn} = W_{N/p}^{kn}$ відповідає період N/p , де p – цілі числа, на які ділиться N . Використання даних властивостей в алгоритмах ШПФ дозволяє уникнути великого числа повторюваних при обчисленні ДПФ операцій.

У результаті швидкодія ШПФ може, залежно від N , в сотні разів перевершувати швидкодію стандартного алгоритму. При цьому слід підкреслити, що алгоритм ШПФ є точним. Він навіть точніший стандартного, тому що, скорочуючи число операцій, він веде до менших помилок округлення.

Однак у більшості алгоритмів ШПФ є особливість: вони здатні працювати лише тоді, коли довжина аналізованого сигналу N є степенем двійки. Зазвичай, це не є великою проблемою, оскільки аналізований сигнал завжди можна доповнити нулями до необхідного розміру. Число N називається розміром або довжиною ШПФ.

Для зображень, що являють собою двовимірний сигнал, спектр є також двовимірний сигнал. Базисні функції перетворення Фур'є мають вигляд добутоків

$$h_{k_1, k_2}^{\sin}(n_1, n_2) = \sin \frac{2\pi k_1 n_1}{N_1} \cdot \sin \frac{2\pi k_2 n_2}{N_2},$$

$$h_{k_1, k_2}^{\cos}(n_1, n_2) = \sin \frac{2\pi k_1 n_1}{N_1} \cdot \sin \frac{2\pi k_2 n_2}{N_2},$$

де $N_1 \times N_2$ – розмір вихідного сигналу, він же – розмір спектра, k_1, k_2 – це номери базисних функцій (номери коефіцієнтів двовимірного ДПФ, при яких ці функції знаходяться). Оскільки розмір спектра дорівнює розміру вихідного сигналу, то $k_1 = 0, \dots, N_1 - 1; k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$, n_1, n_2 – змінні аргументи базисних функцій. Оскільки область визначення базисних функцій збігається з областю визначення сигналу, то $n_1 = 0, \dots, N_1 - 1; n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$.

Двовимірне ДПФ визначається такими формулами

$$X[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1, n_2] \cdot e^{-jn_1 k_1 (2\pi / N_1)} e^{-jn_2 k_2 (2\pi / N_2)};$$

$$x[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X[k_1, k_2] \cdot e^{-jn_1 k_1 (2\pi / N_1)} e^{-jn_2 k_2 (2\pi / N_2)},$$

де $x[n_1, n_2]$ – вихідний сигнал, $X[k_1, k_2]$ – спектр вихідного сигналу.

Безпосереднє обчислення двовимірного ДПФ за наведеними формулами вимагає величезних обчислювальних витрат. Однак можна довести, що двовимірне ДПФ має властивість сепарабельності, тобто його можна обчислити окремо за двома вимірами. Для обчислення двовимірного ДПФ достатньо обчислити одновимірні комплексні ДПФ всіх рядків зображення, а потім обчислити в підсумковому «зображенні» одновимірні комплексні ДПФ всіх стовпців. При цьому результати всіх одновимірних комплексних ДПФ потрібно записувати на місце вихідних даних для цих ДПФ. Наприклад, при обчисленні одновимірного ДПФ першого рядка зображення потрібно результат ДПФ записати в перший рядок цього зображення (він має той же розмір). Для цього потрібно кожний піксел зберігати у вигляді комплексного числа.

Таким чином, ефективний алгоритм обчислення ДПФ зображення полягає в обчисленні одновимірних ШПФ спочатку від всіх рядків, а потім – від всіх стовпців зображення.

7.4.5.3 Застосування ДПФ

Часто ДПФ застосовується для дослідження та аналізу спектра сигналу. При цьому, зазвичай, найбільш цікавими є лише амплітуди C_k окремих гармонік, а не їх фази. У цьому випадку спектр найчастіше відображається у вигляді графіка залежності амплітуди від частоти. Часто шкала амплітуд градується в децибелах. Децибели вимірюють не самі амплітуди, а їх відношення. Наприклад, різниця на 20 дБ означає відмінність амплітуд у 10 разів, різниця на 40 дБ означає відношення амплітуд у 100 разів. Відмінності амплітуд в 2 рази відповідає різниці приблизно в 6 дБ. Шкала частот також часто градується в логарифмічному масштабі.

Перед обчисленням спектра сигналу потрібно вибрати відрізок сигналу, на якому буде обчислюватися спектр. Довжина відрізка повинна бути степенем

двійки (для роботи ШПФ), інакше сигнал треба доповнити нулями до потрібної довжини. Після цього до обраної ділянки сигналу застосовують ШПФ.

Коефіцієнти амплітуд розраховують за формулою $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$.

При обчисленні спектра зазначеним методом можливий небажаний ефект. При розкладанні функції в ряд Фур'є вважається, що функція періодична, з періодом, який дорівнює розміру ШПФ. Обчислюється спектр саме такої функції, а не тієї, сегмент якої використовується. При цьому на межах періодів така функція, напевно, буде мати розриви (адже вихідна функція не була періодичною). А розриви у функції суттєво впливають на її спектр, спотворюючи його.

Для усунення цього ефекту застосовуються так звані *вагові вікна*. Вони плавно зменшують значення функції поблизу меж ділянки, що аналізується. Вагові вікна мають форму, схожу на гауссіан. Обрану для аналізу ділянку сигналу множать на вагове вікно, яке усуває розриви функції при «зацикленні» даної ділянки сигналу. «Зациклення» відбувається при ДПФ, оскільки алгоритм ДПФ вважає, що функція періодична. Існує безліч вагових вікон, названих на честь їх творців. Всі вони мають схожу форму і значною мірою усувають розглянуті спотворення спектра. Наведемо формули двох вікон: Хеммінга і Блекмана (рис. 7.18):

$$w_{Ham\ min\ g}[n] = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N};$$

$$w_{Blackman}[n] = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N}.$$

В даному випадку вікно застосовується до сигналу з індексами від 0 до N . Вікно Хеммінга використовується найчастіше. Вікно Блекмана має більш сильну дію при усуненні розглянутих спотворень, проте має й свої недоліки.

Важлива властивість спектрального аналізу полягає в тому, що не існує жодного, єдино правильного спектра будь-якого сигналу. Спектр можна обчислювати із застосуванням різних розмірів ШПФ і різних вагових вікон. Для кожної конкретної задачі необхідно використовувати свої способи.

Ще одна важлива властивість полягає в тому, що при розкладанні в спектр ми знаходимо не ті синусоїдальні складові, з яких складався вихідний сигнал, а лише знаходимо, з якими амплітудами потрібно взяти певні кратні частоти, щоб отримати вихідний сигнал. Проте зазвичай (особливо при використанні вагових вікон) цього майже не помітно за графіком спектра, тобто графік спектра досить адекватно відображає саме частоти вихідного сигналу.

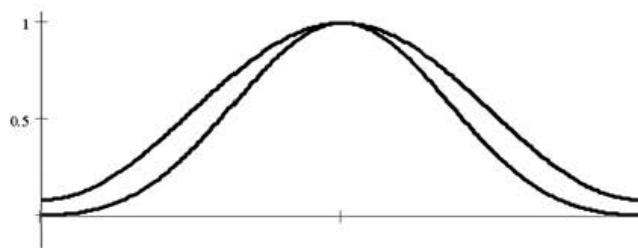


Рисунок 7.18 – Вагові вікна Хеммінга (верхнє) і Блекмана (нижнє)

7.4.6 Перетворення Лапласа

З попереднього матеріалу відомо, що Фур'є-образ функції $f(t)$ задається формулою

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi j\nu t} dt,$$

і $F(\nu)$ існує тільки у випадку збіжності інтеграла в правій частині рівності. Якщо ж інтеграл не є збіжним, то потрібно замінити $(-2\pi j\nu)$ комплексним числом

$$p = -\delta_0 - 2\pi j\nu,$$

де $\delta_0 > 0$. Показник p називається комплексною частотою або *оператором Лапласа*. Якщо ж функція $f(t)$ дорівнює нулю при $t < 0$, то одержуємо *перетворення Лапласа (Transform Laplace)*, що визначається за формулою

$$TL[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (7.35)$$

Перетворення Лапласа становить інтерес для вивчення перехідних режимів, оскільки вони дорівнюють нулю для $t < 0$ ($t=0$ відповідає моменту часу, при якому починається збурювання, що породжує перехідний процес) у силу принципу причинності: наслідок не може передувати причині.

Перетворення Лапласа – робочий інструмент фізиків і фахівців з автоматичного керування, систем зв'язку та інформаційних технологій, тому що зображення Лапласа імпульсного відгуку лінійної системи обробки даних являє собою передатну функцію такої системи. З математичної сторони питання найважливішою причиною такого широкого використання перетворення Лапласа є його застосовність для тих функцій (сигналів), у яких Фур'є-образ не існує.

Існують таблиці зображень Лапласа (табл. 7.9), що дозволяють за заданою функцією $f(t)$ (що дорівнює нулю для $t < 0$) знаходити її зображення Лапласа, і

навпаки. У випадку гармонічного режиму в зображенні Лапласа можна замінити p на комплексну частоту $j\omega$ або $2\pi j\nu$.

Таблиця 7.9 – Зображення функцій по Лапласу та Z-перетворення

	$x(t)$ при $t \geq 0$	$X(p)$	Z-перетворення
1	$1_0(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
2	T	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
4	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$T \frac{e^{-\alpha T} z}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
5	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{\alpha(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$
6	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
7	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - \cos \beta T)}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
8	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$
9	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$
10	$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = kT, k = 0 \end{cases}$	1	1
11	$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1, & t = kT \\ 0, & t \neq kT, k = 1, 2, \dots \end{cases}$	e^{-kTs}	z^{-k}

7.4.7 Застосування перетворення Лапласа в системах обробки даних

Розглянемо основні види моделей лінійних неперервних стаціонарних динамічних систем обробки даних (СОД), до яких у загальному вигляді

належать різного виду пристрої перетворення сигналів, зокрема : фільтри, пристрої розпізнавання тощо.

1. *Диференціальні моделі.* Найбільш універсальна модель, описується звичайним диференціальним рівнянням такого виду:

$$\sum_{i=0}^{na} a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{nb} b_j u^{(j)}(t), \quad (7.36)$$

де na – порядок моделі ($na > nb$), a_i і b_j – постійні коефіцієнти (параметри моделі), $u^{(i)}(t)$ і $y^{(i)}(t)$ – похідні, відповідно, вхідного й вихідного сигналів.

2. *Моделі, що характеризуються передатними функціями.* Дана характеристика визначається як відношення перетворень Лапласа вихідного та вхідного сигналів

$$W(p) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{nb} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{na} a_i p^i}, \quad (7.37)$$

де $L\{\cdot\}$ – символ перетворення Лапласа, $p = j\omega$ – комплексна частота (оператор Лапласа).

Варто мати на увазі, що клас аналогових фільтрів, тобто фільтрів для неперервних сигналів, має передатну функцію тільки типу (7.37). При цьому будь-яка передатна функція типу (7.37) може бути подана у вигляді комбінації таких чотирьох елементарних передатних функцій:

$$W_1(p) = \frac{1}{1+Tp} \text{ – низькочастотний фільтр 1-го роду;}$$

$$W_2(p) = \frac{Tp}{1+Tp} \text{ – високочастотний фільтр 1-го роду;}$$

$$W_3(p) = \frac{1}{1+2\xi Tp + T^2 p^2} \text{ – низькочастотний фільтр 2-го роду;}$$

$$W_3(p) = \frac{T^2 p^2}{1+2\xi Tp + T^2 p^2} \text{ – високочастотний фільтр 2-го роду.}$$

3. *Моделі, що характеризуються ІХ $w(t)$.* Під імпульсною характеристикою (ІХ) $w(t)$ розуміється реакція попередньо незбуреного об'єкта (тобто об'єкта з нульовими початковими умовами) на вхідний сигнал/імпульс δ -функції.

4. *Моделі, що характеризуються перехідними функціями $h(t)$.* Це реакція попередньо незбуреного об'єкта на вхідний сигнал у вигляді одиничного

стрибка. З теорії керування відомі такі співвідношення між цими характеристиками:

$$L\{w(t)\}=W(p), \quad w'(t)=h(t), \quad L\{h(t)\}=\frac{W(p)}{p}.$$

При нульових початкових умовах зв'язок між вихідним і вхідним сигналами описується інтегралом згортки (інтеграл Дюамеля):

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

або, в операторній формі,

$$Y(p)=W(p)\cdot U(p).$$

5. *Моделі, що характеризуються частотними характеристиками.*

Частотні характеристики об'єкта визначаються його комплексним коефіцієнтом передачі $K(j\omega)=W(j\omega)=W(p)|_{p=j\omega}$, що є Фур'є-перетворенням IX і ще відомий як амплітудно-фазочастотна характеристика (АФЧХ) СОД.

Модуль комплексного коефіцієнта передачі $|W(j\omega)|=A(\omega)$ являє собою, як відомо, амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) об'єкта з передатною функцією $W(p)$, а аргумент $\arg(W(j\omega))=\varphi(\omega)$ – фазочастотну характеристику (ФЧХ).

Графічне подання АФЧХ $W(j\omega)$ на комплексній площині при зміні частоти ω від 0 до ∞ , тобто графік АФЧХ у полярних координатах називається діаграмою Найквіста.

У той же час слід зазначити, що часто для зручності в розрахунках використовується логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ), яка дорівнює $20 \lg |W(j\omega)|$.

6. *Модель у просторі станів.* Динаміку системи (7.36) можна описати двома рівняннями в просторі станів.

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX + Bu(t), \\ y(t) &= CX(t) + Du(t), \end{aligned}$$

де $X(t)$ – вектор-стовпець змінних стану; $y(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)]^T$ – вектор вихідних координат; A , B , C і D – матриці відповідних розмірностей, зокрема при скалярних $u(t)$ матриця координат вхідних впливів B буде мати розмірність $(1 \times n)$, а матриця спостережень C в загальному випадку буде мати розмірність $(p \times n)$.

Застосування, при нульових початкових умовах, до останніх рівнянь перетворення Лапласа дозволяє одержати такий матричний вираз для передатної функції:

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B + D,$$

де I — одинична матриця відповідної розмірності.

Відзначимо також, що всі наведені моделі є еквівалентними одна одній, тобто, знаючи одну з них, можна, за необхідності, одержати всі інші.

7.4.8 Ортогональні перетворення в діадних базисах

Ортогональні перетворення (orthogonal transformation) в діадних (або двозначних знакозмінних) базисах визначені для даних, поданих векторами довжиною $N = 2^M$. До таких перетворень належать перетворення Адамара, Пелі, Уолша, Трахтмана і ряду інших. Матриця ядра кожного з подібних перетворень містить цілочислові коефіцієнти з множини $\{-1; +1\}$. Очевидно, що при виконанні подібних перетворень істотно скорочується обсяг обчислень за рахунок уникнення множення в кожній базовій операції.

Матриця ядра перетворення Уолша-Адамара для $N = 2^M$ може бути описана як результат добутку Кронекера m матриць ДЕФ E^2 розміром 2×2 :

$$A_N = A_2^m = E_2 \otimes E_2 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_2 = [E_2]^m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^m,$$

де символ \otimes — операція кронекерівського множення векторів, у результаті чого породжується матриця блочної структури. Помітимо, що операція кронекерівського множення двох матриць полягає в одержанні блокової матриці, блоками якої є помножена на відповідний елемент правої матриці ліва матриця, тобто:

$$A_4 = E_2 \otimes E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}.$$

Матриця Адамара для $N = 8$

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матриця ядра Адамара має такі властивості:

- 1) циклічність $a_{N+k} = a_k$; $a_{N-k} = a_{-k}$;
- 2) мультиплікативність $a_{k+1} = a_k * a_1$;
- 3) симетричність $A_N = A_N^T$.

У завданнях ЦОС використовуються також інші, подібні до перетворення Адамара, перетворення – Пелі, Уолша, Трахтмана та інших. Ядра (матриці) цих перетворень можуть бути отримані на основі матриці ядра перетворення Адамара при певному перепорядкуванні рядків.

7.4.9 Згортка. Кореляція

Визначення кореляції (*correlation*), а в окремому випадку для центрованих сигналів – коваріації (*covariance*), є методом аналізу сигналів. Цей математичний апарат знайшов застосування в обробці зображень у сфері комп'ютерного зору або дистанційного зондування з супутників, у яких порівнюються дані з різних зображень, у радарних або гідроакустичних установках для дальнометрії та місцевизначення, у яких порівнюються передані та відбиті сигнали.

Кореляція дозволяє визначити ступінь незалежності одного процесу від іншого або встановити подібність одного набору даних іншому. Кореляція також є невід'ємною частиною процесу згортання, що, за суттю, та ж кореляція двох послідовностей даних, при обчисленні якої одна з послідовностей згорнута в часі. Це означає, що для обчислення кореляції та згортки можуть використовуватися ті ж самі алгоритми.

Для двох послідовностей $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$ довжини N з нульовим середнім значенням оцінювання їх взаємної кореляції здійснюється за формулою

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

де $r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2$, $r_{yy}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k^2$, $r_{xy}(n)$ – оцінка взаємної коваріації, що знаходиться за формулою

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{k+n}.$$

Для послідовності $\{x_k\}$ кінцевої довжини N з нульовим середнім значенням обчислення автокореляційної функції здійснюється таким чином

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

де $r_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x_k y_{k+n}$.

Існує кілька способів розрахунку відгуку системи на довільний вхідний сигнал. Найбільш розповсюджений спосіб розрахунку полягає в тому, що ми обчислюємо значення кожної точки у підсумковому сигналі як зважену суму певної множини сусідніх точок вихідного сигналу. Коефіцієнти цієї суми збігаються з імпульсною характеристикою лінійної системи, розгорнутої відносно точки 0. Звідси й береться формула згортання для одновимірного випадку:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot h[k].$$

Розглянута операція отримання підсумкового сигналу за вхідним називається *згортанням* (*compression*), а отриманий результат *згорткою*. Отже, будь-яка лінійна система здійснює згортання вхідного сигналу зі своєю імпульсною характеристикою. Це записується так: $y[n] = x[n] * h[n]$. Функція $h[n]$ називається ядром згортання або імпульсною характеристикою лінійної системи.

Зазвичай всі сигнали, що обробляються на комп'ютерах, мають кінцеву тривалість (тобто відмінні від нуля лише на кінцевому відрізку). Розглянемо, що відбувається з сигналом кінцевої тривалості, коли його згортають з кінцевим ядром згортки. Нехай сигнал $x[n]$ відмінний від нуля тільки на відрізку від 0 до $N-1$ включно («має довжину N »). Нехай ядро згортання $h[n]$ відмінне від нуля на відрізку від $-m_1$ до $-m_2$ включно, що складається з M точок ($M = m_1 + m_2 + 1$). Тоді при підстановці цих сигналів в рівняння згортання отримаємо сигнал $y[n]$, який відрізняється від нуля на відрізку від $-m_1$ до $N-1+m_2$ включно. Таким чином, довжина підсумкового сигналу дорівнює

$N + M - 1$, тобто сумі довжин вихідного сигналу і ядра згортки мінус один. Отже, операція згортання розширює сигнал на $M-1$ точку, де M – довжина ядра згортання.

Властивості згортання

1. Закон комутативності:

$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$ (тобто можна переставляти місцями вихідний сигнал і ядро згортання);

2. Закон асоціативності:

$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$ (тобто замість того, щоб проводити згортання по черзі в різних системах, можна отримати систему з ядром $(y[n] * z[n])$, яка є суперпозицією систем $y[n]$ і $z[n]$).

3. Закон дистрибутивності:

$$x[n] * y[n] + x[n] * z[n] = x[n] * (y[n] + z[n]).$$

Теорема згортання. Згортання в часовій області еквівалентна множенню в частотній області; множення в часовій області еквівалентно згортці в частотній області. Це означає, що для виконання згортання двох сигналів можна перевести їх в частотну область, помножити їх спектри і перевести їх назад в часову область. Така операція виглядає громіздко. Однак з появою алгоритмів ШПФ, що дозволяють швидко обчислювати перетворення Фур'є, обчислення згортки через частотну область стало широко використовуватися. При значних довжинах ядра згортання такий підхід дозволяє в сотні разів скоротити час обчислення згортання.

Циклічне згортання й кореляція

У дискретному вигляді лінійні перетворення можуть бути описані в загальному вигляді як векторно-матричні операції

$$Y = B_N X,$$

де X – вектор відліків вихідних даних, отриманий у результаті дискретизації неперервного сигналу відповідно до теореми Котельникова, Y – вектор відліків результату, B_N – матриця розміром $N \times N$, що визначає ядро перетворення.

До числа подібних перетворень належить *циклічне згортання* послідовностей $X = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}]$ і $G = [g_0 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{N-1}]$, в цьому випадку будується матриця ядра згортання:

$$B_N^C = G_N = \begin{pmatrix} g_0 & g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_1 \\ g_1 & g_0 & g_{N-1} & \dots & g_2 \\ g_2 & g_1 & g_0 & \dots & g_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & g_{N-3} & \dots & g_0 \end{pmatrix}.$$

Кожний елемент вектора Y може бути описаний як

$$y_m = \sum_{n=0}^{N-1} g_m - n^x n.$$

Матриця ядра циклічної взаємкореляції може бути побудована як транспонована матриця ядра згортки, тобто таким чином:

$$K_N = B_N^K = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_{N-1} \\ g_{N-1} & g_0 & g_{N-1} & \dots & g_{N-2} \\ g_{N-2} & g_{N-1} & g_0 & \dots & g_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \dots & g_0 \end{vmatrix},$$

тому кожний відлік результату може бути записаний як

$$z_m = \sum_{n=0}^{N-1} g_m + n^x n,$$

причому $g_{m+n} = g_n$ для $m+n \geq N$.

Аперіодичне згортання та обчислення кореляції, на відміну від циклічного згортання, належать до класу локальних перетворень. При цьому, як правило, вважається, що розмір вектора вихідних даних значно більше розміру ядра згортання, що приводить до такого виразу для обчислення будь-якого відліку результату:

$$y_i = \sum_m g_m x_i - m.$$

Обчислення згортки та кореляції лежить в основі кореляційного методу заглушення завод. Сутність такого методу полягає у використанні розходження між кореляційними функціями сигналу та завади. Даний метод ефективний лише у випадку обробки періодичних або квазіперіодичних сигналів.

7.4.10 Цифрова фільтрація сигналів

Терміном цифровий фільтр називають апаратну або програмну реалізацію математичного алгоритму, входом якого є цифровий сигнал, а виходом – інший цифровий сигнал, форма якого і/або амплітудна та фазова характеристики спеціальним чином модифіковані.

В аналогових системах під фільтром розуміють деякий лінійний пристрій зі спеціальною частотною характеристикою $\tilde{K}(j\omega)$, який перетворює вхідний сигнал ω_x, ω_y у вихідний $y(t)$ (рис. 7.19), заглушаючи або, навпаки,

підсилюючи при цьому певні частоти в спектрі вхідного сигналу. Вихідний сигнал $y(t)$ знаходиться як згортка вхідного сигналу $s(t)$ та імпульсної характеристики фільтра $h(t)$:

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int s(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s(t - \tau)d\tau$$

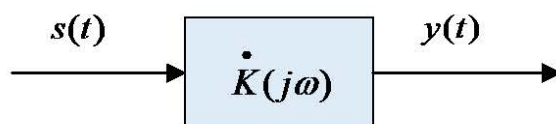


Рисунок 7.19– Цифровий фільтр

За аналогією з аналоговим фільтром, цифровий фільтр (ЦФ, digital filter) перетворює послідовність відліків вхідного сигналу $\{s_k\}$ у числову послідовність вихідного сигналу $\{y_k\}$. Для ЦФ також вводять поняття імпульсної характеристики $\{h_k\}$, що є реакцією ЦФ на “одиничний імпульс (стрибок)”, тобто

$$(1, 0, 0, \dots) \xrightarrow{\text{ЦФ}} (h_0, h_1, h_2, \dots).$$

Імпульсну характеристику (pulse response characteristic) $\{h_k\}$ ЦФ можна трактувати як результат дискретизації неперервної імпульсної характеристики $h(t)$ відповідного аналогового фільтра-прототипу (рис. 7.20).

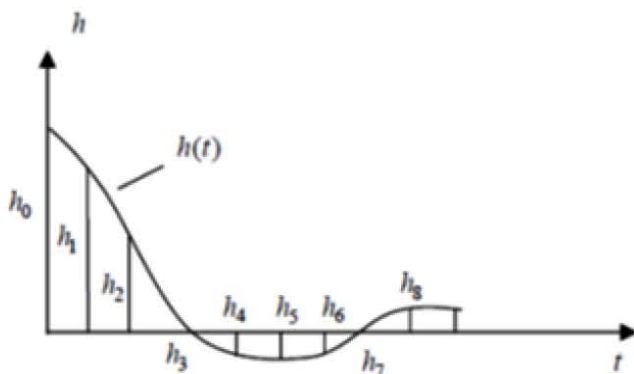


Рисунок 7.20 – Дискретизація імпульсної характеристики

Якщо взяти кінцеве число відліків $h(t)$, тоді отримуємо ЦФ із *кінцевою імпульсною характеристикою* (КИХ-фільтр, finite impulse response filtering).

Якщо взяти нескінченне число відліків $h(t)$, отримаємо ЦФ із *нескінченно-імпульсною характеристикою* (НІХ-фільтр, infinite impulse response filtering).

Під фільтром зазвичай розуміють систему, що одні частоти пропускає, а інші затримує. Однак у техніці цифрової обробки сигналів поняття фільтра трактується більш широко. *Дискретним фільтром* називають довільну систему обробки дискретного сигналу, що має властивості лінійності й стаціонарності. Існують також фільтри зі змінними параметрами, наприклад, *адаптивні фільтри*, що змінюють свої параметри залежно від статистичних властивостей вхідного сигналу.

У загальному випадку, фільтр змінює в спектрі сигналу і амплітуди гармонік, і їх фази. Однак фільтри можна проектувати так, щоб вони не змінювали фазу сигналу. Такі фільтри називаються *фільтрами з лінійною фазою*. Це означає, що якщо вони і змінюють фазу сигналу, то роблять це так, що всі гармоніки сигналу зсуваються за часом на одну й ту ж величину. Таким чином, фільтри з лінійною фазою не спотворюють фазу сигналу, а лише зсувають весь сигнал в часі. Ядро згортки такого фільтра симетричне щодо своєї центральної точки.

Основна властивість будь-якого фільтра – це його частотна і фазова характеристики. Вони показують, як фільтр впливає на амплітуду і фазу різних гармонік оброблюваного сигналу. Якщо фільтр має лінійну фазу, то розглядається лише частотна характеристика фільтра. Зазвичай частотна характеристика зображається у вигляді графіка залежності амплітуди від частоти (в децибелах). Наприклад, якщо фільтр пропускає всі сигнали в смузі 0 ... 10 кГц без зміни, а всі сигнали в смузі вище 10 кГц заглушує в 2 рази (на 6 дБ), то частотна характеристика буде мати такий вигляд:

$$A(f) = \begin{cases} 0\text{дБ}, & f < 10\text{кГц} \\ -6\text{дБ}, & f > 10\text{кГц} \end{cases}.$$

Частотна характеристика в 0 дБ показує, що дані частоти фільтр пропускає без зміни. Ті частоти, амплітуда яких послаблюється фільтром в 2 рази, повинні мати амплітуду на 6 дБ менше. Тому їх амплітуда становить -6 дБ. Якщо фільтр посилює частоти, то його частотна характеристика на цих частотах є позитивною.

Вихідний сигнал $y(k)$ фільтра, що має нетривіальну частотну характеристикою, залежить від декількох відліків вхідного сигналу $x(k)$. У загальному випадку при обчисленні вихідного відліку використовується також деяка кількість попередніх відліків вихідного сигналу. Для фільтрів, що не використовують вихідні відліки, рівняння фільтрації має вигляд

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i).$$

Такі фільтри називаються *нерекурсивними* (*nonrecursive filter*) або *трансверсальними*. Кількість відліків m називається порядком фільтра. Структурна схема нерекурсивного фільтра показана на рис. 7.21. Імпульсна характеристика нерекурсивного фільтра визначається його коефіцієнтами $h(k) = b_k$. Оскільки в реальному пристрої кількість ліній затримки обмежена, а отже, і кількість коефіцієнтів, нерекурсивні фільтри відносять до класу КІХ-фільтрів.

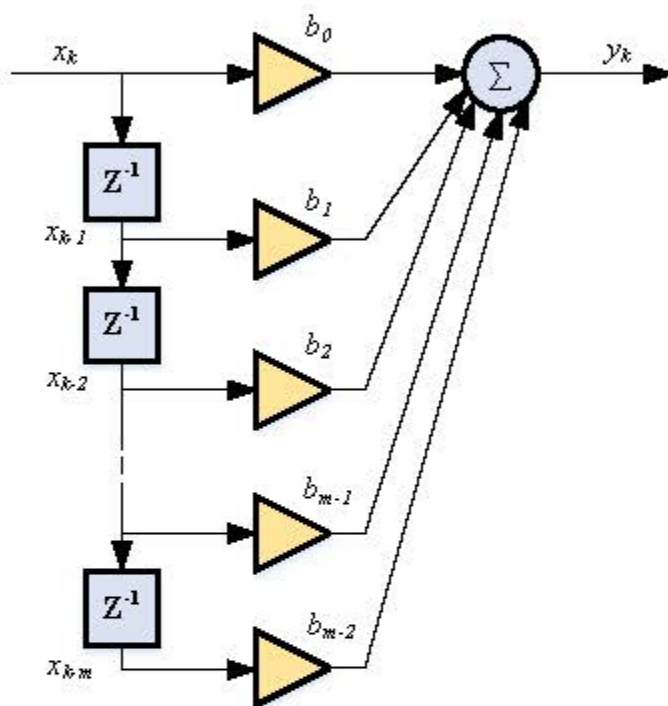


Рисунок 7.21 – Нерекурсивний фільтр

Фільтр, у якому також використовуються і вихідні відліки, називається *рекурсивним* (*recursive filter*) (рис. 7.22). Рівняння рекурсивного фільтра має вигляд

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i) - \sum_{i=0}^m a_i y(k-i)$$

Наявність у схемі рекурсивного фільтра зворотних зв'язків дозволяє одержати нескінченну імпульсну характеристику, тому такі фільтри належать до класу БХ-фільтрів. Проте такі фільтри за деяких умов можуть бути нестійкими.

Під проектуванням (синтезом) цифрового фільтра розуміють вибір таких наборів його коефіцієнтів $\{a_i\}$ і $\{b_i\}$, які задовольняють задані вимоги. У

завдання проектування входить також і вибір потрібної структури фільтра з урахуванням необхідної точності обчислень.

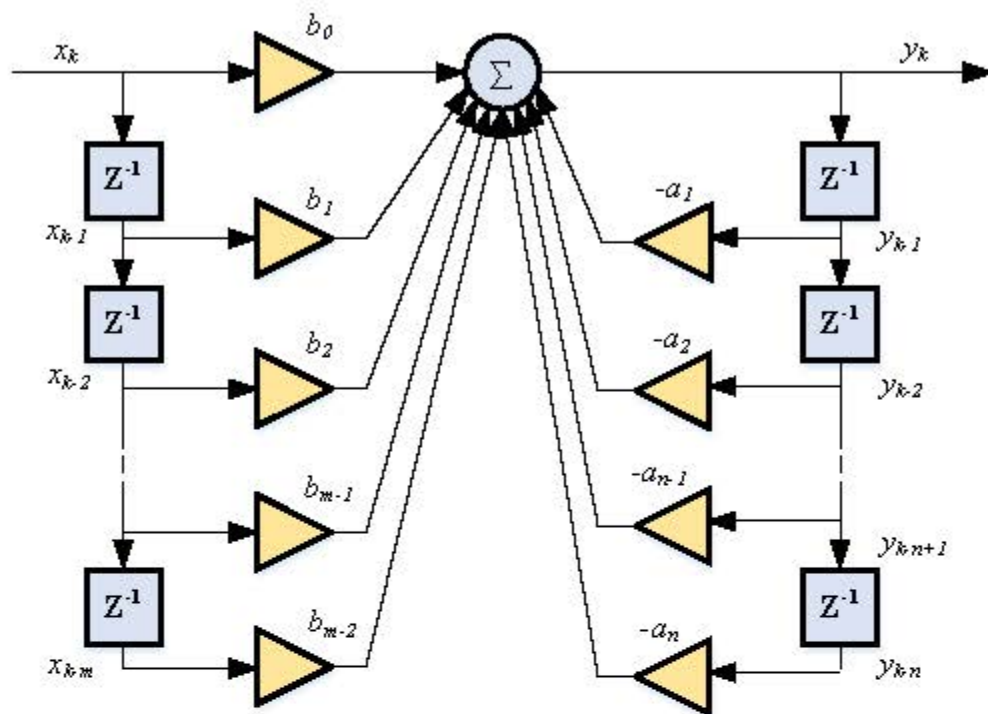


Рисунок 7.22 – Рекурсивний фільтр

У проектуванні та реалізації цифрових фільтрів застосовується безліч різноманітних підходів і методів, вибір яких залежить від багатьох факторів, зокрема – від того, як формулюється завдання фільтрації.

Найчастіше цифрова фільтрація застосовується для виділення сигналу або для відновлення сигналу. Виділення “корисного” сигналу необхідно, коли сигнал, що надходить у систему із зовнішнього середовища, змішаний із шумами, викликаними різними фізичними процесами, що мають, як правило, випадковий характер. Відновлення сигналу необхідно через можливі спотворення сигналу, викликані роботою апаратури.

У зв'язку з тим, що теорія апроксимації ідеальних АЧХ аналоговими засобами добре розвинена, широке використання одержали методи синтезу цифрових фільтрів за аналоговими прототипами.

У прямих методах синтезу без використання аналогових прототипів часто використовується той факт, що ДПФ можна трактувати як обробку сигналу фільтром з відповідною імпульсною характеристикою.

Оскільки ДПФ лінійного згортання дорівнює добутку ДПФ послідовностей, що згортаються, алгоритм фільтрації в частотній області можна формалізувати так, як викладено нижче.

– Послідовність відліків вхідного сигналу та імпульсна характеристика фільтра доповнюються нулями так, щоб довжини послідовностей дорівнювали та не були меншими за суму довжин вихідних послідовностей мінус одиниця.

– Обчислюються ДПФ доповнених нулями послідовностей.

– Обчислені ДПФ поелементно перемножуються.

– Обчислюється обернене ДПФ від результату перемножування.

Для підвищення ефективності фільтрація здійснюється в частотній області з використанням ШПФ.

При проектуванні цифрових фільтрів один із ключових моментів пов'язаний з особливостями технічної реалізації і рядом обмежень, обумовлених розрядністю цифрових обчислювальних пристроїв:

– шум квантування, що виникає при аналого-цифровому перетворенні;

– спотворення характеристик, що відбувається при квантуванні коефіцієнтів цифрових фільтрів;

– переповнення розрядної сітки в процесі обчислень;

– округлення проміжних результатів обчислень.

Тому при проектуванні цифрових фільтрів важливо правильно вибрати способи й формати подання чисел (дійсні або комплексні числа, з фіксованою або плаваючою крапкою тощо), динамічний діапазон подання даних, обумовлений розрядністю регістрів устаткування, а також оцінити можливий вплив шумів і спотворень.

7.5 Методи обробки зображень

Методи обробки зображень (*image processing*) мають надзвичайно важливе значення в сучасній науці, вони є одними з таких, які постійно розвиваються та вдосконалюються. При цьому під обробкою зображень розуміють не лише поліпшення зорового сприйняття зображень, але й класифікацію об'єктів, що виконується при аналізі зображень.

Сфери застосування методів цифрової обробки в наш час значно розширюються, витісняючи аналогові методи обробки сигналів зображень. Методи цифрової обробки широко застосовуються в промисловості, мистецтві, медицині, космосі. Вони застосовуються при керуванні процесами автоматизації виявлення об'єктів, при розпізнаванні образів і в багатьох інших. Цифрова передача зображень із космічних апаратів, цифрові канали передачі сигналів зображень вимагають забезпечення передачі все більших потоків інформації. Формування зображень, поліпшення якості та автоматизація обробки медичних зображень, охоплюючи зображення, що створюються електронними мікроскопами, рентгенівськими апаратами, томографами тощо, є предметом сучасних досліджень та розробок. Автоматичний аналіз у системах дистанційного спостереження широко застосовується при аналізі місцевості, у лісовому господарстві, наприклад, для автоматичного підрахунку площі вирубок, у сільському господарстві для спостереження за дозріванням урожаю, у розвідці, у системах протипожежної безпеки. Контроль якості виробленої продукції виконується завдяки автоматичним методам аналізу сцен.

Сьогодні важко уявити сферу діяльності, у якій можна обійтися без комп'ютерної обробки зображень. При комп'ютерній обробці зображень вирішується широке коло таких завдань, як поліпшення якості зображень; вимірювання параметрів зображення; спектральний аналіз багатовимірних сигналів; розпізнавання зображень; стиск зображень.

7.5.1 Класичні методи обробки зображень

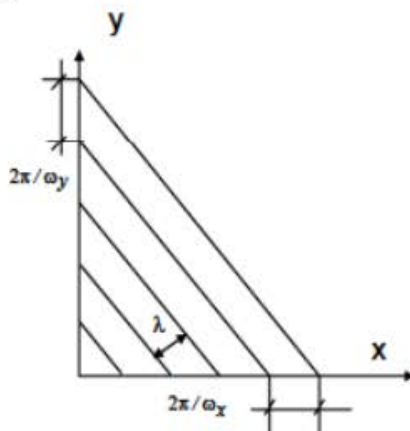
Комп'ютерна обробка зображень можлива після перетворення сигналу зображення з неперервної форми в цифрову. Ефективність обробки залежить від адекватності моделі, що описує зображення, необхідної для розробки алгоритмів обробки. Модель зображення являє собою систему функцій, що описують істотні характеристики зображення: функцію яскравості, що відбиває зміну яскравості в площині зображення, просторові спектри й спектральні інтенсивності зображень, функції автокореляції. Канал зображення містить оптичну систему, оптико-електричний перетворювач, пристрій аналого-цифрового перетворення (АЦП) і цифрової обробки сигналів зображення.

При обробці зображень широко використовується аналіз спектрів зображень. Спектр зображення (*image spectrum*) одержують прямим двовимірним перетворенням Фур'є функції, що описує зображення

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i(\omega_x x + \omega_y y)) dx dy + \\ + i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-f(x, y)) \sin(\omega_x x + \omega_y y) dx dy = \text{Re}(\omega_x, \omega_y) + i \text{Im}(\omega_x, \omega_y) \quad (7.38)$$

де ω_x, ω_y – просторові частоти; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Функція $\exp(-i(\omega_x x + \omega_y y)) dx dy$ при фіксованих значеннях просторових частот описує плоску хвилю в площині зображення (x, y) (відповідно до рисунка 7.23, де λ – довжина хвилі).



Формула (7.38) пов'язує дійсну функцію, що описує яскравість зображення $f(x, y)$, з комплексною функцією частоти – спектром зображення $F(\omega_x, \omega_y)$:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i(\omega_x x + \omega_y y)) dx dy + \\ + i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-f(x, y)) \sin(\omega_x x + \omega_y y) dx dy = \text{Re}(\omega_x, \omega_y) + i \text{Im}(\omega_x, \omega_y) \quad (7.39)$$

де $\text{Re}(\omega_x, \omega_y)$ – дійсна частина спектра; $\text{Im}(\omega_x, \omega_y)$ – реальна частина спектра.

Амплітуда і фаза спектра визначаються за формулами (7.40) і (7.41) відповідно:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{\operatorname{Re}(\psi_x, \psi_y)^2 + \operatorname{Im}(\psi_x, \psi_y)^2} ; \quad (7.40)$$

$$\varphi(\psi_x, \psi_y) = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im}(\psi_x, \psi_y) / \operatorname{Re}(\psi_x, \psi_y))$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = F(\psi_x, \psi_y) \exp(i\varphi(\omega_x, \omega_y)). \quad (7.41)$$

Обернене перетворення Фур'є дозволяє відновити зображення за його спектром:

$$f(x, y) = (1/4\pi^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi_x, \psi_y) \exp(i\varphi(\omega_x, \omega_y)). \quad (7.42)$$

Спектральна інтенсивність (*spectral intensity*) зображення характеризує розподіл енергії по просторових частотах. Вона визначається як квадрат модуля спектра зображення:

$$S(\omega_x, \omega_y) = \operatorname{Re}(\omega_x, \omega_y)^2 + i \operatorname{Im}(\omega_x, \omega_y)^2 = F^2(\omega_x, \omega_y). \quad (7.43)$$

Для її назви використовуються терміни “спектральна щільність” (*spectral density*) і “енергетичний спектр” (*energy spectrum*).

Енергія зображення визначається як інтеграл енергетичного спектра за просторовими частотами. Відповідно до теореми Парсеваля енергія зображення може бути обчислена відповідно до (2.7):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y. \quad (7.44)$$

Ймовірнісні моделі зображень (*probabilistic image models*) широко використовуються для опису зображень. Зображення в цьому випадку розглядається як випадкова функція просторових координат (x, y) і часу t . Випадковий процес називається стаціонарним у широкому сенсі, якщо він має постійні значення математичного очікування й дисперсії, а його автокореляційна функція залежить не від координат, а від їх різниці (зсуву). Випадковий процес називається стаціонарним у вузькому сенсі, якщо його n -вимірна щільність розподілу ймовірностей інваріантна до зсуву. Випадковий процес описується щільністю розподілу ймовірності яскравості в зображенні по просторових координатах для деякого фіксованого моменту часу t $p(x, y)$.

Відповідно до означення математичне сподівання (середнє значення, *mathematical expectation*) стаціонарного процесу в широкому розумінні

$$Mf = \xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy = \text{const}.$$

Дисперсія (*dispersion, variance*)

$$Df = \sigma^2 = E(f(x, y) - \xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x, y) - \xi)^2 p(x, y) dx dy = const.$$

Функція автокореляції (*autocorrelation function*) обчислюється таким чином:

$$R(\tau_x, \tau_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) f(x - \tau_x, y - \tau_y) dx dy,$$

де τ_x, τ_y задають зсуви зображення по відповідних осях координат.

7.5.2 Статистичні методи аналізу зображень

Перші статистичні методи були основані на аналізі взаємного розташування відтінків сірого кольору зображення та частоти їх появи, що характеризувалась двовимірною функцією щільності ймовірності. Для класифікації та розпізнавання текстур за допомогою функції щільності ймовірності було визначено чотири характерних ознаки:

- кутовий момент;
- контрастність;
- кореляція;
- ентропія.

До статистичних методів можна віднести кореляційний аналіз зображень. На основі кореляційного підходу найбільш успішним є метод матриць взаємозв'язку (co-occurrence matrices – GLCM). Дані матриці характеризують частоту пар різних градацій сірого кольору, що присутні в зображенні, і визначаються шляхом кореляційного аналізу пікселів зображення, при цьому якщо піксель відповідає вибраній градації, то він враховується як одиничне значення, якщо ні, то як нульове. У випадку кольорових зображень даний підхід використовують до аналізу кожного з трьох базових кольорів. Як слідує з методу формування матриць взаємозв'язку, вони найкраще підходять до розв'язання задач класифікації текстур.

Наряду зі статистичним аналізом в просторовій області використовують аналогічний аналіз в спектральній області із застосуванням двовимірного дискретного перетворення Фур'є в базисі різних ортогональних функцій – дискретних експоненціальних функцій (ДЕФ), косинусних, Уолша-Адамара, Хаара та інших. Для аналізу текстур використовують метод гістограм розподілу спектральних коефіцієнтів. Загальною характеристикою такого підходу є те, що гістограми спектральних коефіцієнтів, що отримані в результаті інтегральних перетворень, більш стійкі та надійні, ніж гістограми розподілу окремих пікселів чи груп пікселів. Даний метод також не чутливий до присутнього в зображенні шуму, але це є одночасно і недоліком в разі застосування методу до розв'язання

задачі розпізнавання незначних за розміром об'єктів на текстурованому фоні. Також спектральні методи згладжують різкі межі між об'єктами зображення.

Статистичний аналіз пікселів та спектральних коефіцієнтів на основі гістограм в основному використовують до класифікації статичних текстур, до аналізу динамічних текстур використовують методи на основі кореляційного аналізу.

Найпростішою і найбільш часто вживаною є стохастична модель. Фон зображення характеризують гістограмою розподілу значень кольору за величиною в деякій базовій області, вільній від об'єктів. Гістограму апроксимують функцією щільності розподілу ймовірності, найчастіше гаусовою. В цьому випадку параметрами моделі є середнє значення m та дисперсія σ . За максимальне відхилення сигналу моделі приймають 2σ . За мінімальне порогове значення величини відхилення можна прийняти величину $\varepsilon_p = 3\sigma$.

Як приклад розглянемо алгоритм розпізнавання зображення об'єктів за допомогою стохастичної моделі:

$$\text{if } |u_{i,j} - m| > \varepsilon_v \text{ then } v_{i,j} = u_{i,j} \text{ else } v_{i,j} = 0,$$

де $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ – елементи матриць заданого зображення та зображення об'єктів.

Метод побудови моделі та її застосування викладено нижче

1. Фрагмент зображення фону, вільний від сторонніх предметів, розміром $n_x \times n_y = 80 \times 80$ пікселів використано як базовий для того, щоб знайти статистичні параметри фону.

2. За допомогою наведеного виразу створено зображення об'єктів.

Як видно з рисунка, всі сторонні об'єкти, як великі (листки), так і малі (білого кольору), виділені, але присутній шум похибки. Зменшити похибку можна збільшивши порогове значення відбору, але, як показали чисельні експерименти, в цьому випадку втрачається якість зображення об'єктів. Таким чином, стохастична модель погано апроксимує фоновий сигнал та неспроможна повністю відділити шукані об'єкти від фону.

7.5.3 Фільтрація зображень

Зазвичай зображення, сформовані різними інформаційними системами, спотворюються дією завад. Це ускладнює як їхній візуальний аналіз, так і автоматичну обробку. При вирішенні деяких завдань обробки зображень у ролі завад можуть виступати ті або інші компоненти самого зображення. Наприклад, при аналізі космічного знімка земної поверхні може стояти завдання визначення меж між її окремими ділянками – лісом і полем, водою й сушею тощо. З погляду цього завдання окремі деталі зображення всередині розділених ділянок є завадою.

Ослаблення дії завад досягається фільтрацією. При фільтрації яскравість (сигнал) кожної точки вихідного зображення, спотвореного завадою, замінюється деяким іншим значенням яскравості, яке меншою мірою було спотворене завадою. Фільтрація зображень здійснюється в просторовій і частотній областях. При просторовій фільтрації зображень перетворення виконується безпосередньо над значеннями відліків зображення. Результатом фільтрації є оцінка корисного сигналу зображення. Це досягається завдяки тому, що зображення часто являє собою двовимірну функцію просторових координат, що змінюється по цих координатах повільніше, ніж завада, що також є двовимірною функцією. Це дозволяє при оцінюванні корисного сигналу в кожній точці зображення взяти до уваги сусідні точки, скориставшись певною подібністю сигналу. В інших випадках, навпаки, ознакою корисного сигналу є різкі перепади яскравості. Однак, як правило, частота цих перепадів відносно невелика, так що на значних проміжках сигнал або постійний, або змінюється повільно. І в цьому випадку властивості сигналу проявляються при спостереженні не тільки його окремої точки, але й при аналізі її околу. Поняття околу є досить умовним. На рисунку 7.24 наведена ієрархія околів відліку, позначеного «0».

9	8	7	6	7	8	9
8	5	4	3	4	5	8
7	4	2	1	2	4	7
6	3	1	0	1	3	6
7	4	2	1	2	4	7
8	5	4	3	4	5	8
9	8	7	6	7	8	9

Рисунок 7.24 – Конфігурації околу елемента «0» у кадрі зображення в ієрархічній послідовності

«1» позначений окіл першого порядку, для якого відстань між елементами дорівнює 1. «2» позначений окіл другого порядку, до якого відносять діагональні елементи, відстань від яких до центрального відліку «0» дорівнює $\sqrt{2}$. Окіл третього порядку поданий елементами, що знаходяться від центрального елемента на відстані 2, і так далі.

Відповідно до рисунка 7.24 формується ієрархія конфігурацій околу центрального відліку розглянутого фрагмента кадру за зростанням відстаней від нього до відліку околу. Окіл може бути утворений лише найближчими сусідами,

але може містити й досить багато елементів кадру. При розгляді околу великого розміру іноді встановлюється різний ступінь впливу далеких і близьких від центра околу точок на сигнал, формований на виході фільтра в даній точці кадру. Таким чином, ідеологія фільтрації ґрунтується на використанні як даних поточної точки, так і її околу.

Традиційна фільтрація в частотній області вимагає виконання такої послідовності перетворень:

- двовимірне дискретне перетворення зображення із просторової області в частотну (наприклад, за допомогою дискретного перетворення Фур'є),
- перетворення дискретного спектра сигналу зображення,
- обернене двовимірне дискретне перетворення, що дозволяє відновити корисний сигнал зображення в просторовій області.

Завдання полягає в тому, щоб знайти таку обчислювальну процедуру, що забезпечила б одержання найкращих результатів.

Використання фільтрів для аналізу текстурованих зображень аналогічно спектральному аналізу, але має ряд переваг в тих випадках, коли характерні ознаки спектра зображення відомі. Фільтрація дозволяє більш точно розділити сигнал на складові, що відповідають різним частотним смугам.

Оптимальна лінійна фільтрація

Нехай $x_{i,j}$ – значення яскравості зображення корисного сигналу на перетині i -го рядка та j -го стовпця, а зображення, що знаходиться на вході фільтра, описується моделлю:

$$y_{i,j} = f(x_{i,j}, n_{i,j}), \quad i = \overline{0, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1},$$

де $n_{i,j}$ – значення завади в точці з координатами (i, j) , $f(\cdot)$ – функція, що описує взаємодію сигналу і завади, а I та J – відповідно, число рядків і стовпців у кадрі.

Надалі будемо дотримуватися прийнятої при цифровій обробці зображень декартової системи координат з початком у лівому верхньому кутку кадру та з додатними напрямками із цієї точки вниз та вправо.

При лінійній фільтрації вихідний ефект визначається лінійною комбінацією вхідних даних:

$$x(i, j) = \sum_{(i_1, j_1) \in S} a(i_1, j_1) \cdot y(i - i_1, j - j_1). \quad (7.45)$$

В цьому рівнянні $x(i, j) = x_{i,j}$ – результат фільтрації корисного сигналу в точці кадру з координатами (i, j) ; S – множина координат точок, що утворюють окіл; $a(i_1, j_1)$ – вагові коефіцієнти, сукупність яких являє собою двовимірну імпульсну характеристику (ІХ). Якщо область кінцева, то імпульсна характеристика має кінцеву довжину й фільтр називається КІХ-фільтром. В

іншому випадку імпульсна характеристика має нескінченну довжину, а фільтр носить назву НІХ-фільтра. У виразі (7.45) прийнято, що ІХ не залежить від координат точки, у якій визначається вихідний ефект. Процедури обробки зображень, що мають властивість незалежності від координат, називаються *однорідними*.

Найбільш поширеним критерієм оптимальності, який використовується для оцінювання якості обробки зображень, є критерій мінімуму середньоквадратичної похибки. Для фільтрації запишемо його так:

$$E = \left\{ \left[x(i, j) - \sum_{(i_1, j_1) \in S} a(i_1, j_1) \cdot y(i - i_1, j - j_1) \right]^2 \right\} = \min_{a(i)} \quad (7.46)$$

де $E\{\circ\}$ – символ математичного сподівання. Згідно з (7.46) пошук оптимального фільтра полягає у визначенні його ІХ таким чином, щоб середній квадрат похибки $\varepsilon(i, j) = x(i, j) - x^*(i, j)$, який виражає різницю між сигналом $x(i, j)$ і його оцінкою $x^*(i, j)$, яка формується фільтром, був мінімальним. Математичне сподівання обчислюється за всіма випадковими величинами, які є в (7.46), що свідчить про орієнтацію критерію на врахування середніх похибок.

Залежно від складності зображення використовують два або більше двовимірних фільтрів з коротко-імпульсною характеристикою (КІХ) або банки вузькосмугових фільтрів вигляду

$$S_{i,j} = - \sum_{m,n=0}^{N-1, M-1} h_{m,n} u_{i-m, j-n} \quad (7.47)$$

де $S_{i,j}$ та $u_{i-m, j-n}$ – відповідно, фільтрований сигнал та сигнал зображення, $h_{m,n}$ – імпульсна характеристика розміром $M \times N$.

Як критерій оптимальності використовують співвідношення середніх значень сигналів на виході фільтра, що отримані для текстури, яка відповідає характеристиці фільтра, та для текстур, які не відповідають характеристиці фільтра.

Для фільтрації зображень на основі їх спектральних ознак використовують фільтри Габора. Імпульсна характеристика фільтра має вигляд

$$h = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{i^2}{2\sigma_x} - \frac{j^2}{2\sigma_y}\right) \exp(2\pi i(f_x i + f_y j)). \quad (7.48)$$

Вона поєднує функцію Гауса та гармоніку, що характеризує частотну характеристику зображення. За допомогою параметрів дисперсії σ^2 в (7.48) регулюють смугу частотного фільтра з парою центральних частот (f_x, f_y) за

двома просторовими координатами. Як правило, для характеристики текстурованого зображення використовують набір фільтрів з фіксованими або визначеними для кожної текстури парами частот.

Алгоритм класифікації та розпізнавання зображень охоплює такі етапи:

- 1) фільтрація зображення за допомогою набору фільтрів;
- 2) обчислення потужності на виході кожного з фільтрів;
- 3) згладжування значень потужності;
- 4) нормалізація значень потужності;

5) класифікація (розпізнавання) за допомогою шаблонів або співвідношень значень потужності.

Недоліком даного методу є те, що він потребує значного обсягу обчислень в тому разі, коли розмір фільтра $M \times N$ значний і число фільтрів велике.

У практиці цифрової обробки зображень широко використовується маскова фільтрація. Її лінійний різновид є одним з варіантів двовимірної фільтрації з кінцевою імпульсною характеристикою (КИХ) фільтра. Як маска використовується безліч вагових коефіцієнтів, заданих у всіх точках околу S , що, зазвичай, симетрично оточують поточну точку кадру.

Нелінійна фільтрація

У результаті застосування лінійних згладжувальних фільтрів відбувається заглушення шумів, але одночасно розмиваються межі між областями з різною амплітудою сигналу. Для зменшення кількості розмитих меж розроблені різні нелінійні фільтри. Як і лінійні КІХ-фільтри, нелінійні фільтри працюють у ковзному вікні. Різниця між лінійною та нелінійною фільтраціями полягає в тому, що при лінійній фільтрації обчислюється лінійна комбінація відліків сигналу, а при нелінійній фільтрації виконуються нелінійні перетворення відліків сигналу в околі елементів, які зумовлюються маскою фільтра.

Сігма-фільтр

Сігма-фільтр призначений для заглушення шумів у зображенні зі збереженням контурів (різких меж областей). Центральний елемент маски заміщується зваженим середнім значенням, обчисленим лише за тими амплітудами відліків, значення яких потрапляють в $\pm k\sigma$ – область, що вибрана згідно з яскравістю центрального елемента, σ вибирається або як середньоквадратичне відхилення (СКВ) заглушеного шуму, або як СКВ в масці, або встановлюється такою, що дорівнює СКВ, який обчислюється на всьому зображенні:

$$g(x, y) = \sum_{s, t \in S} h(s, t) f(x - s, y - t), \quad (7.49)$$

де s -оکیل становлять ті значення координат маски, у яких виконується накладена умова:

$$S = \{(s, t)\} : |f(x-s, y-t) - f(x-y)| \leq k\sigma, \quad (7.50)$$

де $h(s, t)$ – КІХ лінійного згладжувального фільтра.

При $k = 2$ діапазон значень, які замінюються, становить $\pm 2\sigma$, у випадку нормального розподілу шуму ймовірність потрапляння амплітуди за межі діапазону дорівнює 4,55%.

Медіанний фільтр

Медіанний фільтр (МФ) замінює центральний елемент маски медіаною впорядкованої вибірки, сформованою зі всіх амплітуд відліків, що покриваються маскою фільтра. При застосуванні МФ відбувається послідовна обробка кожної точки кадру, у результаті чого утворюється послідовність оцінок. При медіанній фільтрації використовується ковзне двовимірне вікно. У принципі, для кожного відліку виконується незалежне оцінювання медіани у вікні. З метою прискорення оцінювання доцільно алгоритмічно на кожному кроці використовувати раніше виконані обчислення. Розмір вікна встановлюється непарним і дорівнює $m \times n$. Відліки зображення, що знаходяться в межах вікна, утворюють робочу вибірку поточного відліку. Якщо впорядкувати послідовність $\{f_i, i = [1, mn]\}$ за зростанням, то її медіаною буде той елемент вибірки, що займає центральне місце в цій упорядкованій послідовності. Цей елемент є $(mn+1)/2$ найбільшим і $(mn+1)/2$ найменшим значенням у вибірці й визначає результат медіанної фільтрації для поточної точки кадру. Введемо позначення описаної процедури у вигляді:

$$g_{med} = med(f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (7.51)$$

Розглянемо приклад. Припустимо, що впорядкована послідовність Y у вікні розміром 3×3 має вигляд: $Y = \{76, 100, 69, 120, 210, 143, 87, 130, 155\}$, де елемент 210 відповідає центру вікна (x, y) . Велике значення яскравості в цій точці кадру є результатом впливу імпульсної завади. Упорядкована за зростанням вибірка має вигляд: $\{69, 76, 87, 100, 120, 130, 143, 155, 210\}$, отже, відповідно до розглянутої вище процедури (7.51), на виході медіанного фільтра одержуємо $g_{med} = 120$. Бачимо, що врахування яскравостей елементів околу при фільтрації в поточній точці призвело до заглушення імпульсної завади. Якщо імпульсна завада не є точковою, а займає деяку область, то вона також може бути заглушена, якщо розмір цієї локальної області буде меншим, ніж половина розміру апертури МФ. Тому для заглушення імпульсних завад, що вражають локальні ділянки зображення, варто збільшувати розміри апертури МФ.

З (7.51) слідує, що дія МФ полягає в «ігноруванні» як позитивних, так і негативних викидів значень вхідної вибірки. Такий принцип заглушення завад може бути застосований і для ослаблення шуму на зображенні. Однак

дослідження заглушення шуму за допомогою медіанної фільтрації показує, що її ефективність при вирішенні цього завдання нижча, ніж лінійної фільтрації. Медіанна фільтрація краще зберігає межі зображення, ніж будь-яка лінійна фільтрація.

Медіанні фільтри заглушають імпульсні шуми. До таких шумів належить шум типу «сіль і перець», відліки якого мають значення, що відповідають максимальному (“сіль”) і мінімальному (“перець”) рівням квантування в сигналі зображення. Різкі зміни амплітуди зберігаються медіанним фільтром, а імпульсна завада, розмір якої $\leq mn/2$, таким фільтром заглушається. Однак при збільшенні маски фільтра можна втратити інформацію про малорозмірні області зображення та отримати спотворення меж областей, особливо в кутових положеннях.

Оскільки застосування МФ призводить до заглушення високих частот зображення, викликаючи розмивання країв і текстур, все більший розвиток отримують схеми адаптивної фільтрації, які дозволяють змінити імпульсну характеристику фільтра залежно від локального значення сигналу зображення.

Один з алгоритмів **адаптивної медіанної фільтрації (АМФ)** виконується таким способом. У вікні фільтрації оцінюються мінімальне значення сигналу f_{\min} , максимальне значення f_{\max} і медіана f_{med} . Фільтрації піддається тільки той центральний елемент вікна $f(x, y)$, для якого виконується умова (7.52):

а) значення медіани більше мінімального й менше максимального значень у вікні й не виконується умова (7.52);

б) значення сигналу в центрі вікна більше мінімального й менше максимального значень у вікні.

$$\text{а) } A1 = f_{med} - f_{\min}; \quad A2 = f_{med} - f_{\max}; \quad A1 > 0, \quad A2 < 0, \quad (7.52)$$

$$\text{б) } B1 = f(x, y) - f_{\min}; \quad B2 = f(x, y) - f_{\max}; \quad B1 > 0, \quad B2 < 0.$$

Застосування такого фільтра дозволяє видалити біполярну імпульсну заваду, забезпечити згладжування шумів і зменшити заглушення високих частот у зображенні.

Інверсні фільтри в задачах обробки зображень

Інверсна фільтрація (*inverse filtering*) широко застосовується в обробці зображень для розв'язання таких задач, як відновлення зображень, що вражені шумом, усунення розмиття, покращення контрастності. В задачах розпізнавання об'єктів та образів інверсні фільтри використовують як допоміжні засоби для покращення зображення в цілому перед операцією розпізнавання. Задача лінійної інверсної фільтрації полягає в тому, щоб за допомогою даних вимірювань у вигляді матриці елементів зображення $S_{i,j}$ відновити оригінальну матрицю зображення $u_{i,j}$ за умови, що матриці пов'язані деяким оператором з

імпульсною характеристикою $h_{m,n}$ розміром $M \times N$ і присутній адитивний шум $\xi_{m,n}$ з відомою кореляційною характеристикою. Формально задачу можна записати у вигляді рівняння

$$S_{i,j} = \sum_{m,n=0}^{N-1,M-1} h_{m,n} u_{i-m,j-n} + \xi_{i,j}. \quad (7.53)$$

Метод розв'язання рівняння (7.53), що став класичним, дав Н. Вінер. Метод оснований на перетворенні Фур'є. Однак застосування методу має ряд недоліків:

- в більшості прикладних задач неможливо виділити окремо шум та визначити його спектрально-кореляційну характеристику;
- визначення спектральної характеристики оригінального сигналу виконується за допомогою операції ділення, що робить метод чутливим до параметрів шуму та точності визначення імпульсної характеристики;
- для розв'язання рівняння (7.53) потрібно знайти оцінку імпульсної характеристики, що є самостійною непростою задачею.

У зв'язку з означеними проблемами часто використовують більш простий підхід до розв'язання рівняння (7.53), що нехтує складовою шуму. Для знаходження матриці оригінального зображення U використовують метод дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Позначимо оператор ДПФ як $\Phi(\cdot)$, обернений $\Phi^{-1}(\cdot)$, матрицю даних зображення як S . Тоді

$$U = \Phi^{-1} \left((f + W\Phi(S))^{-1} \right)$$

де W – функція спектрального вікна, $|f| \ll 1$ – функція регуляризації.

Слід відзначити, що розмір імпульсної характеристики, як правило, рівний розміру зображень, тому перетворення ДПФ виконують з використанням всієї множини елементів матриць зображень. Це є причиною того, що метод інверсної фільтрації не застосовують до розв'язання задач розпізнавання об'єктів та аналізу динамічних текстур як основний засіб фільтрації ознак.

Розглянемо задачу інверсної фільтрації з точки зору ідентифікації динамічних систем і сформулюємо її у формі, що дозволить виконувати фільтрацію ознак динамічних текстур.

Нехай задана двовимірна функція Хевісайда

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & (i \geq 0^+) \wedge (j \geq 0^+); \\ 0,5, & i = 0, j = 0; \\ 0, & (i \leq 0^-), (j \leq 0^-), \end{cases} \quad (7.54)$$

зображення текстурованого фону задано в області $(i \geq 0^+) \wedge (j \geq 0^+)$ і є відгуком лінійної динамічної системи на збудження вигляду (7.54), його можна подати як

$$u_{i,j} = \sum_{m,n=0}^{P,Q} h_{m,n} e_{i-m,j-n} + \xi_{i,j}, \quad (7.55)$$

де $h_{m,n}$ – перехідна характеристики системи розміром $(P+1) \times (Q+1)$, що значно менший розміру зображення. Поставимо задачу відтворення за допомогою інверсного фільтра з перехідною характеристикою $\tilde{h}_{m,n}$ сигналу збудження в (2.22), що є постійною величиною в межах зображення. Тоді

$$\sum_{m,n=0}^{P,Q} \tilde{h}_{m,n} u_{i-m,j-n} = E + \zeta_{i,j}, \quad (7.56)$$

де E – константа, $\zeta_{i,j}$ – відліки шуму, що пов'язані з наближеним характером інверсного фільтра щодо сигналу фону.

7.5.4 Методи на основі динамічних моделей

Для аналізу зображень використовують двовимірні дискретні лінійні та нелінійні моделі, що описують динаміку поверхні зображення у просторі. В найбільш загальній формі лінійну модель описують системою рівнянь виду

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bv(t), & v(t) \approx N(0, Q); & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + w(t), & w(t) \approx N(0, R) \end{cases}, \quad (7.57)$$

де $y(t)$ – вектор зображення, $x(t)$ – вектор стану динамічної моделі, A – матриця-оператор моделі має таку структуру

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_M & -a_{M-1} & -a_1 \end{bmatrix},$$

де M – порядок моделі, a_i – параметри оператора моделі, B – матриця фільтра ковзного середнього, C – матриця функціонального перетворення при вимірюванні значень елементів зображення, $v(t)$, $w(t)$ – вектори гауссового центрованого шуму з кореляційними функціями Q та R , x_0 – вектор початкових або граничних значень.

Для моделювання текстур використовують модель (7.57) із спрощеною характеристикою векторів шуму, допускаючи, що відліки шуму не корелюють, тоді $Q(t) = R(t) = \sigma^2 \delta(t)$, де σ^2 – дисперсія гауссового шуму, $\delta(t)$ – дельта-функція. В цьому випадку модель (7.57) можна подати як авторегресію із

ковзним середнім (*AutoRegression and Moving Average* – ARMA), дана модель має вигляд

$$u_{i,j} = - \sum_{m,n=0(m,n \neq 0)}^{P,Q} a_{m,n} u_{i-m,j-n} - \sum_{m,n=0}^{L,M} b_{m,n} w_{i-m,j-n}, \quad (7.58)$$

де $u_{i,j}$ – відліки сигналу зображення, $a_{m,n}$ – коефіцієнти лінійного передбачення (ЛП), $w_{i,j}$ – відліки білого шуму, P, Q – параметри, що задають порядок моделі умовно по координатах OX, OY , $b_{m,n}, L, M$ – коефіцієнти та порядок складової ковзного середнього.

Модель (7.58) охоплює дві складові – модель авторегресії (AR) (*autoregression* – AR), що описує динамічні властивості сигналу зображення, та модель ковзного середнього (*moving average* – MA), що описує властивості сигналу похибки. Для розв'язання задач розпізнавання та класифікації використовуємо саме авторегресійну складову, модель MA похибки використовують як допоміжну, що характеризує якість моделі AR. Тому більш широке застосування в обробці зображень знайшла модель AR

$$u_{i,j} = - \sum_{m,n=0(m,n \neq 0)}^{P,Q} a_{m,n} u_{i-m,j-n} + \varepsilon_{i,j}, \quad (7.59)$$

де $\varepsilon_{i,j}$ – відліки похибки з дисперсією σ^2 .

Параметри моделі (7.59) – коефіцієнти ЛП – можна знайти за допомогою методу найменших квадратів. Одною з найбільш важливих задач при синтезі моделі AR є вибір її порядку таким чином, щоб модель була адекватна даним і, разом з тим, не була чутливою до незначних флуктуацій. Критерієм адекватності моделі може служити відношення потужності сигналу зображення до величини похибки (шуму). В літературі це визначають терміном Signal to Noise Ratio (SNR):

$$SNR = 20 \log_{10} \frac{P(u)}{\sigma_{\varepsilon}^2},$$

де $P(u)$ – потужність сигналу базового фрагмента зображення, що використано для визначення параметрів моделі, σ_{ε}^2 – дисперсія шуму похибки.

Нечутливість моделі до незначних флуктуацій зображення досягається за допомогою умови інваріантності параметрів моделі до зсуву базового фрагмента відносно координат, в яких задано зображення. Це також важлива властивість моделі і їй приділяють особливу увагу в літературі з обробки зображень. Вона стосується всіх перелічених вище моделей. Для того, щоб модель була інваріантною до зсуву координат і разом з тим була адекватною даним, вона

повинна виконувати функції апроксимації та екстраполяції даних сигналу зображення.

У випадках, коли модель AR неадекватна динаміці даних, використовують дискретну нелінійну модель у вигляді ряду Вольтера. Оскільки така модель в разі двовимірних даних потребує значного числа параметрів, то на практиці застосування знайшли моделі не вище третього порядку нелінійності. Нелінійну модель другого порядку можна подати як

$$u = - \sum_{m,n=0}^{P,Q} a_{m,n} u_{i-m,j-n} - \sum_{k,l=0}^{L,M} \sum_{m,n=0}^{L,M} b_{k,l,m,n} u_{i-k,j-l} u_{i-m,j-n} + \varepsilon_{i,j}, \quad (7.60)$$

де $b_{m,n}$, l, m, L, M – коефіцієнти та порядок нелінійної складової. Визначити параметри моделі (7.60) можна за допомогою розширеної системи рівнянь, що охоплює квадратичні складові сигналу. Розв'язати таку систему рівнянь можна за допомогою методу найменших квадратів. Тому нелінійна модель простіша, ніж модель ARMA.

Алгоритм обробки зображення за допомогою моделей таких:

- 1) за допомогою базового фрагмента зображення визначають параметри моделі та параметри, що характеризують якість моделі (наприклад, статистичні параметри шуму похибки);
- 2) сигнал зображення обробляють за допомогою моделі і визначають параметри якості;
- 3) якщо параметри якості відповідають параметрам базового фрагмента, то зображення розпізнано, якщо ні, то зображення не розпізнано.

7.5.5 Методи на основі декомпозиції на власні вектори

В попередніх пунктах розглянуто методи на основі статистичного аналізу зображення в просторовій або спектральній областях та методи на основі синтезу динамічних моделей, що відображають зміну зображення в просторі або часі. Спектральний аналіз і динамічні моделі можуть бути поєднані за допомогою визначення власних значень та власних функцій моделей. Перевагою такого підходу є те, що зображення може характеризуватись мінімальним числом параметрів, наприклад резонансних частот. Причому, відбираються тільки ті резонансні частоти, амплітуда яких найбільша. Відомо декілька підходів до реалізації декомпозиції на власні вектори:

- 1) синтез фільтрів на основі власних векторів зображення або його кореляційної матриці;
- 2) відбір принципів (найвпливовіших) компонент розкладання на власні або сингулярні вектори – Principal Component Analysis (PCA);
- 3) модальний аналіз – Empirical mode decomposition (EMD).

Метод PCA реалізують за допомогою сингулярного розкладання (Singular Value Decomposition – SVD). Перевагою SVD є те, що сингулярне розкладання реального сигналу дає систему ортогональних векторів, також реальних. Ортогональність та те, що дані реальні, спрощує алгебраїчні операції з матрицями.

Аналіз за допомогою розкладання за власними та сингулярними векторами застосовують до сигналу зображення або його кореляційної матриці. Одним з різновидів кореляційної характеристики зображень є розподіл Вігнера.

Недоліком аналізу зображень за допомогою власних і сингулярних векторів є те, що для обчислення векторів потрібні значні обчислювальні ресурси. Більш простим є модальний аналіз. Емпіричні моди визначають за допомогою виділення локальних максимумів і мінімумів сигналу зображення та їх апроксимації поверхнею у вигляді полінома або за допомогою спеціальних функцій. Отримана мода вилучається із зображення і за допомогою сигналу остачі таким же способом визначають наступну моду. Такий ітераційний процес повторюють поки сигнал залишку не стане меншим певного граничного значення. В результаті зображення є сумою модальних сигналів та незначного залишку. Моди використовують як характерні ознаки зображення у вигляді масок для класифікації стаціонарних текстур та як кореляційні фільтри для класифікації динамічних текстур.

Алгоритм аналізу зображень за допомогою власних векторів залежить від того, як вони використовуються – як фільтри чи як базис для спектрального аналізу.

7.5.6 Методи класифікації елементів зображень

Оскільки задачі розпізнавання об'єктів полягають у класифікації зображень на основі певних критеріїв, то важливим етапом є вибір оптимального класифікатора. Серед існуючих методів класифікації можна виділити:

- ймовірнісний критерій якості класифікації;
- оптимальна стратегія статистичної класифікації;
- класифікатор Байєса;
- мінімаксий класифікатор;
- класифікатор Неймана-Пірсона.

Класифікатор Байєса є найбільш широкорозповсюдженим з перелічених класифікаторів і застосовується при наявності повної апріорної інформації про класи, тобто коли відомі функція правдоподібності для кожного з класів, матриця штрафів, апріорні ймовірності для кожного з класів. Класифікатор Байєса ґрунтується на основі принципу максимуму апостеріорної ймовірності, що базується на трьох гіпотезах.

1. Множина $X \times Y$ є ймовірнісним простором з ймовірнісною мірою P . Прецеденти $(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i)$ з'являються випадково і незалежно відповідно до розподілу p .

2. Відомі щільності розподілу класів $p_y(x) = p(x | K_y), y \in Y$, що називаються функціями правдоподібності.

3. Відомі ймовірності появи об'єктів кожного з класів $P_y = P(K_y), y \in Y$, що називаються апіорними ймовірностями.

Базуючись на даних гіпотезах, принцип максимуму апостеріорної ймовірності записується у вигляді:

$$F(x) = \arg \max_{y \in Y} P(K_y | x) = \arg \max_{y \in Y} p_y(x) P_y.$$

Доведено, що такий вибір вирішального правила є оптимальним з погляду мінімізації загального ризику. Основна проблема полягає в тому, що на практиці гіпотези 2 і 3 майже ніколи не виконуються. Спроби оцінити ці функції розподілу за навчальною вибіркою могли б привести до деякого результату, якби не погана обумовленість задачі, що приводить до вироджених рішень.

Існують системи виявлення об'єктів зображення, що базуються на "наївному" байєсовому методі. Даний метод ґрунтується на побудові емпіричної щільності розподілу ймовірностей класів за навчальною вибіркою за припущення про незалежність компонентів вектора ознак.

Практичні результати є наступними:

1. Алгоритм побудови "наївного" байєсового класифікатора схильний до перенавчання;

2. Алгоритм побудови "наївного" байєсового класифікатора чутливий до шуму, тому що базується на емпіричних функціях щільності розподілу;

3. Швидкість роботи самого класифікатора висока, основний час може займати обчислення вектора ознак.

На основі поєднання байєсового підходу і теорії графів утворюють байєсові мережі. Суть даного підходу в тому, що будують граф, кожна вершина якого відповідає якому-небудь компоненту вектора ознак, дуги позначають причинно-наслідковий зв'язок. Побудова мережі може бути здійснена автоматично шляхом аналізу кореляції компонентів вектора ознак.

Проблемою для байєсової мережі є погана обумовленість, тому що велика розмірність вектору ознак робить граф зв'язків складним для побудови й аналізу. Також суттєво зростає обчислювальна складність. Одним з варіантів розв'язання даної проблеми є скорочення розмірності вектора ознак, що приводить до погіршення узагальнювальної здатності.

Класифікація за статистичними ознаками можлива після попередньої обробки зображення за допомогою фільтрів, що дозволяє зменшити варіацію параметрів ознак.

Наряду зі статистичними методами класифікації в обробці зображень використовують *евристичні методи*. Це ряд підходів, що їх можна розділити на групи.

1. Евристичні методи:

- повна евристична модель, де експертом складається набір правил, що описують зображення об'єкта (будується модель), згідно з якими здійснюється розпізнавання;

- пошук характерних інваріантних ознак, де евристично описуються не зображення шуканого об'єкта в цілому, а його характерні ознаки, інваріантні щодо можливих спотворень (зміна освітленості, поворот, масштабування).

2. Метод порівняння з шаблоном. Складається шаблон для зображення всього об'єкта чи його характерних ознак. Також вводиться функція перевірки відповідності.

3. Методи з навчанням за прецедентами. Модель автоматично будується на основі набору зображень об'єкта, складених заздалегідь з можливих вхідних даних системи.

Евристичні методи є історично найбільш ранніми, вони досить прості в реалізації і працюють з високою швидкістю, однак жорстко запрограмовані правила позбавляють систему гнучкості та стійкості. Як правило, евристичні системи орієнтовані на відносно вузький клас задач.

Метод порівняння з шаблоном є більш універсальним підходом, однак даний метод вимагає наявності дуже точного шаблону об'єкта зображення. Шаблон може бути складною структурою і допускати різні деформації і перетворення, сприяючи, таким чином, інваріантності системи до просторових спотворень об'єкта зображення і змін освітленості. Системи, засновані на порівнянні з шаблоном, найчастіше використовуються для розв'язання задач відстеження об'єктів у відео з ініціалізацією на першому кадрі – до початку роботи системи існує загальна модель шаблону, при ініціалізації вона уточнюється і корегується під час роботи системи. При добре заданому шаблоні досягається висока точність і дуже низький рівень збоїв. Інваріантність до просторових спотворень і зміни освітлення залежить від складності шаблону.

Методи з навчанням за прецедентами є найбільш загальним підходом. Задача розпізнавання об'єктів зображення зводиться до задачі класифікації і для неї застосовується добре розроблений математичний апарат побудови моделі (навчання) за прецедентами. Модель будується автоматично на заздалегідь зібраному наборі прецедентів – зображень, для яких відомо, є вони зображеннями об'єкта чи ні. Спостереженням, у даному випадку, є деякий “вектор ознак”, отриманий з вихідного зображення за допомогою перетворення, що відображає зображення в просторі дійсних векторів. Гіпотеза, що підлягає перевірці, – належність зображення до класу зображень шуканого об'єкта. Таким чином, система розпадається на два модулі – модуль перетворення зображення у вектор ознак і модуль класифікації. Задачею модуля перетворення є найбільш повне й інформативне подання зображення у вигляді числового вектору.

Задачею модуля класифікації є перевірка гіпотези належності зображення класу зображень об'єкта на підставі спостереження, яким є вектор ознак. Серед евристичних найбільш поширені методи:

- опорних векторів (*SVM, supporting vectors method*);
- *Sparse network of Winnows (SNoW)*;
- посилення слабких класифікаторів (*classifier boosting*).

Метод SVM полягає в побудові оптимального лінійного класифікатора. Класичний алгоритм полягає в побудові лінійної поверхні (гіперплощини), яка рівновіддалена від опуклих оболонок класів, опукла оболонка будується за прецедентами. Стверджується, що така гіперплощина буде оптимальною, з погляду загального ризику, щодо будь-яких інших можливих гіперплощин. Якщо такої гіперплощини не існує (класи лінійно нероздільні), то для здійснення нелінійної класифікації застосовується ядрове перетворення, що проектує вихідний простір у простір ще більшої, можливо нескінченної, розмірності.

Метод опорних векторів був успішно застосований для задачі розпізнавання об'єктів зображення. Метод характеризується:

- висока стійкість до перенавчання;
- чутливість до шуму може регулюватися за рахунок зменшення точності;
- в системах розпізнавання об'єктів дає прискорення в декілька разів у порівнянні з нейронними мережами.

SNoW – особливий вид нейронної мережі. Вектор ознак бінарний. Мережа складається з двох (за числом можливих класів) лінійних нейронів, зв'язаних з компонентами вектора ознак. Класифікація проходить за принципом «переможець забирає все». Метод SNoW вважається досить ефективним методом для розв'язання задач виявлення об'єктів зображення. Відповідно до деяких досліджень SNoW перевершує за своїми параметрами метод опорних векторів.

Classifier boosting – це підхід до розв'язання задачі класифікації шляхом комбінування примітивних класифікаторів в один більш сильний класифікатор. Основна ідея методу полягає в ітеративній мінімізації опуклого функціонала помилки класифікації шляхом додавання в набір класифікаторів чергового слабкого класифікатора. Для систем розпізнавання об'єктів зображення був застосований каскадний підхід, який полягає в побудові каскаду із комплексу слабких класифікаторів, що працює за принципом послідовних наближень. Характеристики каскадного методу перевершують всі інші системи.

За показниками роботи в реальних системах розпізнавання об'єктів зображення найбільш вдалими виявилися алгоритми *boosting* (посилення слабких класифікаторів) і SNoW. Обидва підходи забезпечують високу швидкість, високий рівень розпізнавання і низький рівень похибок другого роду. Метод опорних векторів досить сильно поступається за показниками перерахованим вище підходам, тому що має дуже низький відсоток достовірних виявлень.

7.5.7 Фрактальні методи

У той час як об'єкти, побудовані людиною, такі як промислові та житлові будинки, можуть бути ефективно описані набором простих геометричних примітивів: кубів, сфер, циліндрів, конусів, кольорові текстур природного походження, через свою нерегулярність і фрагментарність, погано піддаються такому опису. У зв'язку з цим, для аналізу таких текстур виявляється природним подання їх у вигляді фрактала з деяким розміром D .

Фрактал (лат. *fractus, fractal* – дроблений) – термін, який ввів Бенуа Мандельброт в 1975 році для позначення нерегулярних самоподібних множин.

Фрактал – це нескінченно самоподібна геометрична фігура, кожний фрагмент якої повторюється при зменшенні масштабу. Масштабна інваріантність, що спостерігається у фракталах, може бути або точною, або наближеною.

Ще один варіант визначення: **фрактал** – самоподібна множина нецілої розмірності. Самоподібна множина – множина, що подається у вигляді об'єднання однакових непересічних підмножин подібних до вихідної множини.

Основні властивості фракталів.

- Вони мають тонку структуру, тобто містять довільно малі масштаби.
- Вони занадто нерегулярні, щоб бути описаними традиційною геометричною мовою.
- Вони мають деяку форму самоподоби, допускаючи наближену.
- Вони мають дробову «фрактальну» розмірність, що її також називають розмірністю Мінковського.

У наш час фрактали знайшли своє застосування при аналізі текстур ландшафтів, отриманих при аерокосмічній зйомці, при аналізі поверхонь порошків та інших пористих середовищ, при аналізі поверхні хмар тощо. Однак розмір фрактала кольорової текстури багато в чому залежить від вибору методу оцінювання. Так, при використанні різних методів оцінювання розміру фрактала ми одержимо відповідно й різні його розміри. Зіставлення текстур, таким чином, можливо при використанні того самого методу (групи методів). Більше того, не всі текстурні добре розрізняються за розміром фрактала. У зв'язку з цим перш, ніж вносити в систему ознак розмір фрактала, необхідно оцінити фрактальність текстури. Оцінювання фрактальності текстури здійснюється на основі обраного методу оцінювання розміру фрактала. Оскільки розмір фрактала обчислюється через оцінку вибіркової регресії, то природно оцінювати фрактальність текстури за коефіцієнтом кореляції між логарифмом випадкової величини й логарифмом заданої функції кроку. При цьому ухвалення рішення про фрактальність текстури можна будувати таким чином:

1. Побудувати залежність коефіцієнта кореляції від кроку; значення кроку, при якому функція має максимум, є максимальним кроком у заданому діапазоні кроків при оцінюванні розміру фрактала;

2. Не враховувати оцінку розміру фрактала при низькому коефіцієнті кореляції в тих методах, де використовується оцінка фрактала як середнє значення в серії експериментів;

3. Не вносити розмір фрактала в систему ознак для сегментації текстур при значеннях коефіцієнта кореляції $< 0,7$.

Оцінка фрактальності текстур є важливою характеристикою при сегментації за розміром фрактала.

Поширення фрактального опису пояснюється тим, що більшість просторових систем у природі є нерегулярним і фрагментарним, форма цих систем погано піддається опису апаратом евклідової геометрії. Наприклад, берегова лінія острова не пряма й не кругла, і ніяка інша класична крива не може служити для опису й пояснення її форми без надмірної штучності й ускладнення.

Фрактальні структури є одним із різновидів текстур, де деталізація зображення досягається поданням об'єкта подібними меншої величини. Деякі динамічні текстур, наприклад поверхні лісу і хвиль води, хмари, пористі мінерали, метало-структури, можуть бути подані за допомогою фрактальної екстраполяції. Суть фрактальних методів в задачах розпізнавання об'єктів викладена нижче. Обриси штучних об'єктів (танків, автомобілів, тощо) створюються лініями, що описуються рівняннями цілого порядку. Природні об'єкти – рельєф, дерева – фрактальні, тобто мають фрактальну розмірність. Використовуючи цю властивість за допомогою фрактальної апроксимації об'єктів зображення можна створити систему розпізнавання образів. Така система не бачить куц, але добре розпізнає штучний об'єкт, схований за кущем. Основною перевагою даного методу над іншими є те, що він не чутливий до завад. На результат розпізнавання не впливає колір та контрастність об'єкта відносно фону, впливає лише площа, яку займає шуканий об'єкт на зображенні. В цьому полягає недолік даного методу – за допомогою фрактального аналізу можна розпізнавати об'єкти, що за розміром порівнянні зі структурою елементів фону.

Класифікації фракталів

В основному фрактали ділять на геометричні (рис. 7.25), алгебраїчні й стохастичні. Однак існують і інші класифікації: рукотворні й природні. До рукотворних належать ті фрактали, які були винайдені вченими, вони при будь-якому масштабі мають фрактальні властивості. На природні фрактали накладається обмеження на максимальний і мінімальний розміри, при яких у об'єкта спостерігаються фрактальні властивості.

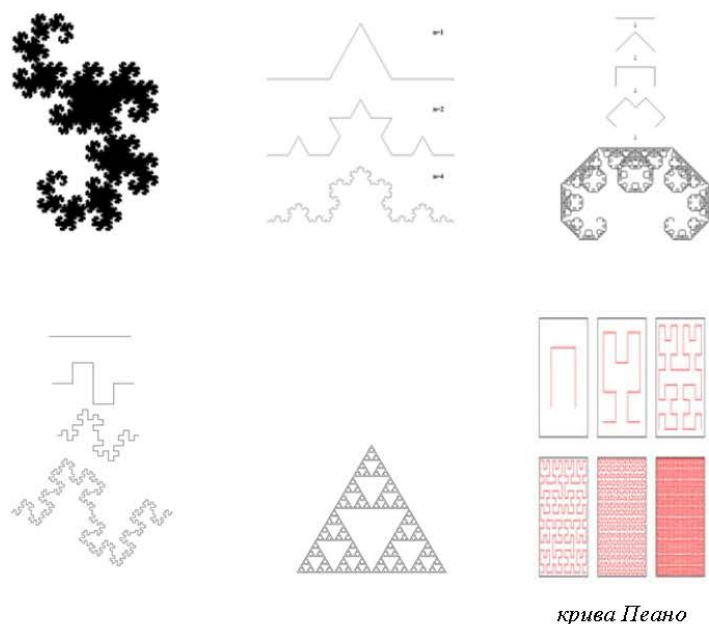


Рисунок 7.25 – Приклади геометричних фракталів

Для побудови алгебраїчних фракталів (рис. 7.26) використовуються ітерації нелінійних відображень, що задаються простими алгебраїчними формулами. Найбільш вивчений двовимірний випадок. Нелінійні динамічні системи можуть мати декілька стійких станів. Кожний стійкий стан (атрактор) має деяку ділянку початкових станів, при яких система обов'язково в нього перейде. Таким чином, фазовий простір розбивається на ділянку притягання атракторів.

Якщо фазовим є двовимірний простір, то, зафарбовуючи ділянки притягання різними кольорами, можна одержати кольоровий фазовий портрет цієї системи (ітераційного процесу). Змінюючи алгоритм вибору кольору, можна одержати складні фрактальні картини з вигадливими багатобарвними візерунками. Несподіванкою для математиків стала можливість за допомогою примітивних алгоритмів породжувати дуже складні нетривіальні структури. Приклади алгебраїчних фракталів: множина Мандельброта, множина Жюліа, басейни Ньютона, біоморфи.

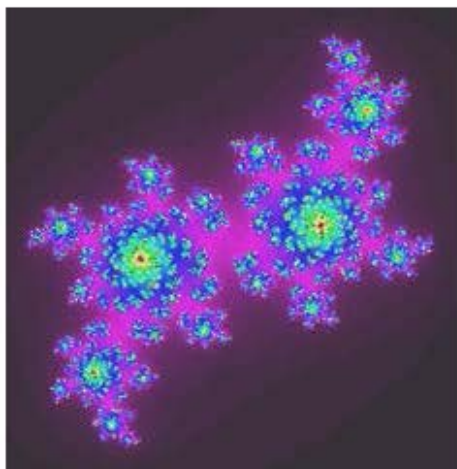


Рисунок 7.26 – Приклад алгебраїчного фрактала. Множина Жюліа

Геометричні фрактали застосовуються для одержання зображень дерев, кущів, берегових ліній тощо. Алгебраїчні та стохастичні – при побудові ландшафтів, поверхні морів, моделей біологічних об'єктів та інше.

З математичної точки зору, фрактал – це, передусім, множина з дробовою розмірністю (fractional dimension). Ми добре уявляємо собі, що точка має розмірність 0, коло та відрізок – розмірність 1, куб та сфера – 2. З одновимірними об'єктами ми пов'язуємо поняття довжини, з двовимірними – площі і т. д. Але як можна уявити собі множину з розмірністю $3/2$. Для цього необхідно дещо проміжне між довжиною та площиною, і якщо довжину умовно назвати 1-мірою, а площу – 2-мірою, то необхідна $(3/2)$ -міра. Хаусдорф визначив таку α -міру для будь-якої $\alpha \geq 0$ і на цій основі кожній множині в евклідовому просторі надав у відповідність число. Для пояснення фрактальної розмірності необхідно ввести поняття топологічної розмірності. Під топологічною розмірністю множини в лінійному просторі розуміють число лінійно незалежних координат в просторі. Фрактальна розмірність множини – розмірність того простору, який повністю заповнюється множиною. Для зв'язку фрактальної та топологічної розмірності використовують показник Херста H , який обчислюється за формулою $H = D - Dt$. Ідеї Хаусдорфа були розвинуті А. С. Безіковичем. В наступні роки розмірність Хаусдорфа-Безіковича отримала застосування в деяких розділах математики, але нічого не передбачувало їй тієї популярності цього поняття за межами математики, яка спостерігається тепер. Частково цьому допомогла наукова діяльність Б. Мандельброта, який в своїх книгах привів яскраві приклади застосування фракталів для пояснення деяких природних явищ. Тобто, фрактальна розмірність, як правило, є невід'ємним нецілим числом, яке показує деяким чином геометричну складність об'єкта.

Розмірність фрактала D визначається як

$$D = \frac{\log N}{\log(1/r)},$$

де $1/r$ – співвідношення подібності, N – число кроків, необхідне для того, щоб покрити криву.

Практично розмір фрактала для кривої оцінюється шляхом вимірювання довжин кривої при різних розмірах кроку (приклад зображено на рис. 7.27).

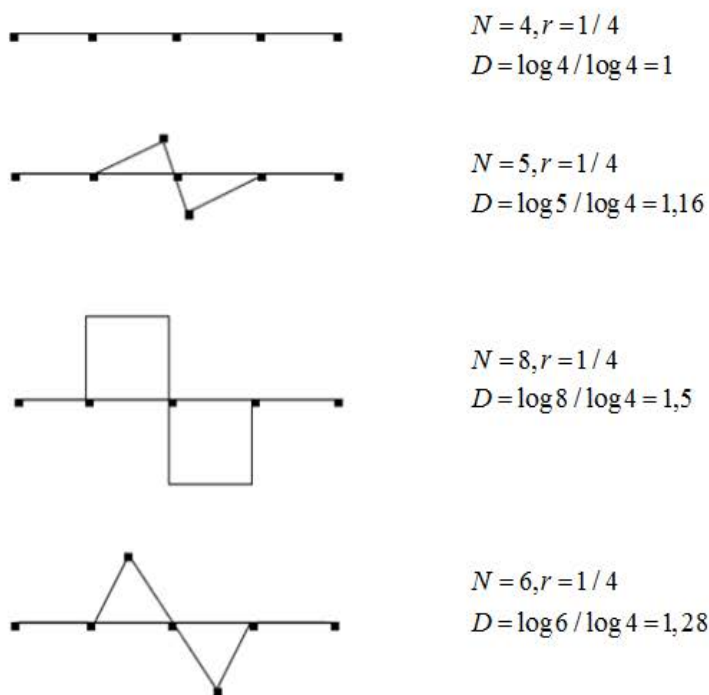


Рисунок 7.27 – Визначення розміру фрактала на прикладі

Розглянемо докладніше реалізацію фрактального підходу до аналізу хмар. В основу цього методу покладено виведене Мандельбротом співвідношення між периметром і площею об'єкта. Для кіл, квадратів, рівносторонніх трикутників та інших багатокутників відношення периметра до квадратного кореня з площі, що ним обмежується, не залежить від розміру фігури і є постійною величиною для даної сім'ї. Аналогічно для сім'ї подібних островів відношення довжини нефрактальної берегової лінії будь-якого острова до квадратного кореня з його площі не залежить від розміру площі. Однак, якщо берегова лінія фрактальна, то її довжина $L(\delta)$ залежить від довжини еталона δ і прямує до нескінченності, якщо еталон також прямує до нуля.

При цьому площа острова $A(\delta)$, обумовлена кількістю квадратів δ^2 , що на ній розташовані, залишається кінцевою. Таким чином, відношення периметра до

квадратного кореня з площі розбігаються. Мандельброт для випадку фрактальної берегової лінії одержав таке співвідношення між периметром і площею:

$$L(\delta) = C\delta^{(1-D)} [A(\delta)]^{D/2}. \quad (7.61)$$

Це співвідношення виконується для будь-якого еталона довжини δ , досить малого, щоб задовільно виміряти найменший з островів.

Співвідношення (7.61) застосовується при дослідженні геометрії хмар і зон дощу, розміри яких знаходяться в широких межах від 1 до $1,2 \times 10^6$. З'ясувалося, що периметр хмари пов'язаний з її площею співвідношенням (7.61) з фрактальним розміром $D = 1,35 \pm 0,05$. При цьому ці оцінки виявилися справедливими як для купчастих, так і для перистих хмар. У роботі А. Вальдфогеля, присвяченій аналізу фрактальної розмірності хмар з потужними конвективними струмами, було встановлене співвідношення між периметром і площею для послідовності моментів часу (з інтервалом в 1 хвилину) у площині перерізу для постійного коефіцієнта відбиття. Основні висновки можуть бути такими: для хмар, периметр яких більше 8 км, розмір фрактала приблизно збігається з розміром менш потужних хмар і становить $1,36 \pm 0,1$; для хмар з периметром від 3 км до 8 км – $D = 1,0 \pm 0,1$ і, нарешті, хмари з периметром менш 3 км не є фракталами.

Мандельброт запропонував не тільки означення фракталів, але також і алгоритм побудови одного з них, що отримав назву на честь ученого. Алгоритм побудови множини Мандельброта заснований на ітеративному обчисленні за формулою:

$$Z[i+1] = Z[i] \cdot Z[i] + C,$$

де Z і C – комплексні змінні.

Ітерації виконуються для кожної стартової точки C прямокутної або квадратної області – підмножини комплексної площини. Ітераційний процес триває доти, поки $Z[i]$ не вийде за межі кола заданого радіуса, центр якого лежить у точці $(0,0)$, або після досить великої кількості ітерацій. Залежно від кількості ітерацій, протягом яких $Z[i]$ залишається всередині кола, встановлюється колір точки C . Якщо $Z[i]$ залишається всередині кола протягом досить великої кількості ітерацій, то ця точка растра зафарбовується в чорний колір. Множині Мандельброта (рис. 7.28) належать саме ті точки, які протягом нескінченного числа ітерацій не переходять у нескінченність.

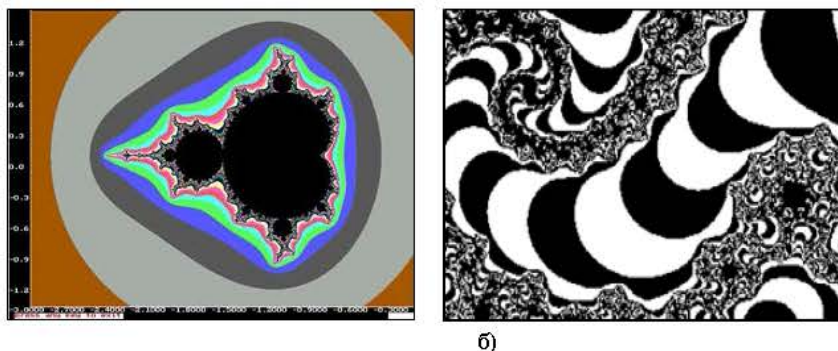


Рисунок 7.28 – а) Множина Мандельброта; б) Збільшена ділянка межі множини Мандельброта

Побудова іншої фрактальної множини, сніжинки Коха (рис. 7.29), починається з правильного трикутника, довжина сторони якого дорівнює 1.

Сторона трикутника вважається базовою ланкою для вихідного положення. Далі, на будь-якому кроці ітерації кожна ланка замінюється на утворювальний елемент – ламану, що складається по краях з відрізків довжиною $1/3$ від довжини ланки, між якими розміщуються дві сторони правильного трикутника зі стороною в $1/3$ довжини ланки. Всі відрізки – сторони отриманої кривої – вважаються базовими ланками для наступної ітерації. Крива, що одержується в результаті n -ї ітерації при будь-якому кінцевому n , називається передфракталом, і лише при n , що наближається до нескінченності, крива Коха стає фракталом. Отримана в результаті ітераційного процесу фрактальна множина є лінією нескінченної довжини, що обмежує кінцеву площу. Дійсно, при кожному кроці число сторін підсумкового багатокутника збільшується в 4 рази, а довжина кожної сторони зменшується тільки в 3 рази, тобто довжина багатокутника на n -ій ітерації дорівнює $3 \cdot (4/3)^n$ і прагне до нескінченності з ростом n .

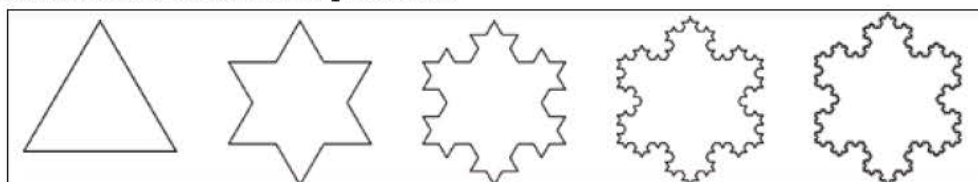


Рисунок 7.29 – Перші 5 поколінь сніжинки Коха

Площа під кривою, якщо прийняти площу утворювального трикутника за 1, дорівнює:

$$S = 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = 1,6.$$

З недавнього часу фрактальні методи почали використовувати при розробці методів розпізнавання образів на радіолокаційних зображеннях. Суть їх така. Важко локалізувати танк, замаскований серед кущів. Важко, навіть коли є якісний сигнал від теле- та телетелевізора. Набагато легше зробити це за допомогою фрактальних методів. Як вже було сказано вище, обриси штучних об'єктів (танків, автомобілів) створені лініями, які описуються рівняннями цілого порядку. А ось об'єкти природні – рельєф, дерева – фрактальні, тобто мають фрактальну розмірність. Ось на цьому принципі і побудовані нові системи розпізнавання образів. Системи розпізнавання не бачать кущ, але дуже добре розпізнають штучний об'єкт, схований за кущем. Маскувальне забарвлення може допомогти, але якщо воно не створене кривими другого порядку, як звичайно.

Іншими словами, якщо ми виміряємо розмірність зображення якогось природного ландшафту, то вона буде дробова. Розмірність геометричної фігури дорівнює приблизно 2 (через похибку вимірювання). А коли накласти, наприклад, прямокутник на природне зображення, то розмірність всієї картинки різко поміняється.

Основною перевагою даного методу над іншими є те, що не потрібно витрачати зусилля і час на покращення якості зображення. Це не дуже впливає на результат. Інша перевага полягає в нижчій вимозі до високої роздільної здатності зображень, порівняно з іншими методами. На результат впливає лише площа, яку займає штучний об'єкт на зображенні, а не контраст, як звичайно.

Самоподібність (self-similarity) є основною характеристикою фрактала і означає, що він більш-менш одноманітно побудований у широкому діапазоні масштабів. Так, при збільшенні маленькі фрагменти фракталу виходять дуже схожими на більші. В ідеальному випадку така самоподібність приводить до того, що фрактальний об'єкт є інваріантним до збільшень.

Звичайно, для реального природного фрактала існує деякий мінімальний масштаб довжини l_{\min} такий, що на відстанях $l \approx l_{\min}$ його основна властивість – самоподібність – пропадає. Крім того, на досить великих масштабах довжин $l > l_{\max}$, де l_{\max} – характерний геометричний розмір об'єктів, ця властивість самоподібності також порушується. Тому властивості природних фракталів розглядаються лише в масштабах l , що задовольняє співвідношення $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$.

Відмітимо, що властивість точної самоподібності характерна лише для регулярних фракталів. Якщо замість детермінованого способу побудови внести в алгоритм їхнього створення деякий елемент випадковості (як це буває, наприклад, у багатьох процесах дифузійного росту кластерів, електричному пробі й т. д.), то виникають так звані випадкові фрактали. Основна їхня відмінність від регулярних полягає в тому, що властивості самоподібності справедливі тільки після відповідного усереднення по всіх статистично незалежних реалізаціях об'єкта. При цьому збільшена частина фрактала не точно

ідентична вихідному фрагменту, однак їхні статистичні характеристики збігаються.

Стиск зображень (image compression)

За допомогою фракталів можна стискувати зображення з деякою втратою якості аналогічно іншим методам стику з втратами. Але фрактальний стиск дає кращі результати. Методи компресії, основані на RLE, класичний алгоритм Хаффмана, LZW не враховують природи стискуваних даних і тому дають незадовільні результати при обробці зображень. Фрактальний стиск зображень – це алгоритм стику зображень з втратами, заснований на застосуванні систем IFS до зображень. Даний алгоритм відомий тим, що в деяких випадках дозволяє одержати дуже високі коефіцієнти стику (кращі приклади – до 1000 разів при прийнятній візуальній якості) для реальних фотографій природних об'єктів, що недоступно для інших алгоритмів стику зображень у принципі.

Основна проблема фрактального стику – це те, що компресія-декомпресія виконуються швидко і однозначно в той час, як пряма процедура потребує від машини великих інтелектуальних можливостей. При компресії можна не зберігати оригінальні розміри зображення, достатньо просто запам'ятати їх відношення. А при декомпресії – задавати ті розміри, які нам найбільше підходять. Така можливість дозволяє вирішити задачу екстраполяції початкового зображення. При встановленні нових розмірів, що перевищують старі, в нове зображення додаються елементи, подібні іншим елементам зображення. І якщо обробляється природний об'єкт (наприклад, гранітний камінь), то заміна не буде помітною.

Основа методу фрактального кодування – це виявлення самоподібних ділянок у зображенні. Патенти ідеї були отримані в 1990-1991 роках.

Суть фрактального стику

В основі більшості методів фрактального кодування, що застосовуються сьогодні, використовуються системи доменних і рангових блоків зображення, блоків квадратної форми, що покривають все зображення. Фрактальне кодування напівтонових зображень основане на гіпотезі, згідно з якою в будь-якому зображенні можна знайти локальну самоподібність різних його частин. Існуючі алгоритми фрактального стику, як правило, притримуються такої схеми кодування. Зображення, яке кодується, розбивається на множину блоків, що не перекриваються (рангові області), для кожного з яких, в межах цього ж зображення, відшукується блок більшого розміру (домен), пікселі якого, шляхом деякого перетворення, переводились би в пікселі рангової області. При цьому для пошуку оптимальної відповідності рангових областей і доменів необхідний повний перебір варіантів, що веде за собою значні обчислювальні затрати. З перетворень, що переводять домени в рангові області, формується відображення, що переводить зображення в зображення. При цьому кодом зображення буде місце розташування і розміри рангових областей, а також

коефіцієнти перетворень, які описують самоподібність всередині зображення. Кількість бітів, необхідних для опису коду, буде значно меншою кількості бітів, необхідних для опису початкового зображення. *Коефіцієнтом стиску* називається відношення бітового подання зображення до бітового подання коду. В відомих фрактальних методах стиску зображень значення цього коефіцієнта може досягати 100 при достатньо непоганій якості відновлення. Для відновлення закодованого таким чином зображення використовується принцип стиснених відображень, який говорить, що стискувальне відображення, що діє в повному метричному просторі, має єдину нерухому точку. Відображення, що діє на повному метричному просторі зображень, формується з перетворень, які переводять домени в рангові області.

Відповідно до даного методу зображення розбивається на безліч неперекривних рангових підзображень і визначається безліч перекривних доменних підзображень. Для кожного рангового блока алгоритм кодування знаходить найбільш придатний доменний блок і афінне перетворення, що переводить цей доменний блок у даний ранговий блок. Структура зображення відображається в систему рангових блоків, доменних блоків і перетворень.

Основна складність фрактального стиску полягає в тому, що для знаходження відповідних доменних блоків, загалом кажучи, потрібен повний перебір. Оскільки при цьому переборі щораз повинні порівнюватися два масиви, дана операція виходить досить тривалою. Порівняно простим перетворенням її можна звести до операції скалярного добутку двох масивів, однак навіть скалярний добуток обчислюється порівняно тривалий час.

Крім стиску, іншою сферою фрактальної обробки зображень є їх генерація. В наш час існує множина найрізноманітніших пакетів прикладних програм (від простих, які створюють зображення на основі множини Мандельброта (Fractal SSE), до складних, які генерують зображення 3d, анімаційні зображення та IFS-зображення). Всі вони побудовані на основі відкриття Мандельброта: якщо нанести визначені точки на площину комплексних чисел, то можна створювати зображення надзвичайного абстрактного вигляду – множина Мандельброта. В рівняння Мандельброта підставляються координати деякої точки комплексної площини, і результатом є координати іншої точки. Результат, отриманий при введенні координат першої точки, слугує початком для наступної ітерації, її результат підставляється в наступне рівняння і так далі. Обидві ці найголовніші сфери застосування фрактальних методів в наш час знаходяться на порівняно високому рівні розвитку, незважаючи на те, що фрактальна наука досить молода. Існує надзвичайно велика кількість програм, за допомогою яких можна створити або стиснути зображення, і ефективність обробки зображень деяких з цих програм достатньо висока.

Потенційним, хоч і менш відомим видом фракталів, є фрактал на основі **системи ітераційних функцій (Iterated Function System – IFS)**. Метод IFS, який застосовується до побудови фрактальних зображень, винайшов Майкл

Барнслі. Він базується на самоподібності елементів зображення і полягає в моделюванні рисунка декількома меншими частинами його самого. Найвідомішим IFS-зображенням є чорний папоротник, в якому кожен лист в дійсності є мініатюрним варіантом самого папоротника .

Система IFS – це також сукупність стискальних афінних перетворень. Як відомо, афінні перетворення містять у собі масштабування, поворот і паралельний перенос. Афінне перетворення вважається стискальним, якщо коефіцієнт масштабування менше одиниці.

Розглянемо докладніше побудову кривої Коха з використанням афінних перетворень. Кожний новий елемент кривої містить чотири ланки, отримані з утворювального елемента з використанням масштабування, повороту й переносу.

1. Для одержання першої ланки досить стиснути вихідний відрізок у три рази. Слід зазначити, що те ж масштабування застосовується до всіх ланок.

2. Наступна ланка будується з використанням всіх можливих перетворень, а саме: стиск у три рази, поворот на 60 градусів і паралельний перенос на $1/3$ по осі X.

3. Третя ланка будується аналогічно другій: стиск у три рази, поворот на 60 градусів, паралельний перенос на $2/3$ вздовж осі X.

4. Остання ланка: стиск у три рази, паралельний перенос на $2/3$ вздовж осі X.

Для синтезу фрактала вибирається початкова точка, до якої застосовується випадковим образом обране з IFS перетворення, у результаті чого точка переміщується в інший кінець екрана. Ця операція повторюється багато разів (досить 100 ітерацій), і через деякий час точка починає блукати атрактором (безліч всіх можливих траєкторій), що і буде являти собою зображення фрактала. Кожне нове положення точки зафарбовується кольором, відмінним від фону. Існує теорема, яка доводить, що отриманий атрактор буде замкнутим. Для того, щоб така точка зафарбовувала нові пікселі, а не блукала старими, використовують сьомий параметр, що являє собою ймовірність появи конкретного афінного перетворення з набору перетворень IFS. Якщо вибрати початкову точку так, щоб вона відразу виявилася на атракторі, то вона починає блукати в області цього атрактора, не переміщуючись в інші області екрана. Розглядаючи кожне перетворення окремо, можемо помітити, що де б ми не починали, після декількох ітерацій точка перестане рухатися екраном. Точка зупинки називається нерухомою точкою – це розв'язок системи лінійних рівнянь двох змінних, який знаходиться методом простої ітерації. Нерухома точка кожного перетворення входить до складу атрактора. Тому за початкову точку при побудові фрактала можна взяти нерухому точку першого перетворення з набору IFS.

Розмірність. Види розмірності

Ключовою величиною, що описує фрактал, кількісно є “фрактальна розмірність”, однак у різних джерелах під цим терміном розуміють різні величини: розмірність Мінковського, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, розмірність самоподібності. Ці величини відрізняються алгоритмом обчислення, але для математичних фракталів є еквівалентними.

При визначенні евклідової або вкладеної розмірності D_E (*embedding dimension*) об'єкти розглядаються, як набори точок, поміщених в простір. Іншими словами, D_E – розмірність простору, що містить об'єкт.

Топологічна розмірність D_T – це ціла величина, що характеризує топологічний об'єкт: для лінії $D_T = 1$, для площини – 2, для поверхні – 3. D_T гомеоморфна, тобто є інваріантом відносно лінійних перетворень.

Розмірність Хаусдорфа-Безиковича D_H – це міра розбиття об'єкта E на частини розміром r з наступним підрахунком числа $N(r)$ частин, що покривають досліджуваний об'єкт.

Розмірність D_H інваріантна щодо лінійних перетворень і для її кількісного оцінювання використовується величина, яка називається метричним порядком:

$$k(E) = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln r},$$

$k(E)$ пов'язана з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича співвідношенням:

$$D_H > k(E).$$

Розмірність самоподібності D_s характеризує регулярні фрактали (крива Коха, трикутник Серпінського й т. д.) і є для них оцінкою розмірності Хаусдорфа-Безиковича. Значення D_s обчислюється точно, тому що можна чітко виділити компоненти подібності й визначити їх масштабний коефіцієнт. Для обчислення D_s використовується співвідношення:

$$N = r^{D_s},$$

де N – число компонентів подібності, r – масштабний коефіцієнт.

Таким чином, розмірність самоподібності характеризується співвідношенням:

$$D_s = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(r)}.$$

Фракталом в широкому сенсі називається множина, у якої розмірність Хаусдорфа-Безиковича D_H не збігається з його топологічною розмірністю D_T .

7.5.8 Вейвлет-перетворення

Вейвлет-перетворення (wavelet transformation) – це сучасний і перспективний метод обробки даних. Англійське слово wavelet (від французького “ondelette”) дослівно перекладається як “коротка (маленька) хвиля”. Апарат вейвлет-аналізу одержав свій розвиток на початку 1980-х років у роботах Морле, Гроссмана й деяких інших авторів. Результати, отримані у різних галузях за допомогою вейвлет-аналізу, підсилили інтерес до цього напрямку та сприяють його безупинному розвитку.

Методи вейвлет-аналізу можна застосувати до даних різної природи. Це можуть бути, наприклад, одновимірні функції або двовимірні зображення. Грубу класифікацію вейвлет-алгоритмів можна зробити, виділивши неперервне (CWT – *Continuous Wavelet Transform*) і дискретне (DWT – *Discrete Wavelet Transform*) вейвлет-перетворення. Одержати набір вейвлет-коефіцієнтів у випадку дискретного перетворення швидше, і воно дає досить точне подання сигналу при меншому обсязі одержуваних у результаті даних. Неперервне перетворення вимагає більших обчислювальних витрат, але, разом із цим, дозволяє детальніше роздивитися структуру сигналу.

На відміну від звичайних спектральних перетворень, вейвлет-аналіз дозволяє з однаковою точністю апроксимувати як гладкі функції, так і функції з різкими випадками, що дає можливість визначати незначні об’єкти. Застосування вейвлетів розглянуто в багатьох роботах. Оскільки вейвлет-перетворення являє собою згортання сигналу зображення з вейвлет-функцією, що зміщується відносно координат, даний метод близький за змістом до методів на основі фільтрації.

Вибір того чи іншого методу залежить від поставленого завдання й типу наявних даних, які необхідно обробити, від можливостей обчислювальної техніки і від того, у якому вигляді необхідно подати результат.

Термін вейвлет-перетворення (ВП) об’єднує два види перетворень – пряме і обернене, які, відповідно, переводять досліджувану функцію $f(x)$ в набір вейвлет-коефіцієнтів $W_\psi(a,b)f$ і назад. Розділяють неперервне та дискретне перетворення.

Пряме вейвлет-перетворення здійснюється відповідно до правила

$$W_\psi(a,b)f = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx, \quad (7.62)$$

де a і b – параметри, що визначають, відповідно, масштаб і зсув функції ψ , яка називається аналізуювальним вейвлетом, C_ψ – нормувальний множник. Інтегрування ведуть по всій числовій осі.

Базисний, або материнський вейвлет (*parent wavelet*) ψ створює за допомогою розтягнень та зсувів сім'ю $\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Маючи відомий набір коефіцієнтів $W_\psi(a,b)f$, можна відновити первинний вигляд функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \iint \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) [W_\psi(a,b)f] \frac{dadb}{a^2}. \quad (7.63)$$

Пряме (7.62) і обернене (7.63) перетворення залежать від деякої функції $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, яку називають базисним вейвлетом. Практично єдиним обмеженням на його вибір є умова скінченності нормувального множника

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (7.64)$$

де $\hat{\Psi}(\omega)$ – Фур'є-образ вейвлета $\psi(x)$: $\hat{\Psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\omega x} dx$.

Безліч функцій задовольняють дану умову, тому можна підібрати вигляд вейвлета, який найбільш підходить для рішення конкретного завдання.

Умова (7.64) означає, що Фур'є-образ вейвлета дорівнює нулю при нульовій частоті, тобто $\hat{\Psi}(\omega)|_{\omega=0} = 0$. Якщо це не так, то знаменник в інтегралі (7.64) прямує до нуля, у той час як чисельник має відмінне від нуля значення, і коефіцієнт C_ψ перестає бути кінцевим.

У свою чергу, цю вимогу можна подати в іншому вигляді. Оскільки Фур'є-образ $\hat{\Psi}(\omega)$ при нульовій частоті має вигляд $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$, ми можемо вимагати рівність нулю інтеграла від вейвлета по всій осі:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (7.65)$$

Головні ознаки вейвлета

Як базисні функції, що утворюють ортогональний базис, можна використовувати широкий набір вейвлетів. Для практичного застосування

важливо знати ознаки, які неодмінно повинна мати вихідна функція, щоб стати вейвлетом. Наведемо основні з них.

Обмеженість. Квадрат норми функції повинен бути скінченним:

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty.$$

Локалізація. ВП, на відміну від перетворення Фур'є, використовує локалізовану вихідну функцію і у часі, і за частотою. Для цього досить, щоб виконувалися умови:

$$|\psi(x)| \leq C(1+|t|)^{1-\varepsilon} \quad \text{і} \quad |S_{\psi}(\omega)| \leq C(1+|\omega|)^{-1-\varepsilon}, \quad \text{при } \varepsilon > 0.$$

Нульове середнє. Графік вихідної функції повинен бути знакозмінним в околі нуля на осі часу і мати нульову площу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0.$$

Рівність нулю площі функції $\psi(t)$, тобто нульового моменту, призводить до того, що Фур'є-перетворення $S_{\psi}(\omega)$ цієї функції дорівнює нулю при $\omega = 0$ і має вигляд смугового фільтра.

Автомодальність. Характерною ознакою ВП є його самоподібність. Всі вейвлети конкретної сім'ї $\psi_{ab}(t)$ мають те ж число осциляцій, що й материнський вейвлет $\psi(t)$, оскільки отримані з нього за допомогою масштабних перетворень (a) і зсува (b).

Приклади материнських вейвлетів

Основні функції, які створюють вейвлети, так звані материнські вейвлети, наведені в табл. 7.10.

Найбільш поширені базиси створюються на основі похідних функції Гаусса ($g_0(t) = \exp(-t^2/2)$). Це обумовлено тим, що функція Гаусса має найкращі показники локалізації як у часовій, так і в частотній областях.

На рис. 7.30 показані вейвлети перших чотирьох порядків і модулі їх спектральної щільності. При $n = 1$ одержуємо вейвлет першого порядку, який називається WAVE-вейвлетом з нульовим моментом, який дорівнює нулю. При $n = 2$ одержуємо МНАТ-вейвлет, що називається "мексиканський капелюх" (mexican hat – схожий на сомбреро). У нього нульовий і перший моменти дорівнюють нулю.

Таблиця 7.10 – Материнські вейвлети

Вейвлети	Аналітичний запис $\psi(t)$	Спектральна щільність $\psi(\omega)$
Дійсні неперервні базиси		
Гауссові: – Першого порядку або WAVE-вейвлет – Другого порядку або МНАТ-вейвлет «мексиканський капелюх» – n -порядку	$-t \exp(-t^2/2)$ $(1-t^2) \exp(-t^2/2)$ $(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [\exp(t^2/2)]$	$(i\omega)\sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$ $(i\omega)^2\sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$ $(-1)^n (i\omega)^n \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
DOG-difference of gaussians	$e^{-t^2/2} - 0,5 e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}(e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2})$
LP-Littlewood&Paley	$(\pi)^{-1} (\sin 2\pi t - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1.2}, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, & \text{при інших значеннях } \pi \end{cases}$
Дійсні дискретні базиси		
НААР-вейвлет	$\begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \geq -1, & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < 0, t > 1 \end{cases}$	$i e^{i\omega/2} \frac{\sin^2 \omega/4}{\omega/4}$
ФНАТ-вейвлет, або «французький капелюх»	$\begin{cases} 1, & t \leq 1/3 \\ \geq -1/2, & 1/3 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$	$\frac{4 \sin^3 \omega/3}{3 \omega/3}$
Комплексні		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) – чим більше n , тим більше нульових моментів має вейвлет	$\tilde{A}(n+1) \frac{i^{-n}}{(i-n)^{n+1}}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi} (\omega)^n e^{-\omega}$

Найбільш простий приклад дискретного вейвлета – це НААР-вейвлет. Його недоліком є несиметричність форми та негладкість – різкі межі в t -області. Серед комплексних вейвлетів найчастіше використовується базис, заснований на добре локалізованому у часовій та в частотній областях вейвлеті Морле. Характерний параметр ω_0 дозволяє змінювати вибірковість базису. Дійсна та уявна частини $\psi(t)$ – це амплітудно-модульовані коливання.

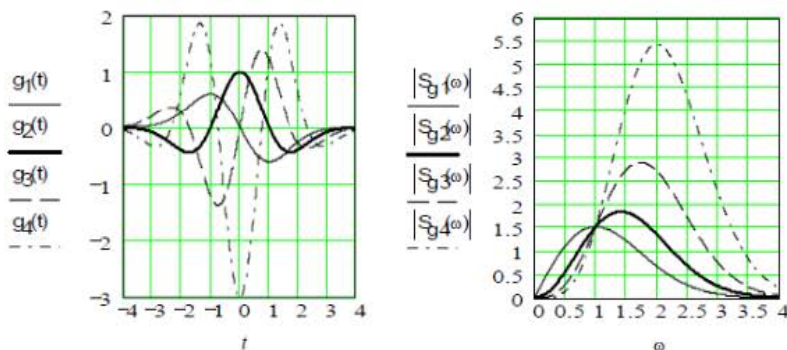


Рисунок 7.30 – Вейвлети перших чотирьох порядків

Вище був наведений невеликий перелік типів вейвлетів, що аналітично описуються в явному вигляді. Однак більшість типів вейвлетів не має аналітичного опису у вигляді однієї формули, а задається ітераційними виразами, які легко обчислюються комп'ютерами.

Вибір конкретного материнського вейвлета цілком залежить від характеру поставленого завдання та від конкретного аналізованого сигналу.

При обробці зображень доводиться мати справу з двовимірними масивами $S(x, y)$. Вони задаються в просторі $V = \{x, y\} \in R^2$ як функції двох змінних x і y . У цьому випадку двовимірна вейвлет-функція має вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \psi \left(\frac{x - b_1}{a_1}, \frac{y - b_2}{a_2} \right),$$

де a_1 і a_2 , b_1 і b_2 – значення a і b для кожного виміру.

Для ВП дискретних зображень батьківський та материнський вейвлети будуть таким чином:

$$\phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

$$\psi_{LN}(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad \psi_{HL}(x, y) = \psi(x)\varphi(y),$$

$$\psi_{HH}(x, y) = \psi(x)\psi(y),$$

де індекси H і L означають реалізацію фільтрів високих частот та низьких частот складових.

Тоді двовимірні вейвлети запишуться в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} &2^{-m} \varphi(2^{-m} x - k) \varphi(2^m y - 1), \quad 2^{-m} \varphi(2^{-m} x - k) \psi(2^m y - 1) \\ &2^{-m} \psi(2^{-m} x - k) \varphi(2^m y - 1), \quad 2^{-m} \psi(2^{-m} x - k) \psi(2^m y - 1) \end{aligned} \right\}$$

Таким чином, на двовимірній площині відбувається аналіз по горизонталі, вертикалі й діагоналі з однаковим розширенням відповідно до трьох наведених вище вейвлетів.

Пряме ВП зображення відбувається таким способом. Припустимо, що маємо зображення розміром $N \times N$ (рис. 7.31, а). Спочатку кожний з N рядків зображення розділяється (фільтрується) на низькочастотну (НЧ) і високочастотну (ВЧ) половини. У результаті виходить два зображення розміром $N \times N/2$ (рис. 7.31, б). Далі кожний стовпець ділиться так само, у підсумку виходить чотири зображення розміром $N/2 \times N/2$ (рис. 7.31, в): НЧ по горизонталі та вертикалі (НЧНЧ₁), ВЧ по горизонталі та вертикалі (ВЧВЧ₁), НЧ по горизонталі та ВЧ по вертикалі (НЧВЧ₁) і ВЧ по горизонталі та НЧ по вертикалі (ВЧНЧ₁). Перше із зазначених вище зображень ділиться аналогічним чином на наступному кроці (рівні) перетворення (рис. 7.31, г) і т. д.

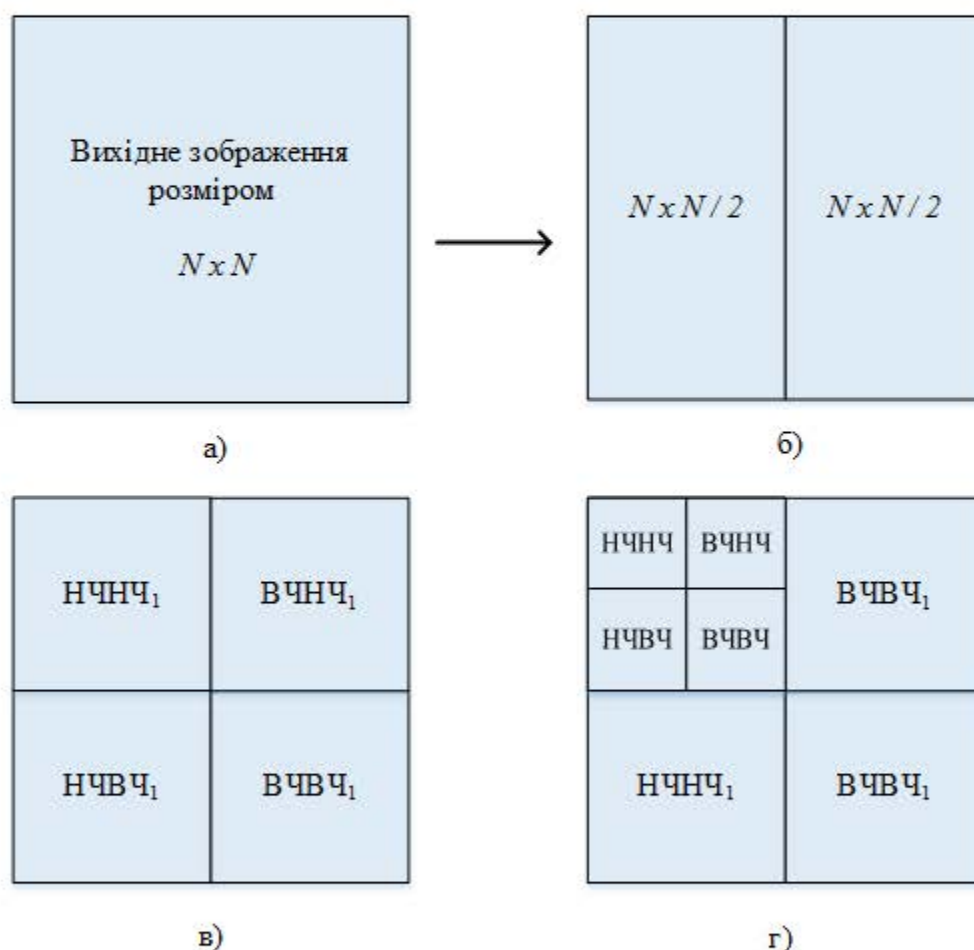


Рисунок 7.31 – Пряме ВП зображення

Кратномасштабний вейвлет-аналіз

Розглянемо $L^2(R)$ – гільбертовий простір функцій $x(t)$, для яких

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

В цьому просторі визначений скалярний добуток

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bar{y}(t) dt \text{ і норма } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Базисом у просторі $V \subset L^2(R)$ називають таку систему функцій $v_i(t)$, в якій будь-яка функція цього простору єдиним чином може бути подана у вигляді

$$v(t) = \sum_i c_i v_i(t).$$

У свою чергу, базис називають ортонормованим, якщо $\langle v_i(t), v_j(t) \rangle = \delta_{ij}$. В цьому випадку $c_i = \langle v(t), v_i(t) \rangle$.

Під ортогональним кратномасштабним аналізом розуміють розгляд простору $L^2(R)$ у вигляді підпростору $V_j \subset L^2(R)$, що задовольняє такі умови:

- 1) підпростори замкнуті: $V_j \subset V_{j+1}$;
- 2) підпростори не перетинаються, а замикання їхнього об'єднання збігається з $L^2(R)$: $\cap V_j = \{0\}$, $\cup \bar{V}_j = L^2(R)$;
- 3) зсув функції зберігає її в підпросторі: $v(t) \in V_0 \Leftrightarrow v(t+1) \in V_0$;
- 4) масштабування аргументу у два рази переміщає функцію в сусідній підпростір: $v(t) \in V_j \Leftrightarrow v(2t) \in V_{j+1}$;
- 5) існує функція масштабування $\varphi(t) \in V_0$, зсуви якої $\varphi_{0,m}(t) = \varphi(t-m)$, $m \in Z$, утворюють ортонормований базис простору V_0 .

Оскільки функції $\varphi_{0,m}(t)$ становлять ортонормований базис простору V_0 , то функції $\varphi_{j,m}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - m)$, $j, m \in Z$ породжують ортонормований базис простору V_j .

Якщо послідовність V_j задовольняє зазначені умови, то для кожного $j \in Z$ ортогональне доповнення W_j до простору V_j в просторі V_{j+1} ($V_{j+1} = V_j \oplus W_j$) називають простором вейвлетів, а його елементи – вейвлетами. При цьому вводиться також функція $\psi(t) \in W_0$, що називається материнським вейвлетом, множина зсувів якої $\psi(t-m)$ утворює ортонормований базис простору W_0 , а функції $\psi_{j,m}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - m)$ утворюють ортонормовані базиси просторів W_j для кожного $j \in Z$.

Сигнал $x(t)$ на j -му рівні кратномасштабного вейвлет-розкладу подається у вигляді

$$x(t) = \sum_{m=0}^{N/2^j-1} a_{j,m} \varphi_{j,m}(t) + \sum_{k=1}^j \sum_{m=0}^{N/2^k-1} d_{k,m} \psi_{k,m}(t)$$

де N – загальна кількість відліків сигналу.

Тут перший доданок виразу – це згладжені, апроксимувальні значення сигналу $x(t)$ при деякому масштабі. Другий доданок додає до «грубої» апроксимації сигналу все більш уточнювальні деталі на все менших масштабних інтервалах.

Визначення коефіцієнтів $a_{j,m}$ і $d_{k,m}$ тягне за собою проблему обчислення великої кількості інтегралів з необхідною точністю. Цю проблему вирішує алгоритм швидкого вейвлет-перетворення (ШВП), запропонований Малла. Він дає можливість обчислювати коефіцієнти вейвлет-розкладу без інтегрування, використовуючи алгебраїчні операції на основі згортки. При обчисленні коефіцієнтів в загальному випадку ітераційні формули ШВП мають вигляд:

$$a_{j+1,m} = \sum_n h_n a_{j,2m+1}, \quad d_{j+1,m} = \sum_n g_n a_{j,2m+1},$$

де h_n – НЧ фільтр декомпозиції, g_n – ВЧ фільтр декомпозиції, $a_{0,m} = \int x(t) \varphi(t-m) dt$.

Для сигналу, заданого масивом своїх відліків, початкові коефіцієнти розкладу, як правило, вибирають рівними значенням відліків: $a_{0,m} = x(t_n)$.

Таким чином, кратномасштабний вейвлет-аналіз (рис. 7.32) сигналу полягає у вивченні та обробці коефіцієнтів розкладу різних рівнів. Приміром, аналізуючи отримане частотно-часове подання аудіосигналу з урахуванням психоакустичних особливостей системи людського слуху та впливу на спектр типових операцій обробки, можна визначити області, що найбільш підходять для невідчутного стійкого впровадження додаткової інформації.

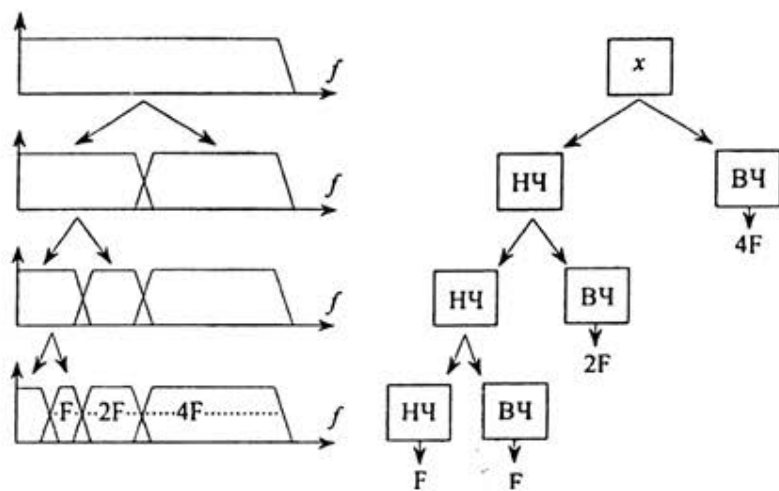


Рисунок 7.32 – Кратномасштабний вейвлет-аналіз

Після модифікації коефіцієнтів декомпозиції виконується реконструкція сигналу, тобто його відновлення в єдине ціле. На даному кроці використовується інтерполяція (вставлення нульового коефіцієнта між кожними сусідніми з наявних) і фільтрація.

В свою чергу, слід зазначити, що процедура декомпозиції може бути застосована не лише до апроксимувальних, але й до деталізувальних коефіцієнтів. Такий метод аналізу називають вейвлет-пакетною декомпозицією сигналу. Застосування такого перетворення сприяє кращій частотній локалізації сигналів в порівнянні зі звичайним ШВП. При цьому слід зазначити, що, на відміну від ШВП, пакетне перетворення дозволяє виконати частотне розбиття за критичними смугами, що дає можливість визначати свої оптимальні параметри впровадження для коефіцієнтів кожної підсмуги.

7.6 Інтервальний аналіз

Основний інструмент, що використовується в інтервальному аналізі (interval analysis), оснований на дуже простій ідеї оточення дійсних чисел інтервалами, а векторів – областями прямокутної форми – паралелограми. При цьому вперше з'являється можливість отримати гарантовану оцінку результатів комп'ютерних обчислень прямим переходом до інтервальних змінних в класичних чисельних алгоритмах, що використовуються зазвичай в обчисленнях з плаваючою точкою.

Окрім цього інтервальні методи знайшли широке застосування в моделюванні різноманітних систем в умовах невизначеності стану їхніх параметрів, робастному аналізі.

7.6.1 Класична інтервальна арифметика

Інтервальну арифметику можна визначити так:

$$[a, b] * [c, d] = \{x * y\}, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d,$$

де $*$ $\in \{+, -, \cdot, / \}$. При цьому, якщо $*$ означає ділення, то $0 \notin [c, d]$. Неважко показати, що ці операції в кожному конкретному випадку еквівалентні нижченаведеним:

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \\ [a, b] / [c, d] &= [a, b] \cdot [1/d, 1/c], 0 \notin [c, d] \end{aligned} \quad (7.66)$$

Окрім того, з формули (7.66) виходить, що:

- 1) віднімання необернене додаванню;
- 2) ділення необернене множенню;
- 3) інтервальне додавання і інтервальне множення асоціативні і комутативні;
- 4) закон дистрибутивності не виконується, а виконується включення $A(B+C) \subseteq AB+AC$, що називається властивістю субдистрибутивності.

Додавання і множення мають звичайні властивостями асоціативності та комутативності:

$$A+(B+C)=(A+B)+C, A \cdot (B \cdot C)=(A \cdot B) \cdot C,$$

$$A+B=B+A, A \cdot B=B \cdot A.$$

Нулем додавання є число 0, а одиницею множення – число 1:

$$0+A=A+0=A, 1 \cdot A=A \cdot 1=A.$$

Однією з властивостей інтервальної арифметики є мотонність за

включенням. Це означає, що з $A \subseteq C$ і $B \subseteq D$ випливає $A * B \subseteq C * D$ при $* \in \{+, -, \cdot, / \}$.

Згідно з означенням інтервальної арифметики та відповідно до символіки, що є загальною для робіт з інтервального аналізу, наведемо певні додаткові позначення:

$a = [\underline{a}; \bar{a}]$ – певний інтервал з множини \mathbf{IR} , нижньою межею якого є \underline{a} , а верхньою – \bar{a} , тобто; $\underline{a} \leq \bar{a}$ і $\underline{a}, \bar{a} \in \mathcal{R}$;

$|a| = \bar{a} - \underline{a}$ – довжина інтервалу, легко бачити, що $|a| \geq 0$.

Далі ми будемо позначати через маленьку непотовщену літеру x дійсний аргумент дійсної функції, $x \in \mathcal{R}$, а через велику літеру \mathbf{X} – інтервальный аргумент інтервальної функції, $\mathbf{X} \in \mathbf{IR}$.

Будь-яке дійсне число b може бути подане у вигляді інтервалу $[\underline{a}; \bar{a}]$, для якого справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} b &= \bar{a} = \underline{a}, \\ |a| &= \bar{a} - \underline{a} = 0. \end{aligned}$$

Крім наведених базових арифметичних операцій можна навести правило розрахунку значення інтервалів, що є результатом піднесення до степеня:

$$A^k = \begin{cases} [a^k, b^k] & \text{при } k = 2j + 1, \\ [a^k, b^k] & \text{при } k = 2j, a \geq 0, \\ [a^k, b^k] & \text{при } k = 2j, b \leq 0, \\ [0, \max(a^k, b^k)] & \text{при } k = 2j, 0 \in A, \end{cases}$$

та правило множення інтервалу на дійсну константу:

$$\alpha \cdot [a; b] = \begin{cases} [\alpha \cdot a; \alpha \cdot b] & \alpha \geq 0 \\ [\alpha \cdot b; \alpha \cdot a] & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Однією з важливих та визначальних властивостей при виконанні операцій в інтервальной арифметиці є властивість вкладення. Формально ця властивість визначається так. Якщо інтервали подають будь-яке фіксоване дійсне число в своєму діапазоні, то і результат арифметичної операції є будь-яким можливим дійсним числом в діапазоні інтервалу. В символічному записі ця властивість наводиться таким чином.

Одновимірна функція $g^{\mathbf{IR}}$ має властивість вкладення, якщо:

$$\forall [i] \in \mathbf{IR}, \quad \forall [x \in i], \quad g^{\mathbf{R}}(x) \in g^{\mathbf{IR}}(i).$$

Двовимірна функція $g^{\mathbf{IR}}$ має властивість вкладення, якщо:

$$\forall[(i, j) \in IR], \forall[(x, y) \in (i, j)], g^R(x, y) \in g^{IR}(i, j)$$

На основі основних алгебраїчних операцій та властивостей інтервального обчислення можна отримати набір елементарних функцій для інтервальних чисел.

7.6.2 Інтервальне розширення та звуження

Подання будь-якої загальної функції g^R у вигляді інтервальної функції g^{IR} є одною з найважливіших проблем інтервального аналізу.

Інтервальним розширенням функції $g^R(x)$, $x \in R$ назовемо такий елемент $g^{IR}(X)$, $X \in IR$, що при $x \in X$ виконується умова $g^R(x) \in g^{IR}(X)$.

Інтервальне розширення позначається як

$$Di_{x \rightarrow X} g^R(x) = g^{IR}(X) \quad (7.67)$$

З точки зору практичного застосування інтервальних методів буває доцільним визначати інтервальне розширення більш спеціально, а саме, задаючи спосіб його отримання. Підтвердженням сказаного можуть служити нижченаведені приклади.

а) Функція $g^{IR}(X)$, що отримана заміною дійсного аргументу x в раціональній функції $g^R(x)$ інтервальним аргументом X з переходом в інтервальну арифметику, називається природним інтервальним розширенням. В цьому випадку справедлива така теорема.

Теорема 7.1. Якщо $g^{IR}(X)$ – природне інтервальне розширення $g^R(x)$ і кожна компонента вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ в $g^{IR}(X)$ зустрічається не більше одного разу, то

$$g^{IR}(X) = \bigcup_{x \in X} g^R(x)$$

Як видно, в цьому випадку для знаходження області значень $g^R(x)$ при $x \in X$ достатньо обчислювати раціональний інтервальний вираз $g^{IR}(X)$, тоді як, оперуючи дійсними функціями, ми повинні визначити нескінченну множину $\{g^R(x) \mid x \in X\}$.

б) Якщо множину дійсних чисел R прирівняти до множини машинних чисел R_M , то тоді інтервальне розширення функції $g^R(x)$ буде мати вигляд

$$g^{IR}(X) = (g^R(x))_M + [-\varepsilon(x), \varepsilon(x)]$$

де $(g^R(x))_M$ – результат обчислення $g^R(x)$ на машині, а $\varepsilon(x)$ – абсолютна похибка $g^R(x)$, що дозволяє враховувати помилки машинного обчислення. При цьому $\varepsilon(x)$ оцінюється величиною $\varepsilon_0 |g^R(x))_M|$, де ε_0 – мінімальне машинне число.

Шляхом оператора Di можна перейти до дій над інтервалами. Необхідність в подібному інтервальному розширенні може виникнути наприклад, при

врахуванні помилок подання у комп'ютері констант, що входять в функцію $g^R(x)$.

Потрібно зауважити, що з $g^R = \varphi^R$ не слідує, що $Di\ g^R = Di\ \varphi^R$. Наведемо наочний приклад.

Нехай $g^R(x) = (\sqrt{x})^3 - 1$, $\varphi^R = ((x/\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1))$, $X_0 = \langle 1, 4 \rangle$. Для відповідних природних інтервальних розширень $g^{IR}(X) = (\sqrt{X})^3 - 1$ та $\varphi^{IR}(X) = ((X/\sqrt{X} - 1)(X + \sqrt{X} + 1))$ маємо $g^{IR}(X) = \langle 0, 7 \rangle$, $\varphi^{IR}(X) = \langle -7/2, 21 \rangle$.

Оберненою операцією щодо інтервального розширення є інтервальне звуження.

Інтервальним звуженням функції $F(X)$, $X \in \mathbf{IR}$, називають відображення $f(x)$, $x \in \mathbf{IR}$, що отримується з $F(X)$ при $X = [x, x] = x$. В символічному записі

$$\underset{X \rightarrow x}{Rs} F(X) = f(x). \quad (7.68)$$

Потрібно звернути увагу на деякі аспекти. Наприклад, розглянемо звуження функції $g^{IR}(X)$ за X .

З класу еквівалентності $\underset{X \rightarrow x}{Rs} g^{IR}(X)$ завжди можна виділити відображення, інтервальне розширення яких охоплюють $g^{IR}(X)$. Для цього до $\underset{X \rightarrow x}{Rs} g^{IR}(X)$ достатньо додати деяке відображення $\varphi(x)$, що задовільняє умовам:

$$\bigcup_{x \in X} \varphi^R(x) = 0, \text{ але } \underset{X \rightarrow x}{Di} \varphi^R(x) \neq 0.$$

Наприклад, $\varphi^R(x) = x - x$. З іншого боку, розширення $g^{IR}(X)$ може бути таке, що з відповідного класу еквівалентності можна виділити відображення, інтервальні розширення яких можуть як вносити, так і вноситися в $g^{IR}(X)$.

Справді, нехай, наприклад, $g^{IR}(X) = X^2 - 5X$. Тоді $\underset{X \rightarrow x}{Rs} g^{IR}(X) = x^2 - 5x$. Розглянемо два елементи з класу еквівалентності $g^R(x) = x^2 - 5x$, а саме: $g_1^R(x) = x(x - 5)$ та $g_2^R(x) = x^2 - 6x + x$. Для відповідних природних інтервальних розширень в точці $X_0 = \langle 2, 4 \rangle$ маємо $g_1^{IR}(X_0) = \langle -12; -2 \rangle$, $g_2^{IR}(X_0) = \langle -18; 8 \rangle$, в той час як $g^{IR}(X_0) = \langle -16, 6 \rangle$, тобто $g_1^{IR}(X_0) \subset g^{IR}(X_0) \subset g_2^{IR}(X_0)$.

Застосування інтервальних засобів припускає побудову інтервальних розширень, на які накладаються умови найбільшої звуженості. В теоремі 7.1 наведена достатня умова найбільшої звуженості для випадку раціональних функцій.

7.6.3 Диференціювання та інтегрування в інтервальному аналізі

Підхід до диференціювання та інтегрування функції в інтервальній математиці не суттєво, але відрізняється від звичайної математики. Проте

останні дослідження вчених математиків наблизили ці процеси до того, що нам відомо з дійсної математики.

Один з перших способів розрахунку похідної від інтервальної функції базувався на так званих методах занурення. Але застосування цього способу на практиці виявилось не дуже зручним. Тому дослідники спрямовували свій пошук на більш практичні способи диференціювання. В наш час найбільш поширеним є підхід до диференціювання, який застосували болгарські вчені. Вони, відповідно до дійсної математики, дещо змінили підхід до визначення послідовності та визначили поняття збіжності послідовності, знаходження границі послідовності в інтервальной математиці. Після визначення границі послідовності стало можливим сформулювати поняття диференціального обчислення для інтервальних функцій. Отримане визначення стало дуже схожим на те, яке ми звикли чути в математиці дійсних чисел.

Припустимо, що задана послідовність інтервалів $\{A_n\}$, $A_n \in IR$. Назвемо інтервал A , що є перетином всіх інтервалів, які охоплюють всі або майже всі, за винятком обмеженої кількості, інтервалом послідовності $\{A_n\}$, а значення s – границею послідовності $\{A_n\}_1^\infty$:

$$s \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

Якщо $\{a_n\}_1^\infty$ – послідовність дійсних чисел, та $a = s \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ – це мінімальний інтервал, який охоплює всі межові точки послідовності. Наприклад: $s \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = [-1; 1]$. Відповідно до поняття межі послідовності вводиться поняття межі інтервальної функції.

Припустимо, що $F: \Lambda \rightarrow IR$, $\Lambda \subset R$, $x_0 \in \Lambda$, $f \in F$. Будемо називати інтервал A s -границею функції в точці x_0 , якщо A є перетином всіх інтервалів, які містять в собі інтервали вигляду

$$s \lim_{n \rightarrow \infty} F(f, x_n),$$

де $x_n \in \Lambda$, $x_n \rightarrow x_0$

Введемо визначення межі інтервальної функції G , заданої через дійсні межові функції: $G(x) = [g(x), \bar{g}(x)]$. Нехай G – інтервальна функція, визначена в околі точки $x_0: \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$. Назвемо s -межею функції G при $x \rightarrow x_0$ інтервал

$$s \lim_{n \rightarrow \infty} G(x) = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{g}(x) \right].$$

Тоді можна ввести визначення похідної інтервальної функції:

$$G'(x) = s \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{G(x+h) - G(x)}{h} \right). \quad (7.69)$$

Визначення інтеграла інтервальної функції також має декілька різних формулювань. Але все ж найбільш правильним та легким для сприйняття є означення за ідеями Мура.

Припустимо, що f – неперервна функція, для якої існує інтервальне розширення F . Припустимо, що функція F є інтервальною функцією, визначеною для $X \subset A$, де $A = [a, b]$, $a < b$, та звуження F є неперервною дійсною функцією за A , $F(x) = f(x)$, при $x \in A$ та $f(x) \subset F(x)$ при $X \subset A$. Функція

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, t \in [a, b]$$

має неперервну похідну $g'(x) = f(x)$ та, згідно з теоремою про середнє,

$$g(x) = g(a) + f(a + \theta \cdot (x - a))(x - a)$$

для деякого $\theta \in [0, 1]$. Оскільки $g(a) = 0$, відповідно

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(a + \theta \cdot (x - a))(x - a), \theta \in [0; 1].$$

Тоді

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \in F(a + [0; 1] \cdot (x - a))(x - a),$$

а оскільки $x \in [a, b]$ і $x \geq a$, то

$$\int_a^x f(t) dt \in F([a; x])(x - a).$$

Звідси для будь-якого $X = [x; \bar{x}] \subset A$, позначивши $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ через $\int_{[x_1, x_2]} f(t) dt$ або

$\int_X f(t) dt$, маємо

$$\int_X f(t) dt \in F(X)\omega(X). \quad (7.70)$$

Використовуючи властивість адитивності інтеграла

$$\int_{[x_1, x_2]} f(t)dt + \int_{[x_2, x_3]} f(t)dt = \int_{[x_1, x_3]} f(t)dt,$$

отримаємо

$$\int_{[x_1, x_3]} f(t)dt \in F([x_1, x_2])(x_2 - x_1) + F([x_2, x_3])(x_3 - x_2) \quad (7.71)$$

Формула (7.69) дає підстави для введення поняття інтервального інтеграла від інтервальної функції.

Якщо f – неперервна інтервальна функція дійсної змінної та F – неперервне інтервальне розширення f таке, що $F(x) = f(x)$, то інтеграл визначається як

$$\int_{[a, x]} f(t)dt = \bigcap_{n=1} \sum_{i=1}^n F(X_i^{(n)}) \cdot \frac{x-a}{n}. \quad (7.72)$$

Якщо f – неперервна інтервальна функція дійсної змінної $x \in [a, b]$, то існує пара неперервних дійсних функцій f_1 і f_2 таких, що $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, і введене означення інтеграла рівносильне нижченаведеному:

$$\int_{[a, x]} f(t)dt = \left[\int_{[a, x]} f_1(t)dt, \int_{[a, x]} f_2(t)dt \right]. \quad (7.73)$$

7.6.4 Інтервальні методи розв'язання диференціальних рівнянь

Цікавість до використання інтервальних методів при розв'язанні диференціальних рівнянь пояснюється тим, що в рамках інтервального аналізу вхідні дані диференціального рівняння можуть бути задані у вигляді інтервалів, а отримані рішення враховують не лише помилки у вхідних даних, але й помилки апроксимації та округлення.

При інтервальному моделюванні однією з задач є розв'язання диференціальних рівнянь з інтервальними даними. На сьогоднішній день розроблено багато інтервальних методів розв'язання диференціальних рівнянь. Розглянемо детально найвідоміші методи.

7.6.5 Інтервальний метод другого порядку для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = f(y), y = y(x), x \in R, \quad (7.74)$$

$$y(0) = y_0. \quad (7.75)$$

Припустимо, що функція $f(y)$ визначена і має дві перші обмежені похідні на інтервалі $A=[a, b]$.

Розглядуваний нижче метод розв'язання задачі (7.74), (7.75) припускає неточно задані початкові дані, а саме: припустимо, що існує інтервал Y_0 такий, що він лежить строго в A і $y_0 \in Y_0$. Окрім того припустимо, що функція $f(y)$ має інтервальне розширення $F(Y)$, що має такі властивості:

1) функція $F(Y)$ визначена і неперервна при всіх $Y \subset A$;
 2) функція $F(Y)$ монотонна за включенням, тобто з того, що $Y_1 \subset Y_2$, слідує $F(Y_1) \subset F(Y_2)$;

3) існує число $l > 0$ таке, що $\omega(F(Y)) \leq l\omega(Y)$ для всіх $Y \subset A$, а також існує $\Psi(Y)$ – інтервальне розширення функції $f(f'' + (f')^2)$, що визначене при $Y \subset A$ і монотонне за включенням.

Оскільки Y_0 лежить в A , для деякого скінченного $h_0 > 0$ знайдеться таке число $\xi > 0$, що

$$Y_0 + \xi(F(A) - h_0^2 \Psi(A) / 12) \subset A.$$

Інтервальний розв'язок побудуємо на відрізку $[0, \xi]$, для цього розіб'ємо його на m частин точками $x_i = ih$ ($i=0, 1, \dots, m$), $h = \xi/m < h_0$.

Теорема 7.2. Якщо інтервали $Y(x_i) = Y_i$ ($i=0, 1, \dots, m$) визначаються формулами

$$Y_0 = Y(x_0) = Y(0), \quad (7.76)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + (h/2) \left\{ \begin{array}{l} F(Y_i) + F(Y_i + [0, h] \cdot F(A)) \\ (h^3/12) \Psi(Y_i + [0, h] \cdot F(A)) \end{array} \right\}, \quad (7.77)$$

то для будь-якого розв'язку $y(x)$ рівняння (7.74) такого, що $y(0) \in Y_0$, справедливі включення $y(x_i) \in Y_i$ ($i=1, \dots, m$) і має місце така оцінка для ширини інтервалів Y_i :

$$\omega(Y_i) \leq Nh^2 + M\omega(Y_0), \quad (7.78)$$

де N і M – дійсні константи, що не залежать від i і h .

7.6.6 Інтервальні методи типу Рунге-Кутта

Розглянемо задачу Коші:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (7.79)$$

$$y(0) = y_0 \in Y_0. \quad (7.80)$$

Припустимо, що функція $f(x, y)$ визначена для всіх $(x, y) \in \Delta_x \times \Delta_y$, де $\Delta_x = \{x | 0 \leq x \leq c\}$, $\Delta_y = \{y | a \leq y \leq b\}$.

Оскільки ряд параметрів, що визначається формулами методу Рунге-Кутта, використовується при побудові відповідних інтервальних формул, розглянемо спосіб отримання розв'язку цим методом в класичній математиці.

Для знаходження $y(x+h)$, якщо відомо $y(x)$, використовується формула:

$$y(x+h) = y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h), \quad (7.81)$$

де $k_1(h) = hf(x, y), k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h)), \dots,$
 $k_q(h) = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{21} k_1(h) + \dots + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h))$ а величини $\alpha_2, \dots, \alpha_q, p_1, \dots,$

$p_q, \beta_{ij} (0 < j < i \leq q)$ залежать від вибору порядку похибки, q і самої функції f .

Нехай функція $f(x,y)$ має інтервальне розширення $F(X,Y)$, що має властивості:

1. $F(X,Y)$ визначена і неперервна для всіх $X \subset \Delta_x, Y \subset \Delta_y$;

2. $F(X,Y)$ монотонна за включенням, тобто з $X_1 \subset X, Y_1 \subset Y$ слідує, що $F(X_1, Y_1) \subset F(X, Y)$;

3. Існує константа $L > 0$, така, що $\omega(F(X, Y)) \leq L(\omega(X) + \omega(Y))$ для всіх $X \subset \Delta_x, Y \subset \Delta_y$, де $\omega([a, b]) = b - a$. Нехай, окрім цього, $\psi(x,y)$ має інтервальне розширення $\Psi(X, Y)$, визначене для всіх $X \subset \Delta_x, Y \subset \Delta_y$ і монотонне за включенням.

Тоді розв'язок інтервального диференціального рівняння буде таким:

$$Y_m(x_{j+1}) = Y_m(x_j) + \sum_{i=1}^q p_i k_i^j(h) + (\Psi(X_j, Y_M(x_j)) + [-\alpha, \alpha] h^{s+1}). \quad (7.82)$$

Величини $k_i^j(h)$ та α обчислюються за формулами:

$$k_1(h) = hF(X, Y),$$

$$k_2(h) = hF(X + \alpha_2 h, Y + \beta_{21} k_1(h)),$$

.....

$$k_q(h) = hF(X + \alpha_q h, Y + \beta_{21} k_1(h) + \dots + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h)) \quad (7.83)$$

$$\alpha = Mh_0,$$

$$\left| \varphi^{(s+2)}(\theta h) / (s+2)! \right| \leq M < \infty.$$

де s – порядок рівняння.

Цей метод справедливий і для розв'язання рівнянь зі змінним кроком, а також для систем рівнянь з відповідними початковими умовами.

7.6.7 Метод Крукенберга

Трикратний метод Крукенберга чисельного розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь дозволяє отримати інтервали, що містять розв'язок задачі. В ньому попередньо будується інтервальний розв'язок для

фіксованої дійсної задачі з певними початковими значеннями з заданої множини (інтервалу), а потім методом збурень знаходяться інтервальні включення для всіх можливих розв'язків.

Нехай рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$ має єдиний розв'язок $\tilde{y}(x; x_0, y_0)$ на $[x_0, x_1]$. Якщо початкові дані задані неточно, тобто $y_0 \in Y_0$, де Y_0 – певний інтервал в \mathbb{R} , то розв'язки задачі в такій постановці утворюють множину $\bar{Y} = \{z \mid z = \tilde{y}(x, x_0, y_0), y_0 \in Y_0\}$. Необхідно знайти інтервал $Y_1^* \supseteq Y_1$, де $Y_1 = \bar{Y}(x_1)$, $x_1 = x_0 + h$, величина кроку h визначається в процесі розв'язання.

На першому кроці знаходимо крок h і інтервальний поліном k -го степеня $P_k(x - x_0)$ такий, що при $x_1 = x_0 + h$, $P_k(x - x_0) \supseteq \bar{Y}(x)$, $x \in [x_0, x_1]$. Такі поліноми можуть бути отримані за ітераційним алгоритмом Пікара:

$$P_{k+1} = Y + \int_0^x F(x_0 + \zeta) d\zeta, (k = 0, 1, 2, \dots),$$

де F – інтервальне розширення функції f . На практиці обмежуються поліномами нульового степеня p_0 .

На другому етапі знаходиться інтервальний розв'язок початкового рівняння з дійсними початковими даними $y(x_0) = d_0 \in Y_0$. Використовуючи формулу Тейлора, в якій дійсні аргументи замінені інтервальними, маємо інтервал

$$D_1 = d_0 + hF(x_0, d_0) + \frac{h^2}{2!} F'([x_0, x_1]), P_0([0, h]).$$

Зрозуміло, що $d_1 = \tilde{y}(x_1; x_0, d_0) \in D_1$.

Третій етап є інтервальним варіантом методу збурень.

Інтервал $U_0 = Y_0 - d_0$ всіх можливих збурень початкового значення d_0 . Перепишемо початкову задачу у вигляді

$$\begin{aligned} d(u + d) / dx &= f(x; u + d), \\ u(x_0) &= u_0 \in U_0. \end{aligned} \tag{7.84}$$

Нам відомо, що $u(x_1) = d_1 = \tilde{y}(x_1; x_0, d_0)$, необхідно визначити $u_1 = \tilde{y}(x_1; x_0, u_0)$. Шляхом розкладання правої частини за формулою Тейлора в околі розв'язку $\tilde{y}(x_1; x_0, d_0) = d_1$ і, отримуючи члени першого порядку відносно h , маємо рівняння

$$\frac{du}{dx} = u \frac{\partial f}{\partial y} \quad (7.85)$$

з відповідними початковими умовами з (7.84). Тоді інтервал $U_1 = QU_0$, де $Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} F^k$, F – інтервальне розширення функції f_y^i , і є шуканим розв'язком задачі (7.84), (7.85).

Метод Крукеберга природним чином узагальнюється на випадок системи рівнянь. При цьому $\frac{\partial f}{\partial y}$ буде матрицею, елементи якої є інтервальними розширеннями функцій $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$.

7.6.8 Подання інтервальної функції через граничні дійсні функції

Подання інтервальної функції через дві граничні дійсні функції є одним з важливих підрозділів інтервального аналізу. Подібне подання дозволяє замість вивчення інтервальної функції зосередити увагу на двох дійсних функціях. Це не тільки в певних випадках спрощує розрахунки, але й дає змогу уявити як поводить себе інтервальна функція в тих або інших випадках, отримати більш точні результати розрахунків.

Проблема подання інтервальної функції двома граничними дійсними полягає в знаходженні подання

$$F(X) = [f_1(t), f_2(t)], \quad (7.86)$$

де $f_1(t), f_2(t)$ – певні дійсні функції, які відповідають визначенню.

Наприклад, якщо на відрізку $0 \leq x \leq 3$ розглянемо функцію

$$F(x) = x^2 - [2,4] \cdot x + [3,5], \quad (7.87)$$

тоді $f_1(t) = x^2 - 4x + 3$, $f_2(t) = x^2 - 2x + 5$.

Дійсно, кожному значенню аргументу з інтервалу $x \in [0, 3]$ функція (7.86) ставить у відповідність певний інтервал $[a, b]$. Отже, множина значень функції на площині (x, y) являє собою область, обмежену кривими $y = x^2 - 4x + 3$, $y = x^2 - 2x + 5$ та відрізками прямих $x = 0$, $x = 3$.

Процес визначення функцій f_1 та f_2 залежить від того, з яких причин функція F має за своє значення інтервали, тобто, чому результат є інтервальним числом. Таких причин можна виділити декілька:

1) функція F є функцією дійсного аргументу x , але константи, що входять до F – інтервали;

2) функція F є функцією інтервального аргументу X , але константи, що входять до F – дійсні числа;

3) аргумент функції F та константи, що входять до її складу, є інтервалами.

Якщо функція F є поліномом виду $F(x) = \sum_{i=1}^m [a_i; c_i] \cdot x^i$, то граничні функції виражаються як:

$$f_1(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m a_i \cdot x^i & \text{якщо } x \geq 0, \\ \sum_{i=0}^m (a_i \cdot \theta(i) + c_i \cdot \gamma(i)) \cdot x^i & \text{якщо } x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m c_i \cdot x^i & \text{якщо } x \geq 0, \\ \sum_{i=0}^m (a_i \cdot \gamma(i) + c_i \cdot \theta(i)) \cdot x^i & \text{якщо } x \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{де } \gamma(i) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } i = 2k, \\ 1 & \text{якщо } i = 2k+1, \end{cases} \quad \theta(i) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } i = 2k, \\ 0 & \text{якщо } i = 2k+1. \end{cases}$$

Якщо повернутися до вищенаведеного прикладу, то отримаємо:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{якщо } x \geq 0, \\ x^2 - 2x + 3 & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & \text{якщо } x \geq 0, \\ x^2 - 4x + 5 & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

Із застосуванням визначення граничних функцій дещо змінюється означення диференціала та інтеграла інтервальної функції.

Так, якщо f – неперервна інтервальна функція дійсного аргументу $x \in [a, b]$, то існує пара неперервних дійсних функцій f_1 та f_2 таких, що інтеграл функції можна визначити, як

$$\int_{[a,x]} f(t) dt = \left[\int_{[a,x]} f_1(t) dt; \int_{[a,x]} f_2(t) dt \right] \int_{[a,x]} f(t) dt = [f].$$

Також можна змінити визначення межі інтервальної функції. Припустимо, що інтервальна функція G задана через дійсні межові функції: $G(x) = [\underline{g}(x); \overline{g}(x)]$. Похідна для інтервальної функції $G(x)$, що визначена в околі точки $x_0 : \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$, може визначатись за формулою:

$$s \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = \left[s \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), s \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right].$$

Визначення інтервальної функції через її межові функції широко використовується на практиці. Це насамперед пов'язано з тим, що апарат обчислень з дійсними функціями добре розроблений. Припустимо, що ми маємо інтервальный алгоритм, який необхідно реалізувати. Отже, очікувані результати – інтервали. Але з причин округлень, неможливості отримання дійсної області значень інтервальної функції, а також неможливості отримання інтервалів, які значно ширші, ніж насправді.

Тому дуже часто йдуть іншим шляхом. Інтервальный алгоритм поділяють на два дійсних. Тоді кожний з дійсних реалізують в рамках інтервальної арифметики. Це не тільки зменшує складність розрахунків для людини, що не досить знайома з інтервальним аналізом, але в певних випадках дозволяє отримати більш точні результати. Але це можливо лише в випадках, коли подання інтервальної функції через її граничні можливе і не дуже складне, не займає зайвої кількості часу.

7.6.9 Розширення інтервальної арифметики

Класична інтервальна арифметика IR є неповною за своїм математичним змістом. З математичної точки зору, вона є лише комутативною напівгрупою за додаванням та множенням, а відносно порядку включення вона не є решіткою. Ця неповнота алгебраїчної та порядкової структур IR природно стимулює намагання створити на її основі більш досконалу інтервальну арифметику. І таке доповнення було зроблено в працях Каухера, а потім вдосконалено в працях Гарденеса та Трепата. Арифметика, що створена в цих наукових працях, отримала назву «розширеної інтервальної арифметики» чи «інтервальної арифметики Каухера».

Елементами інтервальної арифметики Каухера, як і в класичній інтервальной арифметиці, є дійсні пари $[\underline{x}, \bar{x}]$, але вони не обов'язково зв'язані співвідношенням $\underline{x} \leq \bar{x}$. Таким чином, множини інтервалів IR отримуються шляхом приєднання невластних інтервалів $[\underline{x}, \bar{x}]$, $\underline{x} > \bar{x}$ до множини $IR = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in R, \underline{x} \leq \bar{x}\}$ власних інтервалів та дійсних чисел. Власні та невластні інтервали, дві половинки IR , можна змінювати при відображенні дуалізації

$$dual : IR \rightarrow IR$$

такому, що $dual[\underline{x}, \bar{x}] = [\bar{x}, \underline{x}]$.

Додавання та множення на дійсні константи визначається в арифметиці Каухера так:

$$[x; \bar{x}] + [y; \bar{y}] = [x + y; \bar{x} + \bar{y}],$$

$$\lambda \cdot [x; \bar{x}] = \begin{cases} [\lambda \cdot x; \lambda \cdot \bar{x}] & \text{якщо } \lambda \geq 0, \\ [\lambda \cdot \bar{x}; \lambda \cdot x] & \text{якщо } \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Таким чином, кожен елемент x з \mathbb{R} має один протилежний елемент, що часто визначається як «*opp x*», і

$$\text{opp}[x; \bar{x}] = [-\bar{x}; -x]$$

Часто в наукових працях можна зустріти спеціальне позначення для операції, що є оберненою до додавання, через Θ :

$$x \Theta y = x + \text{opp } y.$$

Віднімання та ділення в арифметиці Каухера визначаються як:

$$x - y = x + (-1) \cdot y,$$

$$x / y = x \cdot \left[\frac{1}{y}; \frac{1}{\bar{y}} \right] \text{ за умови, що } 0 \notin y.$$

Крім того, в інтервальній арифметиці Каухера зберігається монотонність інтервальних операцій за включенням:

$$x \subseteq x', y \subseteq y' \Rightarrow x^* y \subseteq x'^* y',$$

де $*$ $\in \{+, -, \cdot, /, x, x', y, y' \in \mathbb{R}$.

Дії над векторами та матрицями в розширеній інтервальній арифметиці Каухера визначають подібно тому, як це робиться в класичній арифметиці. Сума (різниця) двох інтервальних матриць однакового розміру є інтервальною матрицею того ж самого розміру, яка утворюється з поелементних сум (різниць) операндів. Якщо $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $B=(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times n}$, то результатом їх множення є матриця $C=(c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ така, що

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}.$$

Багато означень та понять класичної інтервальної арифметики без змін переносяться в арифметику Каухера. Тому фактично Каухер не змінив основ, а тільки вніс певні вдосконалення. Деякі з них суттєво спростили застосування інтервального обчислення на практиці.

Ключові слова

Інтерполяція, метод Лагранжа, метод Ньютона, екстраполяція, апроксимація, метод найменших квадратів, сплайни, щільність імовірності, статистична обробка даних, закони розподілу імовірностей, кореляційна функція, цифрова фільтрація сигналів, перетворення Фур'є, дискретне перетворення Фур'є, швидке перетворення Фур'є, перетворення Лапласа, фільтрація зображень, інверсна фільтрація, фрактальні методи, вейвлет-перетворення, інтервальні числа, інтервальні обчислення.

Контрольні запитання та завдання до підрозділів 7.1–7.3

1. Сформулюйте задачу інтерполяції. В яких випадках інтерполяція неможлива?
2. З якою точністю можна обчислити $\sqrt{2}$ за допомогою формули Лагранжа для функції \sqrt{x} , якщо вибрати вузли інтерполяції $x_0 = 81$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$?
3. Виведіть інтерполяційну формулу Ньютона для рівновіддалених вузлів.
4. Складіть алгоритм обчислення полінома Лагранжа.
5. Що таке сплайн-інтерполяція? Як визначаються коефіцієнти сплайнів?
6. Опишіть сфери застосування різницевих методів інтерполяції.
7. Що таке екстраполяція?
8. Якими шляхами розв'язується задача апроксимації?
9. В чому полягає метод Рунге?
10. Чим відрізняється апроксимація від інтерполяції?
11. Виведіть систему рівнянь для визначення коефіцієнтів апроксимувального полінома в методі найменших квадратів.
12. Наведіть алгоритм апроксимації за методом найменших квадратів.
13. Які поліноми називаються ортогональними? Наведіть приклади.
14. Що таке сплайн?
15. Розробіть алгоритм та наведіть приклад комп'ютерної програми для оцінювання статистичних характеристик результатів вимірювання випадкової величини X .

Контрольні завдання та запитання до підрозділу 7.4

1. Які перетворення мають місце при цифровій обробці сигналів?
2. Що таке дискретний сигнал і дискретна послідовність?
3. У чому полягають взаємозв'язок і відмінність спектрів дискретного та аналогового сигналів?
4. Як за відомим спектром аналогового сигналу визначити спектр відповідного йому дискретного сигналу?

5. У чому полягає явище накладання спектрів при дискретизації сигналів?
6. Як здійснюється цифрове кодування сигналу?
7. Як визначається автокореляційна функція і спектральна щільність шуму квантування АЦП?
8. Відомо, що для отримання розбірливої людської мови її достаньно дискретизувати з частотою 8 кГц. Який діапазон частот може бути правильно переданий таким цифровим записом? Що необхідно зробити у разі дискретизації для правильної передачі частот цього діапазону?
9. Сигнал $x[n]$, відмінний від нуля на відрізку $[A, B]$, згортається з сигналом $h[n]$, відмінним від нуля на відрізку $[C, D]$. Знайти відрізок, на якому може бути відмінний від нуля результувальний сигнал.
10. Розрахувати, скільки множень потрібно зробити для обчислення згортки сигналу довжини N з ядром довжини M .
11. Частота дискретизації сигналу дорівнює 44100 Гц. Розмір ШПФ дорівнює 4096. Яка довжина аналізованого блока в секундах? За якими частотами (у герцах) буде розкладений сигнал?
12. Яку частотну роздільну здатність спектра ми отримаємо в попередньому прикладі? Який розмір ШПФ потрібно використовувати, щоб отримати частотну роздільну здатність близько 4 Гц?
13. Реалізувати знаходження і відображення спектра заданої ділянки сигналу. Ввести можливість вибору довжини сигналу, розміру ШПФ, вигляду вагового вікна.
14. Реалізувати швидке згортання двох сигналів через частотну область.
15. Реалізувати секційне згортання двох сигналів через частотну область.
16. Реалізувати алгоритм проектування фільтра за заданою частотною характеристикою. Спроекувати НЧ-фільтр з довільними параметрами.
17. Показати аналітично, що обернене ДПФ можна виконати за допомогою співвідношення (7.28).
18. Виконати чисельно ДПФ за формулами (7.27), (7.32), (7.33) і зрівняти відновлені сигнали. Розрахувати їх АЧХ і ФЧХ.
19. Обчислити обернене ДПФ використовуючи тільки інформацію про ФЧХ сигналу.
20. Чим відрізняється рекурсивний фільтр від нерекурсивного? Опишіть рівняння для обох фільтрів.
21. У чому полягає завдання проектування цифрових фільтрів? Які підходи при цьому використовуються?
22. Як виглядає алгоритм фільтрації із застосуванням ДПФ?
23. Які технічні обмеження впливають на характеристики проєктованих фільтрів?

Контрольні запитання та завдання до підрозділу 7.5

1. У чому полягає сутність поелементної обробки зображень?
2. Доведіть тотожність прямого й зворотного двовимірних ДПФ.
3. Поясніть, чому при обмеженому розмірі околу, що застосовується при КІХ-фільтрації, не можна досягти граничного заглушення шуму?
4. Назвіть умови, при виконанні яких інверсна фільтрація забезпечує високу якість відновлення зображень.
5. Яка структура двовимірного частотного спектра дискретного зображення?
6. За яких умов, використовуючи дискретне зображення, можна без втрат відновити неперервне?
7. Доведіть, що двовимірний фільтр із прямокутною частотною характеристикою ідеально відновлює неперервне зображення з дискретного.
8. Які методи покращення якості зображення ви знаєте?
9. Реалізуйте в ППП Matlab метод покращення якості зображення шляхом вирівнювання гістограми яскравості пікселів за допомогою функції *Image Processing Toolbox – histeq*.
10. За допомогою яких функцій можна накласти сторонній шум на зображення? Які види шуму ви знаєте?
11. В чому полягає суть двовимірного згортання зображення?
12. Розгляньте використання функції *roifill* для усунення дефектів півтонового зображення.
13. Реалізуйте за допомогою функції *nlfiter* операцію усереднення з порогом в цілях фільтрації імпульсного шуму.
14. Перевірте чи є зображення півтоновим, бінарним, палітровим чи повнокольоровим за допомогою функцій *isind, isgray, isrgb, isbw*.
15. Реалізуйте перетворення повнокольорового зображення в півтонове, а напівтонового в палітрове за допомогою функцій *im2double, gray2ind*.
16. Порівняйте алгоритми побудови множини Мандельброта та сніжинки Коха.
17. Який показник використовується для зв'язку фрактальної та топологічної розмірностей?
18. Порівняйте алгоритми стиску зображень (RLE, Хаффмана, LZW). В чому полягає особливість фрактального стиску зображень?
19. Поясніть поняття: розмірність Хаусдорфа-Безиковича деякої множини A .
20. Які перетворення називаються масштабними? Міра Хаусдорфа має властивість інваріантності щодо масштабних перетворень?
21. Сформулюйте загальні вимоги, які повинна задовольняти розмірність множини при будь-якому способі виміру цієї множини.
22. На основі яких функцій будуються найбільш поширені материнські бази? Чим це зумовлено?
23. Яким чином виконується пряме вейвлет-перетворення?

24. Порівняйте процедури компресії зображення за допомогою ДВП та фрактальних методів.

Контрольні завдання та запитання до підрозділу 7.6

1. Навести практичні приклади використання методів інтервального аналізу.
2. Сформулювати основні правила операцій над інтервалами.
3. Скласти алгоритми та програми реалізації найпростіших математичних операцій над інтервалами.
4. Подати у інтервальному вигляді такі функції: \sin , \cos , \tan , ctg , \exp , \ln .
5. Скласти алгоритми та програми інтервальної реалізації математичних функцій, наведених у завданні 4.
6. Сформулюйте задачу Коші для інтервальних чисел. В чому відмінність інтервальних методів розв'язання диференціальних рівнянь від класичних?
7. Чим відрізняється класична інтервальна арифметика від інтервальної арифметики Каухера?
8. Побудувати інтервальне розширення для функцій:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5;$$

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1.$$

9. Чи буде нижченаведена функція інтервальним розширенням деякої функції $f(x)$? Якщо так, то якої?

а) $F(x) = 2[\underline{x}, \bar{x}] + [-1, 1];$

б) $F(x) = \begin{cases} [0, \max\{\underline{x}^2, \bar{x}^2\}] + 2, & \underline{x}\bar{x} < 0; \\ [\underline{x}^2, \bar{x}^2] + 2, & \underline{x} \geq 0; \\ [\bar{x}^2, \underline{x}^2] + 2, & \underline{x} \leq 0. \end{cases}$

10. Знайдіть інтервальний інтеграл на $[a, b]$ для функції

$$F(x) = [1, 2]x^2 + [-1, 1]x + [1, 0].$$

11. З використанням формули Тейлора знайдіть інтервальну оцінку інтеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx.$$

12. Побудуйте інтервальний кубічний сплайн на відрізку $[0, 1]$ якщо $f_0 = [0.5, 1]$, $f_1 = [0, 0.5]$, $f_0' = [-0.5, -0.5]$, $f_1' = [-0.5, -0.5]$.
13. Знайти множину розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b, \text{ де } A = \begin{pmatrix} [2, 3] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 3] \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}.$$

14. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса

$$Ax = b, \text{ де } A = \begin{pmatrix} [2, 3] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 3] \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}.$$

Література

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
2. Буняк Ю. А. Метод нулевого пространства в задачах обработки и анализа изображений / Буняк Ю. А., Кветный Р. Н., Софина О. Ю. – Germany : Palamarium Academic Publishing, 2014 – 268 с.
3. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
4. Кветный Р. Н. Интервальные моделі перетворень сигналів в інформаційно-вимірювальних системах / Кветный Р. Н., Бойко О. Р. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 88 с.
5. Кветный Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень / Кветный Р. Н. – Вінниця : ВНТУ, 2001. – 218 с.
6. Кветный Р. Н. Методи фільтрації текстурованих зображень у задачах розпізнавання та класифікації / Кветный Р. Н., Софина О. Ю. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 119 с.
7. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 448 с.
8. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень / [під заг. ред. Р. Н. Кветного] – Вінниця : ВНТУ. 2012. – ч. 1– 196 с.; ч. 2 – 230 с.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1986. – 832 с.
10. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. – К. : Вища школа, 1986. – 264 с.
11. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підручник / Ляшенко М. Я., Головань М. С. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.
12. Маликов В. Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ / Маликов В. Т., Кветный Р. Н. – К. : Вища школа, 1989. – 362 с.
13. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1979. – 578 с.
14. Рудаков П. И. Обработка сигналов и изображений. Matlab 5.x / Рудаков П. И., Сафонов И. В. – М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. – 416 с.
15. Кветный Р. Н. Різницеві методи та сплайни в задачах багатовимірної інтерполяції / Кветный Р. Н., Дементьев В. Ю., Машницький М. О.,

- Юдін О. О. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 87 с.
16. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарский А. А. – М. : Наука, 1987. – 234 с.
 17. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
 18. Скурихин В. Н. Математическое моделирование / Скурихин В. Н., Шифрин В. Б., Дубровский В. В. – К. : Техніка, 1983. – 270 с.
 19. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельєва, І. І. Становська – Одеса : Пальміра, 2011. – 500 с.
 20. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці : підручник / Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. – К. : Вид. група ВНУ, 2006. – 480 с.
 21. Фисенко В. Т. Компьютерная обработка и распознавание изображений : учеб. пособие / Фисенко В. Т., Фисенко Т. Ю. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2008. – 192 с.
 22. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 279 с.
 23. Усов А. В. Чисельні методи та їх реалізація у середовищі SCILAB : навч. посібник / Усов А. В., Шпинковський О. А., Шпинковська М. І. – Київ : Освіта України, 2013 – 192 с.
 24. Чабан В. Чисельні методи / В. Чабан. – Львів : Вид. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2001. – 186 с.
 25. Kvyetnyy R. Basics of Modelling and Computational Methods / R. Kvyetnyy. – Вінниця : ВДТУ, 2007. – 147 с.

ЧАСТИНА 3. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ

Отримання математичної моделі складного об'єкта не є кінцевою метою моделювання. Модель потрібна для розв'язання практичних задач аналізу процесів, які відбуваються в об'єкті моделювання, оцінювання його характеристик, проектування тощо. Для цього застосовуються різноманітні аналітичні методи, коли результат отримується шляхом перетворень моделі на основі правил і законів відповідного розділу математики, або числові, коли результат отримується шляхом обчислень за допомогою певних комп'ютерних алгоритмів.

8 АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

В переважній більшості випадків аналітичного точного розв'язання задач моделювання проблема зводиться до розв'язання різних типів диференціальних рівнянь. Слід зазначити, що аналітичні методи можна та зручно використовувати не в усіх випадках, але певна кількість типових задач може бути зведена до випадків, коли точний аналітичний розв'язок відшукати можливо. Цей розділ присвячений загальній постановці задач моделювання, які зводяться до математичних моделей з диференціальними рівняннями. В тих випадках, коли скористатися аналітичними методами з певних причин неможливо, слід застосовувати чисельні методи, огляд яких наведено в дев'ятому розділі.

Моделі, які розглядаються у цьому розділі, переважно пов'язані із задачами механічних і теплових процесів, проте з урахуванням аналогії і подібності фундаментальних процесів вони можуть бути цілком успішно застосовані для процесів іншої фізичної природи.

8.1 Застосування звичайних диференціальних рівнянь до моделювання технічних систем

8.1.1 Деякі відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь

Нехай задано k рівнянь

$$F_i(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{m_1}; x_2, \dot{x}_2, \dots, x_2^{m_2}; \dots; x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{m_k}) = 0, \quad i = \overline{1, k},$$

які зв'язують незалежну змінну t , k шуканих функцій x_1, \dots, x_k та їх похідні до порядків, відповідно, m_1, \dots, m_k . Потрібно знайти шукані функції, причому число рівнянь зазвичай дорівнює кількості невідомих функцій.

У більшості практичних випадків задану систему можна звести до вигляду:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.1)$$

яка називається системою звичайних диференціальних рівнянь в **нормальній формі Коші**. Тут t – незалежна змінна; $x_i(t)$ – шукані функції; $f_i(x_1, \dots, x_n)$ – функції, які визначені і неперервні за всіма аргументами в деякій області $(n+1)$ -вимірного простору.

Число n називається порядком системи. Вводячи позначення $x = (x_1, \dots, x_n)^*$, $f = (f_1, \dots, f_n)^*$, ($*$ – знак транспонування), $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, систему (8.1) можна записати також у векторній формі $\dot{x} = f(t, x)$.

Приклад. Співвідношення

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(\sin \ln t + \cos \ln t); \\ \dot{x}_2 = x_1(\sin \ln t + \cos \ln t); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 = \sin x_2 + x_3^2; \\ x_2 = x_1 x_2 + \cos x_3; \\ x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{cases}$$

є системами диференціальних рівнянь відповідно другого і третього порядків.

Розв'язком системи (8.1) на інтервалі (a, b) називається будь-яка сукупність n функцій $x_i = \varphi_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$), які визначені і неперервно диференційовні на (a, b) . Ці функції перетворюють рівняння (8.1) в тотожності на визначеному інтервалі. Так, сукупність функцій $x_1 = C_1 e^{t \sin \ln t} + C_2 e^{-t \sin \ln t}$; $x_2 = C_1 e^{t \sin \ln t} - C_2 e^{-t \sin \ln t}$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь прикладу а) на інтервалі $(0, +\infty)$ при будь-яких значеннях постійних C_1 і C_2 . Система диференціальних рівнянь має, взагалі кажучи, нескінченну множину розв'язків.

З геометричної точки зору кожний розв'язок системи (8.1) можна розглядати як криву в $(n+1)$ -вимірному просторі (t, x_1, \dots, x_n) , що її називають **інтегральною кривою** системи (8.1). Загальним розв'язком системи (8.1) в області простору (t, x_1, \dots, x_n) називають сукупність функцій

$$x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.2)$$

залежних від довільних постійних C_1, C_2, \dots, C_n і таких, що:

1) в околі будь-якої точки $(t, x_1, \dots, x_n) \in G$ систему рівнянь (8.2) можна розв'язати щодо C_1, C_2, \dots, C_n , тобто

$$C_j = \psi_j(t, x_1, \dots, x_n), \quad (j = \overline{1, n}); \quad (8.3)$$

2) при цих значеннях C_j функції (8.2) тотожно задовольняють систему (8.1).

Окремим розв'язком називається розв'язок, отриманий із загального при конкретних значеннях констант C_1, \dots, C_n .

Будемо говорити, що для системи (8.1) поставлена задача Коші, якщо потрібно знайти розв'язки системи, які задовольняють початкові умови

$$x_1(t_0) = x_{1_0}, \dots, x_n(t_0) = x_{n_0},$$

де $t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}$ – задані числа, тобто необхідно знайти інтегральну криву системи, що проходить через точку $(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$ $(n+1)$ -вимірного простору.

Якщо знайдено загальний розв'язок системи (8.1), то, як видно з формул (8.2) і (8.3), розв'язок задачі Коші буде мати вигляд

$$x_i(t, t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}) = \varphi_i(t, \psi_1(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0}), \dots, \psi_n(t_0, x_{1_0}, \dots, x_{n_0})), \quad (i = \overline{1, n}).$$

Умови **існування та єдиності** розв'язку задачі Коші даються нижченаведеною теоремою.

Теорема Пікара. Нехай функції неперервні за всіма аргументами в замкненій області

$$G_0 : \left\{ |t - t_0| \leq a, \left| x_i - x_{i_0} \right| \leq b \quad (i = \overline{1, n}) \right\},$$

де a, b – додатні постійні, і задовольняють в цій області **умову Ліпшиця**, тобто

знайдеться постійна $L > 0$ така, що для будь-яких точок $(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in G_0$ і $(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in G_0$ мають місце нерівності

$$\left| f_i(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f_i(t, x_1, \dots, x_n) \right| \leq L \sum_{k=1}^n \left| \bar{x}_k - x_k \right| \quad (i = \overline{1, n}). \quad \text{Тоді існує єдиний}$$

розв'язок системи (8.1), що задовольняє початкові умови $x_i(t_0) = x_{i_0}, (i = \overline{1, n})$ і

який визначено, принаймні, на інтервалі $|t - t_0| \leq h$, де $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, а постійна

M така, що $f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq M, (i = \overline{1, n}) (t, x_1, \dots, x_n) \in G_0$.

Лінійні системи

Лінійні системи описуються лінійними диференціальними рівняннями. Візьмемо для прикладу модель динаміки замкненої системи із завдання № 7 глави 3. Така система описується системою лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \delta = x - y \\ u = \int_0^t d(t) dt \\ y = 2u + 3 \frac{du}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \delta = x - y \\ \frac{du}{dt} = d(t) \\ \frac{du}{dt} = y - 2u - 3 \\ \frac{dy}{dt} = v \end{cases} .$$

Нехай у загальному випадку задана система лінійних диференціальних рівнянь у векторній формі

$$\dot{x} = Ax, \quad (8.4)$$

де A – квадратна постійна матриця розмірності $n \times n$.

Розв'язок системи (8.4) будемо шукати у вигляді

$$x = e^{\lambda t} C, \quad (8.5)$$

де C – деякий постійний вектор-стовпець, координати якого C_1, \dots, C_n залежать від вибору початкових умов системи (8.4), і λ – постійне число.

При підстановці розв'язка (8.5) в систему (8.4) та виконанні відповідних перетворень, отримаємо

$$(A - \lambda E)C = 0. \quad (8.6)$$

Зауважимо, що $\|C\| \neq 0$, а E – одинична матриця порядку n . Для того, щоб існував нетривіальний розв'язок системи (8.6) щодо вектора C , необхідно і достатньо, щоб

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (8.7)$$

Це співвідношення є алгебраїчним рівнянням n -го степеня щодо λ . Його корені $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ є власними числами матриці A . Для кожного $\lambda = \lambda_j$ отримаємо розв'язок $C = C_j$ системи (8.6). Можна взяти як коефіцієнти вектора C_j алгебраїчні доповнення елементів будь-якого рядка визначника (8.7) при $\lambda = \lambda_j$, якщо не всі вони дорівнюють нулю.

Отже, окремими розв'язками системи (8.4) будуть

$$x = \varphi(t), (j = \overline{1, n}) . \quad (8.8)$$

Щоб отримати загальний розв'язок системи (8.4), візьмемо лінійну комбінацію окремих розв'язків (8.8):

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{\lambda_j t} C_j. \quad (8.9)$$

Ця лінійна комбінація є загальним розв'язком системи (8.4) за умови $\lambda_i \neq \lambda_j$, якщо $i \neq j$ (точніше, кореням $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ рівняння (8.7) відповідають прості елементи матриці). У загальному випадку розв'язок (8.8) подамо у формі

$$x_j(t) = p_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8.10)$$

де $p_j(t)$ – поліноми щодо t , степінь яких менше кратності кореня λ_j , а коефіцієнти поліномів є постійними векторами.

Розглянемо такі випадки:

1) всі корені λ_j мають від'ємну дійсну частину, тобто $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $j = \overline{1, n}$; тоді будь-який розв'язок системи (8.4) прямує до нуля при необмеженому зростанні часу t ;

2) існує принаймні один корінь λ_{j_0} такий, що $\lambda_{j_0} > 0$; тоді відповідний йому розв'язок (8.8) необмежено зростає при будь-яких, навіть при як завгодно малих, значеннях координат вектора в початковий момент часу.

Наявність кратних коренів λ_j не змінює картини поведінки розв'язків системи (8.4), оскільки $p_n(t) e^{\lambda t} \rightarrow 0$ якщо $e^{\lambda t} \rightarrow 0$.

Розіб'ємо всі корені $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тобто всі власні числа матриці, на три групи:

1) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – власні числа з додатною дійсною частиною, 2) $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+s}$ – власні числа з нульовою дійсною частиною, 3) $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+s}$ – власні числа з від'ємною дійсною частиною.

Відомо, що існує особливе лінійне перетворення над вектором $X = SY$, при якому система (8.4) приводиться до такої:

$$\frac{dY_1}{dt} = S^{-1} A S Y, \quad (8.11)$$

де S^{-1} – матриця, обернена до S .

Розіб'ємо систему (8.11) на три підсистеми:

$$\frac{dY_1}{dt} = A_+ Y_1, \quad \frac{dY_2}{dt} = A_0 Y_2, \quad \frac{dY_3}{dt} = A_- Y_3, \quad (8.12)$$

де A_+ , A_0 , A_- – матриці, що відповідають зазначеним трьом групам власних чисел.

Вектор Y_1 має розмірність k , і всі розв'язки системи рівнянь щодо Y_1 зростають необмежено при $t \rightarrow \infty$, в той час як всі розв'язки системи щодо

вектора Y_3 зменшуються і прагнуть до нуля при $t \rightarrow \infty$. Власні числа матриці A_0 мають вигляд $\lambda_j = i\mu_j$. Окремий розв'язок, що відповідає такому λ_j , запишеться у формі

$$Y_{2j} = e^{jp_j t} C_j, \quad (8.13)$$

що описує одночастотні коливання. Загальний розв'язок для вектора-стовпця Y_2 буде мати вигляд

$$Y_2 = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{jp_j t} C_{2j}, \quad (8.14)$$

якщо вважати, що $\mu_j (j = 1, s/2)$ різні.

Розв'язок (8.14) описує складне коливання, що є результатом накладання одночастотних коливань. Ці коливання будуть періодичними, якщо частоти сумісні, тобто відношення $\frac{\omega}{\omega_k}$ – раціональні, і майже періодичними, якщо частоти несумісні.

Таким чином, весь n -вимірний простір може бути розкладено в пряму суму підпросторів, і розв'язки в будь-якому підпросторі поведуться однаково чином, а рух у всьому просторі складається з рухів в цих підпросторах.

Розглянемо систему нестационарних лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (8.15)$$

Матриця, стовпцями якої є n лінійно незалежних розв'язків системи (8.15), називається фундаментальною матрицею цієї системи, а її визначник називається визначником Вронського або вронскіаном.

Властивості фундаментальної матриці:

1) визначник фундаментальної матриці в жодній точці не дорівнює нулю;
 2) якщо $Y_1(t)$ – фундаментальна матриця, а S – постійна невиворочена матриця $Y_2(t) = Y_1(t)S$, то тоді матриця $Y_2(t)$ також буде фундаментальною;

3) якщо $Y_1(t)$ і $Y_2(t)$ – дві фундаментальні матриці системи (8.15), то тоді існує постійна невиворочена матриця S така, що $Y_2(t) = Y_1(t)S$;

4) якщо $Y(t)$ – фундаментальна матриця, а t_0 – деяке число з області визначення (і неперервності), то тоді

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot \exp \left[\int_{t_0}^t \text{Sp} A(r) dr \right],$$

де $SpA(t) = a_{11}(t) + \dots + a_{mm}^t(t)$ – слід матриці $A(t)$ (формула Остроградського-Ліувілля).

Фундаментальна матриця $Y(t)$, яка задовольняє умову $Y(t_0) = E$, називається нормованою при $t = t_0$.

Загальний розв'язок у формі Коші виражається формулою

$$X(t, t_0, x_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0.$$

Розв'язок неоднорідної системи

$$\dot{X} = A(t)X + f(t) \quad (8.16)$$

при будь-якому виборі неперервної векторної функції $f(t)$ може бути знайдено за формулою Коші:

$$X(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t Y(t)Y^{-1}(r)f(r)dr.$$

Візьмемо знову систему (8.15) з матрицею $A(t)$, неперервною, дійсною, 2π -періодичною: $A(t + 2\pi) = A(t)$. І нехай $Y(t)$ – фундаментальна матриця системи (8.15).

Теорема Флоке. Існує неособлива матриця перетворення така, що систему (8.15) з періодичними коефіцієнтами можна звести до системи з постійними коефіцієнтами $\dot{Z} = BZ$.

Так що $Y(t) = \Phi(t)e^{Bt}$. При цьому, оскільки $\Phi(t)$ – періодична матриця, маємо: $B = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{Y(2\pi)}{Y(0)}$.

Крайова задача

Задачі моделювання, в яких накладаються умови на розв'язок як у просторі (граничні умови), так і у часі (початкові умови), називають крайовими.

Для лінійної системи (8.15) розглянемо замість задачі Коші однорідну крайову задачу: знайти розв'язок $x(t)$ системи (8.15), що задовольнить крайові умови

$$PX(a) + QX(b) = 0, \quad (8.17)$$

де матриці P, Q та числа a, b задані.

Нехай $Y(t)$ – нормована при $t = a$ фундаментальна матриця системи (8.15). Розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді $X(t) = Y(t)C$. З умови (8.17) випливає, що C визначається рівнянням $(P + QY(b))C = 0$.

Отже, крайова задача допускає нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\det(P + QY(b)) = 0$.

Розглянемо тепер неоднорідну крайову задачу

$$\dot{X} = A(t)X + f(t); \quad (8.18)$$

$$PX(a) + QX(b) = 0. \quad (8.19)$$

Припустимо, що $\det(P + QY(b)) \neq 0$. Функція $G(t, s)$, $(t, s \in [a, b], t \neq s)$ називається функцією Гріна крайової задачі (8.18), (8.19), якщо вона задовольняє умови:

$$1) \text{ при } t \in [a, s], t \in (s, b], \quad \frac{dG}{dt} = A(t)G;$$

$$2) PG(a, s) + QG(b, s) = 0 \text{ при всіх } s \in (a, b);$$

$$3) G(s+0, s) - G(s-0, s) = E.$$

З умови 1 і властивостей фундаментальної матриці випливає, що

$$G(t, s) = \begin{cases} Y(t)S(s), & t \in [a, s]; \\ Y(t)T(s), & t \in (s, b]. \end{cases}$$

З умов 2 і 3 отримуємо $PS + QY(b)T = 0$, $Y(S - T) = -E$, звідки

$$S - T = Y^{-1}; \quad S(s) = -(P + QY(b))^{-1}QY(b)Y^{-1}(s);$$

$$T(s) = [E - (P + QY(b))^{-1}]QY(b)Y^{-1}(s).$$

Отже, $G(t, s)$ однозначно визначається за формулою

$$G(t, s) = \begin{cases} -Y(t)(P + QY(b))^{-1}QY(b)Y^{-1}(s), & t \in [a, s]; \\ Y(t)[E - (P + QY(b))^{-1}]QY(b)Y^{-1}(s), & t \in (s, b]. \end{cases}$$

Теорема. Якщо $\det(P + QY(b)) \neq 0$, то неоднорідна крайова задача (8.18), (8.19) має єдиний розв'язок, що задається формулою

$$X(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds,$$

де $G(t, s)$ – функція Гріна однорідної крайової задачі (8.15), (8.17).

Різницеві системи

Дискретним аналогом диференціального рівняння є різницеве. Розглянемо систему стаціонарних різницевих рівнянь

$$X(k+1) = AX(k) \quad (8.20)$$

з початковими умовами

$$X(0) = X_0, \quad (8.21)$$

де k – номер дискретного значення аргументу.

Розв'язком задачі (8.20), (8.21) є числова послідовність $\{X(k)\}_{k=0}^{\infty}$, елементи, якої обчислюються за формулою

$$X(k) = A^k X(0) = S I^k S^{-1} X(0), \quad (8.22)$$

де I – жорданова форма матриці A . З формули (8.22) випливає, що власним числам матриці A , за модулем меншим за одиницю, відповідають розв'язки, що прямують до нуля при $k \rightarrow \infty$; власним числам, за модулем більшим за одиницю, відповідають розв'язки, що необмежено зростають при $k \rightarrow \infty$; якщо власне число за модулем дорівнює одиниці і є простим (або йому відповідає простий елементарний дільник), то відповідний йому розв'язок обмежений.

Приклад. Розглянемо систему

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} X(k), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За запропонованою схемою маємо:

$$\begin{aligned} X(k) &= \begin{pmatrix} i-i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi k}{4} & -\sin \frac{\pi k}{4} & 0 \\ \sin \frac{\pi k}{4} & \cos \frac{\pi k}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \cos \frac{\pi(k-1)}{4} \\ -\sqrt{2} & \sin \frac{\pi(k-1)}{4} \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.1.2. Моделювання технічних систем диференціальними рівняннями

Для розв'язання будь-якої задачі, пов'язаної з аналізом динаміки систем, необхідно, насамперед, скласти математичну модель системи. Найпоширенішими математичними моделями є системи диференціальних рівнянь (звичайних чи з частинними похідними), які дають можливість проаналізувати динамічні властивості та поведінку складних систем.

Складні технічні системи містять в собі пружні системи технічних об'єктів (несучі системи, шпіндельні вузли, механізми руху), робочі процеси технічних об'єктів (процеси різання металів, процеси в приводах технічних систем, процеси тертя рухомих механізмів та ін.), замкнені технологічні системи та інші. Наприклад, технологічна система (ТС) утворюється еквівалентною пружною системою машини (верстата) і робочих процесів у їх взаємодії (рис. 8.1).

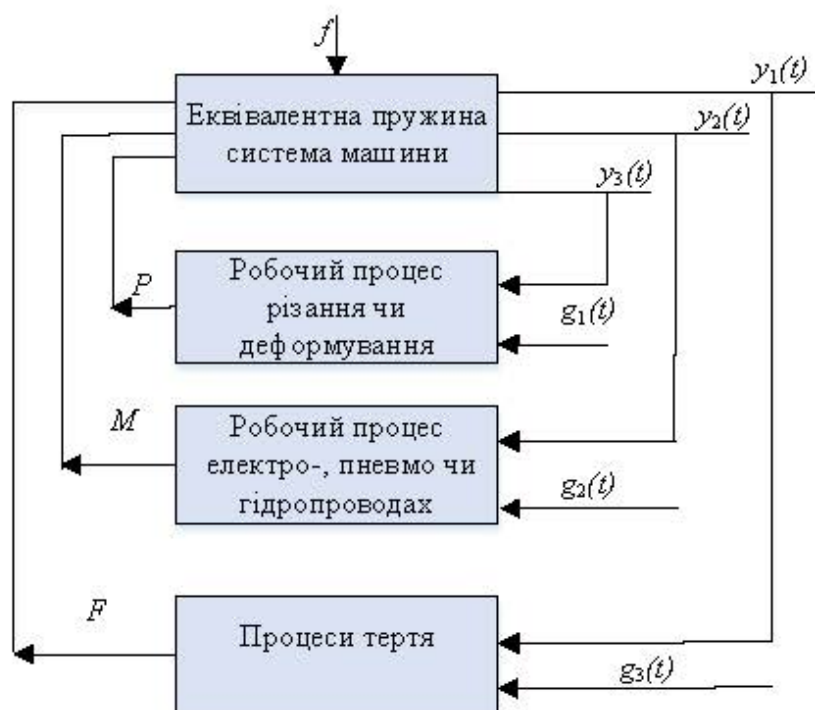


Рисунок 8.1 – Структурна схема технологічної системи

На рис.8.1 позначено: $f(t)$ – зовнішній вплив на пружну систему; $g(t)$ – задає вплив на робочі процеси; P, M, F – силовий вплив робочих процесів (відповідно сили різання, моменту двигуна, сили тертя) на пружну систему; $y_j(t)$ – деформація еквівалентно-пружної системи.

Рівняння статички системи, в яких вплив і навантаження приймаються постійними, зазвичай є алгебраїчними рівняннями. Вони пов'язують узагальнені координати, які визначають систему, і дозволяють знайти положення будь-якого елемента системи або величину, що характеризує його стан (наприклад, температуру регульованої печі, положення регульовального органа, кількість поданого палива і т. д.).

Рівняння динаміки зазвичай є диференціальними або функціонально-диференціальними. Для систем з розподіленими параметрами динаміка системи описується рівняннями з частинними похідними. Вони визначають поведінку системи в перехідному процесі при дії збурювальних сил або після припинення їх дії.

Для складання рівнянь динаміки система розбивається на елементи (ланки). Для кожного з них складається відповідне рівняння на підставі того фізичного закону, який визначає процес, що протікає в даному елементі. Сукупність рівнянь динаміки, складених для всіх елементів системи, визначає поведінку системи.

У ряді випадків завдання складання диференціальних рівнянь процесів у системі полегшує застосування рівнянь Лагранжа другого роду, складених для узагальнених координат системи. Цей метод доцільно використовувати тоді, коли складання виразів кінетичної і потенційної енергій системи і дисипативної функції не становить труднощів.

У загальному випадку рівняння складаються на основі різних фізичних законів (Ньютона, Максвелла, Кірхгофа тощо). Складання рівнянь – дуже важке завдання, і в багатьох випадках його можна виконати тільки при тих чи інших припущеннях.

Диференціальні рівняння Лагранжа другого роду мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k; \end{array} \right.$$

де T – кінетична енергія системи; $Q = (Q_1, \dots, Q_k)^*$ – вектор узагальнених сил;

$q = (q_1, \dots, q_k)^*$ – вектор узагальнених координат.

Кінетична енергія, взагалі кажучи, є функцією аргументів $t, q_1, \dots, q_b, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$, причому компоненти вектора узагальненої швидкості входять в T зі ступенем не вище другого. Узагальнена сила може складатися з трьох різних сил: пружної сили, зумовленої зміною потенційної енергії; сили розсіювання або демпфувальної сили, спричиненої розсіюванням енергії; зовнішньої сили, прикладеної до системи.

Приклади складання рівнянь

Приклад 1. Скласти рівняння руху динамічного гасителя коливань. На диск, що обертається з постійною кутовою швидкістю, впливає крутний елемент $T_0 \sin \omega t \cdot C_{кр}$ (рис. 8.2).

Припустимо, що: 1) обидва маятника однакові; 2) маятники коливаються тільки в площині обертання; 3) у точках кріплення стрижнів маятників є в'язке тертя з коефіцієнтом загасання коливань $C_{кр}$; 4) поле гравітаційних сил мале порівняно з полем відцентрових сил.

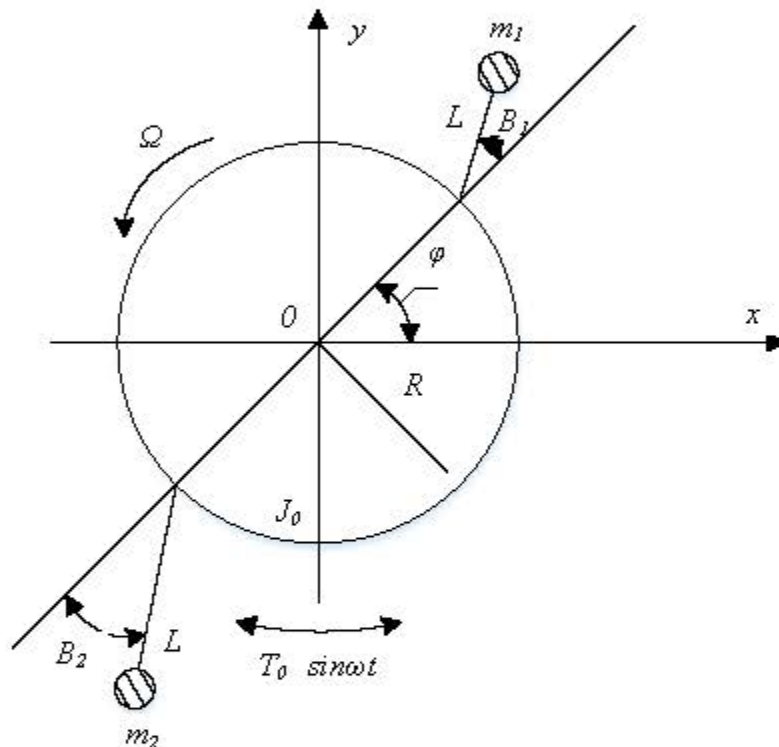


Рисунок 8.2 – Маятниковий динамічний поглинач

Розв'язок. Нехай система описується узагальненими координатами $(\phi, \theta_1, \theta_2)$. Енергетичні функції системи подамо у вигляді:

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \text{кінетична енергія,}$$

$$D = \frac{1}{2} C_{кр} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \text{функція розсіювання,}$$

$$U = 0 - \text{потенційна функція.}$$

Координати (x, y) можна перетворити в узагальнені координати за допомогою співвідношень

$$x_1 = R \cos \phi + L \cos(\phi + \theta_1); \quad x_2 = R \cos \phi + L \cos(\phi + \theta_2);$$

$$y_1 = R \sin \phi + L \sin(\phi + \theta_1); \quad y_2 = R \sin \phi + L \sin(\phi + \theta_2).$$

В результаті перетворень кінетична енергія прийме вигляд

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \left[2R^2 \dot{\phi}^2 + L^2 (\dot{\phi} + \dot{\theta}_1)^2 + L^2 (\dot{\phi} + \dot{\theta}_2)^2 + 2RL \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta}_1) \cos \theta_1 + 2RL \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \right].$$

Оскільки

$$Q_4 = -\frac{\partial D}{\partial \phi} + T_0 \sin \varpi t = T_0 \sin \varpi t, \quad Q_{\theta_1} = -\frac{\partial D}{\partial \theta} = -C_k \dot{\theta}_1, \quad Q_{\theta_2} = -\frac{\partial D}{\partial \theta} = -C_k \dot{\theta}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = J_0 \dot{\phi} + 2m \left[R^2 + L^2 + RL(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \right] \dot{\phi} + mL(L + R \cos \theta_1) \dot{\theta}_1 + mL(1 + R \cos \theta_2) \dot{\theta}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = mL(L + R \cos \theta_1) \dot{\phi} + mL^2 \dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = mL(L + R \cos \theta_2) \dot{\phi} + mL^2 \dot{\theta}_2, \quad -\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = mRL \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta}_1) \sin \theta_1 - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = mRL \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2,$$

то після спрощення рівняння Лагранжа прийме остаточний вигляд

$$\left\{ J_0 + 2m \left[R^2 + L^2 + RL(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \right] \right\} \ddot{\phi} + mL(L + R \cos \theta_1) \ddot{\theta}_1 +$$

$$+ mL(L + R \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - mRL(2\dot{\phi} + \dot{\theta}_1) \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - mRL(2\dot{\phi} + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = T_0 \sin \varpi t;$$

$$mL(L + R \cos \theta_1) \ddot{\phi} + mL^2 \ddot{\theta}_2 + mRL \dot{\phi}^2 \sin \theta_1 + C_{kp} \sin \theta_1 = 0;$$

$$mL(L + R \cos \theta_2) \ddot{\phi} + mL^2 \ddot{\theta}_2 + mRL \dot{\phi}^2 \sin \theta_2 + C_{kp} \sin \theta_2 = 0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння руху механізму диференціала допоміжного руху верстата. На рис.8.3 показаний механізм диференціала.

Ведуче кіничне зубчасте колесо 1 і ведене кіничне зубчасте колесо 2 обертаються навколо нерухомих осей. Кіничне зубчасте колесо 3 (сателіт) передає обертання від колеса 1 до колеса 2. Колесо 3 вільно посаджено на вісь OC , що є частиною вигнутого кривошипа AOC , який обертається навколо нерухомої вертикальної осі. При наданні різних кутових швидкостей кривошипу AOC і колесу 1 можна отримати будь-яку кутову швидкість колеса 2. До кривошипа AOC прикладений обертальний момент, до валу колеса 1 – обертальний момент m_1 і до валу колеса 2 – момент корисного опору m_2 .

Колеса 1, 2 і 3 вважатимемо круглими однорідними дисками відповідно вагою P_1, P_2, P_3 і радіусом r_1, r_2 і r_3 ($r_1 = r_2$). Масою кривошипа AOC і силами опору руху можна знехтувати.

Розв'язок. З умови задачі випливає, що верстатний диференціал є системою з двома ступенями свободи. За незалежні узагальнені координати виберемо кут повороту φ_0 кривошипа навколо вертикальної осі AOC і кут повороту φ_1 колеса 1 навколо відповідної нерухомої осі. Кут повороту веденого колеса 2 позначений через φ_2 .

Для обчислення узагальненої сили Q_{φ_0} задамо диференціалу (див. рис. 8.4) можливе переміщення $\delta\varphi_0$ вважаючи, що $\delta\varphi_0 = 0$. Тоді $\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_0$. Обчислимо суму робіт активних сил на можливих переміщеннях, що відповідають можливим переміщенням $\delta\varphi_0$. Маємо $\delta A = m_0\delta\varphi_0 - m_2\delta\varphi_2 = (m_0 - 2m_2)\delta\varphi_0$, отже, $Q_{\varphi_1} = m_1 + m_2$. Аналогічно обчислюємо Q_{φ_2} . Оскільки $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$, то $\delta A = (m_1 + m_2)\delta\varphi_1$. Звідси $Q_{\varphi_2} = m_1 + m_2$.

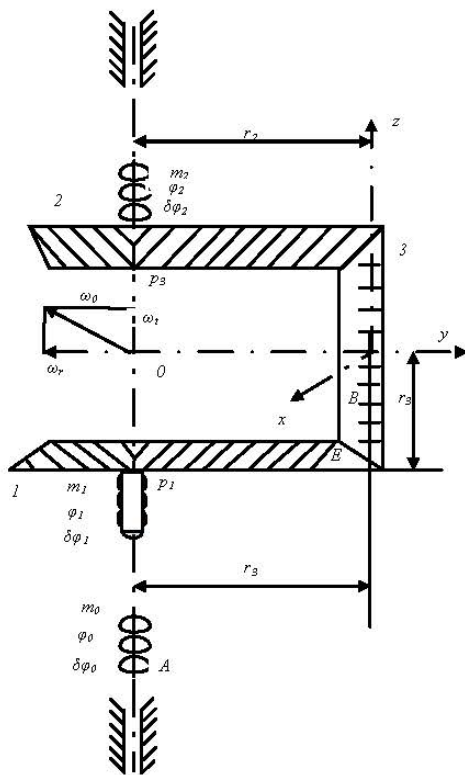


Рисунок 8.3 - Механізм диференціала

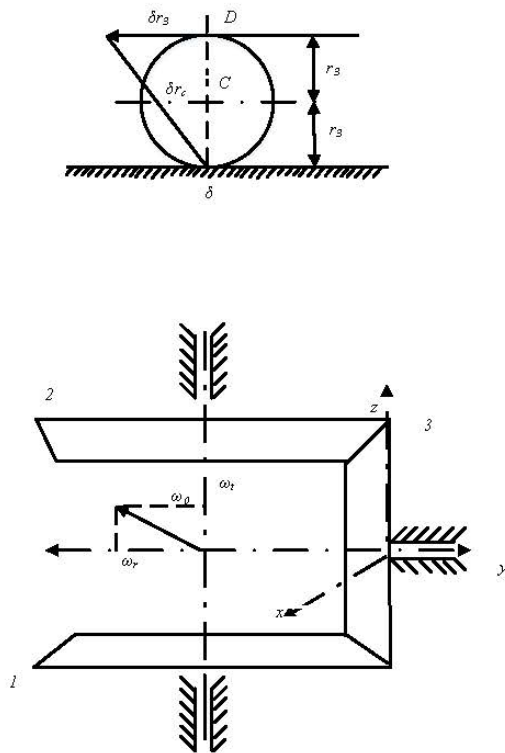


Рисунок 8.4 – Розрахункова схема диференціала

Переходимо до обчислення кінетичної енергії T верстатного диференціала, до складу якого входять три конічних зубчастих колеса 1, 2, 3: $T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}$. У свою чергу $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}_1^2$, $T^{(2)} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}_2^2$, де I_j – момент інерції колеса j щодо його осі обертання ($j = 1, 2$).

Виберемо початок координат в центрі ваги колеса 3. Направимо координатні осі по головних осях інерції колеса 3, тоді

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} (I_{3x} \varpi_x^2 + I_{3y} \varpi_y^2 + I_{3z} \varpi_z^2),$$

де v_c^2 – швидкість центра ваги C колеса 3; $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$ – проекції абсолютної кутової швидкості ϖ_a колеса 3 на рухомі координатні осі x, y, z , з ними жорстко пов'язані осьові моменти інерції I_{3x}, I_{3y}, I_{3z} .

Для обчислення $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$ потрібно визначити абсолютну кутову швидкість ϖ_a колеса 3. Колесо бере участь в переносному обертальному русі з кутовою швидкістю $\varpi_c = \dot{\phi}_0$ навколо вертикальної осі і у відносному обертальному русі з кутовою швидкістю ϖ_r навколо осі симетрії колеса 3.

З рис. 8.4 випливає, що $\frac{\varpi_1^r}{\varpi_3^r} = \frac{r_3}{r_1}$; $\frac{\varpi_3^r}{\varpi_2^r} = -\frac{r_2}{r_3}$, де $\varpi_1^r, \varpi_2^r, \varpi_3^r$ позначають

кутові швидкості коліс 1, 2, 3 щодо кривошипа, що обертається з кутовою швидкістю ϖ_0 .

Оскільки $r_2 = r_1$, то $\varpi_2^r = -\varpi_1^r$. Але $\varpi_2^r = \varpi_2 - \varpi_0$, $\varpi_1^r = \varpi_1 - \varpi_0$, отже, $\varpi_2 = 2\varpi_0 - \varpi_1$, тобто $\dot{\phi}_2 = 2\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}_1$.

Оскільки $\varpi_3^r = \frac{r_1}{r_3} \varpi_2^r = \frac{r_1}{r_3} (\varpi_2 - \varpi_0)$, то $\varpi_3^r = \frac{r_1}{r_3} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0)$.

За теоремою складання обертання твердого тіла $\varpi_a = \varpi_c - \varpi_r$, звідки $\varpi_x = 0$, $\varpi_y = -\varpi_3^r$, $\varpi_z = \varpi_c$ і $\varpi_y = -\frac{r_1}{r_3} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0)$, $\varpi_z = \dot{\phi}_0$. Зауважуючи, що

$v_c = r_1 \dot{\phi}_0$, отримуємо вираз для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} (4I_2 + I_{3z} + \frac{P_3}{g} r_1^2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2}) \dot{\phi}_0^2 + \frac{1}{2} (I_1 + I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2}) \dot{\phi}_1^2 - (2I_2 + I_{3y} \frac{r_1^2}{r_3^2}) \dot{\phi}_0 \dot{\phi}_1.$$

Після підстановки відповідних формул в рівняння Лагранжа маємо

$$\begin{cases} (4I_2 + I_{3z} + \frac{P_3}{g}r_1^2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2})\ddot{\varphi}_0^2 - (2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2})\dot{\varphi}_1^2 = m_0 - 2m_2; \\ (I_1 + I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2})\dot{\varphi}_1^2 - (2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2})\ddot{\varphi}_0^2 = m_1 + m_2. \end{cases}$$

Звідси остаточно

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_0 = \frac{1N + MS}{K1 - M^2}; & K = \frac{1}{4g}(8P_2r_1^2 + P_3(6r_1^2 + r_3^2)); & 1 = \frac{P_1, P_2, P_3}{2g}r_1^2; \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{KS + MN}{K1 - M^2}, & M = \frac{2P_2, P_3}{2g}r_1^2; & N = m_0 - 2m_2; & S = m_1 + m_2. \end{cases}$$

8.1.3 Математичні моделі технічних систем і процесів

У загальному випадку динаміка технічних систем і робочих процесів описується диференціальними рівняннями з частинними похідними або іншими класами рівнянь, що враховують розподіл параметрів системи. Для спрощення математичної моделі будемо розглядати такі постановки задач, які приводять до системи звичайних диференціальних рівнянь або диференціальних рівнянь з постійними запізненнями.

Математичні моделі пружних систем

Завдання 1. Несуча система верстата.

Розрахункову дискретну модель верстата подамо у вигляді системи з п'яти мас (рис. 8.5). На рис. 8.6 подана розрахункова схема бабки вертикального фрезерного верстата.

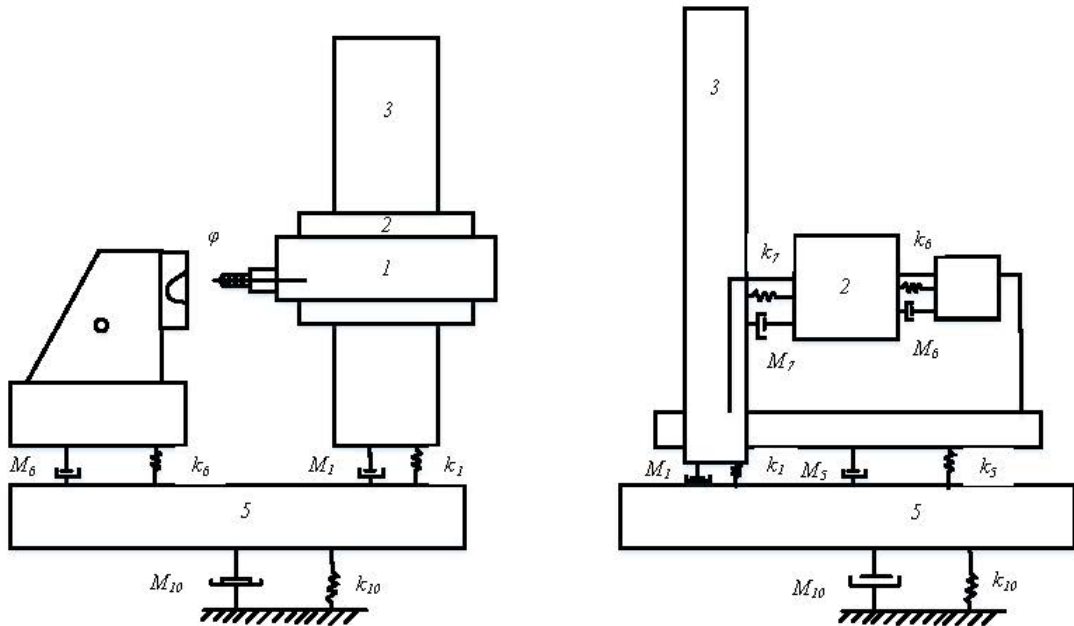


Рисунок 8.5 - Розрахункова схема дискримінанту динамічної моделі фрезерного верстата

Приймаємо абсолютно жорсткими бабку 1, поперечину 2, стійку 3, стіл з опорною стійкою і виробом 4, станину 5. Пружні і демпфувальні зв'язки між рухомими масами 1 і 2, 2 і 3, 4 і 5 визначаються характеристиками напрямних механізмів приводів подач. Зв'язки між стійкою 3 і станиною 5 (K_8, H_8) визначаються характеристиками стику стійка-станина, а між станиною 5 і фундаментом – характеристиками опорних башмаків K_{10}, H_{10} .

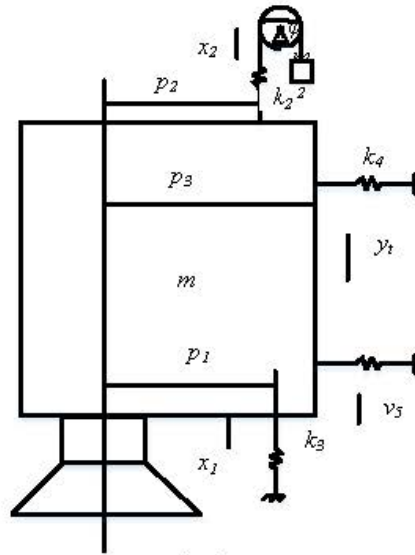


Рисунок 8.6 - Розрахункова схема бабки вертикального фрезерного верстата

Тут m_j, h_j, k_j – відповідно матриці інерційних характеристик, демпфування і жорсткості в j -й точці або зв'язку; a_{jk}, a_{jk}^* – відповідно матриця переносу і транспонована матриця переносу, за допомогою яких встановлюється відповідність між зміщеннями і силовими чинниками, що діють в точках j, i, k ; P_p – матриця сил різання.

Верстат має $(6 \times 5) = 30$ ступенів свободи, і його модель описується 30-ма звичайними диференціальними рівняннями, які у векторно-матричній формі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 & m_1 \ddot{x}_1 + h_6 \dot{x}_1 + a_{1,6}^* k a_{1,6} x_1 - h_6 a_{2,1} \dot{x}_2 - a_{1,6}^* k_6 a_{2,6} x_2 = a_{1,\varphi}^* P_p; \\
 & -h_6 a_{1,2} \dot{x}_1 - a_{2,6}^* k_6 a_{1,6} \dot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + (a_{2,6}^* h a_{2,6} + a_{2,7}^* h_7 a_{2,7}) \dot{x}_2 + \\
 & + (a_{2,6}^* k_6 a_{2,6} + a_{2,7}^* k_7 a_{2,7}) x_2 - h_7 a_{3,2} \dot{x}_3 - a_{2,7}^* k_7 a_{3,7} x_3 = 0; \\
 & -h_7 a_{2,3} \dot{x}_2 - a_{3,7}^* k_7 a_{2,6} x_2 + m_3 \ddot{x}_3 + (a_{3,7}^* h_7 a_{3,7} + a_{3,8}^* h_8 a_{3,8}) \dot{x}_3 + \\
 & + (a_{3,7}^* k_7 a_{3,7} + a_{3,8}^* k_8 a_{3,8}) x_3 - h_8 a_{5,3} \dot{x}_5 - a_{3,8}^* k_8 a_{5,8} = 0; \\
 & m_4 \ddot{x}_4 + h_9 \dot{x}_4 + a_{4,9}^* k_9 a_{4,9} x_4 - h_9 a_{5,4} \dot{x}_5 - a_{4,9}^* k_9 a_{5,9} x_5 = -a_{4,\varphi}^* P_p; \\
 & -h_8 a_{3,5} \dot{x}_3 - a_{3,8}^* k_8 a_{3,8} x_3 - h_9 a_{4,5} \dot{x}_4 - a_{4,9}^* k_9 a_{4,9} x_4 + m_5 \ddot{x}_5 + \\
 & + (a_{5,8}^* h_8 a_{5,8} + a_{5,9}^* h_9 a_{5,9} + a_{5,10}^* h_{10} a_{5,10}) \dot{x}_5 +
 \end{aligned}$$

$$+ (a_{3,8}^* k_8 a_{5,8} + a_{4,9} k_9 a_{5,9} - a_{5,10} k_{10} a_{5,10}) x_5 = 0.$$

Прийняті позначення : ρ_1 – плече пружної сили в ланці k_1 щодо центра інерції; ρ_2 – плече сил пружності в ланці k_2 ; ρ_3 – плече сили тертя на напрямних.

Система складається з двигуна D (задавальна ланка), який має постійну швидкість руху v_k , що пов'язаний за допомогою наведеної жорсткості приводу k_1 з бабкою, яка масою m_1 ковзає по вертикальних напрямних в умовах рідинного змащення. Бабка через гнучкий трос пов'язана з противагою масою m_2 . Наведена жорсткість троса позначена через k_2 , жорсткість напрямних при повороті – через k_φ (див. рис. 8.6).

Тоді система приймає такий вигляд:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - m_1 \rho \ddot{\varphi} + h_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= k_1 v_s t + f_0 + \delta f_0 - Y_t; \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= 0; (i + m_1 \rho) \ddot{\varphi} - m_1 \rho \ddot{x}_1 + h_\varphi \dot{\varphi} + k_\varphi \varphi &= 0; \\ h_1 \dot{Y}_t + Y_t &= f_0 = h x_1 + h_1 h_q \dot{x}_1, \end{aligned}$$

де h_1 – коефіцієнт розсіювання енергії в матеріалі пружини; h – кутовий коефіцієнт нахилу статичної характеристики тертя; h_q – коефіцієнт в'язкого опору; $h_1 = \frac{h_c}{k_y}$ – коефіцієнт опору спливання в рідинному мастилі, k_y – контактна жорсткість; h_φ – коефіцієнт, що характеризує витискування мастильного матеріалу; f_0 – сила тертя, відповідна початковому руху; δf_0 – стрибок сили тертя при переході від спокою до руху; Y_t – сила тертя; v_s – постійна швидкість руху задає ланки; i – момент інерції.

Завдання 3. Шпindelний вузол (рис. 8.7).

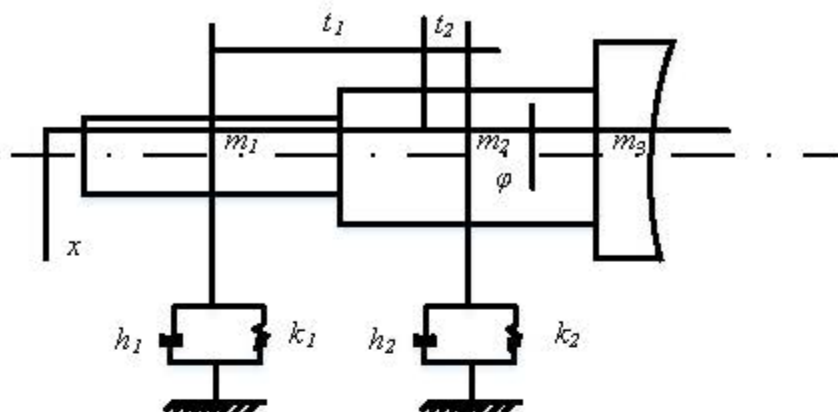


Рисунок 8.7 - Розрахункова схема найпростішого шпindelного вузла

Деформацією шпindelа нехтуємо в порівнянні з деформацією підшипникових опор (тобто вважаємо його абсолютно жорсткою балкою).

Завдання 4. Зубчаста передача приводів головного руху і подач (рис. 8.8).

Рівняння руху мають такий вигляд:

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 = -K_{kp3}(\varphi_3 - \varphi_g);$$

$$I_g \ddot{\varphi}_g = -(K_{kp1} + K_{kp2} + K_{kp3})\varphi_g + K_{kp1}\varphi_1 + K_{kp2}\varphi_2 + K_{kp3}\varphi_3,$$

де φ_j, φ_g ($j=1,2,3$) – кути закручування.

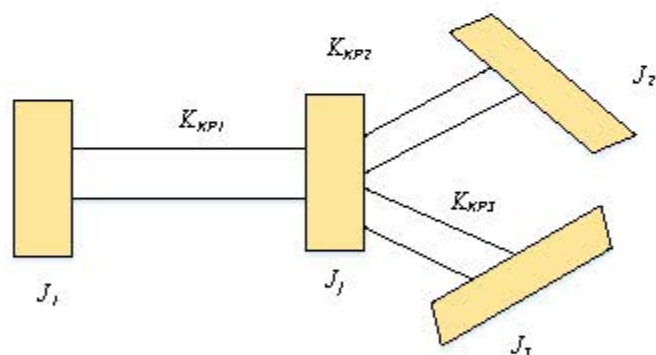


Рисунок 8.8 - Еквівалентна схема триступеневої зубчастої передачі

На рис 8.8 прийнято позначення: I_1, I_2, I_3 – моменти інерції дисків 1, 2, 3; I_g – момент інерції зубчастого колеса; $K_{kp1}, K_{kp2}, K_{kp3}$ – коефіцієнти жорсткості закручування валів 1, 2, 3.

Завдання 5. Електропривод частини верстата (рис. 8.9).

Процес затискання заготовки за допомогою електроприводу може бути розбитий на кілька етапів: перший – від моменту початку затискання до моменту відключення двигуна; другий – від моменту відключення двигуна до зупинки ротора. Наступні етапи відповідають руху елементів системи під дією інерції і пружинки до їх зупинки.

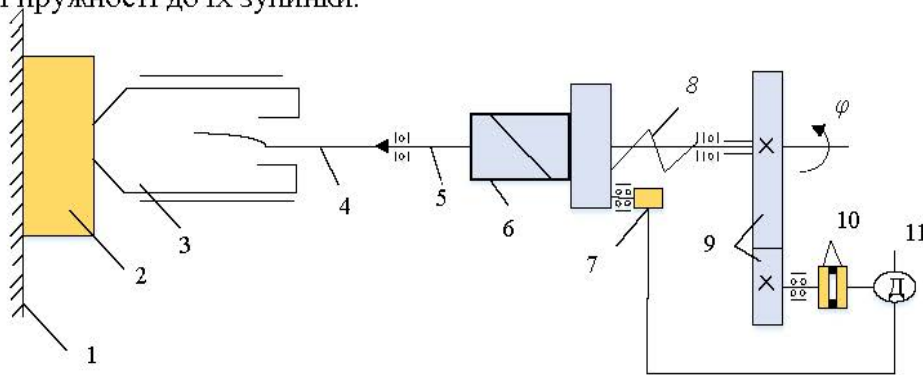


Рисунок 8.9 – Розрахункова схема електромеханічного затискного пристрою

Диференціальні рівняння руху на другому і третьому етапах – $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k_j\varphi = d_j + f_j(t)$, де $j=1,2$ – номери етапів; $k_1 = \frac{C}{I}$, $d_1 = \frac{-M_c}{I}$, $k_2 = \frac{k_{yz}}{I}$, $d_2 = \frac{M_c''}{I}$, I – момент інерції ротора двигуна і наведених до нього мас; k_j – коефіцієнти жорсткості вала; k_{yz} – коефіцієнт жорсткості розкручуваної ділянки валопроводу; M_c' – момент статистичного опору; M_c'' – момент холостого ходу ротора двигуна; f_j – постійно діючі зовнішні збурення, викликані механізмами передачі.

Завдання 6. Маніпулятор.

Розглянемо триланковий неплоский маніпулятор, враховуючи пружність «руки» (рис.8.10).

Вважаємо, що вся маса ланки 3 робота зосереджена в одній точці C_3 – центрі мас ланки 3, яка являє собою пружний стрижень, що має піддатливість тільки на вигин.

За узагальнені координати системи приймемо такі величини: φ_1 – кут повороту ланки 1 щодо стояка; S_2 – переміщення ланки 2 відносно ланки 1; S_3 – переміщення ланки 3 як жорсткого тіла відносно ланки 2; а f_y –

відхилення центра мас ланки за рахунок вигину ланки по осі y ; f_z – відхилення центру мас ланки 3 за рахунок вигину ланки по осі z .

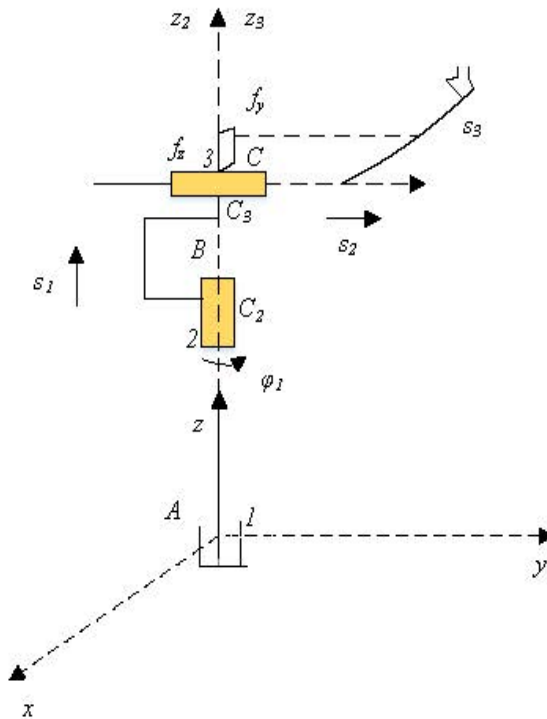


Рисунок 8.10 – Схема триланкового неплоского маніпулятора

Диференціальні рівняння руху механізму мають такий вигляд:

$$(i_{z1} + i_{z2} + i_{z3})\ddot{\varphi}_1 + 2m_3\dot{\varphi}_1\dot{S}_3 + m_3S_3^2\ddot{\varphi}_1 + m_3f_y\dot{S}_3 + m_3S_3\dot{f}_y = Q_{1n} - h_1\dot{\varphi}_1;$$

$$m_3(\ddot{S}_2 + \ddot{f}_z) + m_2\ddot{S}_2 = Q_{1n} - h_2\dot{S}_2 - P_2 - P_3;$$

$$m_3\ddot{S}_3 - m_3(\dot{\varphi}_1 S_3 + \dot{f}_y)\varphi_1 - \frac{9}{2}(f_z^2 - f_y^2)\frac{ei}{S_3^4} = Q_{3n} - h_3\dot{S}_3;$$

$$m_3(\ddot{\varphi}_1 S_1 + \dot{\varphi}_1\dot{S}_3 + \ddot{f}_y) + 3\frac{ei}{S_3^3}f_y = 0; \quad m_3(\ddot{S}_2 + \ddot{f}_z) + 3\frac{Ei}{S_3^3}f_z = 0.$$

Тут P_2, P_3 – сили тяжіння ланок 2 і 3; i_{zj} – приведений момент інерції щодо осі $-j$ -ої ланки; h_j – коефіцієнт дисипативної функції Релея; Q_{jn} – момент j -го приводу; $3Ei = k, S_3^3$, де k – жорсткість ланки 3 на вигин.

Завдання 7. Динаміка стріли екскаватора.

Розглянемо розрахункову схему стріли екскаватора, приймаючи стрижень стріли і підйомний канат абсолютно жорсткими (рис. 8.11).

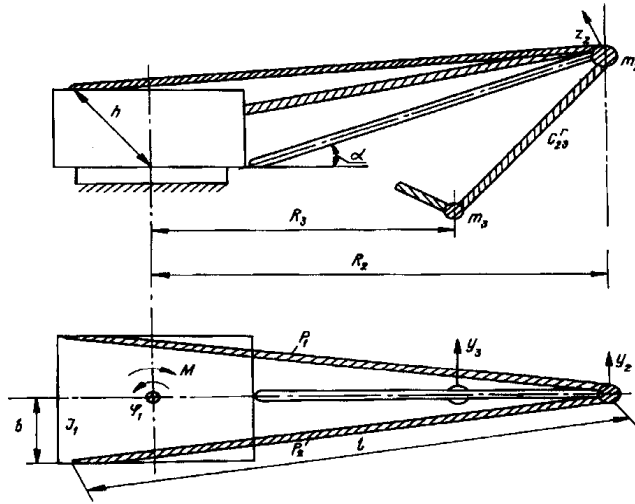


Рисунок 8.11 – Розрахункова схема стріли екскаватора

Рівняння руху стріли екскаватора в горизонтальній площині (у напрямку φ_1, y_2, y_3) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} -i_1 \ddot{\varphi}_1 + (P_2 - P_1) \frac{b}{l} r_2 - M &= 0; \\ -m_2 (r_2 \ddot{\varphi}_1 + \ddot{y}_2) - (P_2 - P_1) \frac{b}{l} + C_{23}^r (y_3 - y_2) &= 0; \\ -m_3 (r_3 \ddot{\varphi}_1 + \ddot{y}_3) - C_{23}^r (y_3 - y_2) &= 0, \end{aligned}$$

де i_1 – момент інерції поворотної частини екскаватора без ковша і маси, зосередженої у кінця стріли; C_{23}^r – коефіцієнт жорсткості каната; $\ddot{\varphi}_1$ – кутове прискорення поворотної частини екскаватора в горизонтальній площині; P_2, P_1 – зусилля в гілках підвіски b, l, r_2, r_3 – лінійні розміри екскаватора; M – момент, що діє на поворотну частину екскаватора; m_2 – маса, зосереджена у кінця стріли; \ddot{y}_k – прискорення ковша в горизонтальній площині у напрямку y_k ($k = 2, 3$).

Для вертикальних коливань кінця стріли в напрямку осі ординат одержимо рівняння $\ddot{z}_2 + \frac{h(P_1 + P_2)}{l(m_2 + m_3)} = g \eta \cos \alpha$, де g – прискорення вільного падіння; η – коефіцієнт, що враховує тертя в поліспасти; m_3 – маса вантажу.

Математичні моделі робочих процесів

Робочі процеси різання, тертя і приводів руху розглядаються як фізико-механічні та теплофізичні процеси гнучко-пластинчатого деформування і

руйнування, електро-, пневмо- і гідродинамічні процеси, які використовують пружні системи.

Завдання 8. Процес різання (рис. 8.12).

Узагальнена лінійна модель процесу різання (без урахування теплофізики процесу має вигляд: $P + T_p D = K_p a + h_p \dot{a}$, де T_p – постійна стружкоутворення; K_p – усталений коефіцієнт різання; h_p – коефіцієнт в'язкого тертя процесу різання; a – зміна товщини зрізаного шару).

Рівняння систем в загальному випадку нестационарні, з розподіленими параметрами.

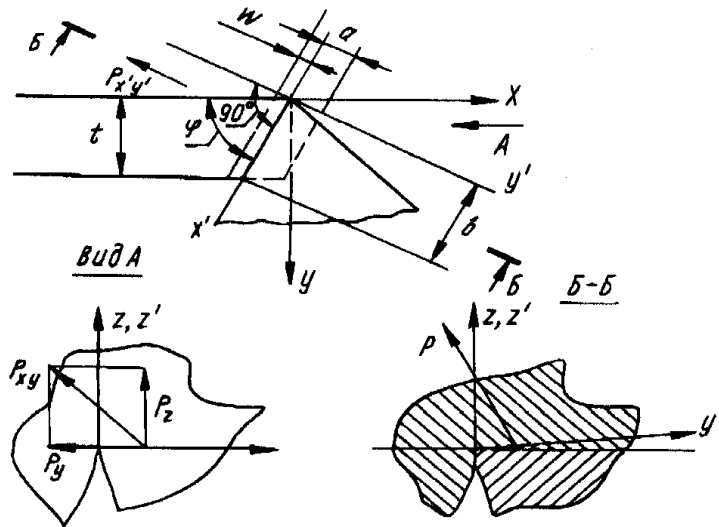


Рисунок 8.12 – Геометричні параметри зрізаного шару: t – глибина різання; b – ширина зрізаного шару (пропорційна t); z – товщина шару, що зрізається (пропорційна подачі); P – сила різання. ($P = (P_x, P_y, P_z)^*$)

Завдання 9. Процес тертя.

Рух столу шліфувального верстата зі швидкісним зв'язком (рис. 8.13) визначається системою рівнянь (рівняння у відхиленнях в системі координат, пов'язаній з тілом)

$$m\ddot{x} + h_x \dot{x} + k_x x = f; \quad m\ddot{y} + h_y \dot{y} + k_y y = q,$$

де q – підйомна гідродинамічна сила; f – сила тертя; m – маса повзуна або столу; k_x – жорсткість пружного елемента, що утримує повзун або стіл в напрямку осі x ; k_y – жорсткість системи по осі y – коефіцієнт сил опору по осі y (охоплює

сили в'язкого тертя мастила і демпфірувальні сили у з'єднаннях приводного упружного елемента); k_y – коефіцієнт сил опору по осі y .

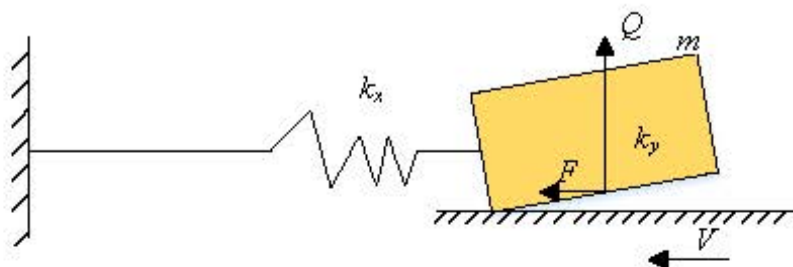


Рисунок 8.13 – Розрахункова схема еквівалентної пружної схеми зі швидкісним (гідродинамічним) зв'язком.

Для рідинного тертя $f = -k_{ж}v_0y$, де $k_{ж}$ – деякий постійний коефіцієнт. Для змішаного тертя $f = -(k_T + k_{ж}V_0)y$, де k_T – статистична характеристика контактного тертя, причому $k_{ж}V_0 \ll k_T$.

Завдання 10. Електропривод верстатів постійного струму незалежного збудження.

Динамічну характеристику електродвигуна постійного струму незалежного збудження визначають з рівняння

$$T_\theta T_M \ddot{M}_D + T_M \dot{M}_D + M_D = M_C,$$

де T_θ – електромагнітна стала часу якорного ланцюга; $T_M = i \frac{\Delta \varpi}{\Delta M_g}$ – механічна

постійна часу приводу (i – момент інерції ротора і наведених до нього ведених частин приводу; ϖ – кутова швидкість обертання валу двигуна); M_D – обертальний момент вала; M_C – момент опору на валу двигуна.

Завдання 11. Електромеханічна система вібратора.

Динаміка електромеханічної системи задається наступною системою рівнянь (рис. 8.14):

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = bi ; \quad l \frac{di}{dt} + Ri + \bar{v} = v(t); \quad \frac{m}{b^2} \dot{v} + \frac{h}{b^2} v + \frac{k}{b^2} \int v dt = i,$$

де i – струм; $v = b\dot{x}$ – проти-ЕРС; $b = Blr$ – коефіцієнт зв'язку за моментом, B – магнітна індукція; R – повний опір витка; L – індуктивність котушки; $\bar{v}(t)$ – напруга, прикладена до котушки; k – жорсткість пружини.

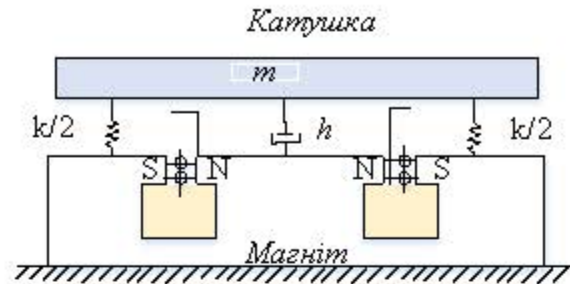


Рисунок 8.14 – Електромеханічна система

Програмні керування

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{x}_j + f_j(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), i = \overline{1, n}. \quad (8.23)$$

Тут вектор-функцію $u = u(t)$ розмірності n назвемо програмним керуванням. При цьому будемо вважати, що при кожному допустимому керуванні на $[0, T]$, тобто такому, для якого інтеграл $\int_0^T u^*(r)u(r)dr$ обмежений, для системи (8.23) виконано умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Задача програмного керування полягає у пошуку допустимого керування $u(t)$, при якому система (8.23) має розв'язок $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^*$ що задовольняє умову

$$x(0) = x^1, \quad x(T) = x^2. \quad (8.24)$$

де x^1, x^2 – задані вектори.

Якщо таке керування існує, то його називаємо програмним, а пару точок (x^1, x^2) – керуючою на $[0, T]$ парою. Система називається повністю керованою на $[0, T]$, якщо кожна пара точок (x^1, x^2) керована на $[0, T]$. Загальних способів пошуку програмних керувань для системи (8.23) немає.

Розглянемо лінійну систему

$$\dot{x}(t) = a(t)x + b(t)u + f(t). \quad (8.25)$$

Тут елементи матриць $a(t), b(t)$ і вектора $f(t)$ задані і неперервні на $[0, T]$.

Система (8.25) повністю керована на $[0, T]$ тоді і тільки тоді, коли матриця

$$P(t) = \int_0^T MM^* dt, \text{ де } M = y^{-1}B - \text{ не особлива, а } y(t) - \text{ фундаментальна матриця}$$

системи $\dot{x} = Ax$. При цьому вся множина програмних керувань задається

формулою $u = M^*C + v$. Інтеграл $\int_0^T u^* u dt$ обмежений і $\int_0^T Mv dt = 0$,

$$C = P^{-1}(T) \left[y^{-1}(T) x^{-1} - \int_0^T y^{-1}(r) f(r) dr - x^0 \right].$$

Приклад 1. Чи буде керованим на $[0, T]$ пара точок для системи $\ddot{x} + u\dot{x} = 0$ з початковими граничними умовами

$$\text{а) } \begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(1) = 0 \\ \dot{x}(1) = 1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(1) = 2 \\ \dot{x}(1) = 1 \end{cases}.$$

Розв'язання. Система інтегрується:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -u dt, \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(0) u(t), \quad V(t) = e^{-\int_0^t u(r) dr}, \quad x(t) = x(0) + \dot{x}(0) \int_0^t V(\xi) d\xi.$$

З крайових умов отримуємо: $x = 1 + \int_0^t V(\xi) d\xi$, $\dot{x}(1) = V(1)$.

Помічаємо, що $V(T) > 0$, тому $x(t) > 1$. Таким чином, у випадку а) пара точок некерована, у випадку б) – керована.

Приклад 2. Побудувати всі програмні керування і виділити серед них ті що задовольняють умову:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + e^t u, \end{cases} \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; T = 4\pi; u(t) > 0.$$

Розв'язання. Записуємо

$$y(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}; \quad M = y^{-1} b = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$P(4\pi) = \int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 t & -\sin t \cos t \\ -\sin t \cos t & \cos^2 t \end{pmatrix} dt = 2\pi e,$$

$$\text{де } e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = p^{-1}(4\pi)y^{-1}(4\pi) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-e^{4\pi}}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$M^*C = \frac{e^{-4\pi}}{2\pi}(\sin t - \cos t);$$

$$u(t) = \frac{e^{-4\pi}}{2\pi}(\sin t - \cos t) + v(t); \quad \int_0^{4\pi} v(t) \cos t dt = \int_0^{4\pi} v(t) \sin t dt = 0.$$

Для того щоб задовольнити умову $u(t) \geq 0$, можна взяти $v(t) = v_0$,

$$\text{де } v_0 = \frac{e^{-4\pi} \sqrt{2}}{2\pi}.$$

Аналогічна задача керування виникає і для системи різницевих рівнянь:

$$x(k+1) = a(k)x(k) + b(k)u(k) + f(k) \quad (8.26)$$

з початковими граничними умовами: $x(0) = x^1, x(m) = x^2$.

Система (8.26) повністю керована на $[0, T]$ тоді і тільки тоді, коли ранг матриці $S = \{b(m-1), a(m-1)b(m-2), a(m-1)(m-2)b(m-3), \dots, a(m-1), \dots, a(1)b(0)\}$ дорівнює n .

Якщо матриці $a(k)$ і $b(k)$ не залежать від k , то $S = (b, ab, \dots, a^{n-1}b)$.

Помітимо, що якщо система (8.25) повністю керована на $[0, T]$, то для кожної пари точок серед (x^1, x^2) програмних керувань існує кусково-постійне представлення.

8.1.4 Стійкість за Ляпуновим програмних рухів

Нехай дана система звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{X} = f(x, t), \quad (8.27)$$

де \dot{X} – вектор; $f(x, t)$ вектор-функція розмірності n .

Нехай відомо деякий розв'язок цього диференціального рівняння $x = \bar{x}(t)$, визначений при $t_0 \geq 0$. Цей розв'язок назвемо незбуреним програмним рухом, а будь-який інший, відмінний від нього, збуреним.

Незбурений рух $x = \bar{x}(t)$ називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$ і будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таким, що при $\|x - \bar{x}\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ буде $\|x(t, x_0, t_0) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, де $x(t_0, x_0) = x_0$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}$.

Геометрична стійкість за Ляпуновим означає, що як завгодно вузька ε -область розв'язку містить всі розв'язки $\bar{x}(t)$, які в початковий момент знаходились від \bar{x}_0 не більше, ніж на δ .

Важливо відмітити, що має сенс говорити тільки про стійкість певного розв'язку $\bar{x}(t)$, а не всіх розв'язків рівняння (8.27).

Приклад. Загальний розв'язок рівняння

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{2} \left[x^2(t) + \sqrt{x^4(t) + 4\dot{x}^2(t)} \right] x(t)$$

має вигляд $x(t) = c \sin(ct + d)$, де c і d – випадкові постійні. Розв'язок рівняння $x(t) \equiv 0$ стійкий за Ляпуновим, оскільки $x(t) \equiv 0$, якщо початкові умови $x_0(t_0) = c \sin(ct_0 + d)$ і $\dot{x}_0(t_0) = c^2 \cos(ct_0 + d)$ достатньо малі. Будь-який інший розв'язок $\bar{x}(t) = c_1 \sin(c_1 t + d)$ ($c_1 \neq 0$) нестійкий. Насправді завжди існує такий розв'язок $\bar{x}(t) = c_1 \sin(c_1 t + d)$, для якого $c_2 \neq 0$ та відношення частот $\frac{c_2}{c_1}$ ірраціональне. Для таких розв'язків $\sup |x(t) - \bar{x}(t)| = |c_1| + |c_2|$, $t \in (0, \infty)$ незалежно від $t_0, \bar{x}_0, \bar{\dot{x}}, x(t_0), \dot{x}(t_0)$. Таким чином, розв'язок $x(t), \bar{x}(t)$ розбігається на кінцеву величину $|c_1| + |c_2| \neq 0$ незалежно від близькості початкових умов.

Варто зауважити, що для лінійних рівнянь стійкість одного розв'язку тягне за собою стійкість будь-якого іншого розв'язку і можна говорити про **стійкість системи в цілому**.

Незбурений рух (рис. 8.15) називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він стійкий за Ляпуновим і до того ж величину $\delta(t_0, \varepsilon)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вибрати так, що $|x(t, x_0, t_0) - \bar{x}(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

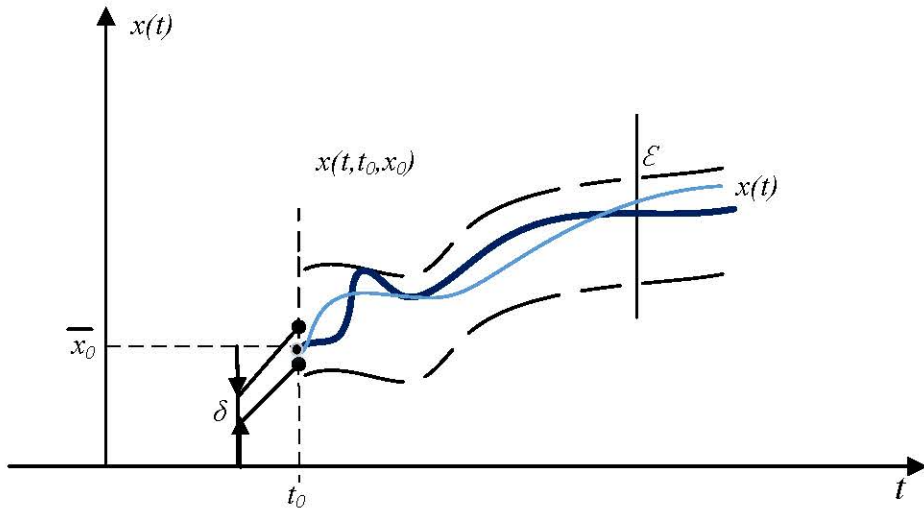


Рисунок 8.15 - Стійкість по Ляпунову незбуреного руху

Якщо виконується лише друга умова, то говорять, що програмний рух є притягувальним. З притягування не впливає стійкість. Але для скалярного звичайного диференціального рівняння притягування завжди призводить до стійкості.

Виконаємо в системі (8.27) перетворення координат по формулі

$$x(t) = y(t) + \bar{x}(t),$$

де $y(t)$ – нова шукана вектор-функція.

В результаті отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = f(y + \bar{x}(t), t) - f(\bar{x}(t), t). \quad (8.28)$$

Система (8.28) має розв'язок (положення рівноваги) $y \equiv 0$. Якщо цей розв'язок прийняти за незбурений рух, то нульовий розв'язок $y = 0$ називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $t \geq 0$ і будь-якого $\varepsilon > 0$, можна вказати таке $\delta(\varepsilon, t) > 0$, що при $\|y_0\| < \delta$ буде $\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, причому $y(t_0, y_0, t_0) = y_0$.

Стійкість лінійних систем

Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\dot{x} = a(t)x + f(t), \quad (8.29)$$

де елементи матриці $a(t)$ і вектора $f(t)$ задані і неперервні на $[0, \infty]$.

Система (8.29) стійка за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли обмежені на $[0, \infty]$ елементи її фундаментальної матриці $y(t)$ ($y(0) = E$).

Розглянемо систему однорідних рівнянь

$$\dot{x} = a(t)x. \quad (8.30)$$

Система (8.30) називається експоненціально стійкою, якщо знайдуться такі додатні константи $\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2$, що

$$\alpha_1 \|x_0\| e^{\alpha_1(t-t_0)} < \|x(t, x_0, t_0)\| < \alpha_2 e^{\alpha_2(t-t_0)}.$$

Якщо матриця $a(t)$ постійна, то асимптотична стійкість системи (8.30) еквівалентна експоненціальній.

Система (8.29) при $a = \text{const}$ асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли всі власні числа матриці мають від'ємні дійсні частини.

Розглянемо характеристичний поліном матриці A :

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = p(\lambda). \quad (8.31)$$

Будемо говорити, що багаточлен $p(\lambda)$ є стійким, якщо всі його корені λ_j мають від'ємні дійсні частини, тобто $\text{Re } \lambda_j < 0, j = \overline{1, n}$. Зв'яжемо з багаточленом $p(\lambda)$ два дійсних багаточлена $g(\lambda)$ і $h(\lambda)$ за формулою $p(i\lambda) = g(\lambda) + ih(\lambda)$.

Теорема Ерміта – Білера. Багаточлен $p(\lambda)$ тоді і тільки тоді стійкий, коли корені багаточленів g і h дійсні, прості, чергуються і хоча б для одного дійсного $\bar{\omega}_0$ виконується умова

$$g(\bar{\omega}_0)h'(\bar{\omega}_0) - g'(\bar{\omega}_0)h(\bar{\omega}_0) > 0.$$

Для багаточлена $p(\lambda)$ з дійсними коефіцієнтами ця нерівність рівносильна нерівності $a_{n-1}a_n > 0$.

Для стійкості багаточлена $p(\lambda)$, який не має чисто уявних коренів, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{2}{\pi} \Delta \arg p(i\bar{\omega}) \Big|_{\substack{\bar{\omega} = \infty \\ \bar{\omega} = 0}} = n, \quad \text{tg } \arg p(i\bar{\omega}) = \frac{h(\bar{\omega})}{g(\bar{\omega})}.$$

Спираючись на теорему Ерміта – Білера, англійський математик і механік Е. Раус сформулював зручний алгоритм, що дозволяє перевірити стійкість будь-якого багаточлена за кінцеве число кроків. Незалежно від Е. Рауса німецький математик А. Гурвіц дав розв'язок задачі стійкості у вигляді нерівностей.

Теорема (критерій Рауса – Гурвіца). Корені дійсного багаточлена $p(\lambda)$ мають від’ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли будуть додатні всі головні мінори матриці

$$r = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \det \Gamma > 0.$$

Відзначимо, що у стійкого багаточлена всі коефіцієнти додатні (теорема Стодоли). Зворотнє твердження неправильне: багаточлен має додатні коефіцієнти, але серед його коренів два мають додатні дійсні частини. Як приклад розглянемо багаточлен $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 40$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0, \Delta_3 = a_3 > 0.$$

Ці умови вперше отримав І. А. Вишнеградський.

Нехай тепер матриця $a(t)$ буде $\bar{\omega}$ – періодичною.

Теорема. Для асимптотичної стійкості системи (8.29) необхідно і достатньо, щоб корені рівняння $\det(\lambda E - y(\bar{\omega})) = 0$ лежали всередині центрального одиничного кола, тобто $|\lambda_i| < 1$, де $y(t)$ – фундаментальна матриця розв’язків системи (8.29).

Для матриці системи лінійних різницевих рівнянь

$$x(k+1) = a(k)x(k) \quad (8.32)$$

справедлива така теорема.

Теорема. Система (8.32) стійка за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли елементи її фундаментальної матриці $y(k)$ обмежені при $k > 0$. Для асимптотичної стійкості необхідно і достатньо, щоб всі власні числа були за модулем менше одиниці.

Теорема (критерій Шура – Кона). Нехай $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$. Зворотний до нього поліном $p^*(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$. Корені полінома $p(\lambda)$ будуть за модулем менше одиниці тоді і тільки тоді, коли будуть додатні всі головні мінори матриці r , отриманої таким чином:

$$\frac{p^*(x)P^*(y) - p(x)p(y)}{1 - xy} = (1, x, \dots, x^{n-1})r \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Візьмемо багаточлен $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$, для якого виконується тотожність

$$\begin{aligned} \frac{p^*(x)P^*(y) - p(x)p(y)}{1 - xy} &\equiv \frac{1}{1 - xy} [x^2y^2(a_2^2 - 1) + x^2y(a_1a_2 - a_1) + \\ &+ xy^2(a_1a_2 - a_1) + (a_1 - a_1a_2) + a_1x + y(a_1 - a_1a_2) + (1 - a_2^2)] = \\ &= (1 - a_2) + [(1 + a_2) + a_1y + (1 + a_2^2)xy] = (1, x) \begin{pmatrix} (1 - a_2)(1 + a_2) & (1 - a_2)a_1 \\ (1 - a_2)a_1 & (1 - a_2)(1 + a_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}; \\ \Delta_1 &= (1 - a_2) > 0, \Delta_2 = (1 - a_2)^2((1 + a_2)^2 - a_1^2) > 0. \end{aligned}$$

Остаточно, якщо виконуються нерівності $|a_2| < 1$, $|a_1| < 1 + a_2$ то всі корені багаточлена $P(\lambda)$ лежать в центральному одиничному колі.

Нехай система рівнянь (8.28) має вигляд $\dot{y} = P(t)y + f(t, y)$, де $f(t, y)$ задовольняє умову Ліпшиця за змінними.

Теорема (Ляпунов). Нехай система $\dot{y} = P(t)y$ експоненціально стійка, $\|f(t, y)\| \leq \alpha(\varepsilon)\|y\|$ при $t \geq 0$ і $\|y\| \leq \varepsilon$, тоді нульовий розв'язок системи (8.28) асимптотично стійкий.

Нехай задана система різницевих рівнянь вигляду

$$y(k+1) = P(k)y(k) + q(k, y(k)). \quad (8.33)$$

Теорема. Якщо $y(k+1) = P(k)y(k)$ експоненціально стійка і $\|q(k, y(k))\| \leq \beta(\varepsilon)\|y\|$ при $k \geq 0$ і $\|y\| < \varepsilon$ при $k \geq 0$ $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, то нульовий розв'язок системи (8.33) асимптотично стійкий.

Існує метод визначення стійкості стаціонарної системи $\dot{x} = ax$, не пов'язаний з власними значеннями. Виявляється, всі власні числа матриці

лежать в лівій півплощині тоді і тільки тоді, коли всі власні числа матриці $b = (a - E)^{-1}(a + E) = E + 2(a - E)^{-1}$ лежать в центральному одиничному колі. Для практичної перевірки останньої умови перевіряють $\|b^{2k}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, що відповідає стійкості матриці a .

8.1.5 Стабілізація програмних рухів

Нехай поведінка технічної системи описується векторним звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(t, y, \bar{w}), y(0) = y_0, \quad (8.34)$$

де $y, y_0 \in r^n$ – вектори поточного і початкового стану системи; $\bar{w} \in r^r$ – вектор керувальних впливів.

Візьмемо програмний (незбурений) розв'язок $y = y_0(t)$, що відповідає програмному початковому стану $y_0 = y_{0p}$ і деякому програмному керуванню $\bar{w} = \bar{w}_p(t)$. Візьмемо також відхилення збуреного розв'язку і керування від програмного

$$x = y - y_p(t), u = \bar{w} - \bar{w}_p(t). \quad (8.35)$$

Рівняння у відхиленнях має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x, u), x(0) = x_0. \quad (8.36)$$

Оскільки $g(t, 0, 0) = 0$, то завдання вивчення розв'язка в околі виділеного програмного зводиться до задачі вивчення розв'язку рівняння (8.36) в околі положення рівноваги $x=0, u=0$. Координати вектора керування зазвичай називають входами системи. Під виходами системи розуміють координати доступного вимірюванню вектора η , що є функцією стану X . Якщо на входи системи подаються керування залежно від виміряних сигналів виходів, то говорять про керування за принципом зворотного зв'язку X . Якщо в кожен момент часу виміру доступні всі координати вектора стану системи $u = u(t, x)$ то кажуть, що керування побудовано за принципом повного зворотного зв'язку.

Сформулюємо класичну задачу стабілізації програмного режиму (руху, процесу) рівняння (8.34) керуванням, побудованим за принципом повного зворотного зв'язку: потрібно побудувати керування $u(t, 0) = 0$, при якому всі

розв'язки рівняння (8.36), що починаються в досить малому околі нуля, зменшуються за експоненціальним законом.

Керування, які вирішують завдання стабілізації, будемо називати стабілізуючими. Якщо існує хоч одне таке керування, то рівняння (8.36) будемо називати стабілізуючим. Виділимо в рівнянні (8.36) члени, лінійні відносно x і u , тоді отримаємо

$$\dot{x} = a(t)X + b(t)u + H(t, x, u), \quad (8.37)$$

де $\|H(t, x, u)\| < l(\|x\| + \|u\|)^{1+a}$, причому $a = \text{const} > 0$, $l = \text{const}$.

Припустимо, що при керуванні $u = M(t)x$, нульовий розв'язок системи $\dot{X} = a(t)x + b(t)u$ експоненціально стійкий за Ляпуновим. Тоді розв'язок $X = 0$ системи (8.37) асимптотично стійкий.

Неперервна стабілізація лінійних стаціонарних систем

Розглянемо стаціонарну лінійну систему

$$\dot{X} = aX + bu. \quad (8.38)$$

Потрібно побудувати керування $u = M^*X$ з $[r \times n]$ матрицею M^* , при якому всі розв'язки $X(t)$ системи (8.38) будуть зменшуватися за експоненціальним законом.

Введемо матрицю $S = (b, ab, \dots, a^{n-b})$. Якщо $\text{rank}(S) = n$, то система (8.38) називається *повністю керованою*. У цьому випадку керування $u = M^*X$ можна вибрати так, щоб матриця $a + bM^*$ замкненої системи мала наперед задані власні числа.

Припустимо для простоти, що $r = 1$, тобто є один керувальний орган. Задасмо набором комплексних чисел $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, які лежать в лівій напівплощині, і розташовані симетрично щодо дійсної осі,

Побудуємо поліном

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1} \lambda + q_n,$$

коефіцієнти якого визначимо за формулами Вієта.

З рівняння

$$S \begin{pmatrix} P_n \\ \vdots \\ P_1 \end{pmatrix} = -a^n b$$

знайдемо числа P_1, \dots, P_n .

Шукані коефіцієнти передачі визначимо із системи

$$TS^*M = \begin{pmatrix} P_1 & -q_1 \\ \dots & \dots \\ P_n & -q_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ P_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{n-1} & P_{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Механізм вирішення завдання стабілізації в разі $r > 1$ той же, однак зі зростанням r різко зростає кількість обчислень, а формули для коефіцієнтів передачі (тобто матриці M) стають занадто громіздкими.

Зауважимо, що якщо відомі власні числа системи, то майже завжди відома і фундаментальна матриця розв'язків, а отже, можна побудувати програмне керування $u = u(t)$, яке стабілізує систему (8.38).

Умова повної керованості, взагалі кажучи, занадто жорстка для стабілізованості системи. Дійсно, нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ власні числа матриці. Припустимо, що серед них є k в точності таких, у яких дійсні частини невід'ємні. Тоді лінійним перетворенням над шуканими функціями лінійну систему (8.38) можна привести до вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_+ x_1 + b_1 u; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_- x_2 + b_2 u, \end{cases}$$

де a_+, b_1, x_1 – розмірності k , a_-, b_2, x_2 – розмірності $n-k$. Матриця a_+ має власні числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ з невід'ємними дійсними частинами, а матриця a_- – тільки з від'ємними.

Необхідною і достатньою умовою стабілізованості є лінійна незалежність векторів $b_1, a_+ b_1, \dots, a_+^{k-1} b_1$.

Значимо ще один спосіб (більш простий з обчислювальної точки зору) побудови стабілізуючого керування.

Розглянемо систему (8.38). Будуємо матрицю $a = -(a + \beta E)$, де $\beta = S_{\max} \sum_{j=1}^n |a_{jk}| (\{a_{jk}\} = a, S > 1)$, $1 \leq k \leq n$.

Далі розглянемо рівняння Ляпунова: $aZ + Za^* = -2bb^*$.

Якщо матриця Z – його розв'язок, то беремо $M^* = b^* z^{-1}$. При цьому

$$\operatorname{Re} \lambda_j(a + bM^*) = -\beta, j = 1, \dots, n.$$

Цей метод застосовується, якщо достатньо, щоб корені характеристичного полінома замкненої системи розташовувалися в лівій півплощині (при цьому неважливо, які значення вони приймають).

Стабілізація різницевої системи

Розглянемо керовану систему лінійних стаціонарних різницевої рівнянь: $x(k+1) = ax(k) + bu$, $k = 0, 1, \dots$, де a, b – матриці тих же розмірностей, що й в системі (8.38). Потрібно побудувати стабілізуюче керування $u = M^* x(k)$, $k = 0, 1, \dots$, при якому будь-який розв'язок вихідної системи задовольняє нерівність

$$\|x(k)\| < \alpha \rho^k \|x(0)\|, k = 0, 1, \dots$$

при деяких $\alpha > 0$ і $0 < \rho < 1$.

Ця нерівність аналогічна нерівностям експоненціальної стійкості неперервних систем. Якщо в неперервному випадку керування треба було обирати так, щоб власні числа замкненої системи лежали в лівій півплощині, то в дискретному випадку необхідна належність власних чисел одиничному колу з центром в початку координат. Побудова стабілізуючого керування аналогічна випадку неперервних систем. Послідовність для випадку $r = 1$:

1. Побудувати матрицю $S = (b, ab, \dots, a^{n-1}b)$.

2. Якщо $\operatorname{rank}(S) = n$, то система повністю керована і можливо однозначно

розв'язати систему $S \begin{pmatrix} P_n \\ \vdots \\ P_1 \end{pmatrix} = -A^n B$.

3. Задатися набором комплексних чисел, симетричних щодо дійсної осі, за модулем меншим одиниці: $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

Побудувати поліном

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1} \lambda + q_n$$

4. Побудувати матрицю $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

5. Вектор M визначити з рівняння $TS^*M = \begin{pmatrix} P_1 - q_1 \\ \dots \\ P_n - q_n \end{pmatrix}$.

Приклад. Досліджувати, залежно від параметра β , стабілізованість системи і побудувати стабілізуювальне керування різницевого рівняння, при якому власні числа дорівнюють $\frac{1}{2}$.

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\beta & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u;$$

$$ab = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^2b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^3b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta(1-\beta) \end{pmatrix}.$$

Щоб $\text{rank}(S)$ дорівнював 4, потрібно вимагати, щоб $\beta \neq 0, \beta \neq 1$.

Візьмемо, наприклад, $\beta = 2$, тоді $-A^4B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Із системи $S \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ знаходимо $P_1 = -1; P_2 = -1; P_3 = 4; P_4 = 2$.

Будуємо поліном $q(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^4 = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}$, звідки отримуємо

$$q_1 = -2; \quad q_2 = \frac{3}{2}; \quad q_3 = -\frac{1}{2}; \quad q_4 = \frac{1}{16}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad TS^* \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{31}{16} \end{pmatrix}.$$

Отже, $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{3}{2}$, $m_3 = 2$, $m_4 = -\frac{7}{32}$ і шукане керування має вигляд

$u = \left(1, -\frac{3}{2}, 2, -\frac{7}{32}\right)x(k)$. Система, замкнена цим керуванням, буде наступною:

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{25}{32} \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X(k). \quad (8.39)$$

Неважко перевірити, що власними числами матриці системи будуть числа $\lambda_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}$.

Оптимальна стабілізація

Розглянемо лінійну керовану систему, описану векторним диференціальним рівнянням

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)u. \quad (8.40)$$

Введемо в розгляд множину матриць $\{M(t)\}$ такої розмірності, що система $\dot{X} = (A(t)X + B(t)M^*(t))X$ буде експоненціально стійкою.

У цьому випадку керування

$$u(t, x) = M^*(t)X \quad (8.41)$$

буде стабілізуючим.

Припустимо, що система (8.40) стабілізована.

Якість стабілізуючого керування оцінимо за допомогою функціонала

$$I(x_0, u) = \int_0^{\infty} \left(X^* P(t) X + 2 X^* Q(t) u + u^* R(t) u \right) dt,$$

де матриці P, Q, R обмежені на $(0, \infty)$ і R, P – симетричні, додатно визначені.

Стабілізуюче керування $u^0(t, x) = M_0^*(t) X$ назвемо оптимальним, якщо для $u(t, x)$ будь-якого стабілізуючого керування будь-якого X_0 виконана нерівність $I(x_0, u^0) \leq I(x_0, u)$.

Завдання оптимальної стабілізації: визначити умови існування оптимального розв'язку.

Теорема. Для того, щоб існувало оптимальне стабілізуюче керування (8.40), необхідно і достатньо, щоб матричне рівняння Ріккати

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \theta \left[a(t) - b(t)r^{-1}(t)q^*(t) \right] + \left[a^*(t) - q(t)r^{-1}(t)b^*(t) \right] \theta - \\ - \theta b(t)r^{-1}(t)\theta + P(T) - q(t)r^{-1}(t)q^*(t) = 0 \end{aligned} \quad (8.42)$$

мало розв'язком симетричну матрицю $\theta(t)$ з обмеженими на $[0, \infty)$ компонентами, таку, що керування

$$u = -r^{-1}(t) \left[q^*(t) + b^*(t)\theta(t) \right] X \quad (8.43)$$

було стабілізуючим.

Якщо матриця $\theta(t)$ задовольняє умови теореми, то керування (8.43) є оптимальним стабілізуючим.

Якщо матриці a, b, p, q і r не залежить від t , то шуканий розв'язок $\theta(t)$ рівняння (8.42) не залежить від t . У цьому випадку можна замість рівняння (8.42) розглядати алгебраїчне рівняння Ріккати

$$\theta \left[a - br^{-1}q^* \right] + \left[a^* - qr^{-1}b^* \right] \theta - \theta br^{-1}b^* \theta + P - qr^{-1}q^* = 0. \quad (8.44)$$

Існують різні методи розв'язання рівнянь (8.42) або (8.44).

Метод послідовних наближень розв'язання рівняння Ріккати

Метод послідовних наближень розв'язання рівняння (8.42) можна трактувати як матричний аналог методу Ньютона.

Виявляється, що рівняння Ріккати (8.42) еквівалентне сукупності матричного лінійного диференціального рівняння

$$\dot{\theta} + \theta(a + bM^*) + (a + Mb^*)\theta + (P + qM^* + Mq^* + MrM^*) = 0$$

і матричного алгебраїчного рівняння $\theta b + q + Mr = 0$.

Метод полягає в побудові послідовностей матриць $\{M_k(t)\}$, $\{\theta_k(t)\}$, які збігаються відповідно до матриці оптимального керування $M(t)$ і розв'язків рівняння Ріккати $\theta(t)$.

Організуємо побудову таким чином (розглядаємо стаціонарний випадок).

1. Вибираємо деяке стабілізувальне керування $u = M_0^* X$.
2. Будуємо матриці $S_0 = a + bM_0^*$, $T_0 = P + qM_0^* + M_0 q^* + M_0 r M_0^*$.
3. Розв'язуємо рівняння Ляпунова $\theta S_0 + S_0^* \theta = -T_0$. Нехай матриця θ_0 – його розв'язок.

4. Будуємо матрицю $M^* = -r^{-1}(q^* + b^* \theta_0)$.

5. Обчислюємо матриці $s = a + bM_1^*$, $T_1 = P + qM_1^* + M_1 q^* + M_1 r M_1^* \theta_1$ як розв'язок рівняння $\theta s_1 + s_1^* \theta = -T_1$ і т. д.

При організації обчислювальної процедури, критерієм зупинки слід брати виконання нерівності $\|M_{k+1} - M_k\| \leq \varepsilon$.

Рівняння Ріккати (8.42) у наведеному вище матричному вигляді можна розв'язати безпосередньо. Для цього складаємо матрицю:

$$l = \begin{pmatrix} a - br^{-1}q^* & -br^{-1}b^* \\ qr^{-1}q^* - P & -a + qr^{-1}b^* \end{pmatrix}.$$

Якщо стовпці $2n \times n$ матриці $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ утворюють бази n -вимірного інваріантного підпростору матриці L , і матриця X – неособлива, то матриця $\theta = YX^{-1}$ є розв'язком рівняння Ріккати. З іншого боку, якщо матриця θ є розв'язком рівняння (8.44), то стовпці $2n \times n$ матриці $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ утворюють базис n -вимірного підпростору матриці L .

Таким чином, якщо обчислено власні вектори (чи приєднані), можна побудувати матрицю Θ і, отже, матрицю m .

Можливий і дещо модифікований алгоритм на основі нижченаведених критеріїв.

1. Якщо матриця l має власне число λ , то вона має власне число $(-\lambda)$.
2. Існує поліном $f(\lambda)$, має всі корені в лівій півплощині і задовольняє тотожності $\det(l - \lambda E) = f(\lambda)f(-\lambda)$.

3. Якщо оптимальне стабілізувальне керування існує, то матриця $\Theta = YX^{-1}$, де $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(-1)f^*(-1)\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$, є поліномом $f(\lambda)$.

4. Якщо матриця l має чисто уявне власне число, то оптимального стабілізуючого управління не існує.

5. Якщо оптимальне стабілізувальне керування існує, то воно єдине.

Приклад. Знайти оптимальне стабілізувальне керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad I = \int_0^{\infty} (4x_1^2 + 8x_1x + 4x_2u + u^2) dt.$$

Розв'язання. Тут $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r = 1$;

$$L = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо характеристичний багаточлен матриці L :

$$\det(1 - \lambda E) = \lambda^4 + \lambda^2 + 1.$$

Побудуємо багаточлен $f(\lambda)$, який задовольняє умови п. 2:

$$f(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b; \quad f(\lambda)f(-\lambda) = \lambda^2 + (2b - a^2)\lambda^2 + b = \lambda^4 + \lambda^2 + 1.$$

Отже, $b^2 = 1$, $b = \pm 1$, $a = \pm\sqrt{2b-1}$. Величини a і b визначаються єдиним чином: $a = 1, b = 1$ і $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$.

$$\begin{aligned} f(-L) = L^2 - L + E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$W = f(-L)f^*(-1) \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 44 & -18 \\ -9 & 5 & -18 & 10 \\ 44 & -18 & 88 & -36 \\ -18 & 10 & -36 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -18 \\ -18 & 10 \\ 88 & -36 \\ -36 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\Theta = YX^{-1} = \begin{pmatrix} 88 & -36 \\ -36 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-10}{116} & \frac{18}{116} \\ \frac{18}{116} & \frac{44}{116} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M^* = - \left((0,2) + (1,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = (-2, -2).$$

Остаточно: $u = -2x_1 - 2x_2$.

8.1.6 Врахування розподіленості параметрів системи

При описі різних процесів доводиться враховувати явище післядії. Природно при цьому моделювати такі процеси диференціальними рівняннями з аргументом, що відхиляється. Такі рівняння з'являються, наприклад, кожний раз, коли в розглядуваній фізичній чи технічній задачі сила, що діє на матеріальну точку (систему), залежить від швидкості та розташування цієї точки не тільки в даний момент, але і в деякий момент, що передує даному.

Наявність запізнювання у досліджуваній системі часто є причиною явищ, які суттєво впливають на хід процесу. Наприклад, в системах автоматичного регулювання запізненням є проміжок часу, який потрібен системі для реагування на вхідний імпульс. Наявність запізнювання в авторегульованій системі може викликати появу самозбудження коливань, збільшення часу перерегулювання і навіть нестійкість системи. При вивченні реальних систем з післядією найчастіше припускають запізнювання постійним. Проте у ряді найважливіших випадків в реальних системах запізнювання залежить не тільки від часу, але і від самої шуканої функції і навіть від її похідних.

Диференціальним рівнянням з аргументом, що відхиляється, називається рівняння, в якому шукана функція та її похідні входять при різних значеннях аргументу t . При цьому вказане рівняння називається рівнянням з запізнілим аргументом, якщо величина старшої похідної в будь-який момент часу t визначається через значення молодших похідних в попередні моменти $t + \Theta$, де $\Theta \leq 0$.

Нехай вектор $x(t) \in r^n$ визначений при кожному значенні t , а M – деякий функціональний простір з елементами $\varphi(\Theta)$, де $-h \leq \Theta \leq 0$ ($h = \text{const} > 0$). Позначимо через $x(t)$ елемент простору M , визначений рівністю

$x_t = x_t(\theta) = x(t + \theta)$. Рівняння з аргументом, що запізнюється, можна записати у вигляді

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (8.45)$$

Тут $f(t, x_t)$ – задане відображення (оператор) $f: R^1 \times M \rightarrow R^n$.

Найпростіше диференціальне рівняння з аргументом, що запізнюється, має такий вигляд:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), h > 0. \quad (8.46)$$

Тут f – задана функція змінних $t, x(t)$ і $x(t-h)$, наприклад, $f = tx(t) + x^2(t-1)$.

Подібні рівняння називають рівняннями із зосередженим запізненням на відміну від рівнянь з розподіленим запізненням. Їх прикладом може бути рівняння

$$\dot{x}(t) = tx^2(t) + \int_{-1}^0 r^2 x(t+r) dr.$$

Основна початкова задача для рівняння (8.45) ставиться так: нехай t_0 – початковий момент часу і $\varphi(\theta)$ – деяка задана функція, $-h \leq \theta \leq 0$. Задача Коші для рівняння (8.45) полягає у визначенні функції $x(t)$, яка при $t > t_0$ задовольняє рівнянню (8.45), а при $t \leq t_0$ – початкову умову $x_0 = x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta)$.

Позначимо через $g_{s,l}(\theta), s, l = \overline{1, n}$ сукупність функцій обмежених варіацій, заданих на $[-h, 0]$. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{X}_s(t) = \sum_{l=1-h}^n \int x_l(t+\theta) dg_{s,l}(\theta); \\ s = \overline{1, n} \end{cases}$$

або, при $G(\theta) = \{g_{s,l}(\theta)\}$, систему

$$x(t) = \int_{-n}^0 dG(\theta)x(t+\theta), \quad (8.47)$$

де x – вектор, а $dG(\theta) = \{dg_{s,l}(\theta)\}_{sl=1}^n$.

Якщо $g_{sl}(\theta)$ – кусково-постійні функції, то система (8.47) прийме вигляд

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{\nu} a_j x(t - r_j), \quad (8.48)$$

де $0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_\nu$.

Нехай для $t \in [-h, 0]$ $x(t) = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – векторна неперервна функція, що задовольняє на $[-h, 0]$ умови Діріхле. Тоді можна знайти неперервний розв’язок задачі Коші, поданий у вигляді контурного інтеграла або у вигляді невласного інтеграла. Для цього розглянемо характеристичне рівняння системи (8.49)

$$\det \left(\lambda E - \int_{-h}^0 e^{\lambda \theta} dg(\theta) \right) = 0. \quad (8.49)$$

Для рівняння (8.49) функція

$$f(\lambda) = \det \left(\lambda E - \sum_{j=0}^{\nu} e^{-\lambda r_j} a_j \right) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^m d_k \lambda^{n-k} e^{-s} \lambda, \quad (8.50)$$

де величини $r_s (s=1, m)$ є лінійними формами запізнювань з цілими невід’ємними коефіцієнтами, називається характеристичним квазіполіномом.

Позначимо через $i\lambda_1, \dots, i\lambda_0, \dots$ всі точки комплексної площини, які є коренями рівняння (8.49), при цьому занумеруємо їх так, що $\operatorname{Re}(\lambda_1) \geq \operatorname{Re}(\lambda_2) \geq \dots$. Ці корені лежать у півплощині $\operatorname{Re}(\lambda) \leq C$, де C – деяка константа, причому їх число в вертикальній смузі скінченне $a \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq b$, $a > -\infty$. Нехай S_j є кратність кореня λ_j .

Теорема. Кожному кореню λ_j рівняння (8.50) відповідає ціла функція $x_j(t) = P_j(t) e^{\lambda_j t}$, що є розв’язком системи (8.47), де $P_j(t)$ є поліномом щодо t степеня не вище $(S_j - 1)$ з векторними постійними коефіцієнтами.

Природно, що будь-яка кінцева лінійна комбінація окремих $\sum_j C_j x_j(t)$ розв’язків також є окремим розв’язком. Однак отримати за аналогією з звичайними диференціальними рівняннями загальний розв’язок у вигляді суми окремих розв’язків не завжди вдається. Справа в тому, що коренів λ_j рівняння (8.49), взагалі кажучи, зліченне число, і нескінченний ряд $\sum_{j=0}^{\infty} C_j x_j(t)$ може не збігатись.

Однак, як і у випадку рівнянь без запізнення, за коренями характеристичного рівняння можна судити про стійкість системи: якщо всі корені φ рівняння (8.49) мають від'ємні дійсні частини, то система (8.48) асимптотично (експоненціально) стійка, тобто для будь-якої початкової функції φ розв'язок $x(t, \varphi)$ має властивість $\|x(t, \varphi)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, при цьому існують числа $\gamma > 0, C = C(\varphi)$ такі, що $\|x(t, \varphi)\| \leq C e^{-\gamma t}$.

Вплив запізнення керувального сигналу на стійкість системи

У системах автоматичного регулювання керувальний сигнал формується із затримкою. Тому стан системи може виявитися нестійким.

Побудуємо матрицю оптимального стабілізуючого керування M . Це керування формується на основі вимірювання фазових змінних і надходить на виконавчі органи з запізненням $U = M^* X(t - h)$. Вважаючи затримку постійною, потрібно знайти найбільше значення $h_0 > 0$ таке, що при будь-якому $h \in [0, h_0]$, система

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BM^* X(t - h) \quad (8.51)$$

має асимптотично (експоненціально) стійке положення рівноваги $x = 0$.

Для експоненціальної стійкості розв'язку (8.51) необхідно і достатньо, щоб всі корені квазіполінома $\varphi(\lambda) = \det(\lambda E - BM^* e^{-\lambda h} - A)$ лежали в лівій півплощині. За умовою задачі при $h = 0$ це має місце. Корені $\varphi(\lambda)$ неперервно залежать від h , отже при малих h вони лежать в лівій півплощині.

При подальшому збільшенні h корені $\varphi(\lambda)$ можуть потрапити на праву півплощину. Очевидно, що значення h_0 , при якому корені вперше виходять на праву півплощину, і дає розв'язок задачі.

Для пошуку h_0 квазіполіном $\varphi(\lambda)$ розглянемо як поліном $f(\lambda, \mu)$ від двох змінних: $\varphi(\lambda) = f(\lambda, e^{-\lambda h})$, $f(\lambda, \mu) = a_0(\lambda)\mu^s + a_1(\lambda)\mu^{s-1} + \dots + a_g(\lambda)$.

Якщо при деякому h корінь $\varphi(\lambda)$ потрапив на уявну вісь ($\lambda = i\lambda_0$), то поліном від μ $f(i\lambda_0, \mu) = a_0(i\lambda_0)\mu^s + a_1(i\lambda_0)\mu^{s-1} + \dots + a_s(i\lambda_0)$ має корінь на одиничному колі $\mu = e^{-\lambda h_0}$, $|\mu| = 1$.

Використовуючи це, наведемо алгоритм побудови h_0 .

1. Знайти ті значення λ , при яких $f(\lambda, \mu)$ як поліном від μ має корені на одиничному колі. Для цього достатньо, щоб результат скалярного добутку поліномів $f(\lambda, \mu)$ і $f^*(\lambda, \mu) = a_s(-\lambda)\mu^s + a_{s-1}(-\lambda)\mu^{s-1}, \dots, a_0(-\lambda)$,

$$\operatorname{Re} s(f, f^*) = \begin{bmatrix} a_0(\lambda) & a_1(\lambda) & \dots & a_s(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0(\lambda) & \dots & a_{s-1}(\lambda) & a_s(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0(\lambda) & a_1(\lambda) & \dots & a_s(\lambda) \\ a_s(-\lambda) & a_{s-1}(-\lambda) & \dots & a_0(-\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_s(-\lambda) & \dots & a_1(-\lambda) & a_0(-\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_s(-\lambda) & a_{s-1}(\lambda) & \dots & a_0(-\lambda) \end{bmatrix},$$

перетворюювався в нуль. Цим результатом є поліном за λ . Знайдемо його чисто уявні корені $i\lambda_1, \dots, i\lambda_p$ (це завдання можна звести до задачі пошуку дійсних коренів полінома).

2. Для кожного уявного кореня $i\lambda_k$ побудуємо поліном $\Phi_k(\mu) = f(i\lambda_k, \mu)$ ($k = 1, \dots, p$) і знайдемо його корені, розташовані на одиничному колі

$$\mu_{ks} = e^{i\tau_{ks}} \quad (s = 1, 2, \dots, q_k, \tau_{ks} \in [0, \pi)).$$

3. З кожним коренем μ_{ks} зв'яжемо додатну постійну

$$h_{ks} = \begin{cases} \frac{\tau_{ks}}{\lambda_k} & \lambda_k > 0 \\ \frac{\tau_{ks} - 2\pi}{\lambda_k} & \lambda_k < 0 \end{cases}.$$

4. Як h_0 беремо мінімальне значення з усіх чисел h_{ks} .

8.2. Диференціальні рівняння в частинних похідних для моделювання технічних систем

З розв'язанням диференціальних рівнянь в частинних похідних (differential equations in partial derivatives) інженерам і дослідникам доводиться зустрічатися у багатьох галузях науки і техніки: в аеро- і гідродинаміці, ядерній фізиці, радіозв'язку, теплотехніці тощо. В таких рівняннях містяться частинні похідні і шукана величина залежить одразу від декількох змінних. Наприклад, диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними має вигляд

$$A(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + E(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + D(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + F(x, y) = G(x, y).$$

Аналогічно звичайним диференціальним рівнянням єдиний розв'язок рівняння можна отримати лише задавши додаткові умови, але оскільки тут присутні дві незалежні змінні x та y , умова повинна задаватися для якої-небудь кривої у площині xOy . Ця умова може бути накладена на функцію f або/та на її похідні та залежати від типу рівняння, яке визначає її вигляд і характер зміни.

Існують три типи диференціальних рівнянь другого порядку:

- еліптичні, при $B^2 - 4AC < 0$;
- параболічні, при $B^2 - 4AC = 0$;
- гіперболічні, при $B^2 - 4AC > 0$.

Рівняння можуть переходити з одного типу в інший залежно від значень коефіцієнтів.

Еліптичні рівняння описують усталені (стаціонарні) процеси, причому задача ставиться в замкненій області, і в кожній точці границі цієї області задаються граничні умови. Інші два типи рівнянь описують еволюційні процеси. В таких задачах найбільш поширений випадок, коли на одній частині границі ставлять граничні умови, а на іншій – початкові.

В цьому розділі розглянуто загальні підходи до аналітичного розв'язання таких рівнянь, а в наступному (дев'ятому) надано методи та алгоритми чисельного розв'язання задач математичної фізики (як часто називають диференціальні рівняння в частинних похідних) на прикладі рівнянь другого порядку.

8.2.1. Рівняння параболічного типу і їх застосування до моделювання теплофізичних процесів в технічних системах

Для моделювання процесу теплопровідності необхідно скласти рівняння, що описує передачу теплоти від однієї частини тіла до іншої або від одного тіла

до іншого, сформулювати граничні умови, що описують теплообмін на границях тіл, що контактують, і визначити початкові умови, що описують стан системи в початковий момент часу.

Процес теплопередачі відбувається в просторі і часі. Тому аналітичне дослідження теплопровідності зводиться до вивчення просторово-часового розподілу основної фізичної величини – температури, тобто до знаходження залежності $T = f(x, y, z, t)$, що визначає миттєве значення температури в усіх точках досліджуваного об'єкта. Сукупність цих значень температури називається температурним полем.

Поле, що відповідає неусталеному тепловому режиму, називається нестационарним температурним полем. Якщо тепловий режим є сталим, то температура в кожній точці тіла з плином часу залишається незмінною. Таке температурне поле називається стаціонарним і температура є функцією тільки координат: $T = T'(x, y, z)$.

У тілі, що має температуру $T(x, y, z, t)$, можна виділити поверхню, в усіх точках якої в деякий момент часу температура однакова – ізотермічна поверхня певного рівня температури. Для ізотермічних поверхонь, описуваних рівнянням $T(x, y, z, t) = C$, характерно те, що теплота не поширюється уздовж поверхні, а направляєється від однієї поверхні до іншої.

Розглянемо дві нескінченно близькі ізотермічні поверхні з температурами T і $(T + \Delta T)$, ($\Delta T > 0$) і точку M , що лежить на одній з них (рис. 8.16).

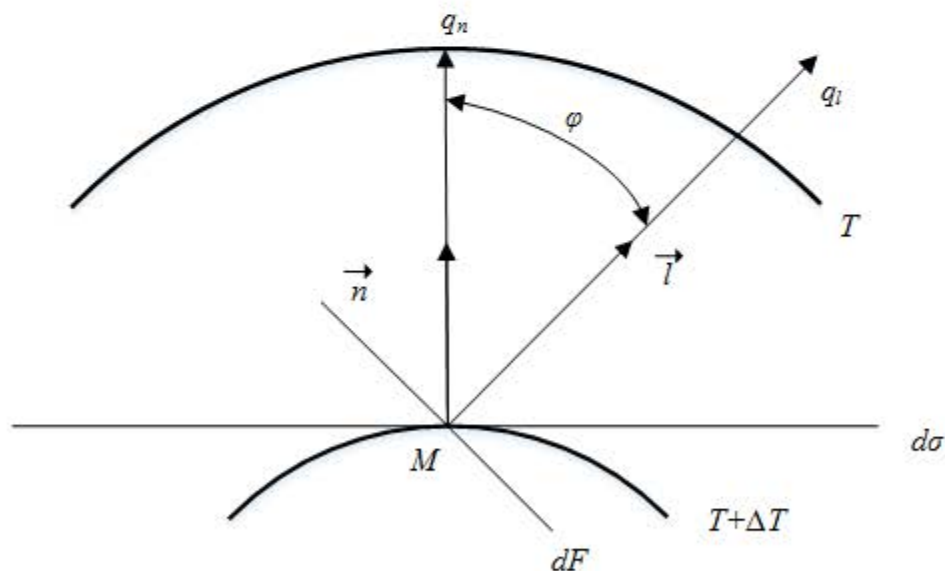


Рисунок 8.16 – Розрахункова схема до виведення рівняння теплопровідності

Переміщаючись з точки M уздовж будь-яких напрямків, можна виявити, що інтенсивність зміни температури в різних напрямках неоднакова. Швидкість зміни температури T в точці M в напрямку \vec{l} обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial T}{\partial z} \cos \gamma,$$

де α, β, γ – кути між напрямком \vec{l} і нормаллю \vec{n} .

Найбільша різниця температури на одиницю довжини вектора переміщення спостерігається в напрямку нормалі \vec{n} до ізотермічної поверхні. Таким чином, в будь-якій точці M ізотермічної поверхні максимальна швидкість зміни температури відбувається в напрямку нормалі \vec{n} , тобто:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \vec{n} \overrightarrow{grad}(T) = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \vec{n} = \vec{\nabla} T \vec{n}.$$

Температурний градієнт показує, наскільки інтенсивно змінюється температура всередині тіла. Температурний градієнт є основним фізичним параметром, що визначає умови виникнення теплового процесу, тобто при $\overrightarrow{grad}(T) \neq 0$ всередині тіла виникає тепловий потік. Тепловий потік має певний напрям, а саме: від точок тіла з більшою до точок з меншою температурою. Інакше, тепловий потік можна розглядати як вектор, спрямований у бік зменшення температур, а поле теплових потоків – векторним.

Під вектором теплового потоку в точці M температурного поля будемо розуміти вектор, напрям якого збігається з напрямком перенесення теплоти Q , а абсолютна величина виражає тепловий потік або інтенсивність перенесення теплоти, тобто вимірювану кількістю теплоти, що проходить в одиницю часу t через одиницю площі поверхні $d\sigma$, перпендикулярної до напрямку потоку в розглянутій точці, тобто:

$$q = \frac{dQ}{d\sigma dt}.$$

Вектори щільності теплового потоку \vec{q} і $\overrightarrow{grad}(T)$ спрямовані по нормалі до ізотермічної поверхні, але в протилежні сторони. Зі збільшенням температур, тобто зростанням температурного градієнта, збільшується і щільність теплового потоку. Вираз

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)$$

є законом теплопровідності Фур'є у векторному вигляді. Він описує механізм теплопровідності і використовується при виведенні рівняння теплопровідності, що лежить в основі побудови математичних моделей теплофізичних процесів.

Коефіцієнт пропорційності λ називається теплопровідністю і є константою, що характеризує теплопровідні властивості матеріалу даного тіла.

Диференціальне рівняння теплопровідності

В основу виведення диференціального рівняння теплопровідності покладено закон збереження енергії, що поєднується з законом Фур'є.

Виділимо в тілі деяку частину об'єму V , обмежену замкнутою поверхнею S , через яку відбувається тепла взаємодія виділеної частини з навколишнім середовищем – іншою частиною тіла. Має місце таке твердження: кількість теплоти Q , отримана виділенням об'ємом за час dt внаслідок теплопровідності, а також від внутрішніх джерел теплоти, дорівнює зміні внутрішньої енергії речовини, що міститься у виділеному об'ємі:

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

де Q – зміна внутрішньої енергії речовини, що міститься у виділеному об'ємі V за час dt ; Q_1 – кількість теплоти, введеної в виділений об'єм шляхом теплопровідності за час dt ; Q_2 – кількість теплоти, яка виділилася в об'ємі V за час dt внаслідок внутрішніх джерел теплоти.

Для обчислення Q_1 скористаємося законом Фур'є в скалярній формі:

$$dQ_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt = \lambda \vec{n} \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\sigma dt = -q_n d\sigma dt,$$

де $\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ – вектор щільності теплового потоку.

Кількість теплоти, що протікає за час dt через площу поверхні S , виражається поверхневим інтегралом

$$Q_1 = -dt \int_S \vec{q} \vec{n} d\sigma = -dt \int_S q_n d\sigma.$$

Цей інтеграл можна перетворити в об'ємний за формулою Остроградського-Гаусса

$$\int_S q_n d\sigma = \iiint_V \text{div}(\vec{q}) dV.$$

Таким чином

$$Q_1 = -dt \iiint_V \text{div}(\vec{q}) dV.$$

Виділення або поглинання теплоти всередині об'єму V зручно характеризувати за допомогою щільності $F(M, t)$ потужності теплових джерел

$$dQ_2 = F(M, t)dVdt.$$

За проміжок часу dt в тілі об'ємом dV виділиться кількість теплоти

$$Q_2 = dt \iiint_V F(M, t)dV.$$

Тут $F(M, t) > 0$. Якщо $F(M, t) < 0$, то теплота не виділяється, а поглинається.

Загальна кількість теплоти, отримана виділенням об'ємом,

$$Q = dt \iiint_V F(M, t)dV - dt \iiint_V \operatorname{div}(\vec{q})dV.$$

З іншого боку, ця кількість теплоти дорівнює зміні внутрішньої енергії речовини, що міститься в об'ємі V , $Q = CdT$, де C – теплоємність тіла V ; dT – зміна його температури.

В точці $M(x, y, z) \in V$ за інтервал часу dt температура $T(x, y, z, t)$ зміниться на $T(x, y, z, t + dt) - T(x, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt$.

Елементу об'єму dV масою ρdV для такої зміни температури потрібна кількість теплоти, рівна $\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dV dt$, а всьому об'єму V –

$$CdT = dt \iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV,$$

де C – питома теплоємність, [Дж/кг·град]; ρ – щільність речовини, [кг/м³]; c – об'ємна теплоємність, [Дж/м³·град].

Таким чином,

$$\begin{aligned} -Q_2 - Q_1 + Q &= \iiint_V \left[F(M, t) + \operatorname{div}(\vec{q}) + c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) - F(M, t) \right] dV = 0. \end{aligned}$$

Остання рівність має виконуватися для будь-якої частини тіла об'ємом V . Це можливо тільки тоді, коли в кожній точці всередині тіла

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) - F(M, t) = 0.$$

Оскільки $\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)$, то останню рівність можна записати так:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) + F(M, t)$$

Це рівняння називається диференціальним рівнянням теплопровідності, або рівнянням Фур'є.

Для ізотропного гомогенного тіла параметри c, ρ, λ постійні: $\operatorname{div}[\operatorname{grad}(T)] = \Delta T$, де Δ – оператор Лапласа. Остаточо після ділення на $c\rho$ отримаємо

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T(M, t) + \frac{1}{c\rho}F(M, t)$$

Тут: $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт пропорційності (температуропровідність). На відміну від λ , яка характеризує теплопровідну здатність тіла, коефіцієнт a характеризує теплоінерційні властивості тіла і є мірою швидкості вирівнювання температурного поля в розглянутому середовищі.

В декартових координатах рівняння теплопровідності має такий вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{c\rho}F(M, t), \quad (8.52)$$

в циліндричних координатах (r, φ, z) , пов'язаних з декартовими координатами співвідношеннями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$; $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, рівняння записується так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho}F(r, z, \varphi, t)$$

Рівняння теплопровідності відносять до диференціальних рівнянь параболічного типу.

Якщо температура розглянутого тіла в будь-якій його точці не змінюється в часі, тобто $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, то рівняння набуває вигляду

$$\Delta T(M) + \frac{1}{\lambda}F(M) = 0.$$

Це рівняння називається рівнянням Пуассона.

Якщо всередині тіла відсутні теплові джерела і температурне поле стаціонарне, то маємо рівняння

$$\Delta T(M) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

яке називається рівнянням Лапласа і належить до диференціальних рівнянь еліптичного типу.

Математична постановка крайових задач рівняння теплопровідності

Диференціальне рівняння теплопровідності (8.52) є математичною моделлю цілого класу явищ теплопровідності і само по собі не відображає розвиток процесу теплопереносу в тілі. Математично це пояснюється неединістю розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних, до яких належить і рівняння теплопровідності. Щоб отримати з множини розв'язків один окремий розв'язок, що відповідає певній конкретній задачі, необхідно мати додаткові дані, що не містяться у вихідному диференціальному рівнянні теплопровідності.

Для однозначного розв'язання задачі необхідно враховувати нижченаведене.

1. Геометрію твердого тіла, в якому протікає процес теплообміну. Наприклад, якщо розглядати тіла (рис. 8.17), то їх геометрію можна математично описати відповідними нерівностями: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq x \leq \infty$.

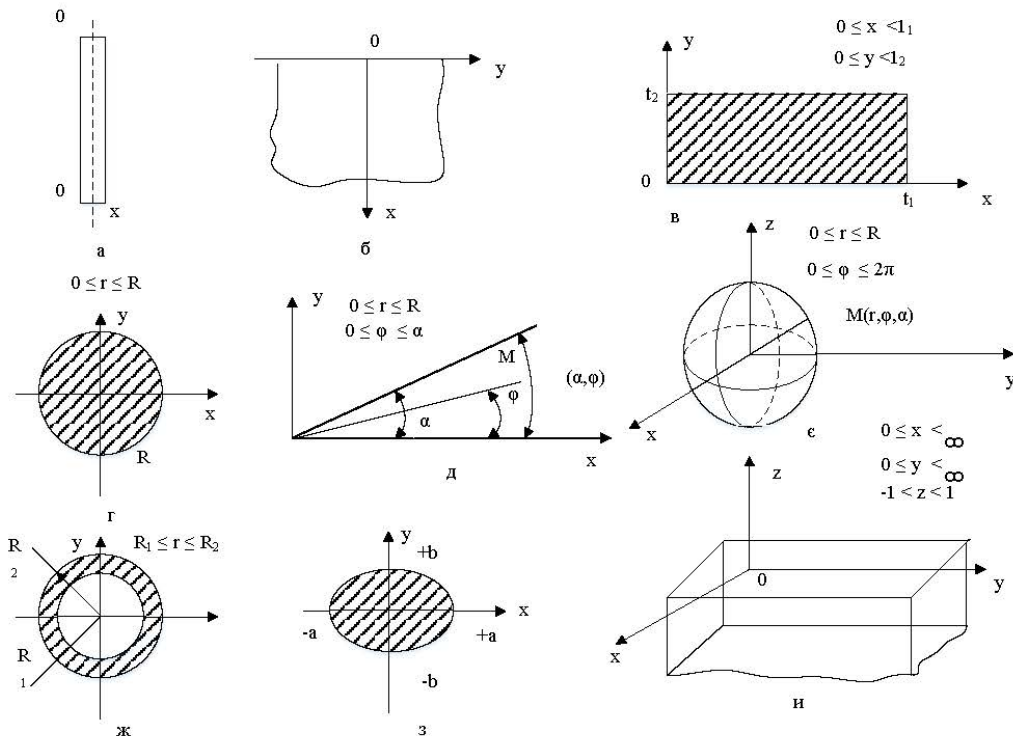


Рисунок 8.17 - Крайові геометричні умови при постановці крайових задач

2. Фізичні умови, що характеризують фізичні властивості (тепло – температуропровідність), а також закон розподілу внутрішніх джерел теплоти.

3. Граничні умови, що характеризують особливості теплової взаємодії граничної поверхні тіла з навколишнім середовищем.

4. Часові (початкові) умови, що характеризують стан тіла в вихідний момент часу чи інакше визначають розподіл температури в будь-якій точці тіла в деякий момент часу, який для досліджуваного процесу теплообміну приймається за початковий.

Перераховані умови в сукупності визначають одне (конкретне) явище теплопровідності і в цьому сенсі можуть бути названі *умовами єдиності*. Для тіла певної геометричної форми з певними фізичними властивостями умови однозначності зводяться до завдання початкових і граничних умов. Ці умови в сукупності називаються крайовими. Диференціальне рівняння теплопровідності разом з крайовими умовами є крайовою задачею рівняння теплопровідності (так званою тепловою задачею). Для усталеного теплового процесу необхідність у заданні початкових умов відпадає, і в цьому випадку крайова задача буде складатися з рівняння теплопровідності і граничних умов.

Перейдемо до формулювання початкової і граничної умови, які повинна задовольняти функція $T(x, y, z, r) = \theta(M, \tau)$, що описує розподіл температури в деякому тілі.

Нехай V – кінцева область тривимірного простору, де відбувається процес теплопровідності, і S – межа області, яку будемо вважати кусково-гладкою поверхнею. Областю задання початкової умови є V , що відповідає геометричній формі і розміру тіла, а S – область задання граничних умов, G – область і її границя S (рис 8.17).

Початкова умова рівняння теплопровідності полягає в заданні температури в усіх точках області V в момент $t = 0$, від якого і ведеться відлік часу:

$$T(M, t)_{t=0} = f_0(M); M \in V, \quad (8.53)$$

де $f_0(M)$ – задана функція, неперервна в точках V .

У випадку рівномірного розподілу температури в тілі початкова умова спрощується: $T(M, t) = \theta_0 = const, M \in V$.

Умова (8.53) означає, що слід знайти такий розв'язок $\Theta(M, t)$ теплової задачі, який з наближенням часу до початкового значення прямував би в усіх точках області до заданої величини $f_0(M)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(M, t) = f_0(M). \quad (8.54)$$

Розуміння початкової умови (8.53) в граничному значенні (8.54) пояснюється виключно тими класами конкретних функцій, якими описуються розв'язки крайових задач рівняння теплопровідності. Ці функції в багатьох випадках не мають сенсу при $t = 0$, проте допускають граничний перехід при $t \rightarrow 0$.

Наприклад, функція

$$T(x,t) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi at} \int_0^{\infty} f_0(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] d\xi \quad (8.55)$$

є розв'язком рівняння теплопровідності $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ з початковою умовою $T(x,0) = f(x)$. З самого подання виразу (8.55) видно, що його права частина не визначена при $t = 0$, але можна показати, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sqrt{\pi at} \int_0^{\infty} f_0(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] d\xi = f_0(x).$$

Якщо початковий розподіл температури $f_0(M)$ розривний в деяких точках області V (або поверхні S), то розв'язки $T(M,t)$ теплової задачі будуть мати таку властивість, що ці розриви повинні зникнути з моменту часу $t \geq t_{\xi} > 0$ (t_{ξ} – дуже короткий час), і тоді отриманий розв'язок повинен прагнути до заданої початкової температури в усіх точках тіла, де початковий розподіл неперервний.

Граничні умови – умови теплової взаємодії тіла з навколишнім середовищем – можуть бути задані в різній формі залежно від характеру процесу. У тих випадках, коли на границі тіла не відбувається ніяких процесів з поглинанням або виділенням теплоти і відсутній теплообмін випромінюванням, граничні умови на поверхні зіткнення двох середовищ в найзагальнішому вигляді полягають у рівності температур і теплових потоків:

$$T_T = T_C; \quad \lambda_T = \frac{\partial T(M,T)}{\partial n} = \lambda_C \frac{\partial T_C(M,t)}{\partial n},$$

де T_T, T_C – температура відповідно тіла і середовища; λ_T, λ_C – теплопровідність відповідно тіла і середовища, n – нормаль до граничної поверхні тіла і середовища.

Однак у практичних завданнях така форма граничних умов надзвичайно незручна, тому що для розрахунку температур твердого тіла необхідно розв'язувати спряжену задачу, тобто відшукувати температурне поле в навколишньому середовищі. Тому в ряді практично важливих завдань бажано перейти до простіших граничних умов.

У математичній теорії теплопровідності в більшості випадків використовуються основні умови, що є ідеалізацією дійсних фізичних процесів. Наприклад, гранична умова I роду полягає в заданні поверхневого розподілу температури для будь-якого моменту часу:

$$T(M,t) = f(M,t); \quad M \in S; \quad t > 0,$$

де M – точка, що знаходиться на поверхні S ; $f(M,t)$ – задана безперервна функція координат $M(x,y,z)$ і часу t в точках області S .

В окремому випадку, якщо температура на поверхні однакова і з часом не змінюється, граничні умови мають вигляд $T(M, t) = \theta_n$. Це може бути здійснено при штучному підтриманні постійної температури або при особливих умовах теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем.

Граничні умови II роду полягають у заданні щільності теплового потоку для кожної точки поверхні тіла як функції координат і часу:

$$-\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \Phi(M, t); \quad M \in S; \quad \tau > 0, \quad (8.56)$$

де $\Phi(M, t)$ – задана неперервна функція координат $M(x, y, z)$ і часу t в області S ; n – нормаль до поверхні S в точці M .

Тут слід розрізняти процеси охолодження і нагрівання. Для процесу охолодження $\frac{\partial T}{\partial n} < 0$; тепловий потік при цьому вважається додатним, так що умова (8.56) стосується процесу охолодження. Для процесу нагрівання $\frac{\partial T}{\partial n} > 0$; тепловий потік від’ємний і необхідно записати, якщо вважати, що $\Phi(M, t) \geq 0$,

$$\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \Phi(M, t); \quad M \in S; \quad t > 0. \quad (8.57)$$

У найпростішому випадку щільність теплового потоку через поверхню може бути постійною на поверхні і за часом

$$\left. \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \right|_{M \in S = \frac{q_0}{\lambda} = const}$$

(наприклад, при нагріванні металевих виробів у високотемпературних печах, при механічній обробці).

Якщо у виразі (8.57) $\Phi(M, t) = 0$, то це означає, що поверхня тіла S теплоізолювана. За означенням, теплоізолюваною поверхнею називається поверхня, через яку не проходить потік теплоти. У цьому випадку рівняння (8.56) має наступний вигляд:

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = 0; \quad M \in S; \quad t > 0.$$

При граничних умовах III роду задаються температура навколишнього середовища і закон T_c конвективного теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Для опису процесу теплообміну використовується закон Ньютона-Ріхмана. Згідно з цим законом кількість теплоти, що віддається одиницею площі поверхні S з температурою T_π в одиницю часу в навколишнє

середовище з температурою T_C в процесі охолодження $T_\pi > \Theta_C$, пропорційна різниці температур поверхні тіла T_π та навколишнього середовища T_C

$$q = \gamma [T_\pi - T_C] = \gamma [T(M, t)|_{M \in S^{T_C}}],$$

де γ – коефіцієнт пропорційності, що називається коефіцієнтом тепловіддачі.

Коефіцієнт γ характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Чисельно він дорівнює кількості теплоти, що віддається (або сприймається) одиницею площі поверхні з різницею температури тіла і навколишнього середовища в один градус. На відміну від теплопровідності коефіцієнт λ не є фізичною константою, характерною для тієї чи іншої речовини. У загальному випадку він відображає спільну дію конвекції і випромінювання і залежить від багатьох факторів: геометрії і розмірів тіла, фізичних властивостей середовища, що оточує тіло, теплоємності, щільності, температури поверхонь нагріву тощо. Для спрощення завдання в розрахункових схемах як перше наближення приймають $\gamma = const$.

Граничні умови сполучення застосовуються у разі контакту двох твердих тіл. Якщо між граничними поверхнями тіл є ідеальний тепловий контакт, то їх температури на поверхні контакту повинні бути однаковими. Крім того, тепловий потік, що виходить з одного тіла через контактну поверхню, повинен дорівнювати тепловому потоку, що входить в інше тіло. Таким чином, якщо T_1 і T_2 – температура тіл, що знаходяться в умовах щільного теплового контакту, то для точки контактної поверхні граничні умови сполучення мають вигляд

$$T_1(M, t) = T_2(M, t)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k},$$

де n – загальна нормаль до контактної поверхні S_k в точці M .

У разі неідеального теплового контакту між двома тілами (контактні поверхні розділені тонким прошарком) зазвичай вводиться поняття контактної опору R (або контактної провідності $1/R$). Рівність теплових потоків має місце, але з'являється пропорційна їм різниця між двома поверхневими температурами. Відповідні граничні умови мають вигляд

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k} = 1/R [T_2(M, t) \Big|_{S_k} - T_1(M, t) \Big|_{S_k}];$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k}.$$

Граничні умови сполучення можуть бути використані при знаходженні наближеного розв'язку рівняння теплопровідності в неоднорідному середовищі. Перераховані вище граничні умови в більшості практичних випадків задаються в кожній точці S – граничної поверхні тіла. Проте можливі випадки (наприклад, обробка з охолоджувальним середовищем), коли та чи інша гранична умова має місце не на всій поверхні S , а на якійсь кусково-гладкій її ділянці. У цьому випадку мають місце так звані різнірідні умови. Наприклад, у півплощині $y \geq 0$, $-\infty < x < \infty$ задаються довільні величини: на одній частині граничної поверхні ($x > 0$) – нестационарна температура, на іншій ($x < 0$) – тепловий потік. Якщо $T(x, y, z)$ – температурне поле в цій півплощині, то на поверхні ($y = 0$) маємо різнірідні граничні умови вигляду

$$\begin{aligned} T(x, y, z) \Big|_{y=0} &= \phi_1(x, t); \quad x > 0; \quad t > 0; \\ -\lambda \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \phi_2(x, t); \quad x < 0; \quad t > 0. \end{aligned}$$

Як зазначалося, диференціальне рівняння теплопровідності (8.51) пов'язує часовий і просторовий розподіли температури всередині тіла в будь-який момент часу $t > 0$. Для однозначного визначення температури всередині тіла необхідно задати її в початковий момент часу (початкові умови), геометричну форму і розміри тіла, закон взаємодії між поверхнею тіла і навколишнім середовищем (граничні умови).

Основні крайові задачі для рівняння теплопровідності формулюються так: потрібно знайти в області V безперервно двічі диференційовне за просторовими координатами, неперервно диференційовне за часом t і неперервне аж до границі розв'язку $T(M, t)$ рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T(M, t) + f(M, t); \quad M \in V; \quad t > 0,$$

де Δ – оператор Лапласа за координатами точки. Цей розв'язок в області V при $t = 0$ неперервний і має задовольняти початкову умову

$$T(M, t) \Big|_{t=0} = \phi_0(M); \quad M \in V, \quad (8.58)$$

а на границі – якусь одну з перерахованих вище граничних умов.

Передбачається також виконання умов узгодження: у разі граничних умов I роду

$$\phi_0(M) \Big|_{M \in S} = f(M, t) \Big|_{t=0}; \quad M \in S; \quad (8.59)$$

у разі граничних умов II роду:

$$\lambda \frac{\partial \phi_0(M)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = \Phi(M, t) \Big|_{t=0}; \quad M \in S; \quad (8.60)$$

у разі граничних умов III роду:

$$\frac{\partial \phi_0(M)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = -h[\phi_0(M) - \phi(M, t)] \Big|_{t=0}. \quad (8.61)$$

Таким чином, для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T(M, t) + f(M, t); \quad M \in V; \quad t > 0, \quad \left[f = \frac{F}{c\rho} \right] \quad (8.62)$$

маємо згідно із заданням граничних умов: першу крайову задачу (8.57); другу крайову задачу (8.58), третю крайову задачу (8.61).

Для рівняння стаціонарної теплопровідності

$$\Delta^2 T(M) + f(M) = 0; \quad M \in S; \quad \left[f = \frac{F}{\lambda} \right]$$

мають місце крайові задачі, що описані нижче.

Перша крайова задача: потрібно знайти розв'язок $T(M)$, що задовольнить в G умову

$$T(M) = \phi(M); M \in S.$$

Це і є так звана задача Діріхле.

Друга крайова задача, або задача Неймана: потрібно знайти розв'язок $T(M)$ рівняння теплопровідності в кожній точці на поверхні, який має граничне значення нормальної похідної та задовольняє умову

$$-\lambda \frac{\partial T(M)}{\partial n} = \phi(M); M \in S.$$

Третя крайова задача: необхідно знайти розв'язок $T(M)$ рівняння теплопровідності неперервний в Δ , граничне значення нормальної похідної якого задовольняє умову

$$-\lambda \frac{\partial T(M)}{\partial n} = \gamma[T(M) - \phi(M)]; M \in S.$$

В усіх випадках $\phi(M)$, задана на S , неперервна функція.

Крайові умови $\phi(M)$; $f(M, t)$ $\Phi(M, t)$ зазвичай визначаються з досвіду і тому не можуть бути знайдені абсолютно точно. Завжди неминуча деяка похибка у визначенні початкових або граничних умов. Ця похибка буде

позначатися і на розв'язанні завдання, а оскільки крайова задача описує реальний фізичний процес, то розв'язок цього завдання має характеризуватися функціями, неперервно залежними від крайових функцій завдання.

Аналітичні методи розв'язання задач теплопровідності

Метод Фур'є

Найефективнішим з аналітичних методів теорії теплопровідності є метод Фур'є. Його ідея: розв'язання крайової задачі для рівняння в частинних похідних зводиться до розв'язання допоміжних крайових задач спеціального типу для диференціальних рівнянь, методика розв'язання яких розроблена досить добре. Потім для вихідного рівняння у частинних похідних будуються окремі розв'язки у вигляді множення знайдених розв'язків допоміжних крайових задач і береться їх лінійна комбінація з постійними коефіцієнтами у вигляді нескінченного ряду, який дає загальний розв'язок крайової задачі. Для застосовності методу істотним є: 1) лінійність рівняння в частинних похідних; 2) лінійність граничних умов у вихідній задачі.

Типовими задачами теплопровідності, для розв'язання яких на практиці застосовується метод Фур'є, є крайові задачі в обмежених областях, хоча цей метод може бути застосований і в необмежених, і в напівобмежених областях.

В основу методу покладено подання шуканого розв'язку задачі у вигляді ряду Фур'є за деякою системою ортогональних функцій, знайдених при розв'язанні допоміжної задачі для звичайного диференціального рівняння – так званої задачі Штурма-Ліувілля.

Розглянемо застосування методу Фур'є до одновимірної теплової задачі для нескінченного стрижня, бокова поверхня якого теплоізолювана. Температура $T(x, t)$ точок цього стрижня при відсутності теплових джерел задовольняє рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (8.63)$$

Оскільки стрижень дуже довгий, то на процеси, що протікають в його середній частині, головний вплив здійснює початковий розподіл температури, а вплив температурних умов на кінцях стрижня протягом досить тривалого часу майже не буде позначатися. Граничні умови при цьому відпадають. На шукану функцію $T(x, t)$ накладається тільки початкова умова

$$T(x, t) \Big|_{t=0} = f(x), \quad (8.64)$$

де функція $f(x)$ визначена на всій числовій осі. Завдання розв'язання рівняння (8.63) з початковими умовами (8.64) називається задачею з початковою умовою, або задачею Коші.

Для спрощення вихідної задачі введемо замість часу нову змінну $t^1 = a^2 t$.
Тоді

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t^1},$$

і вихідне рівняння (8.58) набуде вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t^1} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (8.65)$$

Для розв'язання задачі (8.64) – (8.65) застосуємо метод розділення змінних і суперпозиції окремих розв'язків Фур'є. Подамо розв'язки у вигляді множення функцій, що залежать тільки від однієї з незалежних змінних $T(x, t^1) = X(x)U(t^1)$.

Підставляючи добуток функцій замість $T(x, t^1)$ в рівняння (8.65), отримуємо

$$X(x)U'(t) = X''(x)U(t^1) \quad (8.66)$$

або

$$\frac{U'(t^1)}{U(t^1)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Обидві частини останнього рівняння повинні бути постійними, оскільки його ліва частина не залежить від x , а права – від t^1 , тобто ні ліва, ні права частини не можуть залежати ні від x , ні від t^1 . У цьому міркуванні – ключ до методу Фур'є. Позначивши постійну, якій повинні бути рівні і ліва і права частини рівності (8.61), через C маємо рівняння:

$$\frac{U'(t^1)}{U(t^1)} = C; \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = C. \quad (8.67)$$

Перше з них має загальний розв'язок $U'(t^1) = Ce^{Ct^1}$. Оскільки ні в одному перерізі стрижня (тобто ні при якому фіксованому x) температура $T(x, t^1) = X(x)U(t^1)$ не може необмежено зростати за абсолютною величиною при $t^1 \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$, C_1 повинно бути від'ємним. Позначимо $C_1 = -\lambda^2$ тоді $U(t^1) = Ce^{-\lambda^2 t^1}$.

Друге з рівнянь (8.67) набуває вигляду $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ і має загальний розв'язок $X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$.

Таким чином отримуємо окремий розв'язок рівняння (8.64)

$$T(x, t^1) = (AC \cos \lambda x + BC \sin \lambda x)e^{-\lambda^2 t^1}$$

або

$$T(x, t^1) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 t^1}. \quad (8.68)$$

Тут $\alpha = AC, \beta = BC, \lambda$ – довільні постійні. Функція (8.68) є при будь-якому фіксованому λ – розв'язок рівняння (8.64). Це означає, що α і β можуть бути довільними функціями від $\lambda: \alpha = \alpha(\lambda); \beta = \beta(\lambda)$, так що остаточно маємо сім'ю окремих розв'язків рівняння (8.64) $T_\lambda(x, t^1) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1}$, залежного від параметра λ , який може приймати всі значення на проміжку $[-\infty; +\infty]$. Тому функція

$$T(x, t^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(x, t^1) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda \quad (8.69)$$

також є розв'язком рівняння (8.63). Залишається тільки підібрати невідомі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ так, щоб розв'язок задовольняв початкову умову (8.64), тобто щоб

$$T(x, t^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda = f(x).$$

Остання рівність означає, що функцію $f(x)$ треба розкласти в інтеграл Фур'є. Це розкладання можливе, якщо $f(x)$ абсолютно інтегровна по всій осі

ОХ, тобто інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається. Ця умова означає скінченність теплової енергії стрижня. Тому, розкладаючи функцію $f(x)$ в інтеграл Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi$$

і враховуючи, що $\cos \lambda(x - \xi) = \cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi$, отримуємо

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right) \cos \lambda x \right\} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda.$$

Невідомі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ визначаються за формулами

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi;$$

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

Підставляючи вирази для $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в розв'язок (8.69), отримуємо функцію

$$\begin{aligned}\theta(x, t^1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \{ \cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi \} e^{-\lambda^2 t^1} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi,\end{aligned}$$

що задовольняє одночасно і рівняння (8.63), і початкову умову (8.64).

Для того щоб розв'язок (8.69) можна було фізично пояснити, перетворимо його, змінюючи порядок інтегрування:

$$T(x, t^1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(x - \xi) e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda \right\} d\xi.$$

Зробивши заміну змінної $\lambda = \sigma\sqrt{t}$, і вводячи позначення $\frac{x - \xi}{\sqrt{t}} = \varpi$,

$$\text{отримуємо } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(x - \xi) e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \varpi d\sigma = \frac{1}{\sqrt{t}} I(\varpi).$$

Інтеграл $I(\varpi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \varpi d\sigma$ називається інтегралом Пуассона.

Його значення дає вираз $I(\varpi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\varpi^2}{4}}$ або

$$T(x, t^1) = \frac{1}{2a} \sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4t^1}} d\xi.$$

Повертаючись до вихідної задачі (8.58) – (8.59), отримуємо

$$T(x, t) = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right] d\xi.$$

Розглянемо фізичний зміст отриманого розв'язку.

Функція

$$\Phi_{\xi}(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right],$$

яка є розв'язком вихідного рівняння, називається фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності. Він має важливий фізичний зміст; пов'язаний з поняттям фізичного імпульсу. Фізичним тепловим імпульсом називається такий

початковий розподіл температури, при якому в стрижень введено деяку кількість теплоти на відрізку від $(x_0 - \xi)$ до $(x_0 + \xi)$ так, що температура цього відрізка в момент часу $t = 0$ піднімається до значення U_0 , кількість теплоти Q_0 пропорційна заштрихованій на рис. 8.18 площі $2\xi U_0$. Спрямовуючи $\xi \rightarrow 0$ перейдемо від фізичного теплового імпульсу до точкового. Тоді

$$T(x,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right) \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t} \right].$$

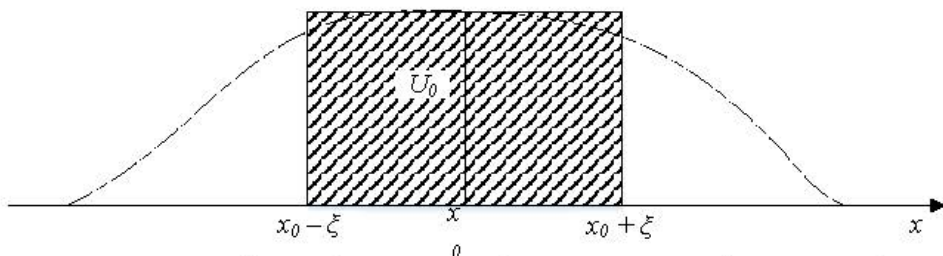


Рисунок 8.18 – Фізична інтерпретація розв'язку задачі теплопровідності

Поширення теплоти в стрижні після точкового імпульсу здійснюється за кривими Гаусса. Максимальна температура буде в тій точці стрижня, де прикладений імпульс $(x - x_0)^2$. У фіксований момент $t > 0$ максимальна температура обернено пропорційна коефіцієнту теплопровідності

$$a = \sqrt{\frac{\lambda^2}{c\rho}}. \text{ Якісно це очевидно з фізичних міркувань: у кожен момент часу,}$$

максимальна температура у стрижні буде тим менша, чим більший коефіцієнт теплопровідності λ і чим менша питома теплоємність C і щільність ρ матеріалу стрижня (рис. 8.18).

У кожній фіксованій точці $x \neq x_0$ функція $T(x,t)$ часу t спочатку зростає від $t=0$ до деякого максимального значення $T(x)$, а потім монотонно спадає, прагнучи до нуля при $t \rightarrow \infty$ (рис. 8.19). Максимально досяжна температура в точці $x = x_0$ стрижня обернено пропорційна відстані від точки прикладання імпульсу, а час, необхідний для досягнення максимальної температури, прямо пропорційний квадрату вказаної відстані (рис. 8.20.)

Метод Фур'є формально непридатний для неоднорідного рівняння теплопровідності і неоднорідності граничних умов. Застосування цього методу стане можливим, якщо перетворити задачу шляхом приведення граничних умов до однорідних.

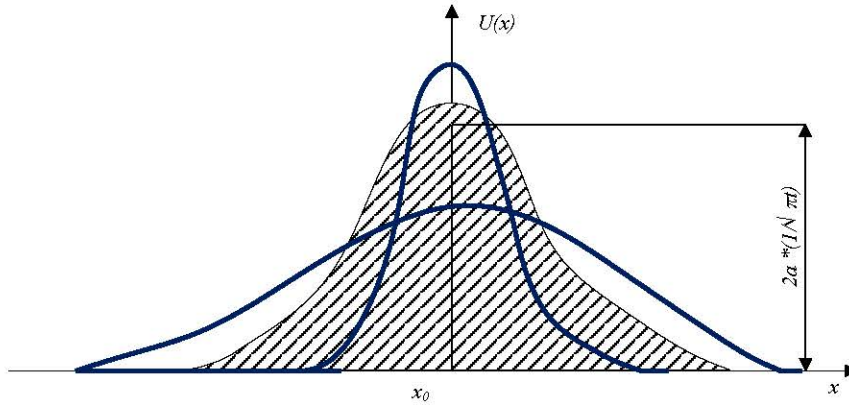


Рисунок 8.19 - Поширення теплоти в стержні після впливу теплового імпульсу

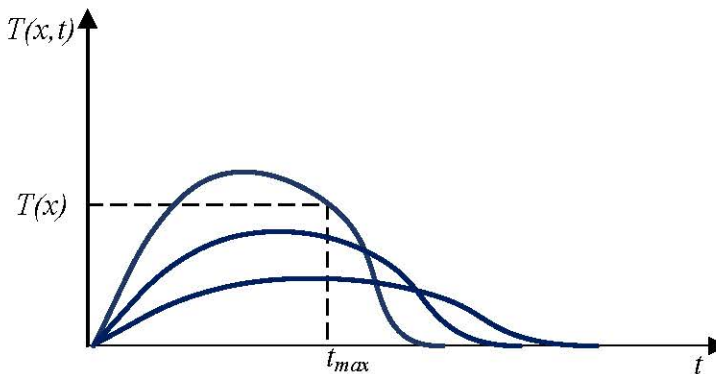


Рисунок 8.20 – Залежність температури від часу у фіксованій точці

Метод інтегральних перетворень

До переваг методу інтегральних перетворень слід віднести можливість безпосереднього застосування методу як до однорідних, так і до неоднорідних крайових задач, однаковість методики і значне спрощення у зв'язку з простішою технікою обчислення, що властива саме інтегральним методам. При наявності прямих і обернених для даного виду перетворень техніка розв'язання спрощується до застосування стандартних прийомів, що ведуть до розв'язання задачі коротким шляхом і в простішому вигляді, ніж у методі розділення змінних.

Метод інтегральних перетворень застосовується тільки до лінійних диференціальних рівнянь з лінійними граничними умовами.

Суть методу інтегральних перетворень.

Нехай потрібно визначити функцію $T(x, y, z, t)$, що задовольняє в області $\Omega = (a < x < b)$, $y, z \in G$; $t > 0$ диференціальне рівняння теплопровідності (нестационарне або стаціонарне) із заданими початковими і граничними умовами. Розв'язання задачі помітно спрощується, якщо замість

безпосереднього визначення функції шукати попередньо її інтегральне перетворення, обумовлене формулою

$$T(\xi, y, z, t) = \int_a^b T(x, y, z, t) k(x, \xi) dx, \quad (8.70)$$

де $c < \xi < d$; $k(x, \xi)$ – обрана функція, визначена в області ($a < x < b$, $c < \xi < d$), яка зветься ядром інтегрального перетворення.

В результаті інтегрального перетворення отримуємо деяку нову функцію $T(\xi, y, z, t)$, яка вже не залежить від x та називається інтегральною трансформантою, зображенням або образом функції $T(x, y, z, t)$. Початкова функція $T(x, y, z, t)$ називається оригіналом трансформанти $T(\xi, y, z, t)$, змінна x називається змінною перетворення. Межі a й b (відповідно c і d) можуть бути як скінченними, так і нескінченними. У першому випадку перетворення (8.70) називається інтегральним перетворенням із скінченними межами, а у другому застосування перетворення еквівалентно деякому перетворенню за декількома змінними

$$T(\xi, y, v, \eta) = \int_a^b \int_G \int_0^\infty R(x, \xi, z, v, t, \eta) T(x, y, z, t) dx dz dt,$$

що називається кратним інтегральним перетворенням.

Перетворення, коли деяка функція $T(\xi, y, z, t)$ знову перетвориться у функцію $T(x, y, z, t)$, називається зворотним інтегральним перетворенням до (8.70). Відповідна формула, яка дає перехід від зображень до оригіналів, називається формулою зворотності:

$$T(x, y, z, t) = \int_c^d R(x, \xi) T(\xi, y, z, t) d\xi.$$

Основна ідея застосування інтегрального перетворення (8.70) до задач з диференціальними рівняннями у частинних похідних полягає у виборі ядер $k(x, \xi)$ і $R(x, \xi)$ таким чином, щоб диференціальні операції за змінною перетворення у вихідній задачі змінити алгебраїчними операціями в перетвореній задачі. При цьому вибір ядра $R(x, \xi)$ інтегрального перетворення здійснюється відповідно до диференціального рівняння і граничних умов задачі, тобто з урахуванням геометричної форми тіла і закону його теплової взаємодії з навколишнім середовищем.

Інтегральні перетворення, що застосовуються для розв'язання задач теплопровідності, можна розділити на два класи: інтегральні перетворення за часом t та інтегральні перетворення за просторовими змінними. Це обумовлено

тим, що рівняння теплопровідності є рівнянням першого порядку щодо змінної t , тоді як відносно просторових координат – це рівняння другого порядку. Причому час змінюється в межах від нуля до нескінченності ($0 \leq t < \infty$), що дає можливість застосувати по змінній t інтегральне перетворення одного вигляду незалежно від геометрії розглянутого тіла і вигляду граничних умов. Цей клас перетворень становить операційне числення. Трансформанта температури по t визначається за формулою:

$$\bar{T}(M, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(M, t) dt, \quad p = \sigma + iw, \quad (8.71)$$

або

$$\bar{T}(M, p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} T(M, t) dt. \quad (8.72)$$

Перетворення (8.71) називається перетворенням Лапласа. Перетворення Лапласа – Карсона (8.72) відрізняється від першого лише множником p перед інтегралом.

Для того, щоб зображення $T(M, p)$ існувало, інтеграли (8.71)– (8.72) повинні збігатися. Це накладає певні обмеження на функцію температури $T(M, t)$, властивості якої в більшості поширених на практиці випадків задовольняють умови існування зазначених інтегралів.

Якщо задачу розв'язано в зображеннях, то зворотне перетворення у загальному випадку виконується за формулою звороття:

$$T(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \bar{T}(M, p) dp. \quad (8.73)$$

Інтегрування відбувається в комплексній площині $p = \sigma + iw$ вздовж прямої $\sigma = const$, паралельної уявній осі. Дійсні числа σ вибираються так, щоб всі особливі точки підінтегрального виразу розташовувалися в лівій півплощині комплексної площини p .

Знаходження оригіналу функції за її зображенням може бути отримано в елементарних функціях, якщо трансформанта подана у вигляді ряду за від'ємними степенями p :

$$\bar{T}(M, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(M)}{p^{k+1}}.$$

Тоді оригінал $T(M, t)$ також подається у вигляді ряду

$$\bar{T}(M, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(M)t^k}{k!}.$$

Якщо зображення є дробовою функцією

$$T(M, p) = \frac{T_1(M)\Phi(p)}{\psi(p)} = T_1(M) \frac{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots}{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots},$$

то за теоремою розкладання маємо

$$T(M, t) = \sum_{n=1}^k \frac{\Phi(p)}{\psi(p)} T_1(M) e^{-P_n t},$$

де P_n – прості корені функції $\psi(p)$, при цьому знаменник має зліченну кількість простих коренів.

Якщо степінь полінома $\Phi(p)$ менше степені полінома $\psi(p)$ і серед коренів $\psi(p)$ існують кратні в точках $\psi(p_m)$, то

$$T(M, t) = \sum_{m=1} \frac{T_1(M)}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_m} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\frac{\Phi(p)(p-p_m)^k}{\psi(p)} e^{-Pt} \right] \right\},$$

де сума береться за всіма коренями $T(m, p)$.

В найзагальнішому випадку оригінал $T(M, t)$ може бути знайдено за формулою

$$T(M, t) = \sum_m \operatorname{res} \left\{ e^{P\tau}, \bar{T}(M, p) \right\} \Big|_{P=P_m},$$

де додавання виконується за всіма особливими точками P_m функції $\bar{T}(M, p)$.

У тих випадках, коли не можна отримати аналітичний вираз для оригіналу, використовують наближені формули згортання перетворення Лапласа, серед яких можна виділити співвідношення

$$T(t) \approx \frac{(-1)^n (n+k)^{n+k+1}}{\Gamma(n+k+1)(t-t_0)^{n+1}} \left\{ T(p) e^{-Pt} \right\}^n \Big|_{P=\frac{n+k}{t-t_0}},$$

де $n \in N$; $k \in R$; $\Gamma(z)$ – гамма-функція.

Приклад. Знайти розподіл температур $T(M, t)$ в напівобмеженому тілі по глибині x ($0 \leq x \leq \infty$), $M(x)$, якщо на границі його підтримується задана температура $q(t)$, а початкова температура тіла дорівнює нулю, тобто знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right],$$

що задовольняє умови $x \geq 0$, $t \geq 0$.

Нехай $T(x,0) = 0$, $T(0,t) = q(t)$. Шукана функція $T(x,t)$ і її похідні є оригіналами (за змінною t).

Введемо позначення

$$\bar{T}(x,p) = L[T(x,t)] = \int_0^{\infty} T(x,t) e^{-pt} dt.$$

Тоді за правилом диференціювання оригіналів отримуємо з урахуванням початкових умов

$$L\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right] = p\bar{T}(x,p),$$

$$L\left[\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 \bar{T}(x,p)}{\partial x^2};$$

$$\bar{T}(0,p) = Q(p) = L[q(t)].$$

Переходимо до наступної задачі відносно трансформанти шуканої функції:

$$p\bar{T}(x,p) = a^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{T}(x,p)}{\partial x^2} \right]; \quad (8.74)$$

$$\bar{T}(0,p) = Q(p). \quad (8.75)$$

З урахуванням того, що в рівнянні (8.74) p – параметр, знаходимо розв'язок звичайного диференціального рівняння зі змінною x . Оскільки характеристичне рівняння $a^2 k^2 - p = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p}{a}}$, то

$$T(x,p) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) \text{ є загальним розв'язком рівняння (8.74).}$$

Функція $T(x,p)$ повинна бути обмежена при $x \rightarrow \infty$, тому $c_1 = 0$. З умови (8.75) знаходимо постійну

$$T(0,p) = Q(p) = c_2.$$

Отже, розв'язком рівняння (8.74), що задовольняє умову (8.75), буде функція $T(x, p) = Q(p)e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x}$. Запишемо отриманий розв'язок у вигляді

$$T(x, p) = pQ(p)\frac{1}{p}e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x}.$$

Тоді з застосуванням інтеграла Дюамеля

$$\frac{1}{p}e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x} = L\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

отримуємо для $T(x, t)$ вираз

$$T(x, t) = q(t)\operatorname{erfc}(\infty) + \int_0^1 \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right]_t^1 q(t - \tau) d\tau.$$

Тут

$$\operatorname{erfc}(\infty) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-U^2} du = 0$$

$$\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right) \right]_{\tau}^1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}} e^{-U^2} du = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\frac{x}{2a}\right)}{2} \sqrt{t^3} e^{\frac{-x}{4a^2\tau}} \dots$$

Таким чином, шуканий розв'язок має вигляд

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2} a \sqrt{\pi} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon^2}} \frac{q(t - \tau)}{\varepsilon^2} e^{\frac{-x}{4a^2\tau}} d\tau.$$

Інтегральні перетворення за просторовими змінними обираються залежно від геометричної форми тіла і граничних умов вихідної задачі. При цьому з диференціального рівняння теплопровідності вилучаються другі частинні похідні за просторовими змінними шляхом заміщення лінійним виразом відносно шуканої функції і граничними функціями задачі.

Послідовне застосування інтегральних перетворень за всіма просторовими змінними перетворює вихідне диференціальне рівняння в частинних похідних в звичайне лінійне диференціальне рівняння.

Найбільш уживаним в теорії теплопровідності є інтегральні перетворення, наведені в табл. 8.1. Особливістю інтегральних перетворень, окрім перетворень Фур'є, є наявність нескінченної верхньої границі. Тому їх можна застосовувати

тільки до крайових задач теплопровідності для тіл з напівобмеженою протяжністю. При цьому вибір відповідного інтегрального перетворення при розв'язанні крайової задачі визначається виглядом граничної умови при $x=0$. Перетворення Хенкеля застосовується для симетричних тіл; перетворення Мелліна використовується при розв'язанні стаціонарних крайових задач теплопровідності в секторальних областях; перетворення Меллера-Фока дає можливість розв'язувати теплові задачі, пов'язані з інтегруванням рівняння Лапласа і Пуассона для області, що обмежена двома сферами, що перетинаються, і областей, які обмежені одним або двома співфокусними гіперболоїдами обертання; перетворення Канторовича-Лебедева і його різноманітні модифікації можна використовувати для областей, що обмежені поверхнею двогранного кута або конуса.

Практичне застосування названих інтегральних перетворень суттєво полегшується наявністю таблиць прямих і обернених перетворень різних функцій, які часто зустрічаються в конкретних задачах.

Розглянемо техніку застосування інтегральних перетворень до розв'язання задачі теплопровідності для напівнескінченного стрижня:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; 0 < x < \infty; 0 \leq \tau < \infty \\ T(x, t)|_{(t)=0} = \psi(t); \left. \frac{\partial^k T}{\partial x^k} \right|_{x=0} = 0; k = 0, 1 \\ T(x, t)|_{(t)=0} = \Phi(x) \end{cases} \quad (8.76)$$

Тут для виключення x необхідно скористатися одним з перетворень, визначених на напівнескінченному інтервалі. Таких перетворень декілька (див. табл. 8.1). Однак, враховуючи відмічену вище характерну властивість перетворень Фур'є, увагу слід звернути на відзначену вище характерну особливість перетворення Фур'є. Із двох названих перетворень слід використати перетворення похідних (див. табл. 8.1), що містить окрім трансформанти граничне значення похідної.

Множення виразу (8.76) на $k(\alpha, x) = \sin(\alpha x)$ і інтегрування за x на інтервалі $(0; \infty)$, дає

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\alpha, t) = a^2 \left[-\alpha^2 T(\alpha, t) + \alpha T(x, t) \Big|_{x=0} \right].$$

Враховуючи тут граничну умову (8.76) отримуємо крайову задачу

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T(\alpha, \tau) + a^2 \alpha^2 T(\alpha, \tau) = a^2 \alpha \psi(\tau); \quad (8.77)$$

$$T(\alpha, \tau) = \Phi(\alpha); \quad (8.78)$$

$$[T(\alpha, \tau) \Phi(\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} [T(x, \tau) \Phi(x)] \sin(\alpha x) dx. \quad (8.79)$$

Таблиця 8.1 Основні інтегральні перетворення

Найменування	Проміжок інтегрування (a, b)	Ядро перетворення $k(\alpha, x)$	Формула перетворення $L^{-1}[F(\alpha)]$	Перетворення операцій $L[f(x)]$ ы
Фур'є: exp	$(-\infty, \infty)$	$e^{i\alpha x}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha)$; $f^{(k)}(x)_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$; $k \in N$
exp обмежене	$(-\pi, \pi)$	e^{inx}	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{inx}$	$\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{inx} dx = (-in)^k F(n) + (-1)^k \sum_{k=0}^{m-1} (-in)^{m-1-k} \left[f^{(k)} \left(\frac{\pi}{-f^{(k)}(-\pi)} \right) \right]$
cos	$(0, \infty)$	$\cos \alpha x$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x dx$	$\int_0^{\infty} f''(x) \cos \alpha x dx = -d^2(F(\alpha) - f(x)) \Big _{x=0}$ $f^{(k)}(x)_{x \rightarrow 0} = 0$
cos обмежене	$(0, \pi)$	$\cos nx$	$f(x) = \frac{f(0)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos nx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \cos nx dx = -n^2 F(n) + (-1)^n f'(\pi) - f'(0)$
sin	$(0, \infty)$	$\sin \alpha x$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\alpha) \sin \alpha x dx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \sin \alpha x dx = -dF(\alpha) + \alpha f(x) \Big _{x=0}$; $f^{(k)}(x) \Big _{x \rightarrow \infty} = 0$
sin обмежене	$(0, \pi)$	$\sin nx$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin nx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \sin nx dx = -n^2 F(n) + n \left[(-1)^{n+1} f(\pi) + f(0) \right]$

Лапласа	$(0, \infty)$	$e^{-\lambda x}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{\gamma_0 - j\infty}^{\gamma_0 + j\infty} F(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha$	$f^{(m)}(x) e^{-\alpha x} dx = \alpha^m F(\alpha) - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{m-k-1} f(x) _{x=0};$ $ f(x) < M e^{\gamma_0 x}$
Ханкеля	$(0, \infty)$	$x T(\alpha, x)$	$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha F(\alpha) I_{\nu}(\alpha x) d\alpha$	$\int_0^{\infty} \left[f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{\nu^2}{x^2} f(x) \right] x I_{\nu}(\alpha x) dx =$ $= \alpha^2 F(\alpha), \quad \nu > -1$
Мелліна	$(0, \infty)$	$x^{\alpha-1}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{\gamma_0 - j\infty}^{\gamma_0 + j\infty} F(\alpha) x^{-\alpha} d\alpha$	$\int_0^{\infty} [x^2 f''(x) + x f'(x)] x^{\alpha-1} dx = \alpha^2 f(\alpha), \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$
Канторо- вича- Лебедєва	$(0, \infty)$	$K i \tau$	$T(x\nu\varphi) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \bar{T}(\tau, \varphi) \tau \operatorname{sh} x$ $x \pi \mathcal{K}_{i\tau}(x) d\tau$	$\int_0^{\infty} T(x\nu\varphi) \frac{K_{i\tau}(x)}{x} dx = \frac{d^2 \bar{T}}{d\varphi^2} - \tau^2 \bar{T}$
Меллера – Фока	$(1, \infty)$	$P \frac{1}{2} + i \tau(x)$	$f(x) = \int_1^{\infty} \bar{f}(\tau) \tau d\tau P \frac{1}{2} + i \tau(x)$	$\int_1^{\infty} f(x) P \frac{1}{2} + i \tau(x) dx = \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \bar{f}(\tau)$
Лапласа – Карсона	$(0, \infty)$	e^{-Pt}	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{-Pt} \frac{F(p)}{P} dP$	$\int_0^{\infty} P e^{-Pt} f^{(k)}(t) dt = F(p) - \sum_{n=1}^{k-1} P^{k-1-n} f(t) _{t=0}$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (8.77) запишемо у вигляді

$$T(\alpha, \tau) = a^2(\alpha) \int_0^\tau e^{-a^2 \alpha^2 (\tau - \tau')} \psi(\tau') d\tau', \quad (8.80)$$

де $C(\alpha)$ довільна функція параметра перетворення; окремий розв'язок неоднорідного рівняння (8.80)

$$T(\alpha, \tau) = a^2 \alpha \int_0^\Phi e^{-a^2 \alpha^2 (\tau - \tau')} \psi(\tau') d\tau' \quad (8.81)$$

Підставляючи (8.80) в (8.79), знаходимо $C(\alpha) = \Phi(\alpha)$. Розв'язок вихідної крайової задачі отримуємо, застосовуючи до виразу (8.81) обернене перетворення Фур'є

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 x} \sin \alpha x dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T(x, \tau) e^{-a^2 \alpha^2 x} \sin \alpha x dx. \quad (8.82)$$

Отриманий розв'язок виразимо через задані функції $\Phi(x)$ і $\psi(x)$. Для цього підставимо в формулу (8.82) інтегральні представлення (8.79) і (8.81) функцій $\Phi(x)$ і $T(\alpha, \tau)$.

Замінивши в отриманому виразі порядки інтегрування і скориставшись формулою

$$\sin ax \sin a\xi = \frac{1}{2} [\cos a(x - \xi) - \cos a(x + \xi)],$$

а також значеннями інтегралів

$$\int_0^\infty e^{-\beta y^2} \cos by dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{b^2}{4\beta}}; \quad \int_0^\infty ye^{-\beta y^2} \sin by dy = \frac{b}{4\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{b^2}{4\beta}},$$

отримаємо кінцеве

$$T(x, t) \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(\xi) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4a^2 t} \right] d\xi \right\} + x \int_0^\infty \psi(t) \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-t')} \right] \frac{dt}{\sqrt{(t-t')^3}}.$$

Якщо початкова температура стрижня дорівнює нулю, а на кінці підтримується постійна температура $\varphi(x) = 0$; $\psi(t) = T_0 = const$, то розв'язок має вигляд $T(x, t) = \frac{xT_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[\frac{x^2}{4a^2(t-t')} \right] \frac{dt'}{\sqrt{(t-t')^3}}$; чи після заміни $\varepsilon = \frac{x^2}{4a^2(t-t')}$

$$T(x, t) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\varepsilon} dx = T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad (8.83)$$

де $\operatorname{erfc}(z)$ – функція, додаткова до інтегралу вірогідності і визначається співвідношенням $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2} du$.

Метод функцій Гріна

Цей метод, як і всі попередні, застосуємо до рівнянь теплопровідності з лінійною крайовою умовою, але суттєво відрізняється від методу розділення і методу перетворення. Метод функцій Гріна універсальний – його можна застосовувати для розв’язання крайових задач при достатньо загальній постановці в одно-, дво-, і тривимірних випадках, в обмежених, напівобмежених і необмежених областях, при початкових і граничних умовах неоднорідних рівнянь, причому як для нестационарної, так і для стаціонарної теплопровідності. Ідея методу функцій Гріна достатньо проста: на початку знаходиться спеціальний розв’язок крайової задачі теплопровідності того ж типу (так звана функція Гріна $G(M, P, (t - t'))$), але більш простий, і через нього дається інтегральне подання розв’язку вихідної задачі.

При викладанні методу функцій Гріна будемо використовувати розв’язок, що відповідає миттєвому точковому джерелу теплоти та потужності $Q = c\rho$ в необмеженій області (x, y, z) . Такий розв’язок в теорії теплопровідності називається фундаментальним. Фундаментальний розв’язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T(x, y, z, t), \quad |x|, |y|, |z| < \infty, t > 0$$

має вигляд

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi at})^3} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right].$$

Воно дає розподіл температури в точці (x, y, z) необмеженої області в момент часу t , викликаний миттєвим точковим джерелом теплоти потужністю $Q = c\rho$, що діє в точці (x', y', z') в момент часу $t = 0$.

Очевидно, що функція має властивість симетрії

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = G(x', y', z', x, y, z, t),$$

яка відбиває принцип взаємності: дія в точці $M(x, y, z)$ джерела теплоти, що знаходиться в точці $P(x', y', z')$, дорівнює дії в точці $P(x', y', z')$. Однак відносно змінної t така симетрія не спостерігається, що є наслідком незворотного теплового процесу у часі.

Математично миттєве точкове джерело теплоти, яке діє в момент часу $t=0$, записується за допомогою імпульсної дельта-функції Дірака.

Розглянемо розподіл миттєвих точкових джерел постійної потужності Q вздовж лінії $(x=x', y=y')$, паралельній осі z . Температуру, що є наслідком дії всіх цих джерел, визначимо шляхом інтегрування за змінною z виразу

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = \frac{Q}{c\rho(\sqrt{\pi at})^3} \times \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right].$$

Після інтегрування отримуємо

$$G(x, y, x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, x', y', z', t) dz = \frac{2Q}{c\rho at} \exp \left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4at} \right],$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється на одиниці довжини цієї прямої.

Для миттєвого шуканого джерела потужністю Q , що діє в момент часу $t=0$, розміщено в площині, паралельній площині $x=0$, і проходить через точку, розподіл лінійних джерел потужністю Q дає наступний фундаментальний розв'язок:

$$G(x, x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, x', y', t) dy = \frac{Q}{c\rho(\sqrt{\pi at})^3} \exp \left[-\frac{x-x'}{4at} \right],$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється на одиницю площі цієї площі.

Покажемо, що розв'язок крайової задачі нестационарної теплопровідності при достатньо загальній її постановці, в кінцевому результаті може бути зведений до розв'язання простішої задачі, а саме до знаходження відповідної функції Гріна.

Нехай $T(M, t)$ – температура деякого тіла, що займає область G , яка повинна бути знайденою в результаті розв'язання крайової задачі теплопровідності вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T(M, t) + f(M, t); M \in G_0; (t > 0); \quad (8.84)$$

$$T(M, t) = \Phi_0 = \Phi_0(M); M \in G_0 \quad (8.85)$$

$$\frac{\beta_1 \partial T(M, t)}{\partial \vec{n}} - \beta_2 T(M, t) = -\phi(M, t); M \in S; t \geq 0;$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до $\beta_1^2 \beta_2^2 > 0$; $f(M, t) \in G$.

Розглянемо розподіл температури в даній області G_0 , спричинений дією миттєвого точкового джерела теплоти потужності $Q=c\rho$, розміщеного в точці $P(x', y', z')$ області G_0 в момент часу $(t - t')$. Вираз для температури, що описується функцією Гріна $G(M, P, (t - t'))$ в точці M області G_0 , такий

$$G(M, P, (t - t')) = \frac{1}{[2\sqrt{\pi a(t-t')}]^3} \exp \left[\frac{-(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')} \right] + q(M, P(t - t')). \quad (8.86)$$

Перший доданок правої частини цієї рівності характеризує собою дію миттєвого точкового джерела теплоти потужністю $Q=c\rho$ в точці $P(x', y', z')$ в момент часу $(t - t')$, але для нескінченної області. Для задоволення відповідних граничних умов на границі S області G_0 додамо функцію $q(M, P, (t - t'))$. Будемо вважати, що функція є розв'язком однорідного рівняння теплопровідності в області G_0 , $t > t'$ двічі неперервно диференційовна за координатами точки, неперервно диференційовна за часом і неперервна в

замкнутій області G_0 , і, окрім того, при $(t'=0)$ перетворюється в нуль в точках області G_0 .

Таким чином, функція $G(M, P, (t - t'))$ визначається рівністю (8.86) і задовольняє рівняння

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\Delta G; M \in G_0.$$

Завдяки тому, що t входить в формі $(t - t')$, то

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\Delta G(M, P, (t - t')); M \in G_0; t > t'.$$

Припустимо, що функція $G(M, P, (t - t'))$ має властивість симетрії відносно точок M, P тобто $G(M, P, (t - t')) = G(P, M, (t - t'))$, що визначає еквівалентність властивостей цієї функції за координатами точок M і P .

Розглянемо рівність

$$\frac{\partial}{\partial t} [T(M, t)G(M, P, (t - t'))] = \frac{\partial T}{\partial t} G + T \frac{\partial G}{\partial t} = a(G\Delta T - T\Delta G) + Gf. \quad (8.87)$$

Проінтегруємо її за областю G_0 (за координатами точки M):

$$\iiint_{G_0} \frac{\partial}{\partial t} [T, G] dv_M = \iiint_{G_0} (G\Delta T - T\Delta G) dv_M + \iiint_{G_0} Gf dv_M. \quad (8.88)$$

З використанням формули Гріна для оператора Лапласа, отримуємо

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\iiint_{G_0} \frac{\partial}{\partial t} [T, G] dv_M = -a \iiint_S \left[T \left(\frac{\partial G}{\partial n_M} \right) - G \left(\frac{\partial T}{\partial n_M} \right) \right] dy_M + \iiint_{G_0} Gf d\vartheta_M.$$

Ці співвідношення мають місце при всіх $t' < t$ і, відповідно, їх можна проінтегрувати по t'

$$a \iiint_{G_0}^t \left[G \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) - T \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right) \right] \partial t' d\Omega + \iiint_{G_0}^t f(P, t) G(M, P, (t - t')) \partial t' d\vartheta + \iiint_{G_0} \Phi_0(P) G(M, P, t) d\Omega = T(M, t) \quad (8.89)$$

Отримана основна інтегральна формула для функції $T(M, t)$ дає подання довільних розв'язків рівнянь теплопровідності (8.84). Із формули (8.89) випливає, що будь-який розв'язок рівняння теплопровідності, двічі неперервно диференційований за площинними координатами і неперервно диференційований за часом t , буде аналітичною функцією площинних координат, а за часом мати похідну першого порядку.

Формула (8.89) не дає розв'язку крайової задачі (8.84), (8.85), оскільки для обчислення правої частини потрібно знати значення підінтегральної функції на поверхні S . Вимагатимемо тепер, щоб функція $G(M, P, (t - t'))$ на поверхні S задовольняла граничні умови типу (8.85)

$$\frac{v_1 \partial G(M, P, (t - t'))}{\partial \vec{n}} - v_2 G(M, P, (t - t')) = 0; M \in S; t > t'.$$

Звідси і з рівняння (8.84) отримуємо явні формули для розв'язку згідно вигляду граничних умов

$$T(M, t) = \iiint_{G_0} \Phi_0(P) G(M, P, (t - t')) dH + \iiint_{0, S}^t [T(M, P, t, t') dt' dy] + \\ + \iiint_{0, S}^t f(P, t') G(M, P, (t - t')) dt' dH,$$

де $T(M, P, t, t') = \phi(P, t)$ і для $\frac{\partial G}{\partial H}$ на всій частині граничної поверхні S має місце гранична умова:

I роду

$$T(M, t) = \varphi(M, t); M \in S; T \geq 0; G(M, P, (t - t')) = 0; t > t'; \\ T(M, P, t, t') = \pm \frac{1}{2} \varphi(M, t') G(M, P, (t - t'));$$

II роду

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial H} = \left(\frac{1}{\gamma}\right) \varphi(M, t); M \in S; t > 0; \\ \frac{\partial G(M, P, (t - t'))}{\partial H} + \left(\frac{1}{\gamma}\right) G(M, P, (t - t')) = 0;$$

III роду

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial H} + \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) T(M, t) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \varphi(M, t); M \in S; t' \geq 0; t \geq 0; \\ \frac{\partial G(M, P, (t - t'))}{\partial H} + \left(\frac{1}{\lambda}\right) G(M, P, (t - t')) = 0.$$

Тут $G(M, P, (t - t'))$ – функція Гріна відповідної крайової задачі. Таким чином, для кожної із крайових задач встановлена інтегральна формула розв'язання і з'ясовано, які умови повинна задовольняти функція $T(M, P, (t - t'))$.

Нехай $q(M, P, (t - t'))$ як функція точки M і часу t є розв'язком однорідного рівняння теплопровідності. Тоді, якщо функція $G(M, P, (t - t'))$ у вигляді (8.86) при $t \rightarrow t'$ поза точкою перетворюється в нуль, а на боковій поверхні S області G_0 задовольняє нульову крайову умову якоїсь із крайових задач для рівняння теплопровідності, то вона називається функцією Гріна відповідної крайової задачі в області G_0 . Із попереднього стає зрозумілим і фізичний зміст функції Гріна $G(M, P, (t - t'))$. В кожній з крайових задач вона є

температурою в точці P в момент t' , що виникла внаслідок дії миттєвого точкового джерела теплоти потужності cp , що діє в точці M у момент часу t (до цього моменту часу температура тіла дорівнювала нулю) за умови, що на границі розглянутого тіла у всі наступні моменти часу виконуються однорідні умови, що відповідають нульовим значенням граничних функцій крайової задачі.

Звідси впливає друге найменування функції – функція впливу миттєвого точкового теплового джерела. З точки зору фізичного змісту функції Гріна, маємо для $G(M, P, (t - t'))$ крайову задачу, що відповідає заданій у (8.84) – (8.85):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= a \nabla^2 G(M, P, (t - t')); \quad M \in S; \quad t > t' \\ G|_{t=t'} &= \delta(M, P); \quad M \in G_0 \\ \left(\mathbf{v} \frac{\partial G}{\partial n} - \mathbf{v}_2 G \right) \Big|_{M \in S} &= 0; \quad t > \phi, \end{aligned}$$

де $\delta(M, P)$ – дельта-функція. В декартових координатах ця функція має вигляд $\delta(M, P) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$.

Метод функцій Гріна широко застосовується також і для розв'язання крайових задач стаціонарної теплопровідності. В цьому випадку метод розглядається як частина добре розробленої теорії, відомої як теорія потенціалу.

Приклад. По поверхні напівнескінченного тіла в додатному напрямі осі рухається нескінченно довге смугове джерело теплоти шириною $2h$. Щільність теплового потоку рівномірно розподілена по всій поверхні джерела. Вважаємо поверхню $x=0$ теплоізолюваною. Математичне формулювання задачі таке:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right);$$

$$l \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(x, t); \quad (-h < z < h); \quad T(x, z, 0) = 0.$$

Розв'яжемо задачу методом функції Гріна.

Дія елементарного джерела описується функцією Гріна

$$T(x, y, z, t, x', y', z') = \left(\frac{2Q}{cc(4\pi at)^{\frac{3}{2}}} G(x - x'; y - y', z - z', t) \right), \quad (8.90)$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється в точці з x', y', z' ; c – питома теплоємність; s – густина.

Функція Гріна

$$G((x - x'), (y - y'), (z - z'), t) = \exp \left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at} \right].$$

Оскільки джерело рухається в додатному напрямку осі z , то координата z' змінюється на величину vt . Тому при інтегруванні виразу (8.90) за y' від $-\infty$ до ∞ і по часу від 0 до ∞ , отримуємо

$$T(x, y, z, t) = \int_0^{2h} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^t \left[\frac{2Q}{cc(4pat)^{\frac{3}{2}}} \right] \exp \left[-\frac{(x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + vt)^2}{4at} \right] dt.$$

Такий розв'язок описує температурне поле смугового джерела в процесі насичення. Перетворимо цей вираз до простішого вигляду. Для цього введемо нові змінні $z = z - z'$:

$$dz_1 = -dz', \quad \frac{z_1 V t}{2\sqrt{at}} = u; \quad du = \frac{dz_1}{2\sqrt{at}};$$

$$u_1 = z + \frac{vt}{2\sqrt{at}}; \quad u_2 = \frac{z + 2h + vt}{2\sqrt{at}}.$$

Проінтегруємо по змінній y , при $x=0$, що відповідає значенню температури $T(0, y, t)$ на поверхні напівнескінченного тіла. Отримуємо

$$T = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^t \sqrt{\frac{pa}{t}} [\Phi(u) - \Phi(u_1)] dt,$$

де Φ – функція Лапласа. Аргументи u_1 і u_2 завжди додатні. За великих аргументів можна вважати, що $\Phi(u) = 1$. Тому температурне поле в процесі насичення може бути розраховане за формулою:

$$T = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^t \sqrt{\frac{pa}{t}} [1 - \Phi(u_1)] dt.$$

8.2.2. Рівняння гіперболічного типу і їх роль в моделюванні динамічних процесів

Гіперболічні рівняння описують ряд важливих задач, що виникають при моделюванні технічних систем. Велика кількість вузлів і деталей працює в різко нестаціонарних режимах внаслідок швидкої зміни в часі збурювальних сил. При цьому в конструкціях виникають динамічні напруги, які повинні враховуватися при виборі оптимальних умов функціонування елементів.

Аналіз перехідних явищ в електро- і радіотехнічних системах також приводить до вивчення закономірностей, описуваних рівняннями гіперболічного типу. Особливо великою мірою даний тип рівнянь використовується при розгляді таких явищ, як коливання, вібрація, хвильові процеси. Характерною особливістю згаданих процесів є скінченна швидкість їх поширення. Завдяки цьому дані явища можуть бути описані диференціальними рівняннями гіперболічного типу.

Рівняння малих поперечних коливань струни

Кожну точку струни довжини l можна охарактеризувати значенням її абсиси x . Опис процесу коливання струни може бути проведено за допомогою задання положення точок струни в різні моменти часу. Для визначення положення струни в момент часу t достатньо задати компоненти вектора зміщення $\{U_y(x, t), U_z(x, t)\}$ точки x в момент t . Розглянемо просту задачу про коливання струни. Будемо припускати, що зміщення струни лежать в одній площині (x, U) і що вектор зміщення U перпендикулярний в будь-який момент до осі x ; тоді процес коливання можна описати однією функцією $U(x, t)$, що характеризує вертикальне переміщення струни. Будемо розглядати струну як гнучку пружну нитку. Математичний вираз поняття гнучкості полягає в тому, що напруги, які виникають у струні, завжди спрямовані по дотичних до її миттєвого профілю (рис. 8.21). Ця умова відображує те, що струна не чинить опір вигину.

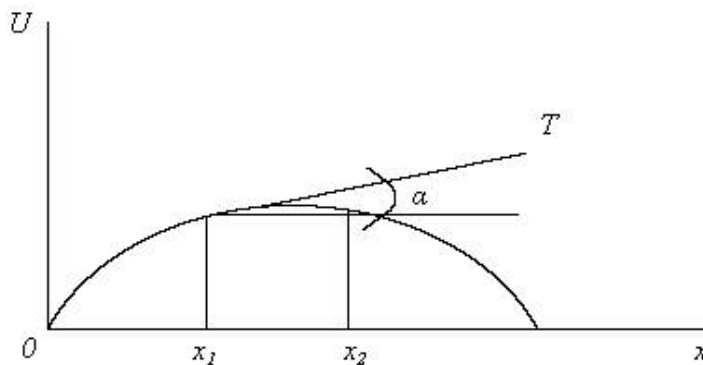


Рисунок 8.21 - Розрахункова схема для виведення рівняння коливань струни

Натяг, що виникає в струні внаслідок пружності, може бути обчислено за законом Гука. Будемо розглядати малі коливання струни і вважати, що $(U_x)^2 \approx 0$. Користуючись цією умовою, підрахуємо подовження на ділянці струни (x_1, x_2) . Довжина дуги цієї ділянки

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + U_x^2} dx = x_2 - x_1 = S.$$

Таким чином, в межах точності подовження ділянок струни в процесі коливання не відбувається, звідси в силу закону Гука випливає, що натяг T в кожній точці не змінюється з часом. Покажемо, що натяг не залежить від x , тобто $T(x) = T_0 = \text{const}$.

Знайдемо проєкції натягу на осі x і U (позначимо їх T_x і T_U).

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + U_x^2}} \cong T(x);$$

$$T_U(x) = T(x) \sin \alpha = T(x) \operatorname{tg} \alpha = T(x) U_x,$$

де α – кут дотичної до кривої $U(x, t)$ з віссю x . На ділянку (x_1, x_2) діють сили натягу, зовнішні сили і сили інерції. Сума проєкцій всіх сил на вісь x повинна дорівнювати нулю (розглядаємо тільки поперечні коливання). Оскільки сили інерції і зовнішні сили за припущенням спрямовані уздовж осі, то

$$T(x) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{або} \quad T(x) = T(x_2).$$

Звідси в силу довільності x_1 і x_2 випливає, що натяг не залежить від x , тобто для всіх значень x і t

$$T(x) = T_0.$$

Після зроблених попередніх зауважень перейдемо до виведення рівняння поперечних коливань струни. Skorистаємося другим законом Ньютона. Складова кількості руху ділянки струни (x_1, x_2) по осі x $\int_{x_1}^{x_2} U_t(\xi, t) c(\xi) d\xi$. Прирівнюємо зміну кількості руху за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] d\xi$$

імпульсу діючих сил, що складаються з натягу

$$T_0 U_x|_{x=x_2} - T_0 U_x|_{x=x_1}$$

в точках x_1 і x_2 та зовнішньої сили, яку будемо вважати безперервно розподіленою щільністю (навантаженням) $F(x, t)$, розрахованої на одиницю довжини. В результаті одержимо рівняння поперечних коливань елемента струни в інтегральній формі:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] c(\xi) d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [U_x(x_2, \phi) - U_x(x_1, \phi)] d\phi + \iint_{x_1 t_1}^{x_2 t_2} F(\xi, \phi) d\xi d\phi. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Для переходу до диференціального рівняння припустимо існування і неперервність других похідних від $U(x, t)$. Тоді формула (8.91) після дворазового застосування теореми про середнє та переходу до границі при $x_2=x$, $t_2=t$ дасть диференціальне рівняння поперечних коливань струни

$$U_{xx} = c U_{xx} = F(x, t), \quad (8.92)$$

де ρ – лінійна щільність струни.

У разі постійної щільності $\rho = const$ цьому рівнянню зазвичай надають вигляд

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, y); \quad a = m \sqrt{\frac{T_0}{c}},$$

де $f(x, t) = \frac{1}{c} F(x, t)$ – щільність сили на одиницю маси.

За відсутності зовнішньої сили отримаємо одномірне рівняння $U_{tt} = a^2 U_{xx}$, або $U_{xx} - U_{yy} = 0$; $y = at$, що описує вільні коливання струни. Це рівняння є найпростішим прикладом рівняння гіперболічного типу. Якщо в точці x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) прикладена зосереджена сила $f_0(t)$ (рис. 8.22), то рівняння (8.86) запишеться у вигляді:

$$\int_{x_1}^{x_2} c(\xi)[U_t \xi, t_2] U_x(\xi, t_1)] d\xi = \iint_{x_1 t_1}^{x_2 t_2} f(\xi, \phi) d\xi d\phi = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [U_x(x_2, \phi) - U_x(x_1, \phi)] d\phi + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\phi) d\phi.$$

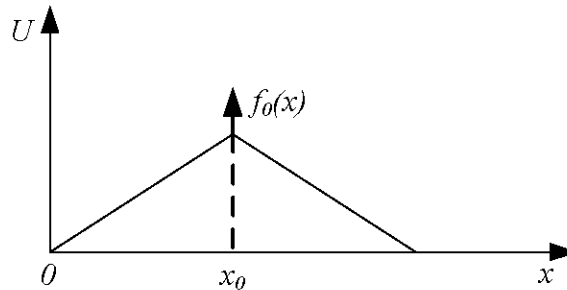


Рисунок 8.22 - До виводу рівняння поперечних коливань струни

Оскільки швидкості точок струни обмежені, то при $x_1 > x_0$ і $x_2 > x_0$ інтеграли в лівій та правій частинах цієї рівності прямують до нуля, що призводить до

$$\int_{t_1}^{t_2} [U_x(x_0 + 0, \phi) - U_x(x_0 - 0, \phi)] d\phi = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\phi) d\phi.$$

Користуючись теоремою про середнє, при скороченні обох частин рівності на Δt , і переходу до границі при $t_2 \rightarrow t_1$, отримуємо

$$U_x(x, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = -\frac{1}{T} f_0(t).$$

Звідси видно, що в точці прикладання зосередженої сили перші похідні зазнають розрив і диференціальне рівняння втрачає сенс. У цій точці повинні виконуватися дві умови сполучення

$$\begin{cases} U(x_0 + 0, t) = U(x_0 - 0, t); \\ U(x_0 + 0, t) - U(x_0 - 0, t) = \frac{1}{T} f_0(t) \end{cases}$$

перша з яких виражає неперервність струни, друга визначає величину перелому в точці x_0 , що залежить від $f_0(t)$ та натягу T_0 .

Рівняння повздовжніх коливань стрижнів і струн

Рівняння повздовжніх коливань для струни, стрижня і пружини записуються однаково. Розглянемо стрижень, розташований на відріжку $(0,1)$ осі x . Процес повздовжніх коливань може бути описаний однією функцією $U(x, t)$, що показує в момент t зміщення точку, яка мала в положенні рівноваги абсцису x . При повздовжніх коливаннях це зміщення відбувається вздовж стрижня. При виведенні рівняння будемо припускати, що натяг, який виникає в процесі коливання, описується за законом Гука.

Підрахуємо подовження елемента $(x, x + \Delta t)$ в момент t . Координати кінців цього елемента в момент t мають значення $x+U(x, t)$, $x + \Delta x + U(x+\Delta x, t)$, а відносно подовження $U_x(x + \Delta x, t)$. Тоді за законом Гука натяг

$$T(x, t) = k(x)U_x(x, t),$$

де $k(x)$ – модуль Юнга в точці x , $(k(x) > 0)$.

Користуючись теоремою про зміну кількості руху, отримуємо інтегральне рівняння коливань

$$\int_{x_1}^{x_2} [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t)] c(\xi) d\xi = \\ \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)U_x(x_2, \phi) - k(x_1)U_x(x_1, \phi)] d\phi + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \phi) d\xi d\phi,$$

де $F(x, t)$ – щільність зовнішньої сили, розрахованої на одиницю довжини.

Припустимо існування і неперервність других похідних функцій $U(x, t)$. З застосуванням теореми про середнє, здійснюючи граничний перехід при $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ і $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$, приходимо до диференціального рівняння повздовжніх коливань стрижня

$$[k(x)U_x]_x = cU_{tt} - F(x, t).$$

Якщо стержень однорідний $k(x) = const$, $\rho = const$, то це рівняння записують так:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c}}$$

де $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c}$ – щільність сили відносно маси.

Рівняння електричних коливань в дротах

Проходження електричного струму по дроту з розподіленими параметрами характеризується силою струму і напругою, які є функціями положення x та часу t . Застосовуючи закон Ома до ділянки довжиною dx , можна записати, що спад комплексної напруги на елементі дроту dx дорівнює сумі електрорушійних сил:

$$-V_x = iRdx + \frac{di}{dt}Ldx, \quad (8.93)$$

де R і L – опір та коефіцієнт самоіндукції, розраховані на одиницю довжини.

Кількість електрики, що приходить на елемент дроту dx за час dt

$$i(x, t) - i(x + dx, t + dt) = -i_x dx dt, \quad (8.94)$$

дорівнює сумі кількості електрики, необхідної для зарядки елемента dx та кількості, що губиться внаслідок недосконалості ізоляції:

$$i(x, t) - i(x + dx, t + dt) = -i_x(G + C)dx dt, \quad (8.95)$$

де C і G — коефіцієнт ємності і витоку, розраховані на одиницю довжини, причому величину втрат вважаємо пропорційною напруженню в точці дроту, що розглядається.

З формул (8.93)–(8.95), отримуємо систему

$$\begin{cases} ix + CV_t + GV = 0; \\ V_x + Li_t + Ri = 0, \end{cases} \quad (8.96)$$

що називається системою телеграфних рівнянь.

Щоб отримати одне рівняння, що визначає функцію i , продиференціюємо першу рівність по x , другу по t , помноживши їх на C . Після віднімання з припущенням постійності коефіцієнтів, знайдемо

$$i_{xx} + G - CLi_{tt} - CRi_t = 0. \quad (8.97)$$

В результаті рівняння для сили струму

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi. \quad (8.98)$$

Аналогічно виглядає рівняння для напруги:

$$V_{xx} = CLV_{tt} + (CR + GL)V_t + GRV. \quad (8.99)$$

Рівняння (8.98) чи (8.99) називається телеграфним рівнянням. Якщо можна знехтувати втратами через ізоляцію і якщо опір занадто малий $G=R=0$, то приходимо до відомого рівняння коливальних

$$a^2 V_{xx} = V_{tt}; \quad a = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Застосування методу характеристик до вивчення малих коливальних струни. Необмежена струна

Рівняння вільних коливальних однорідної струни має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{c}}. \quad (8.100)$$

Припустимо $0 = x - at$, $z = x + at$. Очевидно, що $x = \frac{\xi + \eta}{2}$, $t = \frac{\eta - \xi}{2a}$.

Тоді рівняння (8.100) в нових змінних запишеться у вигляді $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0$.

Якщо переписати його як $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \right)$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varpi(\xi),$$

де $\varpi(\xi)$ – довільна функція. При інтегруванні отриманого рівняння за ξ і вважаючи η параметром, знайдемо, що $u = \int \varpi(\xi) d\xi + u_2(z)$, де $u_2(z)$ – довільна функція. Припустивши, що $\int \varpi(\xi) d\xi = u_1(z)$, отримаємо $u = u_1(z) + u_2(z)$.

Повертаючись до попередніх змінних (x, t) , будемо мати

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at). \quad (8.101)$$

Неважко перевірити, що функція $u(x, t)$, яка визначена формулою (8.101), є розв'язком рівняння (8.100), якщо u_2 і u_1 – довільні двічі неперервно диференційовні функції. Розв'язок (8.101) рівняння (8.100) називається розв'язком д'Аламбера.

Визначимо фізичну сутність розв'язку (8.101). Розглянемо спочатку окремий випадок коливання струни, коли $u_2 \equiv 0$, тобто коли зміщення струни визначається формулою

$$u_1 = u_1(x - at). \quad (8.102)$$

Припустимо, що спостерігач, який вийшов в початковий момент часу $t = 0$ з точки $x = c$ струни, рухається в додатному напрямку осі зі швидкістю a , тобто його абсциса змінюється за законом $x = c + at$ або $x - at = c$. Для такого спостерігача зміщення струни, яке визначається формулою (8.102), буде залишатись весь час постійним і дорівнювати $u_1(c)$. Саме явище, яке описується функцією $u_1 = u_1(x - at)$, називається розповсюдженням прямої хвилі. Розв'язок (8.102) являє собою пряму хвилю, яка розповсюджується в додатному напрямку осі X зі швидкістю a . Точно такий же розв'язок $u_2 = u_2(x + at)$ являє собою зворотну хвилю, яка розповсюджується у від'ємному напрямку осі X зі швидкістю a .

Таким чином, розв'язок (8.101) являє собою суму прямої і зворотної хвилі. Це веде до графічного способу побудови форми струни в будь-який момент часу t .

Будуємо криві $u_1 = u_1(x)$, $u_2 = u_2(x)$, що зображають пряму і зворотну хвилі в початковий момент часу $t = 0$ і потім, не змінюючи їх форми, переміщуємо одночасно зі швидкістю a в різні сторони: $u_1 = u_1(x)$ – вправо, $u_2 = u_2(x)$ – вліво. Щоб отримати тепер форму струни у заданий момент часу t , достатньо побудувати алгебраїчні суми ординат розсунених кривих.

Розглянемо верхню півплощину xOt , в якій вісь Ox відповідає положенню струни в початковий момент часу $t = 0$. Будь-яка точка

півплощини характеризує визначену точку x струни у визначений момент часу t . Неважко при цьому знайти графічно ті точки струни, початкові збурення яких дійшли в момент часу t_0 до точки x_0 . Це будуть, згідно з попереднім, точки с абсцисами $x + at$. Для знаходження їх на осі достатньо провести через точку (x_0, t_0) дві характеристики

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0. \quad (8.103)$$

На перетині їх з віссю Ox і отримуються шукані точки (рис. 8.23).

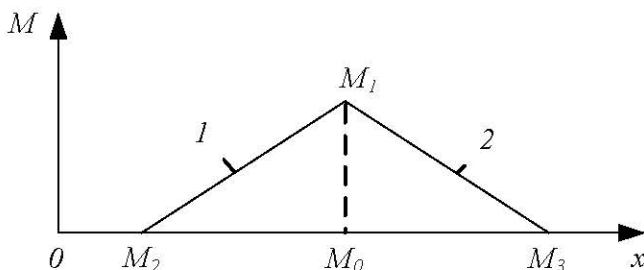


Рисунок 8.23 - Прямая (1) і зворотна (2) хвилі при коливанні струни

Вздовж першої характеристики хвиля $u_1(x - at)$ зберігає постійне значення, тобто пряма дає значення (x, t) , при яких пряма хвиля дає ті ж відхилення, що й при значеннях (x_0, t_0) . Друга характеристика з рівняння (8.103) відіграє ту ж роль для зворотної хвилі $u_2(x + at)$.

Задача Коші. Необхідно знайти розв'язок рівняння (8.100), що задовольняє початковим умовам

$$u \Big|_{t=0} = \phi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \phi_1(x). \quad (8.104)$$

Виходячи з необмеженості струни, функції $\phi_0(x)$ і $\phi_1(x)$ задані в $(-\infty; \infty)$.

В розв'язку (8.101) необхідно обрати функції $u_1(x)$, $u_2(x)$ так, щоб задовольнити початкові умови (8.104).

З початкових умов (8.104) маємо

$$\phi_0(x) = [u_1(x) + u_2(x)] \quad \phi_1(x) = -a[u_1'(x) - u_2'(x)].$$

Звідки шляхом інтегрування другої рівності, отримуємо

$$u_1(x) + u_2(x) = \phi_0(x), \quad u_1(x) - u_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz + C, \quad (8.105)$$

де C – довільна константа.

З рівності (8.105) знаходимо

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz + \frac{C}{2},$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz - \frac{C}{2}.$$

Підставивши в розв'язок (8.95), отримаємо

$$u(x, t) = \frac{\phi_0(x - at)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{x-at} \phi_1(z) dz + \frac{C}{2} + \frac{\phi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{x+at} \phi_1(z) dz - \frac{C}{2}$$

або остаточно

$$u(x, t) = \frac{\phi_0(x-at) + \phi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2} a \int_{x-at}^{x+at} \phi_1(z) dz. \quad (8.106)$$

Формула (8.106) дає розв'язок задачі Коші (8.100), (8.104), якщо $\phi_0(x)$ має неперервні похідні до другого порядку включно, а $\phi_1(x)$ – до першого.

Задача Коші (8.100), (8.104) поставлена коректно. Дійсно, отриманий розв'язок єдиний, що випливає зі способу виведення формули (8.106). Безсумнівно, є неперервна залежність розв'язку (8.106) від початкових даних. Справді, для будь-якого $\epsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що якщо замінити $\phi_1(x)$ на $\bar{\phi}_0(x)$ і $\bar{\phi}_1(x)$ так, що $|\phi_0(x) - \bar{\phi}_0(x)| < \delta$, $|\phi_1(x) - \bar{\phi}_1(x)| < \delta$, ($-\infty < x < \infty$), різниця між новим розв'язком $u(x, t)$ і початковим $u(x, t)$ буде за абсолютною величиною меншою за ϵ на будь-якому кінцевому відрізку часу.

Обмежена струна

Розглянемо тепер струну довжиною l , закріплену на кінцях. Задача про коливання такої струни зводиться до знаходження розв'язку хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.107)$$

при граничних умовах

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=l} = 0 \quad (0 < x < l) \quad (8.108)$$

і початкових умовах

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = \phi_1(x). \quad (8.109)$$

Розв'язок д'Аламбера

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at) \quad (8.110)$$

прийнятний в цьому випадку, але визначення u_1 , u_2 по формулах

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \phi_1(z) dz$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \phi_1(z) dz$$

зустрічає тут ту заваду, що функції $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ і $и_1(x)$, $и_2(x)$ визначені лише на інтервалі відповідно до фізичної суті задачі, а аргументи $x \pm at$ в формулі (8.110) можуть лежати за межами цього інтервалу. Отже, для можливого використання розв'язку (8.110) необхідно продовжити функції $и_1(x)$ і $и_2(x)$ або, що цілком еквівалентно, функції $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ за межами інтервалу $(0; l)$. З фізичної точки зору це продовження зводиться до визначення такого початкового збурення нескінченної струни, як ніби вона була закріплена на кінцях, а решта струни була б відкинута.

Для продовження функцій $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ скористаємось граничними умовами (8.108). Підставляючи в праву частину рівняння (8.110) $x = 0$ і $x = l$ і беручи до уваги умови (8.108), отримуємо $и_1(-at) + и_2(at) = 0$, $и_1(l - at) + и_2(l + at) = 0$ або, позначаючи at через x ,

$$и_1(-x) + и_2(x) = 0, \quad и_1(l - x) + и_2(l + x) = 0. \quad (8.111)$$

Коли x замінюється на інтервалі $(0; l)$, то перша з формул визначає функцію $и_1(x)$ на інтервалі $(-l; 0)$, а друга – функцію $и_2(x)$ на інтервалі $(l; 2l)$. Отже, обидві функції цілком визначаються на проміжку $2l$. Далі з рівності (8.111) випливає, що $и_2(2l + x) = -и_1(-x) = и_2(x)$, $и_1(2l + x) = и_1(x)$, тобто функції $и_1(x)$ і $и_2(x)$ є періодичними з періодом $2l$. Отже, функції $и_1(x)$ і $и_2(x)$ визначені при всіх дійсних x .

Беручи до уваги, що $\phi_0(x) = и_1(x) + и_2(x)$, $\phi_0(x) = a[и'_2(x) - и'_1(x)]$, знайдемо

$$\begin{aligned} \phi_0(-x) &= и_1(x) + и_2(-x) = -и_2(x) - и_1(x) = -\phi_0(x) \\ \phi_1(-x) &= a[и'_1(x) - и'_2(x)] = a[и'_1(x) - и'_2(x)] = \phi_1(x) \\ \phi_0(x + 2l) &= \phi_0(x); \quad \phi_1(x + 2l) = \phi_1(x). \end{aligned}$$

Ці формули показують, що функції $\phi_0(x)$ і $\phi_1(x)$ продовжуються з проміжку $(0; l)$ в проміжок $(-l; 0)$ непарним чином, а потім з періодом $2l$.

Щоб отриманий розв'язок мав неперервні похідні до другого порядку включно, необхідно крім умов диференційовності функцій $\phi_0(x)$ і $\phi_1(x)$ ще й узгодження початкових і граничних умов

$$\phi_0(0) = \phi_0(l) = 0, \quad \phi'_0(0) = \phi'_0(l), \quad \phi_1(0) = \phi_1(l) = 0.$$

Визначимо, як впливають закріплені кінці струни на її коливання. Виходячи з обмеженості струни необхідно розглядати лише смугу верхньої півплощини $t > 0$ між прямими $x = 0$ і $x = L$ (рис. 8.24).

Проведемо через точки 0 і L характеристики до зустрічі з протилежними границями площини і т.д. Таким чином, розіб'ємо смугу на ділянки I, II, III, ... Точки ділянки I відповідають тим моментам часу t , коли до точок струни

доходять пряма і зворотна хвилі, які вийшли в початковий момент часу з внутрішніх точок струни. Відповідно, фіктивно додані нескінченні частини струни на процес коливання ще не впливають. Точки M_2' за межами ділянки I відповідають тим моментам часу, коли до точок струни доходять вже хвилі, які вийшли в початковий момент часу з фіктивної частини струни. Візьмемо, наприклад, точку $M_0(x_0, t_0)$ з ділянки II.

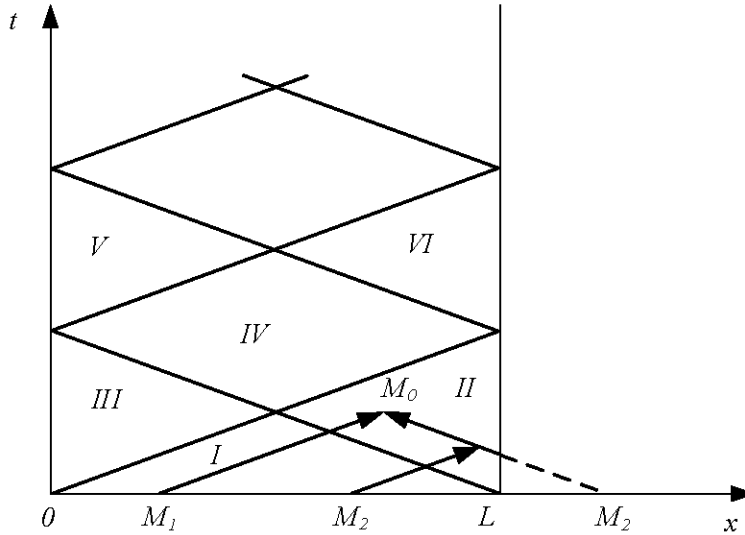


Рисунок 8.24 - Характер коливань струни із закріпленими кінцями

Оскільки $u(x_0, t_0) = u_1(x_0 - at_0) + u_2(x_0 + at_0)$, то в цій точці є дві хвилі: одна – пряма, яка прийшла від початково збудованої M_1 струни з абсцисою $x = x_0 - at$, друга – зворотна з точки M_2 з абсцисою $x = x_0 + at$, причому в даному випадку M_1 – це реальна точка струни, M_2 – фіктивна. Неважко замінити її реальною точкою, помітивши, що в силу залежності (8.111):

$$u_2(x_0 + at_0) = u_2(l + x_0 + at_0 - l) = -u_1(2l - x_0 - at_0)$$

і, таким чином, зворотна $u_2(x_0 + at_0)$ є не що інше, як пряма хвиля, $u_1(2l - x_0 - at_0)$, яка вийшла в початковий момент часу з точки M_2' ($2l - x_0 - at_0$) симетричної M_2 відносно точки L , яка, дійшовши до кінця струни L в момент $t = \frac{l - (2l - x_0 - at_0)}{2} = \frac{x_0 + at_0 - l}{a}$, змінила свій напрямок і знак на обернений до моменту часу t_0 дійшла в такому виді до точки M_0 .

Таким чином, дія закріпленого кінця $x = L$ звелась до відображення хвилі зміщення, пов'язаної зі зміною знака зміщення зі збереженням його абсолютної величини.

Те ж саме явище виявлене і для хвиль, які дійшли до кінця $x = 0$. В точках ділянки III маємо дві хвилі: зворотну і пряму, відбиту від кінця $x = 0$. В точках

ділянок IV, V, VI і т.д. отримаємо хвилі, які пройшли декілька таких відбивань від обох кінців струни.

З попередніх міркувань випливає, що коливання струни, закріпленої на кінцях, буде періодичним з періодом $\frac{2l}{a}$.

Моделювання хвильових процесів

Сучасні технічні пристрої працюють в різко нестационарних режимах внаслідок швидкої зміни в часі зовнішніх впливів, при цьому в конструкціях виникають динамічні напруги, які повинні враховуватись при оцінюванні міцності і працездатності, а також при виборі оптимальних умов функціонування тих чи інших пружних елементів. Останнє особливо важливе для технічних пристроїв, принцип дії яких базується на використанні нестационарних хвильових полів і пов'язаних з ними механічних ефектів. Науковою основою такого розрахунку являється теорія нестационарних коливань і хвиль в пружних тілах. Визначимо, які задачі механіки і чому варто віднести до класу нестационарних задач.

Характер напружено-деформованого стану пружного тіла багато в чому визначається швидкістю зміни в часі прикладених до нього сил. Якщо сили не змінюються з часом, механічні напруги і деформації також незмінні. Таке механічне поле називається статичним. Для його визначення використовуються рівняння рівноваги суцільного середовища.

Схожою за постановкою зі статичною є квазістатична задача, в умовах якої зовнішні сили можуть змінюватись, але настільки повільно, що можна знехтувати впливом прискорень і розглядати рух як послідовність станів рівноваги. Переміщення і напруга, як і в статистиці, визначаються з розв'язків рівняння рівноваги. Однак час входить в граничні умови, а, відповідно, і в вирази для напруг і деформацій як параметр.

Зрештою, при швидкій зміні навантажень в пружному тілі відбуваються процеси, які носять яскраво виражений хвильовий характер. В цьому випадку адекватною за фізикою явища є динамічна задача теорії пружності. Поряд з силами пружності великий вплив на розподіл напруг мають сили інерції, які необхідно враховувати при теоретичному аналізі. Важливим окремим випадком динамічної задачі є задача про гармонічні коливання, в якій зовнішні навантаження є тригонометричними функціями часу, що змінюються з круговою частотою ω , а механічний процес розглядається на нескінченному інтервалі часу ($0 < t < \infty$). Початкові умови в гармонічній задачі не ставляться. Механічні переміщення, напруги і деформації подаються функціями координат, помноженими на ту ж функцію часу, яка входить у вираз для джерел.

Нестационарна динамічна задача зазвичай формулюється для механічних систем з імпульсним збудженням. Повна постановка цієї задачі передбачає задання початкового стану (переміщення і швидкостей точок) пружного тіла, доповнених відповідними граничними умовами.

Інтегральна теорема Фур'є дозволяє описати загальний нестационарний випадок набором гармонічних складових. Однак відновлення нестационарного руху за його гармонічними складовими є математично не менш, а найчастіше більш складним, ніж розв'язання гармонічної задачі.

Разом з тим задачі нестационарної динаміки з нульовими початковими умовами, математично більш складні, можуть бути достатньо глибоко проаналізовані аналітичними методами. Зусилля, які витрачаються на такого роду аналіз, відшкодовуються отриманням порівняно простих математичних залежностей.

Рівняння поздовжніх коливань і характеристики розповсюдження імпульсів в нескінченному стрижні

Пружні стрижні є найбільш простою і досить часто використовуваною моделлю вивчення розповсюдження хвиль в тілах, поперечні розміри яких малі порівняно з розміром в напрямку розповсюдження. Простота отримання результатів і фізична наочність розв'язків граничних задач роблять модель стрижня початковим кроком на шляху до дослідження складних закономірностей хвильового розповсюдження імпульсів в протяжних тілах.

Розглядаємо лише поздовжні коливання, для яких зміщення частин паралельно осі стрижня. Поєднуючи цей напрямок з віссю декартових координат, введемо рівняння руху пружного стрижня в загальному випадку змінної площі поперечного перерізу стрижня.

Виділимо в стрижні елемент $(x, x + dx)$ довжиною dx (рис. 8.25).

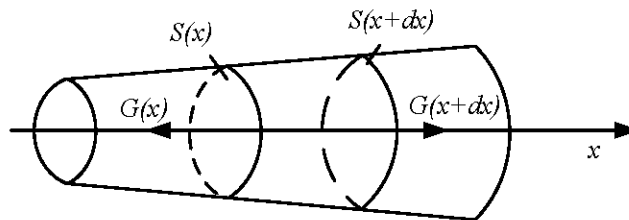


Рисунок 8.25 - Розрахункова схема для вивчення поздовжніх коливань стрижня

Вважаючи, що в напрямках, перпендикулярних до x , напруги малі порівняно з Δx , запишемо рівняння закону Гука для стрижня:

$$y_x = E e_x, \quad (8.112)$$

де $e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ – поздовжня деформація; E – модуль Юнга.

Рівняння руху впливає з другого закону Ньютона, що застосовується до елемента стрижня:

$$y(x + dx)S(x + dx) - y(x)S(x) = cS(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8.113)$$

де зліва записана рівнодійна пружних сил, справа – сила інерції; $S(x)$ позначає площу перетину x ; c – щільність матеріалу.

Розділивши рівняння (8.113) на dx отримаємо при $dx \rightarrow 0$ рівняння коливання стрижня зі змінними по довжині як площею поперечного перерізу, так і модулем пружності.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) = cS \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad (8.114)$$

Обмежуючись випадком $E = const$ переписемо вираз (8.114) у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8.115)$$

де $c = \sqrt{\frac{E}{c}}$ – швидкість розповсюдження пружних хвиль в стрижні. Варто розрізнити швидкість розповсюдження хвиль і швидкість руху частинок $\frac{\partial u}{\partial t}$. Остання, зазвичай, набагато менша за c . Рівняння (8.115) описує коливання стрижня з однорідного матеріалу, але змінної площі поперечного перерізу.

Для стрижня постійного перетину залежність (8.115) переходить в звичайне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (8.116)$$

Хвильове рівняння задовольняє вираз вигляду

$$u = f(ct - x) + g(ct + x), \quad (8.117)$$

де f і g – довільні неперервні функції.

Будь-який розв'язок рівняння (8.116) можна привести до виду (8.117). Вираз (8.117) є найбільш загальним розв'язком одновимірного хвильового рівняння.

Розглянемо перший доданок в цьому рівнянні. Припустимо, що функція $f(a)$ відмінна від нуля на проміжку $(0 < b < a)$ (рис. 8.26, а), $f(ct-x)$ буде відмінна від нуля при $(ct-a < x < ct)$. В першому записі для будь-якого вибраного значення t можна побудувати $f(ct-x)$ як функцію x (рис. 8.26, б), в другому – для фіксованого x як функцію t (рис. 8.26, в). Таким чином, імпульс $f(ct-x)$ є незмінним розподілом переміщень, що рухається зі швидкістю c в сторону збільшення x .

Визначимо, яку енергію має такий імпульс. Щільність кінетичної енергії в одиниці об'єму стрижня $T = \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$, щільність потенціальної енергії $U = \frac{1}{2} ye$, де $e = \frac{\partial u}{\partial x}$, а $y = Ee$, так що $U = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$.

Оскільки u відмінне від нуля на інтервалі $ct - a < x < ct$, то повні енергії отримуються інтегруванням за об'ємом збудованої частини стрижня:

$$T = \frac{1}{2} cS \int_{ct-a}^{ct} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx; U = \frac{1}{2} ES \int_{ct-a}^{ct} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Підставивши в останнє $u = f(ct - x)$ і зробивши заміну змінної $ct - x = \alpha$, отримаємо

$$T = U = \frac{1}{2} ES \int_0^a [f'(\alpha)]^2 d\alpha. \quad (8.118)$$

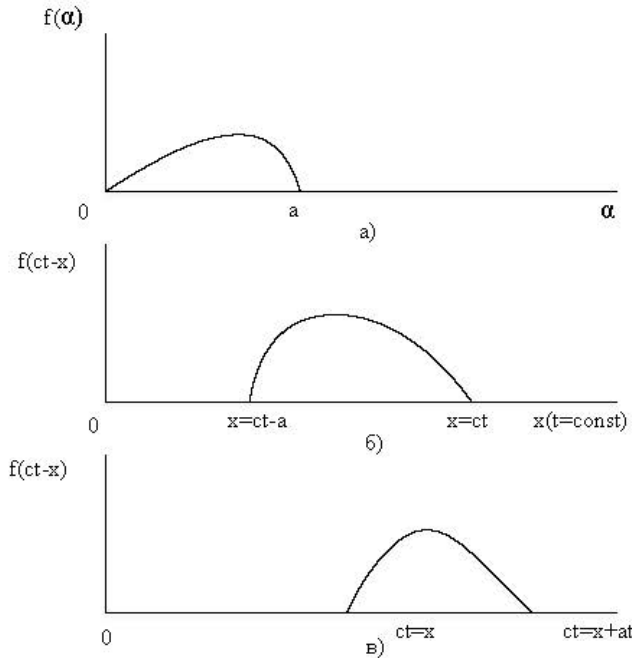


Рисунок 8.26 - Просторовий і часовий опис одновимірної хвилі

Ідеальність результату (8.118) полягає в тому, що, по-перше, кінетична чи потенціальна енергія імпульсу виявились однаковими, а по-друге, що вони не змінюються з часом, оскільки права частина залежить лише від форми імпульсу.

Аналогічно можуть бути розглянуті імпульси, які рухаються в сторону зменшення, що подані другим доданком в формулі (8.117).

Хвилі напруги в стрижні кінцевої довжини при навантаженні імпульсом тиску. Розв'язок задачі про нестационарні коливання стрижня кінцевої довжини може бути отриманий, як розглянуто вище, простим визначенням констант в наперед відомій формі розв'язку. Тут необхідно безпосередньо інтегрувати рівняння коливання при заданих початкових і граничних умовах.

Розглянемо пружний стрижень довжиною h , закріплений на торці $x = 0$. До другого торця $x = h$, починаючи з моменту часу $t = 0$, прикладається

направлений по осі змінний тиск $p(t)$ (рис. 8.27). Вважаємо, що стрижень знаходиться в стані спокою, тобто при $t = 0$ зміщення і швидкості в усіх внутрішніх точках дорівнюють нулю:

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}; \quad 0 < x < h. \quad (8.119)$$

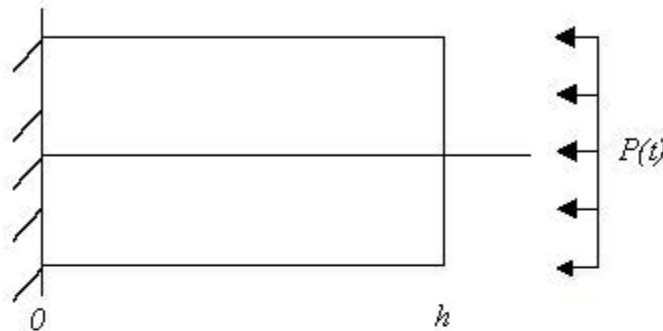


Рисунок 8.27 – Навантаження стрижня імпульсом тиску

Оскільки на лівому торці стрижень закріплений, а на правому механічні напруги рівні за величиною їм, протилежні за знаком прикладеному навантаженню, граничні умови задаються у виді

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad y = E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=h} = -c(t). \quad (8.120)$$

Зміни під час навантаження $c(t)$ задамо неперервною функцією, що зростає від нуля за лінійним законом до певного моменту часу ϕ , а при $t > \phi$ зберігає постійне значення P_0 (рис. 8.28).

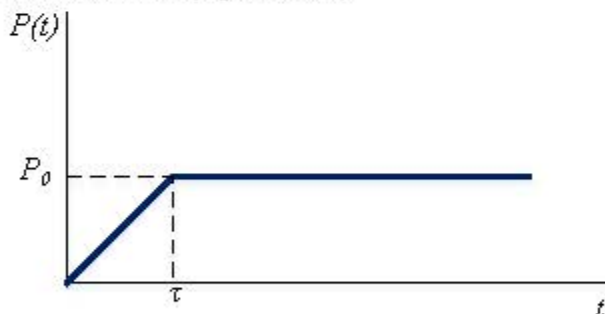


Рисунок 8.28 - Тиск на торці стрижня як функція часу

Аналітично така функція описується формулою

$$P(t) = P_0 \left[\frac{t}{\phi} H(t) - \frac{t-\phi}{\phi} H(t-\phi) \right], \quad (8.121)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

де $H(t)$ – одинична функція Хевісайда.

Для розв'язання граничної задачі використовується комплексне перетворення Фур'є за часом, яке визначається формулами

$$f^F(x, w) = \int_0^\infty f(x, t) e^{-iwt} dt, \quad (8.122)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \oint_L f(x, w) e^{-iwt} dt. \quad (8.123)$$

Як контур L в формулі згортки (8.123) можна обрати будь-яку пряму, паралельну дійсній осі, яка проходить вище всіх особливих точок w_1, w_2, \dots, w_n функції f^F , причому якобіан $J_m w > 0$. Остання умова забезпечує збіжність інтеграла (8.123) для функцій, що зростають не швидше експоненти.

Помноживши обидві частини хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8.124)$$

на e^{-iwt} , після інтегрування частинами отримаємо

$$\frac{1}{c^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{-iwt} dt = \frac{e^{-iwt}}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - iwu \right) \Big|_0^\infty - \left(\frac{w}{c} \right)^2 \int_0^\infty u e^{-iwt} dt.$$

Позаінтегральний член зникає при $t = 0$ завдяки початковим умовам (8.119), а при $t = \infty$ внаслідок перетворення в нуль експоненціального співмножника. Виносячи в лівій частині проінтегрованого рівняння (8.124) диференціювання по x за знак інтегралу, маємо звичайне диференційне рівняння

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{w}{c} \right)^2 U^F = 0 \quad (8.125)$$

з загальним розв'язком

$$U^F = A \sin \frac{wx}{c} + B \cos \frac{wx}{c}. \quad (8.126)$$

Для визначення невідомих A і B , які є функціями параметра, використовуються граничні умови (8.119). Застосувавши до останніх перетворення (8.122), маємо

$$u^F \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u^F}{\partial x} \Big|_{x=h} = P_1^F(w) - P_2^F(w),$$

$$P_1^F(w) = \frac{P_0}{E} \frac{1}{w^2 \Phi}; \quad P_2^F(w) = \frac{P_0}{E} \frac{e^{iwt}}{w^2 \Phi}.$$

Тут P_1^F відповідає доданку з $H(t)$, P_2^F що додається з $H(t - \Phi)$. Відповідно з виглядом правої частини граничних умов зручно подати $u = u_1^F + u_2^F$ так, щоб u_1^F і u_2^F задовольняли рівняння (8.125) і умови

$$u_1^F \Big|_{x=0} = 0, \quad u_2^F \Big|_{x=0} = 0;$$

$$\frac{\partial u_1^F}{\partial x} \Big|_{x=h} = P_1^F(w); \quad \frac{\partial u_2^F}{\partial x} \Big|_{x=h} = P_2^F(w). \quad (8.127)$$

Оскільки $P_2^F = \exp(iwt)P_1^F$, в силу лінійності задачі маємо $u_2^F = \exp(iwt)u_1^F$, використовуючи останню рівність, маємо

$$U_2(x, t) = \frac{1}{2p} \oint_L u_2^F e^{-iwt} dw = \frac{1}{2p} \oint_L u_2^F e^{-iw(t-\phi)} dw = u_1(x, t - \phi).$$

Таким чином, розв'язок задачі подається у виді

$$u = u_1(x, t) - u_2(x, t - \phi),$$

$$y = y_1(x, t) - y_1(x, t - \phi)E \frac{\partial}{\partial x} [u_1(x, t) - u_2(x, t - \phi)]. \quad (8.128)$$

Визначаючи сталі в рівнянні (8.127) за допомогою формули (8.128), отримуємо

$$u_1^F = \frac{P_0 c}{E \phi} \frac{\sin \frac{wx}{c}}{w^3 \cos \frac{wh}{c}}; \quad y_1^F = E \frac{\partial u_1^F}{\partial x} = P_0 \frac{l}{\phi} \frac{\cos \frac{wx}{c}}{w^2 \cos \frac{wh}{c}}. \quad (8.129)$$

Для знаходження оригіналів u_1 і y_1 розкладемо величину, обернену знаменникам виразів (8.129), в ряд, що збігається при $J_m w > 0$:

$$\frac{1}{\cos \frac{wh}{c}} = \frac{2}{e^{\frac{iwh}{c}} + e^{-\frac{iwh}{c}}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{(2n+1)\frac{iwh}{c}}. \quad (8.130)$$

Враховуючи залежність (8.130) і подаючи тригонометричні функції через експоненціальні, запишемо вираз для (8.130) у вигляді:

$$y_1^F = \frac{P_0}{\phi} \left[\frac{1}{w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{iwx}{c}} e^{(2n+1)\frac{iw}{c}} + \frac{l}{w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{iwx}{c}} e^{(2n+1)\frac{iwh}{c}} \right].$$

Підставляючи в формулу згортки і змінюючи порядок інтегрування й підсумовування, знаходимо

$$y_1^F = \frac{P_0}{\phi} \left[\frac{1}{w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2p} \oint_L \frac{1}{w^2} e^{-iw \left[t - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right]} dw + \frac{1}{w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2p} \oint_L \frac{1}{w^2} e^{-iw \left[t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right]} dw \right]. \quad (8.131)$$

Особливою точкою підінтегрального виразу є полюс другого порядку $w = 0$. Відмітимо, що при $t - t_n > 0$ контур інтегрування замикається півколом великого радіуса в нижній півплощині і інтеграл дорівнює πi , помноженому на обрховане в точці $w = 0$ (напрямок обходу від'ємний) (рис. 8.29):

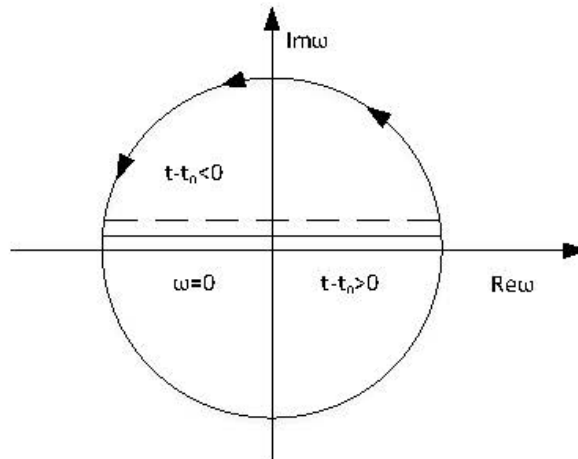


Рисунок 8.29 – Контур інтегрування

$$J_n = -2\pi i \frac{1}{p} \frac{1}{dw} \exp[-i w(t - t_n)] \Big|_{w=0} = -(t - t_n).$$

Для виконання умов леми Жордана при $t - t_n < 0$ контур замикається півколом у верхній півплощині i , відповідно, $J_n = 0$.

Об'єднання обох виразів дає

$$J_n = -(t - t_n)H(t - t_n).$$

Вираз для y_1 набуває вигляду

$$y_1 = \frac{P_0}{\Phi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) \right].$$

Механічна напруга у визначається по формулі (8.131):

$$y_1 = \frac{P_0}{\Phi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \frac{x}{c} - \frac{h}{c}(2n+1) \right) H \left(t + \frac{x}{c} - \frac{h}{c}(2n+1) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \Phi - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t - \Phi - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \Phi + \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H \left(t - \Phi - \frac{x}{c} - (2n+1)\frac{h}{c} \right) \right].$$

Розглянемо напругу в точці закріплення $x = 0$:

$$y(0, t) = \frac{P_0}{\Phi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - (2n+1)\frac{h}{c} \right) H(t - (2n+1)T) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \Phi - (2n+1)T \right) H \left(t - \Phi - \frac{x}{c} - (2n+1)T \right) \right], \quad (8.132)$$

де $T = \frac{h}{c}$ – час, необхідний для проходження хвилею повної довжини стрижня.

З урахуванням $y(0, t)$ в залежно від величини параметра τ отримаємо уявлення про ступінь динамічності поля напруг в стрижні.

Перш за все, вивчимо реакцію на навантаження, що має нульовий час зростання до значення P_0 (нульової довжини переднього фронту). Графічно таке навантаження зображується «сходінкою» висоти P_0 .

Переходячи у формулі (8.132) до границі $\phi \rightarrow 0$ знаходимо

$$y(0, t) = -2P_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H(t - (2n + 1)T).$$

Зобразимо графічно перші доданки цієї суми з відповідними знаками на рис. 8.30, *a-z*. Їх алгебраїчна сума при $t < \phi$ дорівнює нулю. В момент часу ν напруга миттєво стає рівною подвоєному прикладеному тиску і зберігає це значення аж до $t = 3T$. Від $3T$ до $5T$ $y(0, t) = 0$ потім знову стрибком зменшується до P_0 і т. д., так що $y(0, t)$ – періодична функція часу з періодом $5T$. Для пояснення такої поведінки $y(0, t)$ запишемо механічну напругу в довільному перетині стрижня, припускаючи в формулі (8.132) $\phi \rightarrow 0$:

$$y(x, t) = -P_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(t - \frac{x}{c} - (2n + 1)T \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H \left(t + \frac{x}{c} - (2n + 1)T \right) \right].$$

Аналіз цієї формули спрощується тією обставиною, що при фіксованому значенні в кожній із сум відмінне від нуля кінцеве число перших доданків. Для моменту часу $t = T$ тотожно не рівний нулю лише перший член другої суми і розподіл напруг

$$y(x, t) = -P_0 H \left(t + \frac{x}{c} - T \right),$$

так що $y = -P_0$ при $x > c(T - t)$ і рівний нулю лівіше точки $x = c(T - t)$ – (рис. 8.30, *a*); відповідно на ділянці $x > c(T - t)$ деформації дорівнюють $\left(-\frac{P_0}{E}\right)$ – за її межами $\epsilon = 0$. Деформована ділянка розширюється вліво зі швидкістю c .

В інтервалі часу $T < t < 2T$ напруги рівні:

$$y(x, t) = -P_0 \left[H \left(t + \frac{x}{c} - T \right) + H \left(t - \frac{x}{c} - T \right) \right].$$

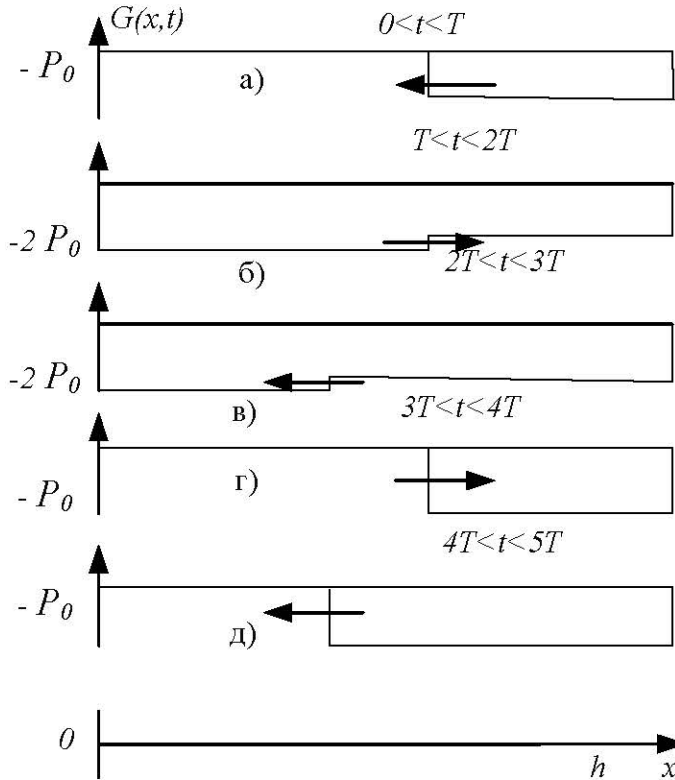


Рисунок 8.30 - Хвилі напруги в стрижні при навантаженні ступінчастим імпульсом тиску амплітуди

Імпульс стиснення відбивається від закріпленого торця $x = 0$ також у вигляді імпульсу стиснення. Перший доданок являє собою спадну хвилю і тотожно дорівнює одиниці, а другий – відбиту хвилю і дорівнює одиниці для $x < c(T - t)$ і нулю при $x > c(T - t)$. Лівіше фронту імпульсу, в тому числі і у закріпленні, $y = -2P_0$, правіше $y = -P_0$ (див. рис. 8.30, б).

Зрештою, при $3T < t < 4T$ цей імпульс, відбившись у незмінному виді від закріпленого торця і рухаючись вправо, залишає ділянку $z < c(t - 3T)$ позаду себе незбуреною (див. рис. 8.30, в). В момент $t = 4T$ стрижень знаходиться в стані спокою при нульових напругах і деформаціях по всій довжині. З моменту $t = 4T$ картина повторюється (див. рис. 8.30, д).

Нехай $t = T$. Формулу (8.132) запишемо у виді

$$y(0, t) = y_1(0, t) - y(0, t - 1),$$

$$y_1(0, t) = -2P_0[(t - 1)H(t - 1) - (t - 3)H(t - 3) + (t - 5)H(t - 5) - \dots].$$

Для послідовних інтегралів часу

$$\begin{aligned}
 0 < t < 1, & \quad y_1 = 0; \\
 1 < t < 3 & \quad y_1 = -2P_0(t - 1); \\
 3 < t < 5 & \quad y_1 = -4P_0; \\
 5 < t < 7 & \quad y_1 = -2P_0(t - 3)u
 \end{aligned}$$

і т. д., отримуємо графік $y_1(0, t)$ (рис. 8.31, *a*), де додатний напрям ординат відповідає від'ємним напругам. Побудувавши $-y_1(0, t - 1)$ і склавши ординати обох графіків, в результаті отримуємо графік $y(0, t)$. Штриховою лінією зображений відповідний зовнішній тиск, взятий з протилежним знаком.

Аналогічно будуються графіки $y(0, t)$ при $t = 2T, 3T, 4T, 6T, 10T$. Штрихові лінії відповідають прикладеному навантаженню. Для значення $\phi = 4T$, починаючи з моменту встановлення постійного навантаження, хвильовий рух відстуній: стрижень статично стиснений тиском P_0 .

Динамічність поля напруг, тобто максимальне, стосовно часу, відхилення $y(0, t)$ від значення P_0 , як видно з графіків, зменшується зі зростанням t . Починаючи з $\phi = 10T$ можна вважати напруги практично постійними, що дорівнюють для будь-яких моментів часу прикладеному зусиллю, тобто такими, які змінюються лише квазістатично. Останнє означає, що прискорення частинок стрижня, як і амплітуди хвиль напруг, є малими. Якщо характерний час зміни зовнішніх навантажень t набагато більший часу проходження пружною хвилею найбільшого лінійного розміру тіла, замість динамічної можна розв'язувати квазістатичну задачу як в даному, так і в більш складних випадках. При цьому відшукується розв'язок рівняння рівноваги, а час входить в цей розв'язок як параметр граничних умов.

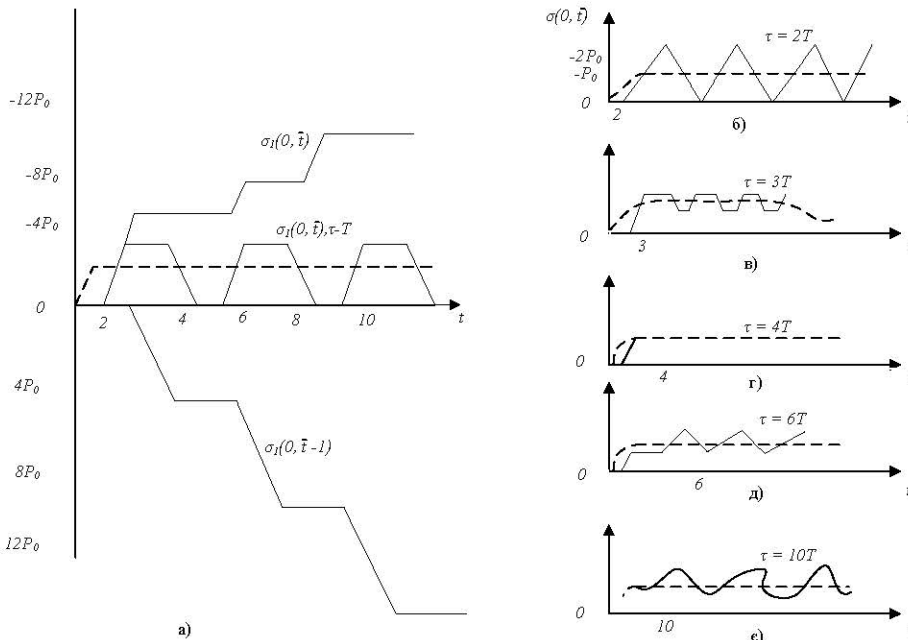


Рисунок 8.31 - Механічна напруга в закріпленні для різних значень довжини переднього фронту навантаження

8.2.3 Рівняння еліптичного типу в застосуванні до моделювання стаціонарних процесів

Рівняння Лапласа і Пуассона

Розглянемо стаціонарне теплове поле. В 8.2.1 було показано, що температура нестационарного теплового поля задовольняє диференціальне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \left(a = \frac{k}{cc} \right).$$

Якщо процес стаціонарний, то встановлюється розподіл температури $u(x, y)$, який не змінюється з плином часу i , відповідно, задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{8.133}$$

При наявності джерел тепла отримуємо рівняння

$$\Delta u = f, \tag{8.134}$$

де $f = \frac{F}{k}$ – щільність теплових джерел, а k – коефіцієнт теплопровідності. Неоднорідне рівняння (8.134) часто називають рівнянням Пуассона.

Розглянемо деякий об'єм T , обмежений поверхнею Σ . Задача про стаціонарний розподіл температури $U(x, y, z)$ всередині тіла формується так:

знайти функцію $U(x, y, z)$, що задовольняє всередині тіла T рівняння $\Delta u = -f(x, y, z)$ і граничну умову, яка може бути задана в одному з виглядів:

$$u = f_1 \text{ на } \Sigma \text{ (перша крайова задача);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2 \text{ на } \Sigma \text{ (друга крайова задача);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0 \text{ на } \Sigma \text{ (третя крайова задача);}$$

де f_1, f_2, f_3, h – задані функції; $\frac{\partial u}{\partial n}$ – похідна по зовнішній нормалі до поверхні.

Першу крайову задачу для рівняння Лапласа часто називають задачею Діріхле, а другу задачу – задачею Неймана.

Якщо відшукується розв'язок в області T_0 , внутрішній (чи зовнішній) відносно до поверхні Σ , то відповідну задачу називають внутрішньою (чи зовнішньою) крайовою задачею.

Як другий приклад розглянемо потенціальний потік рідини без джерел. Нехай всередині певного об'єму T з границею Σ має місце нестационарний потік нестискуваної рідини, що характеризується швидкістю $v(x, y, z)$. Якщо потік рідини не вихровий, то швидкість є потенціальним вектором, тобто

$$v = -grad(\Phi), \quad (8.135)$$

де Φ – скалярна функція, що називається потенціалом швидкості. Якщо відсутні джерела, то

$$div(v) = 0. \quad (8.136)$$

Підставляючи сюди вираз (8.135) для v , отримуємо $div[grad(\Phi)] = 0$ або:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (8.137)$$

тобто потенціал швидкості задовольняє рівняння Лапласа.

Нехай в однорідному середовищі тече стаціонарний струм з об'ємною щільністю $j(x, y, z)$. Якщо в середовищі немає об'ємних джерел струму, то

$$div(j) = 0. \quad (8.138)$$

Електричне поле E визначається через щільність струму з диференціального закону Ома

$$E = \frac{j}{\lambda}, \quad (8.139)$$

де λ – провідність середовища.

Оскільки процес стаціонарний, то електричне поле є безвихровим або потенціальним, тобто існує така скалярна функція $\Phi(x, y, z)$, для якої:

$$E = -grad\Phi \quad \text{або} \quad j = -\lambda grad\Phi, \quad (8.140)$$

тобто потенціал електричного поля стаціонарного струму задовольняє рівняння Лапласа.

Розглянемо електричне поле стаціонарних зарядів. Із стаціонарності процесу випливає, що

$$rotE = 0,$$

тобто поле є потенціальним і $E = -grad\Phi$.

Нехай $c(x, y, z)$ – об’ємна щільність зарядів, які наявні в середовищі, що характеризується діелектричною постійною $\epsilon = 1$. Виходячи з основних законів електродинаміки

$$\iint_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint_T c d\Phi,$$

де T – деякий об’єм; S – поверхня, що його обмежує, $\sum e_i$ – сума всіх зарядів всередині T , і, користуючись теоремою Остроградського

$$\iint E_n dS = \iiint_T div E d\Phi,$$

отримуємо

$$div E = 4\pi c$$

З урахуванням виразу (8.140) для E , маємо

$$\Delta\Phi = -4\pi c,$$

тобто електростатичний потенціал задовольняє рівняння Пуассона. Якщо об’ємних зарядів немає ($c = 0$), то потенціал повинен задовольняти рівняння Лапласа $\Delta\Phi = 0$. Основні крайові задачі для розглянутих процесів відносять до трьох типів, наведених вище.

Деякі окремі розв’язки рівнянь Лапласа. Гармонічні функції і їх застосування до розв’язання рівнянь Лапласа

Розглянемо розв’язки рівняння Лапласа, що мають сферичну або циліндричну симетрію, тобто залежать лише від однієї змінної r або s .

Розв’язок рівняння Лапласа $u = U(r)$, що має сферичну симетрію, буде визначатись зі звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо $U = \frac{C_1}{r} + C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Припускаючи, наприклад, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, отримуємо функцію:

$$U_0 = \frac{1}{r},$$

яку часто називають фундаментальним розв’язком рівняння Лапласа в просторі. Аналогічно, з урахуванням $u = U(s)$, знаходимо розв’язок, що має циліндричну або кругову симетрію (у випадку двох незалежних змінних), у вигляді $U(s) = C_1 \ln s + C_2$.

Обираючи $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ будемо мати:

$$U_0 = \ln \frac{1}{s}.$$

Функцію $U(s)$ часто називають фундаментальним розв’язком рівняння Лапласа на площині для двох незалежних змінних. Функція $U_0 = \frac{1}{r}$ задовольняє рівняння $\Delta u = 0$ всюди, крім точки $r = 0$, де вона перетворюється в нескінченність. З точністю до множника пропорційності вона збігається з полем

точкового заряду, що розміщується на початку координат. Потенціал цього поля $u = \frac{1}{r}$. Аналогічно, функція $\ln \frac{1}{c}$ задовольняє рівняння Лапласа всюди, крім точки $c = 0$, де вона перетворюється в додатну нескінченність, і з точністю множника збігається з полем зарядженої лінії, потенціал якого $u = 2e_1 \ln \frac{1}{c}$, де e – щільність заряду, розрахована на одиницю довжини. Ці функції мають велике значення в теорії гармонічних функцій.

Нехай $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – деяка функція комплексної змінної $z = x + iy$, причому u і v є дійсними функціями змінних x і y . Найбільший інтерес викликають так звані аналітичні функції, для яких існує похідна

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Приріст $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, може прямувати до нуля багатьма способами. Для кожного із способів прямування до нуля може бути своє значення границі. Однак, якщо функція аналітична, то границя $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ знаходиться за умови $z \rightarrow 0$ якщо $x \rightarrow 0$ або $i\Delta y \rightarrow 0$.

Необхідними і достатніми умовами аналітичності функції $w = f(z)$ є так звані умови Коші-Рімана

$$\left. \begin{aligned} u_x &= v_x \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \right\} \quad (8.141)$$

Ці умови можна отримати так.

Нехай $w = u + iv = f(z)$ – аналітична функція. Обчислюючи похідні

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{dw(z)}{dz} z_x = \frac{dw}{dz}; \quad w_y = u_y + iv_y = \frac{dw(z)}{dz} z_y = \frac{dw}{dz} i;$$

і вимагаючи рівність значень $\frac{dw}{dz}$, визначених на цих двох співвідношеннях, отримуємо $u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz}$, звідки і випливають умови Коші-Рімана.

В теорії функцій комплексного змінного доводиться, що функція, аналітична в певній області G площини $z = x + iy$, має в цій області похідні всіх порядків і розкладається в степеневий ряд. Зокрема, для такої функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають неперервні похідні 2-го порядку за x і y .

Диференціюючи першу рівність формули (8.141) по x , а другу по y отримуємо $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Так само, змінюючи порядок диференціювання, знаходимо

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Таким чином, дійсна і уявна частина аналітичної функції задовольняють рівняння Лапласа.

Розглянемо перетворення:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v), u = u(x, y) \\ y &= y(u, v), v = v(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (8.142)$$

яке взаємно однозначно відображає певну область площини (x, y) на область площини G , так що кожній точці області (x, y) відповідає визначена точка області G і навпаки, кожній точці області G відповідає визначена точка області (x, y) .

Нехай $U = U(x, y)$ – певна дійсна функція, двічі неперервно диференційовна, визначена всередині області G .

Визначимо, як змінюється при цьому перетворенні оператор Лапласа функції $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \tilde{U}(u, v)$.

Обчислимо похідні функції

$$\begin{aligned} U_x &= \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y, \\ U_{xx} &= \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_u u_{xx} + v_y v_{xx}, \\ U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_u u_{yy} + v_y v_{yy}, \end{aligned}$$

звідки отримаємо

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= \\ &= \tilde{U}_{uu}(u_x + v_y) + \tilde{U}_{vv}(v_x + v_y) + 2\tilde{U}_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \\ &\quad + \tilde{U}_u(u_{xx} + u_{yy}) + (v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned} \quad (8.143)$$

Якщо u і v є спряженими гармонічними функціями, то перетворення (8.142) еквівалентне перетворенню, здійсненому аналітичною функцією

$$W = f(z) = u + iv \quad (z = x + iy). \quad (8.144)$$

В цьому випадку в силу умов Коші-Рімана (8.141) для функцій u і v повинні виконуватись співвідношення

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2, \\ u_x v_x + u_y v_y &= 0. \end{aligned}$$

Формула (8.143) набуває вигляду

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv})|f'(z)|^2 \quad (8.145)$$

або $\Delta_{uv} U_{yy} = \frac{1}{|f'(z)|^2}$.

Звідси випливає, що в результаті перетворення (8.144) гармонічна в області G функція $U(x, y)$ переходить у функцію $U = U(u, v)$, гармонічну в області G , якщо тільки $|f'(z)|^2 \neq 0$.

При вивченні рівнянь еліптичного типу будемо користуватись формулами Гріна, які виходять з формули Остроградського.

Формула Остроградського в найпростішому випадку має вигляд

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma} R \cos \gamma dy, \quad (8.146)$$

де T – певний об'єм, обмежений достатньо гладкою поверхнею, $\Sigma R(x, y, z)$ – довільна функція, неперервна всередині $T + \Sigma$ і така, що має неперервні похідні всередині T ; γ – кут між напрямом осі і зовнішньою нормаллю κ . В справедливості цієї формули неважко впевнитись, виконуючи інтегрування за z .

Формулу Остроградського зазвичай записують у вигляді

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} \{ P \cos \beta + Q \cos \alpha + R \cos \gamma \} dy, \quad (8.147)$$

де $dv = dx dy dz$ – елемент об'єму; $\beta = (\vec{n}, \vec{x})$, $\alpha = (\vec{n}, \vec{y})$, $\gamma = (\vec{n}, \vec{z})$ – кути зовнішньої нормалі до поверхні з координатними осями, P, Q, R – довільні функції, які диференціюються.

Якщо P, Q, R розглядати як компоненти деякого вектора, то формулу Остроградського (8.141) можна записати таким чином:

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{A} dv = \iint_{\Sigma} \vec{A} \vec{n} dy,$$

де

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

і $(\vec{A} \cdot \vec{n}) = P \cos \beta + Q \cos \alpha + R \cos \gamma$ – складова вектора \vec{A} вздовж зовнішньої нормалі.

Перейдемо тепер до виведення формули Гріна. Нехай разом зі своїми першими похідними всередині $T + \Sigma$ існують і ті, які мають безперервні другі похідні всередині T .

Вважаючи, що $P = u \frac{dv}{dx}$, $Q = u \frac{dv}{dy}$, $R = u \frac{dv}{dz}$ і користуючись формулою Остроградського (8.146), приходимо до так званої першої формули Гріна:

$$\iiint_T u \Delta v d\phi = \iint_{\Sigma} u \frac{dv}{dn} dy - \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy, \quad (8.148)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ оператор Лапласа; $\frac{\partial}{\partial n} = \cos \beta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$ – похідна у напрямку зовнішньої нормалі. Якщо врахувати співвідношення $\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$, то формулу Гріна можна записати у вигляді $\iiint_T u \Delta v d\phi = - \iiint_{\Sigma} \nabla u \nabla v d\phi + \iint_{\Sigma} u \frac{dv}{dn} dy$.

Міняючи місцями функції, отримуємо

$$\iiint_T v \Delta u \, d\phi = - \iiint_\Sigma \nabla u \nabla v \, d\phi + \iint_\Sigma v \frac{du}{\partial n} \, dy. \quad (8.149)$$

Віднімаючи з рівності (8.147) рівність (8.148), знаходимо другу формулу Гріна

$$\iiint_T (u \Delta v - v \Delta u) \, d\phi = \iint_\Sigma \left(u \frac{dv}{\partial n} - v \frac{du}{\partial n} \right) \, dS. \quad (8.150)$$

Для функцій двох змінних $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ мають місце аналогічні формули Гріна. Друга формула Гріна в області S з границею C має вигляд $\iint_S (u \Delta v - v \Delta u) \, dS = \int_C \left(u \frac{dv}{\partial n} - v \frac{du}{\partial n} \right) \, dt$, де $dS = dx dy$; dt - елемент дуги уздовж C ; $\Delta_2 v_2 = v_{xx} + v_{yy}$ - похідна у напрямку до зовнішнього контуру нормалі \vec{n} .

Функція $M = \frac{1}{R}$, де $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - відстань між точками $M(x, y, z)$ і $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задовольняє рівняння Лапласа при $M \neq M_0$.

Нехай гармонічна функція, безперервна разом з першими похідними в області $T + \Sigma$, має другі похідні в області T і функція має всередині області T розрив неперервності в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тому безпосередньо застосовувати другу формулу Гріна в області до функцій не можна.

Функція $v = \frac{1}{R}$ обмежена в області T границею $T - K_e$, де K_e - куля радіуса e з центром в точці M_0 і поверхнею Σ_e (рис. 8.32).

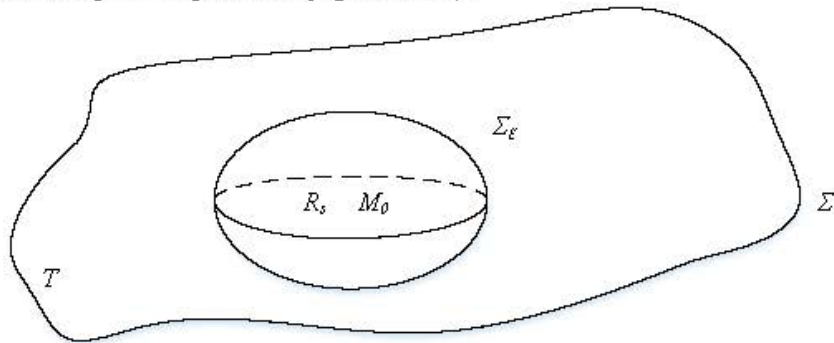


Рисунок 8.32 - Розрахункова схема для виведення формули Гріна

Застосовуючи другу формулу Гріна (8.144) до функцій u і $v = \frac{1}{R}$ в області, $T - K_e$, отримуємо

$$\begin{aligned} \iiint_{T-K_e} \left(u \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta u \right) \, d\phi &= \iint_{\Sigma_e} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dy + \\ &+ \iint_{\Sigma_e} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \, dy - \iint_{\Sigma_e} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \, dy. \end{aligned} \quad (8.151)$$

Обчислюючи похідну за зовнішньою нормаллю до області $T - K_e$ на Σ_e , знаходимо, що $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_e} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{r=e} = \frac{1}{e^2}$, звідки:

$$\iint_{\Sigma_e} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dy = \frac{1}{e^2} \iint_{\Sigma_e} u dy = -4\pi e^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right) = 4\pi e \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right), \quad (8.152)$$

де u^* – середнє значення функції $u(M)$ на поверхні. Перетворимо третій інтеграл:

$$\iint_{\Sigma_e} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dy = \frac{1}{e^2} \iint_{\Sigma_e} u dy = -4\pi e^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right) = 4\pi e \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right), \quad (8.153)$$

де $\left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right)$ – середнє значення нормальної похідної $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфері Σ_e . Підставляючи вирази (8.150) і (8.151) у формулу (8.149) і враховуючи, що $\Delta \frac{1}{R} = 0$ в $T - K_e$, знаходимо:

$$\iiint_{T-K_e} \left(-\frac{1}{R} \right) \Delta u d\Phi = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dy + 4\pi u^* - 4\pi e \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right). \quad (8.154)$$

Спрямуємо тепер радіус до нуля. Тоді:

1) $\lim_{e \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$, оскільки $u(M)$ неперервна функція, а u^* – її середнє значення на сфері радіуса з центром в точці M_0 ;

2) $\lim_{e \rightarrow 0} 4\pi e \left(\frac{\partial u^*}{\partial n} \right) = 0$, оскільки з неперервності перших похідних функцій всередині $u(M)$ одразу ж впливає обмеженість нормальної похідної в околі M_0 ;

3) за означенням невластного інтеграла маємо:

$$\lim_{e \rightarrow 0} \iiint_{T-K_e} \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) d\Phi = \iiint_T \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) d\Phi.$$

В результаті зазначеного граничного переходу $e \rightarrow 0$ переходимо до основної інтегральної формули Гріна

$$4\pi u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0-P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0-P}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dy - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0-P}} d\Phi, \quad (8.155)$$

де $P = P(o, z, \theta)$ – точка з координатами (o, z, θ) на поверхні Σ .

Якщо точка M_0 знаходиться поза межами області T , то зліва у формулі (8.155) отримаємо нуль.

Розглянемо випадок, коли M_0 належить поверхні Σ . Припустимо, що в точці M_0 поверхня має дотичну площину з неперервними кутовими коефіцієнтами. Сфера Σ_e радіуса e центром в M_0 перерізає поверхню Σ і ділить її на дві частини Σ_1 і Σ_2 , частина у розташована всередині кулі K_e . Формулу Гріна (8.150) застосуємо до u і $v = \frac{1}{R}$ в області $T - T_1$, де T_1 – область, обмежена Σ_1 і частиною сфери Σ_e , що лежить всередині області T . Загальна схема міркувань, що привели до формули (8.154), залишається незмінною, при цьому слід лише врахувати, що інтеграл прямує до $\Sigma_1 + \Sigma_e$, і внести відповідні зміни до виразів (8.152), (8.153) і (8.154). В результаті переходимо до формули, яка отримана з рівняння (8.155) при заміні 4π на 2π .

Об'єднуючи всі випадки, запишемо основну формулу Гріна у вигляді:

$$\Omega u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_p} (P) - u(P) \frac{\partial u}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] dy_p - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} d\Phi_p, \quad (8.156)$$

де $\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{якщо точка } M_0 \text{ лежить всередині } T, \\ 2\pi, & \text{якщо точка } M_0 \text{ лежить на границі } \Sigma, \\ 0, & \text{якщо точка } M_0 \text{ лежить поза межами } T. \end{cases}$

Відзначимо, що якщо точка M_0 є кінчною вершиною поверхні Σ , то $\Omega = \beta$, де β – величина тілесного кута, утвореного дотичними до Σ в точці M_0 .

Для гармонічної функції $\Delta u = 0$ і формула (8.156) набуває вигляду

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] dy_p, \quad (8.157)$$

де M_0 всередині T .

Таким чином, значення гармонічної функції в будь-якій внутрішній точці області виражається через значення цієї функції і її похідної на поверхні області. При цьому передбачається неперервність функцій $u(M)$ і її перших похідних аж до границі. Відзначимо відразу ж, що кожен з інтегралів

$$\iint_{\Sigma} m(P) \frac{1}{R_{M_0P}} dy_p \quad \text{і} \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{1}{R_{M_0P}} v(P) dy_p, \quad (8.158)$$

де m і v – неперервні функції, є гармонічними функціями поза межами поверхні Σ . Справді, оскільки підінтегральні функції і всі їх похідні неперервні поза межами поверхні Σ , то похідні функцій (8.157) будь-якого порядку можна обчислювати за допомогою диференціювання під знаком інтеграла.

Оскільки, крім того, функції

$$\frac{1}{R_{MP}} u \frac{\partial u}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \beta_p + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \nu_p + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \gamma_p$$

задовольняють рівняння Лапласа за $M(x, y, z)$, то в силу узагальненого принципу суперпозиції функції (8.157) також задовольняють рівняння Лапласа за змінними x, y, z .

Аналогічні формули мають місце і для гармонічних функцій двох незалежних змінних.

Нехай S – деяка область на площині, (x, y) обмежена контуром C , а n – напрям нормалі до цього контуру, зовнішній відносно до області. Вважаючи в другій формулі Гріна $v = \ln \frac{1}{R_{M_0P}}$, де $R_{M_0P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ – відстань $P(x, y)$ від фіксованої точки $M_0(x_0, y_0)$ і розмірковуючи аналогічно, як це було для тривимірного випадку, отримуємо основну формулу Гріна на площині

$$\Omega u(M_0) = \int \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] dS_p - \iint \Delta u(P) \ln \frac{1}{R_{M_0P}} dS_p,$$

де $\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{якщо точка } M_0 \text{ розташована всередині } S, \\ \pi, & \text{якщо точка } M_0 \text{ розташована на кордоні } C, \\ 0, & \text{якщо точка } M_0 \text{ розташована поза межами } S. \end{cases}$

Якщо $u(M)$ гармонічна всередині S функція M_0 і лежить всередині S , то

$$u(M_0) = \frac{1}{2p} \int \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] dS_p.$$

Встановимо кілька найважливіших властивостей гармонічних функцій.

1. Якщо v – функція, гармонічна в області T , обмеженою поверхнею Σ , то

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} dy = 0, \quad (8.159)$$

де S – будь-яка замкнена поверхня, яка повністю лежить в області T . Цю властивість гармонічних функцій можна інтерпретувати як умову відсутності джерел всередині області T .

2. Якщо функція $u(M)$ гармонічна в деякій області T , а M_0 – якась точка, що лежить всередині області, то має місце формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u dy, \quad (8.160)$$

де Σ_a – сфера радіуса a з центром в точці M_0 , яка повністю лежить в області T (теорема середнього значення).

Ця теорема стверджує, що значення гармонічної функції в деякій точці M_0 дорівнює середньому значенню цієї функції на будь-якій сфері Σ з центром в M_0 , якщо сфера Σ_a не виходить з області гармонічності функції.

3. Якщо функція $u(M)$, визначена і неперервна в замкненій області, $T + \Sigma$ задовольняє рівняння $\Delta u = 0$ всередині T , то максимальні і мінімальні значення функції досягаються на поверхні Σ (принцип максимального значення).

Метод функції Гріна

Будемо розглядати розв'язання крайових задач, що належать класу функцій, неперервних в досліджуваній області разом зі своїми першими похідними. Це дасть можливість широко використовувати інтегральні формули.

Розглянемо задачу Діріхле:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{коли } x \in V - FV \\ u = \psi, & \text{коли } x \in FV \end{cases}, \quad (8.161)$$

де V – обмежена область; а f і ψ неперервні функції. Припустимо, що

$$G(o, x) = \frac{1}{4p} \left[\frac{1}{r} + \phi(o, x) \right] \quad (r \equiv |o - x|), \quad (8.162)$$

фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в області V , яка перетворюється в нуль на її границі FV . Для цього функція $\phi(o, x)$ повинна бути розв'язком граничної задачі

$$\begin{aligned} \Delta \phi(o, x) &= 0, & \text{коли } o, x \in V - FV; \\ \phi(o, x) &= -\frac{1}{r}, & \text{коли } o \in FV, x \in V - FV. \end{aligned} \quad (8.163)$$

При підстановці в формулу (8.159) значення величин, які задані в граничній задачі (8.160), отримаємо

$$u(x) = - \iint_{FV} \text{ш} \frac{dG}{dn} dS_0 - \iiint_V fGdV, \quad x \in V - FV. \quad (8.164)$$

Якщо фундаментальний розв'язок $G(o, x)$ і його похідна $\frac{dG}{dn}$ існують, то ця формула дасть розв'язок задачі Діріхле (8.161), що належить розглянутому класу функцій, в інтегральній формі. Тим самим, розв'язок задачі Діріхле загального вигляду для неоднорідного рівняння зможе бути замінено відшукуванням функції $G(o, x)$, для чого потрібно знайти розв'язок задачі Діріхле вигляду (8.163) для однорідного рівняння. Фундаментальний розв'язок $G(o, x)$ називають функцією Гріна задачі (8.161) або функцією Гріна оператора Лапласа.

Отриманий результат безпосередньо поширюється на зовнішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа: $\Delta u = 0$. Що ж стосується зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Пуассона, то обґрунтування висновків, аналогічних проведеним для внутрішньої задачі, потребує узагальнення задачі на нескінченні області. Останнє можливо для розв'язків рівняння Пуассона, що задовольняють на нескінченності нерівності

$$u < \frac{A}{c}, \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| < \frac{A}{r^2}, \quad i = 1, 2, 3; \quad r > r_0, \quad (8.165)$$

де A і r_0 — обмежені числа, при додатковій умові, що інтеграл $\iiint_V fLdV$ має сенс. Нерівності (8.165) носять назву умов регулярності на нескінченності.

Отже, розв'язки розглянутого класу зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Пуассона, регулярні на нескінченності, за умови, що інтеграл має сенс, також подамо у формулі (8.164), якщо тільки відповідна функція Гріна існує.

Перейдемо до змішаної задачі:

$$\begin{aligned} \Delta U &= f, \text{ коли } x \in V - FV; \\ \frac{du}{dn} + vU &= \text{ш}, \text{ коли } x \in FV. \end{aligned} \quad (8.166)$$

Скориставшись тотожністю

$$L \left(\frac{du}{dn} + vu \right) - u \left(\frac{dL}{dn} + vL \right) = L \frac{du}{dn} - u \frac{dL}{dn}$$

і ввівши для скорочення позначення $P = \frac{d}{dn} + v$, перетворимо формулу (8.158) до вигляду

$$U(x) = \iint_{FV} (LPu - uPL) dS_0 - \iiint_V L \Delta u dV, \quad x \in V - FV. \quad (8.167)$$

Нехай $G(o, x)$ — фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в області V , що задовольняє умову $P_o G(o, x) = 0$, коли $o \in FV$, $x \in V - FV$.

Для цього функція $\Phi(o, x)$ повинна бути розв'язком граничної задачі

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_o &= 0, \text{ коли } o, x \in V - FV; \\ P_o \Phi &= -P_o \frac{1}{r}, \text{ коли } o \in FV, x \in V - FV. \end{aligned} \quad (8.168)$$

Підставивши в формулу (8.160) значення величин, задані в граничній задачі (8.160), і поклавши $L = G$, одержимо інтегральне подання розв'язку задачі (8.160):

$$U(x) = \iint_{FV} (LPu - uPL) dS_0 - \iiint_V L \Delta u dV, \quad x \in V - VF. \quad (8.169)$$

Фундаментальний розв'язок $G(o, x)$ називають функцією Гріна задачі (8.160).

Функція Гріна має простий фізичний зміст $u(\xi)$ поля, що створюється точковими джерелами.

Пояснимо це на прикладі поля точкового електричного заряду. За законом Кулона, у вільному просторі потенціал поля одиничного точкового заряду, розташованого в точці x , дорівнює $\frac{1}{4\pi r}$, де $r = |o - x|$. Припустимо, однак, що цей заряд розташований в площині всередині заземленого провідника. При цьому на границі порожнини будуть індуковані заряди, потенціал $\frac{\Phi}{4\pi}$ поля яких поза порожниною повинен компенсувати поле точкового заряду, оскільки потенціал заземленого провідника дорівнює нулю. Внаслідок цього, потенціал на границі порожнини повинен задовольняти граничну умову $\Phi = -\frac{1}{r}$. Звідси зрозуміло, що потенціал повного поля в порожнині $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \Phi \right)$ є функцією Гріна задачі Діріхле.

Ключові слова

Звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння в частинних похідних, моделювання технічних систем і процесів, стійкість, стабілізація, моделювання теплофізичних явищ, моделювання динамічних та стаціонарних процесів, аналітичне моделювання, інтегральна крива, задача Коші, крайова задача, функція Гріна, різницеве рівняння, диференціальні рівняння Лагранжа, стаціонарне та нестаціонарне температурне поле, рівняння теплопровідності, метод інтегральних перетворень, коливання струни, рівняння Лапласа, формула Гріна.

Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення інтегральної кривої.
2. Чим відрізняється задача Коші від крайової задач для звичайних диференціальних рівнянь?
3. Як звести диференціальне рівняння порядку n до системи з n диференціальних рівнянь першого порядку? Наведіть приклади.
4. Дайте означення функції Гріна.
5. Що є дискретним аналогом диференціального рівняння. Наведіть приклад загальної форми запису різницевого рівнянь.

6. Який вигляд мають диференціальні рівняння Лагранжа другого роду?
7. Наведіть приклади складання диференціальних рівнянь, що описують елементи технічних систем та процесів: різання, коливання, тертя та ін.
8. Наведіть приклади фізичних законів природи, які можна сформулювати мовою рівнянь з частинними похідними.
9. За якими основними ознаками класифікують диференціальні рівняння з частинними похідними?
10. Назвіть типи лінійних рівнянь з частинними похідними другого порядку та охарактеризуйте задачі, що ними описуються.
11. Яка відмінність стаціонарного та нестаціонарного температурних полів?
12. Що є основою виведення диференціального рівняння теплопровідності?
13. Які чинники та умови необхідно враховувати при розв'язанні задачі теплопровідності?
14. Які особливості задання початкових та граничних умов при розв'язанні задачі теплопровідності?
15. Яка відмінність крайових задач Діріхле та Неймана?
16. Охарактеризуйте аналітичні методи розв'язання задач теплопровідності.
17. До яких диференціальних рівнянь застосовується метод інтегральних перетворень?
18. Які особливості застосування методу функцій Гріна?
19. Наведіть розрахункову схему для виведення рівняння коливань струни.
20. Виведіть рівняння поперечних коливань струни.
21. Які особливості рівнянь повздовжніх коливань стрижнів і струн?
22. Охарактеризуйте типи граничних умов задачі коливань струни.
23. Яка особливість застосування методу характеристик до вивчення малих коливань струни?
24. Які відмінності в задачах коливань з обмеженою та необмеженою струни?
25. Сформулюйте задачу Коші для визначення коливань струни.
26. Який розподіл температури задовольняє рівняння Лапласа?
27. Чим характеризуються внутрішні і зовнішні крайові задачі для рівняння Лапласа?
28. Яку функцію називають фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа на площині?
29. Як виглядає розрахункова схема для виведення формули Гріна?

Література

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
2. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики / Владимиров В. С. И другие – М. : Наука, 2001. – 271 с.

3. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння / Ю. Д. Головатий, В. М. Кирилич, С. П. Лавренюк. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.
4. Оборский Г. А. Моделирование систем : монография / Г. А. Оборский, А. Ф. Дащенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин. – Одесса : Астропринт, 2013. – 664 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления.Т.2 / Пискунов Н. С. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
6. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. – Київ : Либідь, 2003 – 600 с.
7. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / Тихонов А. Н., Самарский А. А. – М. : Московский университет, 1999. – 798 с.
8. Вельмисов П. А. Уравнения математической физики / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 48 с.
9. Усов А.В. Математическое моделирование и оптимизация в системе компьютерной математики "Maple" / А. В. Усов, А. И. Третьяк, А. П. Коновалов – Одесса : Астропринт, 2016 – 456 с.
10. Усов А. В. Уравнения математической физики в моделировании технических систем / А. В. Усов, А. А. Шпинковский, М. И. Шпинковская – Киев : Освіта України, 2014. –190 с.
11. Усов А. В. Математическое моделирование технических систем / Усов А. В., Вайсман В. А., Дмитришин Д. В., Плотникова Л. И., Оборский Г. А. – К. :Техника, 1995. – 328 с.
12. Якимов А.В. Теплофизика механической обработки / Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. – К. : Наукова думка, 1991.– 270 с.
13. Усов А. В. Моделирование систем с распределенными параметрами / А. В. Усов, А. Н. Дубров, Д. В. Дмитришин – Одесса : Астропринт, 2002. – 664 с.
14. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельева, І. І. Становська – Одеса : Пальміра, 2011.– 500 с.
15. Дмитришин Д. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения / Д. В. Дмитришин, А. В. Усов, Ю. А. Морозов, В. В. Перстнева – Одесса : Астропринт, 2008. – 440 с.

Ключові слова

Звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння в частинних похідних, моделювання технічних систем і процесів, стійкість, стабілізація, моделювання теплофізичних явищ, моделювання динамічних та стаціонарних процесів, аналітичне моделювання, інтегральна крива, задача Коші, крайова задача, функція Гріна, різницева рівняння, диференціальні рівняння Лагранжа, стаціонарне та нестаціонарне температурне поле, рівняння теплопровідності, метод інтегральних перетворень, коливання струни, рівняння Лапласа, формула Гріна.

Контрольні запитання і завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення інтегральної кривої.
2. Чим відрізняється задача Коші від крайової задач для звичайних диференціальних рівнянь?
3. Як звести диференціальне рівняння порядку n до системи з n диференціальних рівнянь першого порядку? Наведіть приклади.
4. Дайте означення функції Гріна.
5. Що є дискретним аналогом диференціального рівняння. Наведіть приклад загальної форми запису різницевих рівнянь.
6. Який вигляд мають диференціальні рівняння Лагранжа другого роду?
7. Наведіть приклади складання диференціальних рівнянь, що описують елементи технічних систем та процесів: різання, коливання, тертя та ін.
8. Наведіть приклади фізичних законів природи, які можна сформулювати мовою рівнянь з частинними похідними.
9. За якими основними ознаками класифікують диференціальні рівняння з частинними похідними?
10. Назвіть типи лінійних рівнянь з частинними похідними другого порядку та охарактеризуйте задачі, що ними описуються.
11. Яка відмінність стаціонарного та нестаціонарного температурних полів?
12. Що є основою виведення диференціального рівняння теплопровідності?
13. Які чинники та умови необхідно враховувати при розв'язанні задачі теплопровідності?
14. Які особливості задання початкових та граничних умов при розв'язанні задачі теплопровідності?
15. Яка відмінність крайових задач Діріхле та Неймана?
16. Охарактеризуйте аналітичні методи розв'язання задач теплопровідності.
17. До яких диференціальних рівнянь застосовується метод інтегральних перетворень?
18. Які особливості застосування методу функцій Гріна?
19. Наведіть розрахункову схему для виведення рівняння коливань струни.
20. Виведіть рівняння поперечних коливань струни.
21. Які особливості рівнянь повздовжніх коливань стрижнів і струн?

22. Охарактеризуйте типи граничних умов задачі коливань струни.
23. Яка особливість застосування методу характеристик до вивчення малих коливань струни?
24. Які відмінності в задачах коливань з обмеженою та необмеженою струни?
25. Сформулюйте задачу Коші для визначення коливань струни.
26. Який розподіл температури задовольняє рівняння Лапласа?
27. Чим характеризуються внутрішні і зовнішні крайові задачі для рівняння Лапласа?
28. Яку функцію називають фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа на площині?
29. Як виглядає розрахункова схема для виведення формули Гріна?

Література

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
2. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики / Владимиров В. С. И другие – М. : Наука, 2001.– 271 с.
3. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння / Ю. Д. Головатий, В. М. Кирилич, С. П. Лавренюк. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.
4. Оборский Г. А. Моделирование систем : монография / Г. А. Оборский, А. Ф. Дашенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин. – Одесса : Астропринт, 2013. – 664 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления.Т.2 / Пискунов Н. С. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
6. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. – Київ : Либідь, 2003 – 600 с.
7. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / Тихонов А. Н., Самарский А. А. – М. : Московский университет, 1999. – 798 с.
8. Вельмисов П. А. Уравнения математической физики / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 48 с.
9. Усов А.В. Математическое моделирование и оптимизация в системе компьютерной математики "Maple" / А. В. Усов, А. И. Третьяк, А. П. Коновалов – Одесса : Астропринт, 2016 – 456 с.
10. Усов А. В. Уравнения математической физики в моделировании технических систем / А. В. Усов, А. А. Шпинковский, М. И. Шпинковская – Киев : Освіта України, 2014. –190 с.
11. Усов А. В. Математическое моделирование технических систем / Усов А. В., Вайсман В. А., Дмитришин Д. В., Плотникова Л. И., Оборский Г. А. – К. :Техника, 1995. – 328 с.
12. Якимов А.В. Теплофизика механической обработки / Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. – К. : Наукова думка, 1991.– 270 с.

13. Усов А. В. Моделирование систем с распределенными параметрами / А. В. Усов, А. Н. Дубров, Д. В. Дмитришин – Одесса : Астропринт, 2002. – 664 с.
14. Усов А. В. Математичні методи моделювання : підручник / А. В. Усов, О. С. Савельєва, І. І. Становська – Одеса : Пальміра, 2011.– 500 с.
15. Дмитришин Д. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения / Д. В. Дмитришин, А. В. Усов, Ю. А. Морозов, В. В. Перстнева – Одесса : Астропринт, 2008. – 440 с.

9 ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

З розвитком і поширенням використання обчислювальної техніки з'явилася можливість отримання результатів моделювання у задачах, де аналітичні методи або дуже складні для застосування, або взагалі не існують. Чисельне моделювання охоплює множину методів, переважно наближених, які використовуються для розв'язання прикладних математичних задач і орієнтовані на реалізацію у вигляді низки арифметичних і логічних операцій шляхом їхньої алгоритмізації та програмної реалізації на комп'ютерах. Методологічною базою для розвитку чисельних методів, що складають основу прикладного програмного забезпечення комп'ютерної техніки, стала теорія наближених обчислень, витоки якої слід шукати ще у старовинних математиків, які створювали такі методи для розв'язання задач, де не існувало точних розв'язків чи їх отримання було дуже складним. Розглянемо основні типи задач проектування, моделювання, обробки даних, для розв'язання яких традиційно використовуються чисельні методи :

1. Ідентифікація динамічних характеристик лінійних ланок при використанні різних описів сигналів на їх входах і виходах.

2. Використання методу найменших квадратів для ідентифікації передатної характеристики на масивах даних, що описують перехідну і частотну характеристики або сигнали на входах і виходах ланки.

3. Дослідження стійкості лінійних динамічних систем на основі використання різних критеріїв. Побудова області стійкості на площині параметрів системи.

4. Аналіз якості лінійних систем автоматичного управління. Визначення оптимальних дій управління – розв'язання алгебраїчного рівняння Ріккати (неперервний і дискретний випадки), до якого зводиться завдання про оптимальний лінійний регулятор. Розв'язання рівняння Ріккати пов'язано з виконанням ряду перетворень і розв'язком окремих завдань (складання вихідної матриці, перетворення подібності), що дозволяють привести матриці до вигляду Гессенберга і вигляду Шура. Знаходження власних значень матриць.

5. Дослідження нелінійних автоматичних систем на основі наближених методів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь. Застосування методів гармонічної лінеаризації і кусково-лінійної апроксимації.

6. Аналітичне імовірнісне моделювання систем на основі взаємопов'язаних імовірнісних (закони розподілу ймовірності) і енергетичних (спектральні щільності потужності) моделей.

7. Розв'язання задачі визначення розподілу значень фізичних величин (швидкостей потоку, звукової хвилі, температур) в замкнутій області на основі чисельних методів дослідження задач математичної фізики.

8. Дослідження систем методом планування експерименту.

9. Аналіз спектрів різних сигналів із застосуванням перетворення Фур'є в

завданнях розпізнавання образів і цифрової обробки сигналів.

10. Розв'язання завдань автоматизації проектування. У цьому напрямку накопичений великий досвід у створенні різних пакетів прикладних програм.

Цей перелік може бути продовжений і значно розширений, а з часом включає новітні методи, підходи, задачі чисельного моделювання.

9.1 Похибки та властивості обчислювальних методів та алгоритмів

Сьогодні множина методів, які використовуються для комп'ютерних обчислень, ширша, ніж множина саме обчислювальних методів чи так званих методів наближених обчислень. Але на практиці все ж таки саме ці методи стають основою для побудови комп'ютерних розв'язань математичних моделей систем і процесів. В них розглядаються такі алгоритми, які найчастіше пов'язані з розв'язанням дискретної задачі, що була задана як дискретна, чи виникла як результат дискретизації вихідної неперервної задачі. Простим прикладом дискретизації може слугувати побудова різницевої схеми, що виникає при заміні диференціальних рівнянь кінцево-різницеvими співвідношеннями. При дискретизації неперервної задачі обов'язково виникає *похибка дискретизації* (sampling error). Ця похибка є однією з головних складових в *похибці обчислювального методу*.

Іншою складовою похибки є *похибка округлення* (rounding error), яка виникає завдяки скінченній довжині розрядної сітки комп'ютера, що призводить до наближеного подання дійсних чисел. Величина цієї похибки визначається не тільки довжиною розрядної комп'ютерної сітки, а й чутливістю конкретного алгоритму до похибок округлення.

Можна виділити також *похибку зрізання* (truncation error), що виникає при заміні нескінченних рядів скінченними.

Наведемо головні властивості арифметичних операцій з похибками:

– *абсолютна похибка суми* k (k – будь-яке ціле число) наближених чисел не перевищує суми абсолютних похибок цих чисел

$$\Delta \left[\sum_{i=1}^k a_i \right] \leq \left[\sum_{i=1}^k \Delta_i \right];$$

– *відносна похибка суми* k наближених чисел не перевищує максимальної відносної похибки одного з цих чисел

$$\delta \left[\sum_{i=1}^k a_i \right] \leq \max_{1 \leq i \leq k} \delta_i;$$

– *відносна похибка добутку* k наближених чисел не перебільшує суми відносних похибок цих чисел

$$\delta \left[\prod_{i=1}^k a_i \right] \leq \delta \sum_{i=1}^k \delta_i,$$

де $\prod_{i=1}^k a_i = a_1 * a_2 * \dots * a_k$.

Треба розділяти *локальні* та *глобальні* похибки (local and global errors). *Локальні* виникають на кожному конкретному кроці обчислювального алгоритму, а *глобальні* охоплюють всі похибки, що виникли як на цьому кроці обчислень, так і на попередніх (ці похибки називають *похибками спадкування* чи *похибками поширення*).

Одним із головних критеріїв якості обчислювальних алгоритмів (окрім похибки при застосуванні наближених методів) є їх швидкодія, тобто кількість елементарних обчислювальних операцій (додавання, зсув, інверсія), яка потрібна для реалізації алгоритму.

Важливим є поняття *ітераційного* (циклічного) алгоритму (iterative algorithm), що визначається як багатокроковий, частіше за все, *рекурсивний* (завданий на основі такої функції, яка визначається зверненням до себе з певними аргументами) алгоритм, в якому кожний наступний крок виконується на основі попереднього. Причому можна відокремити суто ітераційні алгоритми за допомогою ітераційних процедур, де розглядаються розв'язки в окремих точках, та багатокрокові алгоритми, в яких розв'язок в попередній точці є основою для пошуку наступного. *Збіжність* є головною властивістю суто ітераційних рекурсивних алгоритмів: якщо вони не збігаються, то застосувати їх взагалі неможливо.

Наведемо декілька головних визначень властивостей обчислювальних методів та алгоритмів.

Стійкість алгоритму (stability of the algorithm) – здатність виконувати обчислення і отримувати кінцевий результат із заданою точністю при зміні параметрів алгоритму і вхідних даних в деякій області, яка називається областю стійкості.

Збіжність (convergence) – це властивість алгоритму шляхом зміни його параметрів виконувати обчислення зі скільки завгодно малою похибкою для заданого класу вхідних даних (тобто при збільшенні кількості ітерацій для алгоритмів, що збігаються, похибка буде прямувати до нуля). Причому підвищення точності досягається зміною внутрішніх параметрів алгоритму (наприклад, максимально допустимою різницею між попереднім та наступним наближенням).

Коректність обчислювального методу (the correctness of computational method) – це властивість безумовного існування розв'язку задачі та забезпечення стійкості обчислювального алгоритму, що реалізує цей метод.

розв'язку, ефективні в тому випадку, коли є багато нульових коефіцієнтів або високий порядок системи (метод Гаусса ефективний до порядку 10^4 , ітераційні – до 10^6).

9.2.1.1 Прямі методи

До найбільш популярних прямих методів відносять метод Гаусса та його різновиди, метод Крамера (визначників), метод оберненої матриці, а також метод прогонки, що використовується в задачах з діагональними матрицями. Проте метод Крамера (визначників), детально розглянутий в стандартних курсах вищої математики, не може бути застосований в більшості практичних задач через велику складність розрахунку визначників навіть при невеликому зростанні порядку системи. Тому в цьому розділі буде зосереджено увагу на розгляді методу Гаусса, який, якщо й поступається ітераційним методам в певних практичних застосуваннях, все ж таки є найбільш універсальним, а також методу прогонки, що використовується в задачах з діагональними матрицями.

Метод Гаусса

Цей метод є одним з найпоширеніших методів розв'язання СЛАР. У його основі лежить ідея послідовного вилучення невідомих, що приводить вихідну систему до трикутного виду, у якому всі коефіцієнти нижче головної діагоналі дорівнюють нулю. Існують різні обчислювальні схеми, що реалізують цей метод. Найбільше поширення мають схеми з вибором головного елемента по рядку, по стовпцю, або по всій матриці.

Класичний метод Гаусса (метод виключення) ґрунтується на приведенні матриці коефіцієнтів системи (9.1) до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

і складається з двох етапів: прямого ходу і зворотного підставлення. Етап прямого ходу закінчується, коли одне з рівнянь системи стає рівнянням з одним невідомим. Далі, здійснюючи зворотне підставлення, знаходять всі невідомі. З метою зменшення обчислювальної похибки використовують метод Гаусса з вибором головного елемента. Під головним елементом будемо розуміти максимальний за модулем елемент матриці A , обраний на заданій множині

Умови завершення прямого ходу методу Гаусса

При виконанні розрахунків може виникнути проблема: елемент $a_{k+1,k+1}^k = 0$. Ця ситуація виникає, коли всі елементи матриці A^k у рядках $i > k$ дорівнюють нулю. Система в цьому випадку має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^k x_2 + \dots + a_{1n}^k x_n = b_1^k \\ 0 + a_{22}^k x_2 + \dots + a_{2n}^k x_n = b_2^k \\ \dots \dots \dots \\ 0 + \dots 0x_{k-1} + a_{kk}^k x_k + \dots + a_{kn}^k x_n = b_k^k \\ 0 + \dots 0x_{k-1} + 0x_k + 0x_{k+1} + \dots + 0x_n = b_{k+1}^k \\ \dots \dots \dots \\ 0 + \dots 0x_{k-1} + 0x_k + 0x_{k+1} + \dots + 0x_n = b_n^k \end{array} \right. .$$

Застосування формул (9.3), (9.4) неможливе. В даному випадку система має нескінченну множину розв'язків, або не має їх зовсім. Це визначається з матриці B^k .

Якщо всі елементи $b_i^k = 0$ при $i \geq k+1$, то система має нескінченну множину розв'язків, причому корені x_1, \dots, x_k називаються залежними і виражають через значення x_{k+1}, \dots, x_n , які називають незалежними коренями.

Якщо хоч один елемент $b_i^k \neq 0$ при $i \geq k+1$, то розв'язків у системи немає.

У випадку, коли проблеми ділення на нуль не виникало і була отримана трикутна матриця A^n , система має єдиний розв'язок. Для його пошуку застосовується **зворотний хід методу Гаусса**:

$$\begin{aligned} x_n &= b_n^n \\ x_{n-i} &= b_{n-i}^n - \sum_{k=1}^i a_{n-k+1}^n \cdot x_{n-k+1}, \quad i = \overline{1, n-1} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Кількість арифметичних операцій для реалізації методу

$$N \approx \frac{2}{3} n^3.$$

Алгоритм методу наведений на рис. 9.1

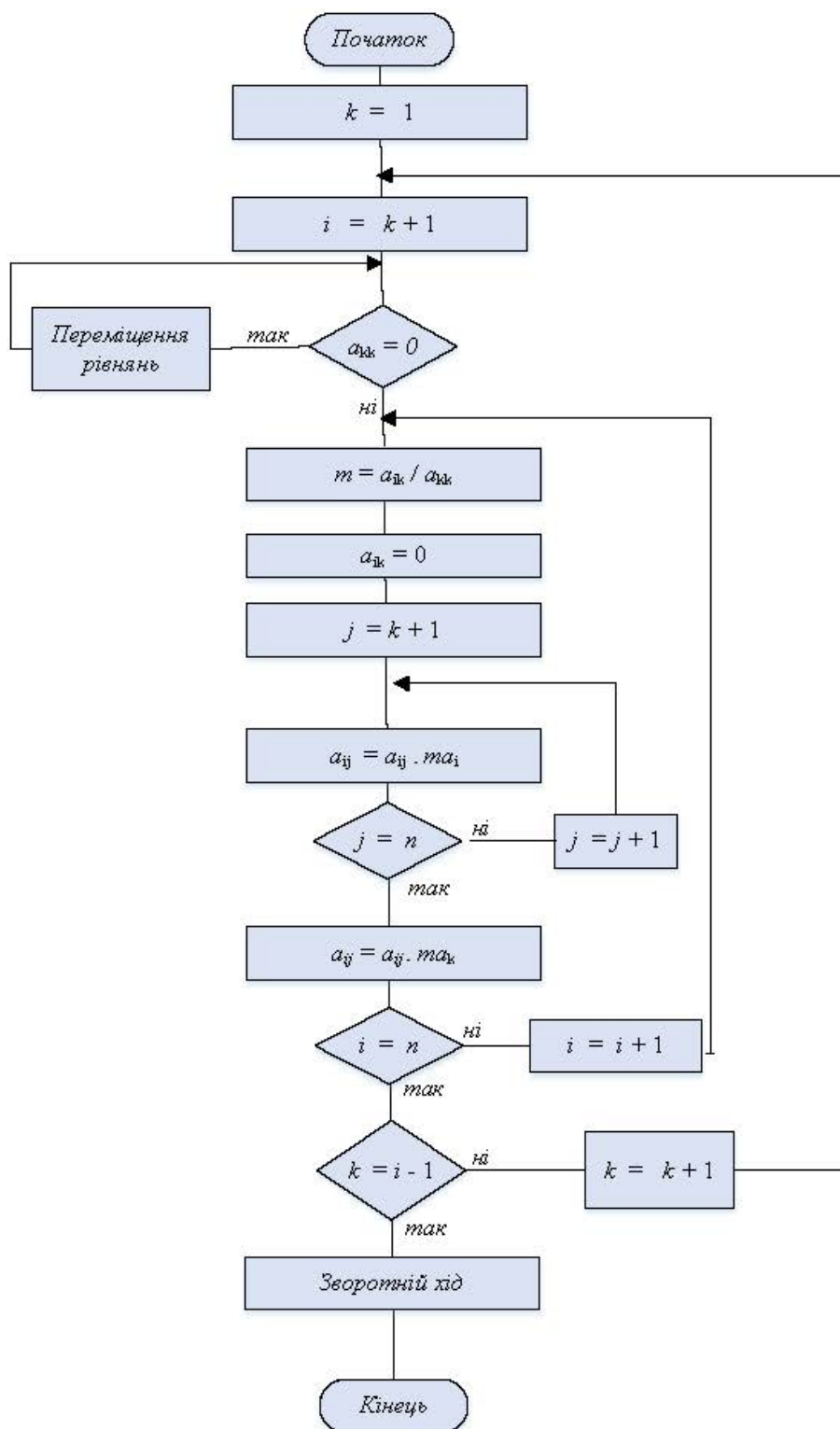


Рисунок 9.1 – Алгоритм методу Гаусса

Метод виключення Гаусса-Жордана

Цей метод дозволяє привести матрицю коефіцієнтів до діагонального вигляду. Єдиною його формальною відмінністю від попереднього методу є те, що замість $i > k$ підставляється $i \neq k$ (k -й рядок називається провідним). В методі Гаусса перетворення торкалися тільки рівнянь, що стоять нижче провідного рядка. Від класичного методу Гаусса цей метод відрізняється тим, що пронормований рядок віднімається не тільки від нижніх, а й від верхніх рівнянь системи, в результаті чого матриця A зводиться до одиничної. Зворотний хід в такому разі не потрібен, розв'язком системи буде стовпець B^n . Метод Гаусса-Жордана можна використовувати з вибором головного елемента чи без. Пошук головного елемента відбувається аналогічно попередньому методу. Формули (9.3), (9.4) з вказаними змінами будуть мати вигляд:

$$a_{ij}^{k+1} = \begin{cases} a_{ij}^k, & j \leq k \\ a_{k+1,j}^k / a_{k+1,k+1}^k, & i = k+1, j > k \\ a_{ij}^k - a_{k+1,j}^{k+1} \cdot a_{i,k+1}^k, & i \neq k+1, j > k \end{cases}, \quad (9.6)$$

$$b_i^{k+1} = \begin{cases} b_{k+1}^k / a_{k+1,k+1}^k, & i = k+1 \\ b_i^k - b_{k+1}^{k+1} \cdot a_{i,k+1}^k, & i \neq k+1 \end{cases}. \quad (9.7)$$

Цей метод полегшує одержання розв'язку, але супроводжується збільшенням обсягу обчислень.

Модифікований метод Гаусса

У багатьох випадках виникає необхідність розв'язання систем лінійних рівнянь із змінною матрицею коефіцієнтів і постійним стовпцем вільних членів. Найчастіше для розв'язання таких задач використовується модифікований метод Гаусса. В цьому методі матрицю коефіцієнтів A з матричного рівняння (9.1) подають у вигляді добутку лівої і правої трикутних матриць

$$L * R = A.$$

Оскільки діагональні елементи однієї з матриць дорівнюють одиниці, їх можна не запам'ятовувати, і обидві матриці зберігати в пам'яті ЕОМ на місці матриці коефіцієнтів.

У варіанті методу, що називається *методом Краута*, використовується така послідовність знаходження елементів матриць:

$$k = 1, 2, \dots, n;$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} r_{pk}, \quad i = k, k+1, \dots, n;$$

$$l_{kk} = \frac{1}{l_{kk}},$$

$$r_{kj} = l_{kk}(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}r_{pj}), \quad j = k + 1, \dots, n;$$

$$r_{kk} = 1.$$

Система $AX = C$ зводиться до системи $LRX = C$, розв'язання якої замінюється розв'язанням двох систем з трикутними матрицями:

$$LY = C,$$

$$RX = Y.$$

Елементи Y, X знаходять з таких співвідношень:

$$y_1 = l_{11}c_1;$$

$$y_i = l_{ii}(c_i - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}y_p), \quad i = 2, \dots, n;$$

$$x_i = y_i - \sum_{p=i+1}^n r_{ip}x_p, \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Число арифметичних операцій, необхідних для розв'язання цим методом системи лінійних алгебраїчних рівнянь, $N = 2n^2$.

Алгоритм модифікованого методу Гаусса наведено на рис. 9.2.

Застосування прямого ходу методу Гаусса для пошуку визначників

Для обчислення визначників матриць застосовують два підходи:

- рекурсивний розрахунок за допомогою розкладання за рядком чи стовпцем;
- обчислення на основі прямого ходу методу Гаусса.

Перший спосіб ґрунтується на використанні тієї властивості визначників, що визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їх алгебраїчне доповнення, тобто:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Таким чином, обчислення одного визначника n -го порядку зводиться до розрахунку n визначників порядку $n-1$. Реалізується даний спосіб за допомогою рекурсії.

Рекурсивний спосіб зручно застосовувати до рядків чи стовпців, що мають велику кількість нульових елементів. Якщо ж нульових елементів у матриці немає або дуже мало, то застосування цього способу є вкрай неефективним. Для

визначника порядку n доведеться розрахувати $n!/2$ визначників другого порядку.

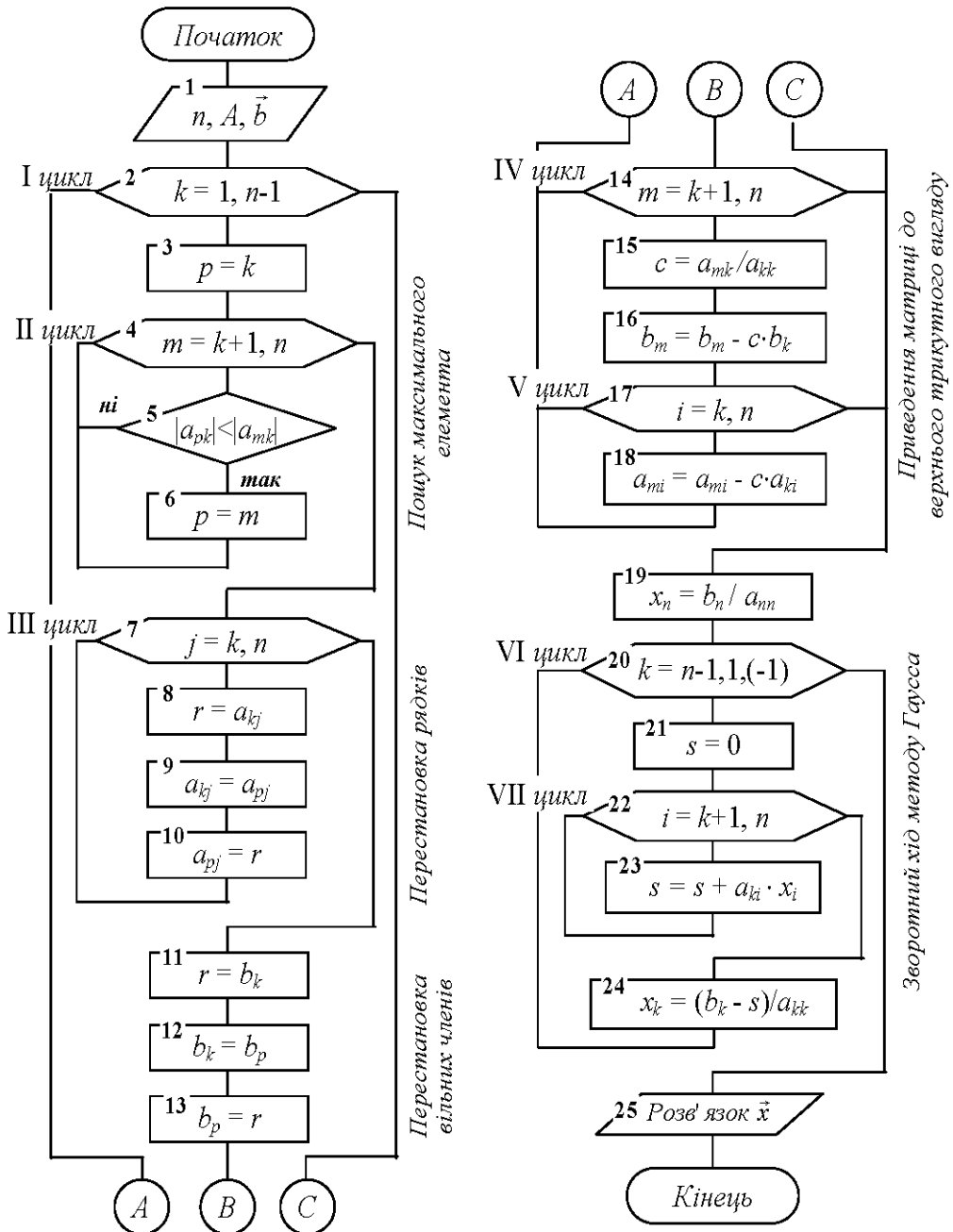


Рисунок 9.2 – Алгоритм модифікованого методу Гаусса

Метод, що базується на алгоритмі прямого ходу методу Гаусса, використовує властивість визначника трикутної матриці. Для такої матриці

визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Для обчислення визначника використовується алгоритм побудови послідовності матриць $A \rightarrow A^1 \rightarrow A^2 \rightarrow \dots \rightarrow A^n$ прямого ходу методу Гаусса з тією відмінністю, що при перестановленні рядків чи стовпців знак визначника змінюється на протилежний. Значення визначника розраховується за формулою:

$$\det(A) = (-1)^m \cdot a_{11} \cdot a_{22}^1 \cdot \dots \cdot a_{nn}^{n-1},$$

де m – кількість перестановок.

Метод Крамера

Даний метод полягає у обчисленні визначника $\det(A)$ матриці A , а також визначників $\det(A_k)$ матриць A_k , $k = \overline{1, n}$. Матриці A_k отримуються з матриці A шляхом заміни k -го стовпця на стовпець B .

Можливі варіанти:

1. Якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, який знаходиться за формулою:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}; \quad k = \overline{1, n}.$$

2. Якщо $\det(A) = 0$ та всі $\det(A_k) = 0$, $k = \overline{1, n}$, то розв'язків у системи нескінченна множина.

3. Якщо $\det(A) = 0$ і хоча б один $\det(A_k) \neq 0$, то система розв'язків не має.

Метод Крамера (визначників) може уповільнювати розв'язання практичних задач через велику складність розрахунку визначників навіть при невеликому зростанні порядку системи.

Метод оберненої матриці

Якщо задача розв'язання СЛАР вирішується у пакеті прикладних програм, в якому реалізована функція обчислення оберненої матриці, то для пошуку розв'язку можна застосовувати формулу:

$$X = A^{-1}B,$$

де A^{-1} – обернена матриця.

Нагадаємо визначення оберненої матриці. Оберненою до квадратної матриці A називається така матриця A^{-1} , для якої виконується співвідношення:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця.

$$u_i = -\frac{c_i}{a_i u_{i-1} + b_i},$$

$$v_i = \frac{\varphi_i - a_i v_{i-1}}{a_i u_{i-1} + b_i}$$

і далі

$$y_n = v_n,$$

$$y_i = u_i y_{i+1} + v_i, \quad i = n-1, \dots, 1, 0.$$

9.2.1.2 Ітераційні методи

Ітераційні методи особливо ефективні при високому порядку системи. Вони застосовуються в системах, попередньо приведених до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = b_{1,n}x_n + b_{1,n-1}x_{n-1} + \dots + b_{1,1}x_1 + b_{1,0}, \\ x_2 = b_{2,n}x_n + b_{2,n-1}x_{n-1} + \dots + b_{2,1}x_1 + b_{2,0}, \\ \dots \\ x_n = b_{n,n}x_n + b_{n,n-1}x_{n-1} + \dots + b_{n,1}x_1 + b_{n,0}. \end{cases} \quad (9.8)$$

або в матричній формі: $X = BX + B_0$,

$$\text{де } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ \vdots \\ b_{n0} \end{bmatrix}.$$

Існує декілька основних різновидів ітераційних методів. Це методи Якобі (простої ітерації), Гаусса–Зейделя і послідовної верхньої релаксації, в основі яких лежить систематичне уточнення значень змінних, заданих на початку розрахунку.

В методі Якобі початкові значення змінних використовуються для обчислення нових значень x_1, x_2, \dots, x_n за допомогою наведених нижче рівнянь. Процес припиняється, коли всі нові значення виявляються достатньо близькими до попередніх. В іншому випадку нові значення використовуються замість початкових. Ця процедура повторюється доти, доки не буде досягнута збіжність

або стане зрозуміло ясно, що процес розбігається. В цьому методі заміна значень всіх змінних проводиться одночасно (одночасний зсув).

Система ітераційних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = b_{11}x_1^{(m)} + b_{12}x_2^{(m)} + b_{13}x_3^{(m)} + \dots + b_{1n}x_n^{(m)} + b_{10}, \\ x_2^{(m+1)} = b_{21}x_1^{(m)} + b_{22}x_2^{(m)} + b_{23}x_3^{(m)} + \dots + b_{2n}x_n^{(m)} + b_{20}, \\ \vdots \\ x_n^{(m+1)} = b_{n1}x_1^{(m)} + b_{n2}x_2^{(m)} + b_{n3}x_3^{(m)} + \dots + b_{nn}x_n^{(m)} + b_{n0}; \end{cases}$$

де $x_i^{(m+1)}, x_i^{(m)}$, відповідно, значення, x_i ($i=1, \dots, n$) на наступній $(m+1)$ і попередній (m) ітераціях.

В методі Гаусса–Зейделя уточнене значення x_1 відразу ж використовується для обчислення x_2 . Потім за новими значеннями x_1 і x_2 визначаються x_3 і т. д. Це дозволяє істотно збільшити швидкість збіжності.

В методі послідовної верхньої релаксації нові значення кожної змінної обчислюються як:

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \omega(\bar{x}_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}),$$

де $\bar{x}_i^{(m+1)}$ – уточнене значення $x_i^{(m)}$ за методом Гаусса–Зейделя; ω – параметр релаксації ($1 \leq \omega \leq 2$).

При $\omega=1$ цей метод подібний до методу Гаусса–Зейделя. Швидкість збіжності залежить від ω .

Одним з головних питань щодо застосування ітераційних методів є збіжність. Для оцінювання збіжності обчислюються норми матриці коефіцієнтів $\|B\|$ з системи (9.2).

Найбільшого поширення набули такі способи оцінювання норм:

$$\text{I норма : } \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}|,$$

$$\text{II норма : } \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|,$$

$$\text{E-норма (Евклідова) : } \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2}.$$

Існує декілька підходів до визначення збіжності за допомогою оцінки норм. В загальному випадку достатньо, щоб хоча б одна з норм матриці B була

менша за одиницю

$$\|B\| < 1.$$

В математиці називають таку умову “звичайною” або “сильною”. В багатьох випадках збіжність забезпечується і при виконанні так званої “слабкої” ознаки. Наприклад, “слабка” ознака сум для рядків: для всіх сум коефіцієнтів рядків ($i = 1, \dots, n$) виконується співвідношення:

$$\sum_{j=i}^n b_{ij} \leq 1,$$

але є один рядок p для якого

$$\sum_{j=i}^n b_{pj} < 1.$$

Аналогічно визначається “слабка” ознака сум для стовпців.

“Слабка” ознака може використовуватися в тих випадках, коли матриця коефіцієнтів A системи рівнянь (9.1) є нерозкладна, тобто це квадратна матриця A , яку (на відміну від розкладної) не можна привести до вигляду:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

де A_1, A_3 – квадратні матриці.

Для розкладних матриць система рівнянь (9.1) розпадається на дві системи рівнянь, що розв’язуються послідовно. В більш детальних підручниках, список яких наведено в кінці цієї книги, міститься багато більш детальних доведень і аналіз властивостей та ознак для оцінювання збіжності, але для загальноінженерного підходу до багатьох практичних задач достатньо даних, що наведені вище.

9.2.1.3 Загальні висновки щодо застосування методів розв’язання систем лінійних рівнянь

При невеликих порядках системи (до 10-15) можна використовувати метод Крамера, який дозволяє отримати точний розв’язок і при таких порядках не потребує надто великої кількості обчислювальних операцій.

Такі задачі часто виникають при розрахунках невеликих електричних мереж чи підсистем автоматичного управління. Але зі зростанням кількості рівнянь в системі дуже швидко починає зростати і кількість операцій на обчислення визначників матриць, що призводить до спадання ефективності методу. Вже починаючи за 9-10-го порядку системи рівнянь метод Гаусса та його модифікації мають переваги; і взагалі є найбільш надійними методами. Але якщо матриці коефіцієнтів дуже розріджені, тобто містять багато нулів,

реалізація методу Гаусса починає потребувати великих обчислювальних витрат на зміну порядку рядків матриць, щоб забезпечити ненульове значення елемента, який видаляється на певному кроці. Задачі з розрідженими матрицями якраз і виникають в багатьох випадках проведення розрахунків у задачах математичної фізики, в яких для забезпечення точності проводиться достатньо щільна дискретизація з невеликим кроком. Взагалі для задач розв'язання систем рівнянь великого порядку (десятки, сотні, тисячі...) ітераційні методи не мають конкурентів, але лише у випадку забезпечення збіжності. Слід відзначити, що у багатьох практичних задачах збіжність забезпечується самою постановкою задачі (прикладі можна знайти у відповідних розділах цього підручника, де розглянуто розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних).

9.2.2 Визначення власних значень матриць

Багато задач моделювання зводиться до розгляду систем рівнянь, що мають єдиний розв'язок лише в тому разі, якщо відомо значення деякого внутрішнього параметра. Цей особливий параметр називають характеристичним або власним параметром (значенням) системи. При аналізі автоматичних систем власні значення дозволяють визначити критичні параметри керувальних впливів, перевищення яких призводить до втрати системою стійкості. При динамічному аналізі механічних або радіоелектронних систем з самозбудженням власні значення відповідають резонансним частотам коливань, а власні вектори характеризують амплітуди цих коливань.

Формулювання проблеми.

Знайти n скалярних значень λ і власних векторів X , що задовольняють матричне рівняння

$$AX = \lambda X. \quad (9.9)$$

Разом з звичайною задачею власних значень існує так звана узагальнена задача власних значень (задача для двох матриць A і F):

$$AX = \lambda FX.$$

Тут ми розглянемо тільки задачу, яка випливає з рівняння (9.9).

Згадаємо деякі означення з теорії матриць:

– квадратна матриця A називається особливою (сингулярною), якщо

$$\det A = 0;$$

– матриця A називається ортогональною, якщо

$$A^T A = E,$$

тобто $A^{-1} = A^T$, де T – знак транспонування;

– матриці A і B подібні, якщо існує така несингулярна матриця P , що

справедливо співвідношення

$$B = P^{-1}AP.$$

Доцільно перед аналізом методів визначення власних значень зупинитись на властивостях власних значень і векторів:

1. Всі n власних значень симетричної матриці розміру $n * n$, що складається з дійсних чисел, дійсні;

2. Якщо власні значення матриці різні, то її власні вектори ортогональні. Сукупність n лінійно незалежних власних векторів складає базис простору, що розглядається. Тому для сукупності лінійно незалежних векторів x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) будь-який вектор в тому ж просторі можна виразити через власні вектори;

3. Якщо дві матриці подібні, то їх власні значення збігаються. З подібності A і B випливає, що $B = P^{-1}AP$, оскільки $AX = \lambda X \Rightarrow P^{-1}AX = \lambda P^{-1}X$. Якщо прийняти $X = PY$, тоді $P^{-1}APY = \lambda Y$, тобто A і B не тільки мають однакові λ , але й їх власні вектори зв'язані співвідношенням $X = PY$;

4. Добуток власного вектора матриці на скаляр є власним вектором тієї ж матриці. Як правило, власні вектори нормалізують, розділивши їх на найбільший елемент або на суму квадратів елементів.

9.2.2.1 Методи обчислення власних значень

Вибір найбільш ефективного методу визначення власних значень або власних векторів для заданої задачі залежить від ряду факторів (тип рівнянь, число і характер власних значень, вигляд матриці і т. д.). Алгоритми визначення власних значень можна розподілити на 3 групи:

- прямі, основані на розкритті характеристичних (вікових) визначників $\det(A - \lambda E) = 0$ і розв'язанні характеристичних рівнянь;
- ітераційні, основані на багатократному застосуванні ітераційного алгоритму, який наближає власний вектор, що одержується в кожному циклі, до точного розв'язку;
- перетворення подібності, які використовують властивості подібних матриць, що мають однакові власні значення і ортогональні власні вектори.

Прямі методи

Найбільш очевидним шляхом розв'язання задач на власні значення є їх визначення з системи рівнянь, яка має ненульовий розв'язок лише в разі, коли $\det(A - \lambda E) = 0$.

Розв'язання в цьому випадку складається з двох етапів:

- розгорнення визначника безпосередньо або одним з відомих методів: Данілевського, Крилова, Лєвер'є, невизначених коефіцієнтів, інтерполювання і т. д.;

– розв’язання одержаного характеристичного рівняння, корені якого і будуть власними значеннями матриці. Для визначення коренів можна використати один з методів розв’язання нелінійних алгебраїчних рівнянь (розділ 3).

В таблиці 9.1 наведені результати порівняння ефективності різних методів розгорнення визначників, де критерієм є кількість обчислювальних операцій, а в таблиці 9.2 – порівняння методів розв’язання з точки зору складності, точності та швидкості збігання. Більш детальний опис цих методів можна знайти в підручниках, список яких наведено в кінці книги.

Таблиця 9.1 – Кількість дій, що використовуються різними методами розгорнення визначника залежно від його порядку

Метод	Порядок матриці									
	3		4		5		7		9	
	Множення-ділення (М-Д)	Додавання-віднімання (Д-В)	М-Д	Д-В	М-Д	Д-В	М-Д	Д-В	М-Д	Д-В
Безпосереднього розгорнення	12	10	60	46	320	238	13692	10078	986400	725758
Данілевського	14	12	42	36	92	80	282	252	632	576
Крилова	67	38	179	118	389	280	1287	1022	3209	2688
Леве́р’є	41	27	153	114	414	330	1791	1533	5228	4644
Невизначених коефіцієнтів	67	41	171	116	364	265	1189	945	2966	2481
Інтерполяції	46	38	125	102	279	230	972	826	2525	2202

Ітераційні методи

Ітераційні методи (Iteration methods) основані на багатократному використанні ітераційного алгоритму, що наближає власний вектор, який одержується в кожному циклі, до точного розв’язку.

Розрахунок починається з початкового нормованого вектора $X^{(0)}$, який множиться зліва на матрицю A , і результат дорівнює добутку постійної (власне значення λ) і нормованого вектора $X^{(1)}$:

$$AX^{(0)} = \lambda X^{(1)}.$$

Таблиця 9.2 – Вибір алгоритму розв'язання задачі на власні значення

Назва алгоритму	Застосовується для матриць	Результат	Рекомендується для пошуку власних значень			Примітка
			Max або min	Всі $x < 6$	Всі $x \geq 6$	
Визначник (ітерація)	Загального вигляду	Власні значення		x		Потребує знаходження коренів полінома загального вигляду
Ітерація (ітерація)	Загального вигляду	Власні значення і власні вектори	x	x	x	Забезпечує найкращу точність для найбільшого і найменшого власних значень
Метод Якобі (перетворення)	Симетричних	Діагональна форма матриці		x	x	Теоретично потребує нескінченного числа кроків
Метод Гівенса (перетворення)	Симетричних	Тридіагональна форма матриці		x	x	Потребує знання коренів простого полінома
	Несиметричних	Форма Гессенберга		x	x	Потребує застосування додаткового методу
Метод Хаусхолдера (перетворення)	Симетричних	Тридіагональна форма матриці		x	x	Потребує знання коренів простого полінома
Метод LR (перетворення)	Загального вигляду	Квазідіагональна форма матриці		x	x	Буває нестійкий
Метод QR (перетворення)	Загального вигляду	Квазідіагональна форма матриці		x	X	Найкращий метод, що має найбільшу узагальненість

Якщо вектор $X^{(1)}$ збігається з $X^{(0)}$, то розрахунок припиняється.

Інакше вектор $X^{(1)}$ використовується як початковий, і всі обчислення повторюються доти, доки $|X_i^{(n)} - X_i^{(n-1)}| \leq \varepsilon$, де $X^{(n)} \in \{x_i^{(n)}\}$ і $X^{(n-1)} \in \{x_i^{(n-1)}\}$ – вектори, що одержані в $n-1$ і n ітераційних циклах, а ε – задана припустима похибка обчислень.

Якщо процес збігається, одержаний постійний множник відповідає найбільшому власному значенню λ_{\max} , а нормований вектор – відповідному власному вектору.

Аналогічно можна знайти найменше власне значення. Для цього початкова система рівнянь попередньо множиться на обернену матрицю A^{-1} :

$$A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X,$$

звідки одержуємо $\frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X$.

Подальше розв'язання задачі на власні значення за аналогічним викладеному вище алгоритмом приводить до максимального власного значення $\lambda_{\max}^* = \frac{1}{\lambda_{\min}}$, за яким знаходиться найменше власне значення λ_{\min} .

Визначивши максимальне або мінімальне власне значення, можна знайти наступні за ним за величиною, замінивши вихідну матрицю матрицею, яка містить лише решту власних значень.

Принцип ортогональності власних векторів $X_i^T X_j = 0$ при $i \neq j$ і $X_i^T X_i = 1$ при $i = j$ дозволяє довести твердження, що якщо створити нову матрицю $A^* = A - \lambda_1 X_1 X_1^T$, то вона буде мати власне значення $\lambda_1 = 0$, а всі решта її власних значень будуть збігатися з власними значеннями вихідної матриці A . В результаті знаходимо λ_2 і далі, утворюючи A^{**} і т. д., аналогічно визначаємо всі власні значення і вектори.

Методи перетворень подібності

Методи перетворень подібності оснований на властивостях подібних матриць, які мають однакові власні значення і ортогональні власні вектори.

Ці методи використовуються для одержання з вихідної матриці нової, подібної до неї, але простішого вигляду. Очевидно, найкращим спрощенням було б приведення матриці до діагонального (або блоково-діагонального) вигляду. В цьому випадку власні значення відповідали б елементам матриці, що стоять на головній діагоналі (в випадку дійсних власних значень), або просто визначались би з квадратних матриць розміру 2×2 (в випадку комплексних), що стоять на головній діагоналі. Приведення до діагонального вигляду часто важко здійснити, тому в результаті більшість методів приводить матрицю до

тридіагонального вигляду, для якого існують достатньо добре досліджені і відпрацьовані на практиці методи знаходження власних значень. Як приклад можна навести метод, що приводить до послідовності Штурма і має таку властивість, що корені полінома i -го порядку розташовуються між коренями поліномів $(i+1)$ -го порядку (це значно спрощує їх визначення, оскільки обмежує ділянки відокремлення коренів). Вихідний визначник тридіагональної матриці

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_2 & & & \\ b_2 & a_2 - \lambda & & & \\ & & \dots & & \\ & & & a_{n-1} - \lambda & b_n \\ 0 & & & b_n & a_n - \lambda \end{vmatrix}$$

може бути поданий послідовністю поліномів Штурма

$$f_m(\lambda) = (a_m - \lambda)f_{m-1}(\lambda) - b_m^2 f_{m-2}(\lambda),$$

за умови $f_0(\lambda) = 1$ і $f_1(\lambda) = a_1 - \lambda$.

Приймаючи $m = 2, \dots, n$ і послідовно визначаючи корені, знаходимо власні значення як корені полінома n порядку.

Якщо в разі симетричних матриць ефективним способом знаходження власних значень є приведення матриці до тридіагонального вигляду, то для симетричних матриць доцільно користуватися методами перетворення подібності для приведення вихідної матриці до вигляду Гессенберга:

$$\begin{vmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * \end{vmatrix}$$

Для приведення матриць до тридіагонального вигляду (або вигляду Гессенберга) існує ряд методів, найбільш відомими з яких є методи Якобі, Гівенса, Хаусхолдера, які докладно розглядаються в спеціальній літературі. Переваги має (з точки зору швидкодії і кількості обчислювальних операцій) метод відображень, що запропонований Хаусхолдером. Цей метод дозволяє при виконанні одного кроку перетворень перетворити в нуль одразу всі елементи цілого рядка і стовпця, що стоять зовні трьох діагоналей, в той час як в методі Гівенса на кожному k -му кроці для цього необхідно зробити $(n^2 - 3n + 2)/2$ перетворень, а в методі Якобі створення нового нульового елемента може

супроводжуватись його зникненням в іншому місці матриці, тобто не гарантовано одержання результату за кінцеву кількість кроків.

Найбільш загальними з методів перетворень подібності є методи LR і QR , що основані на поданні матриці A у вигляді добутків $A=LR$ і $A=QR$, де L – ліва трикутна матриця з одиничними діагональними елементами; R – права трикутна матриця; Q – ортогональна матриця.

Далі, застосовуючи перетворення подібності

$$A^* = L^{-1}AL = L^{-1}(LR)L = RL,$$

$$A^* = Q^TAL = Q^T(QR)Q = RQ,$$

одержуємо послідовність матриць, яка прямує до квазідіагонального вигляду.

9.2.2.2 Порівняння методів визначення власних значень

Основними критеріями, що дозволяють оцінити ефективність методів знаходження власних значень стосовно їх алгоритмізації і використання для розв'язання задач на комп'ютерах, є точність, швидкодія (кількість обчислювальних операцій) і необхідний розмір пам'яті.

Швидкодія методу залежить від двох складових: кількості операцій в єдиному циклі і кількості циклів, необхідних для одержання результату.

Важливим критерієм оцінювання методів визначення власних значень є їх загальність (універсальність), тобто пристосованість до матриць різних виглядів, незалежно від симетрії і вигляду елементів (дійсні або комплексні).

Проаналізуємо з точки зору цих критеріїв методи знаходження власних значень.

Прямі методи приводять до необхідності розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь. Методи їх розв'язання достатньо добре розроблені. Але в задачах на власні значення часто зустрічаються кратні корені, при цьому ітераційні методи не гарантують одержання розв'язку. Швидкодія цих методів різко зменшується при підвищенні порядку матриці внаслідок зростання кількості операцій для обчислення визначника.

Ці недоліки ускладнюють використання прямих методів знаходження власних значень для великих матриць (порядку більше 10).

Істотним недоліком ітераційних методів розв'язання задач знаходження власних значень є накопичення помилок при кожному кроці ітераційного процесу (при визначенні максимального значення, створенні нової матриці і т. д.), тому практично ними можна користуватися для визначення не більше трьох-чотирьох власних значень.

В інших випадках доцільно користуватись методами перетворення подібності.

Найбільш ефективні методи перетворення подібності гарантують одержання результату при достатньо високій точності розв'язання. Часто

найефективніше розв'язання задачі забезпечується при одночасному використанні декількох методів перетворення подібності. Наприклад, методом Хаусхолдера матриця приводиться до вигляду Гессенберга, а потім методом QR визначаються власні значення.

Таким чином, вибір найбільш зручного алгоритму для розв'язання різних задач знаходження власних значень визначається типом власних значень, виглядом матриці і кількістю шуканих власних значень. Чим складніша задача, тим менше методів та алгоритмів, з яких можна вибирати. Найбільш універсальний алгоритм QR , але він і один з найскладніших. При малих порядках матриці $n < 3 \dots 5$ можна користуватись найпростішими прямими та ітераційними методами, а при збільшенні порядку і ускладненні вигляду матриці рекомендуються лише методи перетворення подібності. Таблиця 9.2 дозволяє полегшити вибір методу розв'язання задачі на власні значення. Звичайно пакети математичного забезпечення ЕОМ містять програми, в яких використовується більшість з цих алгоритмів. Одним з ефективних засобів використання наявних ресурсів ЕОМ є одночасне застосування двох підпрограм, що дозволяє поєднати їх найкращі якості.

9.3 Нелінійні задачі

До нелінійних рівнянь і систем рівнянь зводиться багато практичних задач, наприклад, розрахунки нелінійних електричних кіл та систем керування, розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, аналіз стійкості систем шляхом оцінювання їх власних значень та ін.

Якщо для найпростіших алгебраїчних рівнянь (не вище третього степеня) існують точні аналітичні формули, то для трансцендентних рівнянь і будь-яких систем рівнянь таких методів взагалі не існує і слід користуватися тільки наближеними ітераційними методами та алгоритмами, найбільш поширені з яких розглянуто нижче.

9.3.1 Розв'язання нелінійних рівнянь

Рівняння, в які входять тільки степені аргументу з відповідними коефіцієнтами, називаються алгебраїчними.

Загальний вигляд алгебраїчного рівняння:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (9.10)$$

Нелінійні рівняння, що містять тригонометричні, експоненціальні, логарифмічні або інші спеціальні функції, називають трансцендентними. Наприклад, трансцендентне рівняння може мати вигляд:

$$x^3 + x \sin(x) - 2 = 0.$$

Геометричний сенс розв'язання рівняння $f(x) = 0$, як алгебраїчного, так і трансцендентного, полягає у знаходженні точки перетину графіка функції $f(x)$ з віссю OX .

Можна виділити деякі важливі властивості алгебраїчних рівнянь, що спрощують визначення коренів. З метою полегшення розуміння матеріалу нагадуємо необхідні означення.

Функція $f(x)$ *неперервна в точці* x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Функція $f(x)$

неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна в будь-якій точці цього відрізка.

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називають:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Якщо функція має похідну в точці, то вона неперервна в ній. Обернене твердження не є достовірним.

Функція $f(x)$ *монотонна на відрізку* $[a, b]$, якщо її похідна має однаковий

знак (>0 або <0) на всьому відрізку $[a, b]$.

Функція $f(x)$ опукла (увігнута) в точці x_0 , якщо її друга похідна $f''(x_0) > (<) 0$.

1. **Основна теорема алгебри.** Алгебраїчне рівняння степеня n має n коренів, які можуть бути як дійсними, так і комплексними.

Кожен корінь рахується відповідну кількість разів, що дорівнює його кратності. Кратність кореня x_0 дорівнює k , якщо

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

2. Якщо всі коефіцієнти a_i рівняння (9.10) дійсні, то всі комплексні корені утворюють комплексно-спряжені пари.

3. **Теорема Декарта.** Число додатних дійсних коренів дорівнює (або менше) числу змін знаків в послідовності коефіцієнтів (те ж твердження справедливе відносно числа від'ємних дійсних коренів при заміні в (9.10) x на $-x$).

4. **Теорема Лагранжа.** Верхня межа позитивних дійсних коренів

$$R = 1 + k \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \quad a_0 > 0,$$

де k – номер першого від'ємного коефіцієнта; B – найбільша абсолютна величина від'ємного коефіцієнта.

5. **Теорема Гюа.** Якщо рівняння (9.10) має дійсні корені і дійсні коефіцієнти, то

$$a_k^2 > a_{k-1}a_{k+1}.$$

Нагадаємо, що прямі аналітичні методи існують лише для алгебраїчних рівнянь не вище третього порядку, а для трансцендентних рівнянь прямих методів взагалі не існує. При визначенні дійсних коренів чисельними методами треба враховувати три теореми. Перші дві дозволяють відокремити корені, тобто встановити якомога тісніші інтервали $[a, b]$, в яких знаходиться один і тільки один корінь рівняння, а третя – оцінити ступінь наближення.

Теорема 1. Якщо неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків на кінцях відрізка $[a, b]$, тобто $f(a)f(b) < 0$, то всередині цього відрізка міститься щонайменше один корінь рівняння $f(x) = 0$, тобто знайдеться хоча б одне число $\xi \in (a, b)$ таке, що $f(\xi) = 0$.

Теорема 2. Якщо монотонна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків на кінцях відрізка $[a, b]$, тобто $f(a)f(b) < 0$, то на цьому відрізку міститься рівно один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Теорема 3. Нехай ξ – точний, а \bar{x} – наближений корені рівняння $f(x) = 0$, які знаходяться на одному й тому ж відрізку $[a, b]$, причому $|f'(x)| \geq m, a \leq x \leq b$.

Тоді

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m}.$$

Розв'язання нелінійних рівнянь складається з двох етапів.

На першому етапі необхідно знайти відрізок $[a, b]$, на якому функція має рівно один нуль (відділення коренів).

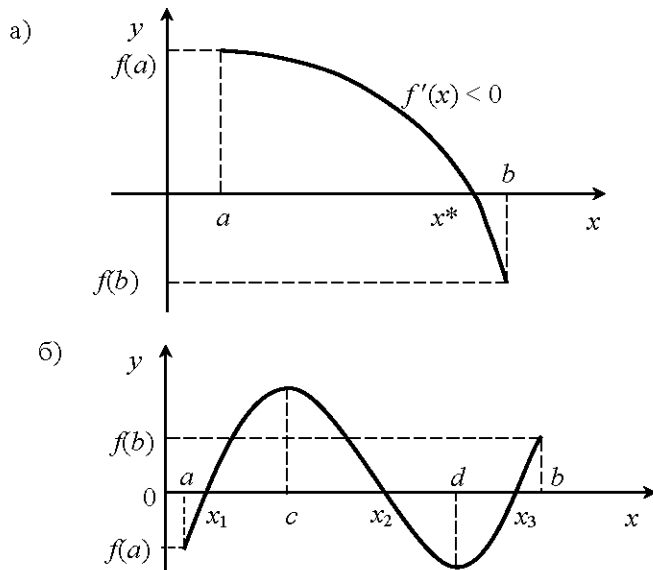
На другому етапі відбувається уточнення кореня на знайденому відрізку за допомогою одного з чисельних методів з заданою точністю.

Відділити корінь x^* рівняння $f(x) = 0$ – означає вказати окіл точки x^* , який не містить інших коренів цього рівняння.

Якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[a, b]$ приймає значення різних знаків, тобто якщо $f(a) \cdot f(b) < 0$, то всередині цього відрізка існує, принаймні, один корінь рівняння $f(x) = 0$ (рис. 9.3). При цьому корінь x^* буде єдиним, якщо $f'(x)$ зберігає знак усередині інтервалу $[a, b]$ (рис. 9.3, а).

На практиці відділення кореня рівняння $f(x) = 0$ на відрізку $[a, b]$ починається з перевірки умови $f(a) \cdot f(b) < 0$. Якщо ця умова виконана, то на $[a, b]$ є корінь, і подальше завдання полягає в з'ясуванні його єдиничності або неєдиничності.

Для відділення коренів практично досить провести процес половинного розділення, відповідно до якого відрізок $[a, b]$ ділиться на 2, 4, 8, ... рівних частин і послідовно визначаються знаки функції в точках поділу. При цьому якщо в точках поділу $\{x_i, x_{i+1}\}$ виконується умова $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$, то на інтервалі (x_i, x_{i+1}) є корінь рівняння $f(x) = 0$. При визначенні коренів завжди намагаються знайти інтервал (x_i, x_{i+1}) якомога меншої довжини.



Графічне відділення коренів рівняння полягає в знаходженні абсциси точки перетину графіка $y = f(x)$ з прямою $y = 0$, тобто віссю абсцис. При цьому, якщо побудувати графік $y = f(x)$ складно, то функцію подають у еквівалентному вигляді

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

з таким розрахунком, щоб графіки $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = -f_2(x)$ було простіше побудувати. Абсциси їх точок перетину будуть коренями рівняння. При графічному відділенні коренів рівняння результат залежить від точності побудови графіків.

Існує ряд методів наближеного розв'язання нелінійних рівнянь, доцільність застосування кожного з яких визначається виглядом рівняння, його порядком, потрібною точністю і т. д. При розгляді методів будемо вважати, що корені вже відділені.

Слід також пам'ятати, що при визначенні великої кількості коренів знижувати степінь початкового нелінійного рівняння шляхом ділення на $(x - x_i)$ (де x_i – знайдений корінь) треба дуже обережно, що пов'язано з накопиченням похибки розповсюдження, яка буде в коефіцієнтах нового рівняння.

9.3.1.1 Метод половинного ділення

Нехай дано рівняння $f(x)=0$. Необхідно знайти його корінь з точністю ϵ на відрізку $[a, b]$, на якому функція неперервна і на кінцях має значення різних знаків, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$. Таким чином, згідно з теоремою 1, на цьому відрізку існує хоча б один розв'язок рівняння.

Знаходиться середина відрізка $[a, b]$ точка c (рис. 9.4). Корінь може опинитись на відрізку $[a, c]$ або на $[c, b]$, чи збігатися з c . В останньому випадку метод припиняє роботу, інакше за допомогою перевірки виконання умов $f(a) \cdot f(c) < 0$ і $f(c) \cdot f(b) < 0$ з'ясується, на якій частині відрізка залишився корінь. Далі процедура повторюється для тієї половини відрізка, на якій є корінь, доки відрізок не зменшиться настільки, що його довжина буде менше від заданої похибки.

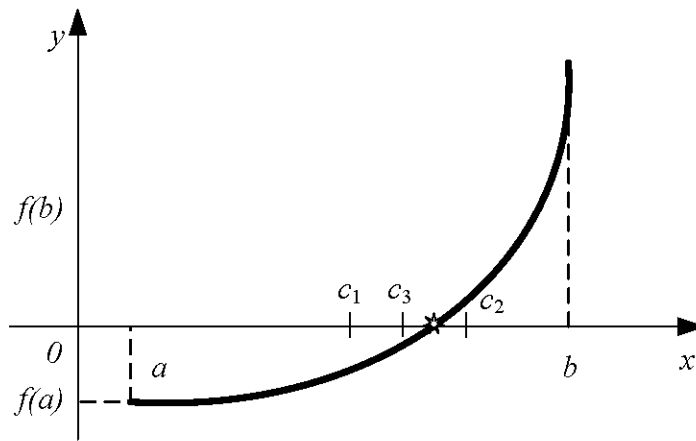


Рисунок 9.4 – Метод половинного ділення

Алгоритм методу

Крок 1. Знаходиться середина відрізка $c := (b+a)/2$.

Крок 2. Перевіряються нижчевикладені умови.

1. Якщо $f(c)=0$ – корінь знайдено.

2. Якщо $f(a) \cdot f(c) < 0$ – корінь на $[a, c]$, тому $b := c$.

3. Якщо $f(c) \cdot f(b) < 0$ – корінь на $[c, b]$, тому $a := c$.

Крок 3. Перевіряється умова $b-a < \epsilon$. Якщо вона виконується, то корінь знайдено. В цьому випадку він дорівнює $(a+b)/2$. Інакше повертаються до кроку 1.

Блок-схема методу наведена на рис. 9.5.

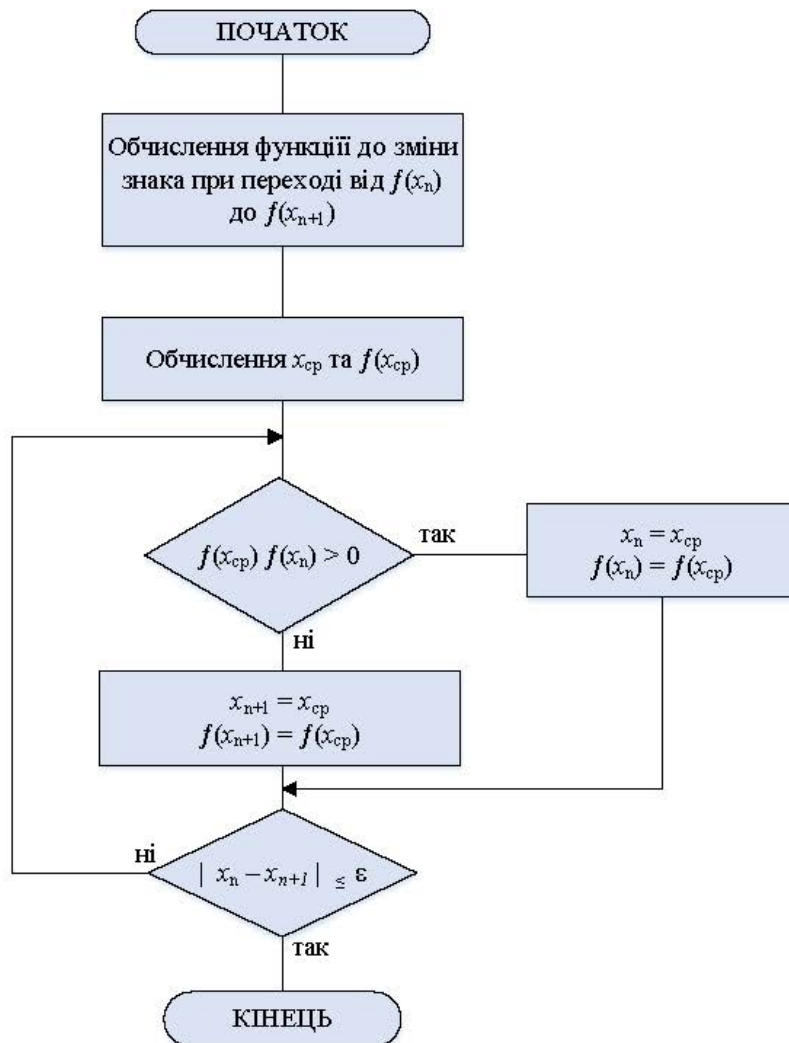


Рисунок 9.5 – Алгоритм методу половинного ділення

Похибка розв'язку Δ через n ітерацій знаходиться в межах

$$\Delta \leq \frac{1}{2^n} |x_1 - x_0|.$$

Метод має малу швидкість збіжності, оскільки інтервал, де знаходиться корінь, з кожним кроком зменшується не більше, ніж в два рази.

9.3.1.2 Метод хибного положення (хорд)

Нехай дано рівняння $f(x)=0$. Необхідно знайти його корінь з точністю ε на відрізку $[a, b]$, на якому функція неперервна і на кінцях має значення різних знаків, тобто $f(a)f(b)<0$. Таким чином, згідно з теоремою 1, на цьому відрізку існує хоча б один розв'язок рівняння.

Ідея методу хорд полягає в заміні на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ на пряму, що проходить через кінці її графіка (точки А з координатами $(a, f(a))$ та В $(b, f(b))$) (рис. 9.6).

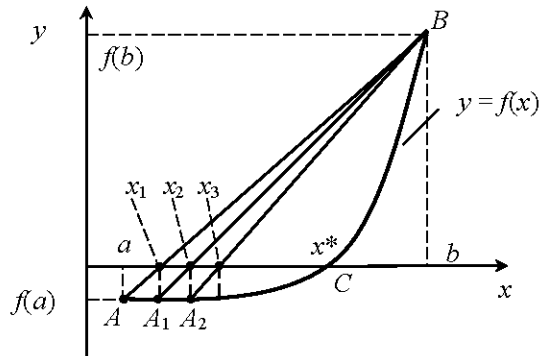


Рисунок 9.6 – Метод хорд

Шуканим коренем С буде перетин $f(x)$ з віссю OX . Рівняння прямої АВ запишемо у вигляді:

$$\frac{x-b}{y-f(b)} = \frac{x-a}{y-f(a)}.$$

Приймаючи $y = 0$, знаходимо $x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$. Цей вираз можна записати в вигляді:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}; \\ \text{або} \\ x_1 &= b - f(b) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Якщо x_1 виявляється недостатньо точним, знаходять друге наближення:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)}. \quad (9.12)$$

На підставі (9.11) і (9.12) можна записати рекурентну послідовність:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{b-x_k}{f(b)-f(x_k)}, \quad (9.13)$$

якщо $f(x_k) \cdot f(b) < 0$, і

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - a}{f(x_k) - f(a)} \quad (9.14)$$

якщо $f(x_k) \cdot f(a) < 0$.

Алгоритм методу

Крок 1. Знаходиться перша точка $x_1 := a - \frac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b) - f(a)}$.

Крок 2. Перевіряються нижчевикладені умови.

1. Якщо $f(x_1) = 0$ – корінь знайдено.
2. Якщо $f(a) f(x_1) < 0$ – корінь на $[a, x_1]$, тому $b := x_1$.
3. Якщо $f(x_1) f(b) < 0$ – корінь на $[x_1, b]$, тому $a := x_1$.

Крок 3. Запам'ятовується останнє наближення $x_p := x_1$.

Крок 4. Знаходиться нове наближення $x_1 := a - \frac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b) - f(a)}$.

Крок 5. Перевіряються нижчевикладені умови.

1. Якщо $f(x_1) = 0$ – корінь знайдено.
2. Якщо $f(a) f(x_1) < 0$ – корінь на $[a, x_1]$, тому $b := x_1$.
3. Якщо $f(x_1) f(b) < 0$ – корінь на $[x_1, b]$, тому $a := x_1$.

Крок 6. Перевіряється умова $|x_1 - x_p| < \varepsilon$. Якщо вона виконана, то

вважається, що корінь знайдено. В цьому випадку він приймається рівним x_1 .

Інакше перехід на крок 3.

Похибка розв'язку оцінюється за формулою:

$$\Delta \leq \frac{M_1 - m_1}{M_1} |x_{n+1} - x_n|,$$

де M_1, m_1 – відповідно, найбільше та найменше значення модуля першої похідної $f(x)$ на відріжку.

Якщо функція $f(x)$ монотонна та опукла (ввігнута), процес наближення до кореня буде відбуватись завжди з одного боку. Тому після визначення на кроці 2 частини відріжку, на якій є корінь, можна запам'ятати її нерухомий кінець і вилучити в циклі перевірку умов на кроці 5.

9.3.1.3 Метод Ньютона (дотичних)

На відміну від методу хорд, в методі Ньютона функція $f(x)$ замінюється на дотичну, і наближення до кореня рівняння визначається точкою перетину дотичної з віссю ОХ.

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

де x_0 – точка, в якій проведена дотична.

З геометричної точки зору x_{n+1} є значенням абсциси точки перетину дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $(x_n, f(x_n))$ з віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також методом дотичних.

Теорема 1. Якщо $f(x) \in C^2[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, а $f''(x)$ не змінює знака на $[a, b]$, то, виходячи з початкового наближення $x_0 \in [a, b]$, що задовольняє умову $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можна обчислити методом Ньютона єдиний корінь x_0 рівняння з будь-яким ступенем точності.

Очевидно, що точка перетину дотичної з віссю OX, яка визначає перше наближення до кореня, знаходиться за формулою:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

У точці x_1 проводиться ще одна дотична і знаходиться точка її перетину з віссю OX (рис. 9.7).

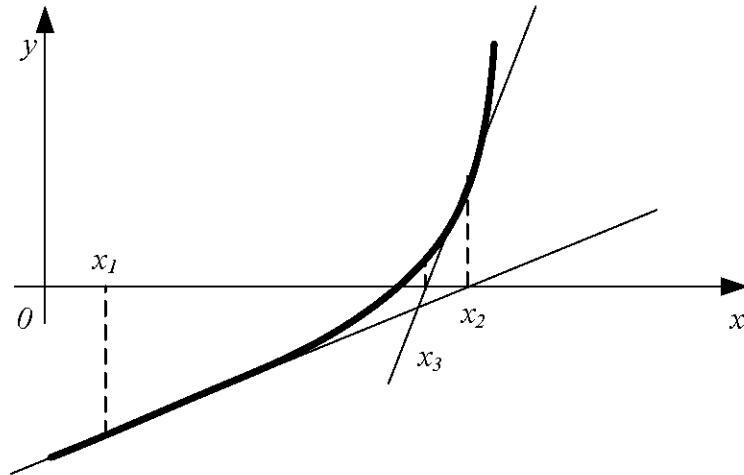


Рисунок 9.7 – Метод Ньютона

Таким чином, наступні наближення розраховуються за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

В основі цього методу лежить розкладання функції в ряд Тейлора

$$f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2}f''(x_n) + ..$$

Члени, що містять h у другому і більших степенях, відкидаються і в результаті отримується наведена вище наближена формула для оцінювання x_{n+1} .

Метод завершує роботу тоді, коли відстань між двома останніми точками не стане меншою за необхідну точність ε .

Для збіжності алгоритму необхідно, щоб функція $f(x)$ була монотонна та опукла (ввігнута) на відрізку $[a, b]$. Коли в процесі обчислень кут нахилу дотичної $f'(x)$ перетворюється на нуль, застосування цього методу ускладнюється. Можна також показати, що у випадку дуже великих значень $f''(x)$ чи кратних коренів метод Ньютона стає неефективним.

Початкове наближення слід вибирати за формулою:

$$x_0 = \begin{cases} a, & f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, & f(b) \cdot f''(b) > 0 \end{cases}$$

Як і в методі хорд, при програмній реалізації методу необхідно запам'ятовувати лише дві останні точки наближення.

Алгоритм методу

Крок 1. Знаходиться перша точка $x_t = \begin{cases} a, & f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, & f(b) \cdot f''(b) > 0 \end{cases}$.

Крок 2. Запам'ятовується останнє наближення $x_p := x_t$.

Крок 3. Знаходиться нове наближення $x_t = x_p - \frac{f(x_p)}{f'(x_p)}$.

Крок 4. Перевіряється умова $|x_t - x_p| < \varepsilon$. Якщо вона виконується, то корінь знайдено. В цьому випадку він приймається рівним x_t . Інакше перехід на крок 2.

Похибка методу оцінюється як

$$\Delta \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_{n+1} - x_n)^2,$$

де M_2 – найбільше за модулем значення другої похідної на інтервалі $[x_n, x_{n+1}]$.

9.3.1.4 Метод січних

Однією з головних проблем при застосуванні методу Ньютона є необхідність аналітичного опису похідної. Якщо це складно чи неможливо, то можна застосувати її наближену оцінку. Тоді замість методу дотичних

застосовується метод січних, за яким

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{F'(x_n)},$$

де $F'(x_n)$ – наближена оцінка похідної, що розглядається як січна, а не як дотична, і може бути оцінена за формулою

$$F'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

чи

$$F'(x_n) = \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h},$$

де h – деякий невеликий крок.

Алгоритм цього методу подібний до алгоритму методу Ньютона, але з іншою ітераційною формулою.

Геометрична інтерпретація методу наведена на рис. 9.8.

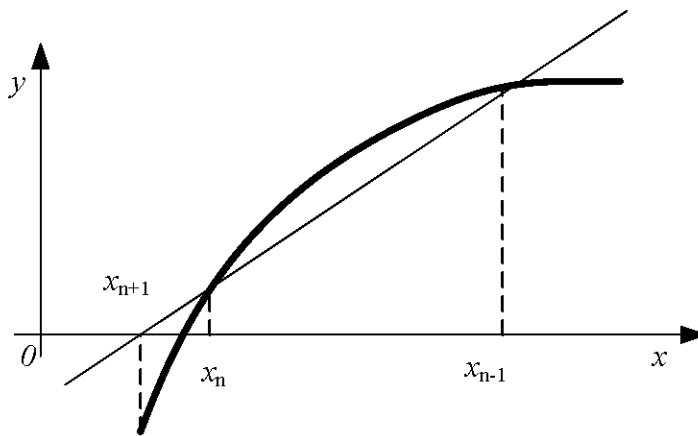


Рисунок 9.8 – Метод січних

9.3.1.5 Метод простої ітерації

Метод простої ітерації застосовується до розв'язування нелінійного рівняння вигляду

$$x = \varphi(x).$$

Вибравши нульове наближення x_0 , наступні наближення знаходяться за формулою

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.15)$$

Наведемо достатні умови збіжності методу простої ітерації.

Теорема 2. Нехай для вибраного початкового наближення x_0 на проміжку

$$S = \{x: |x - x_0| \leq \delta\}$$

функція $\varphi(x)$ задовольняє умову Ліпшица

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq q|x' - x''|, \quad x', x'' \in S, \quad (9.16)$$

де $0 < q < 1$, і виконується нерівність

$$|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)\delta.$$

Тоді рівняння $x = \varphi(x)$ має на проміжку S єдиний корінь x_* , до якого збігається послідовність (9.15), причому швидкість збіжності визначається нерівністю

$$|x_n - x_*| \leq \frac{q^n}{1 - q} |\varphi(x_0) - x_0|.$$

Якщо функція $\varphi(x)$ має на проміжку S неперервну похідну $\varphi'(x)$, яка задовольняє умову

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1,$$

то функція $\varphi(x)$ буде задовольняти умову (9.16) теореми 1.

Наведемо ще одну оцінку, що характеризує збіжність методу простої ітерації,

$$|x_n - x_*| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|.$$

Похибка методу на n -ій ітерації

$$\Delta \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Алгоритм методу

Крок 1. Знаходиться перша точка $x_t := (a + b) / 2$.

Крок 2. Запам'ятовується останнє наближення $x_p := x_t$.

Крок 3. Знаходиться нове наближення $x_t = g(x_p)$.

Крок 4. Перевіряється умова $|x_t - x_p| < \varepsilon$. Якщо вона виконана, то вважається, що корінь знайдено. В цьому випадку він приймається рівним x_t . Інакше перехід на крок 2.

Геометрична інтерпретація методу наведена на рис. 9.9.

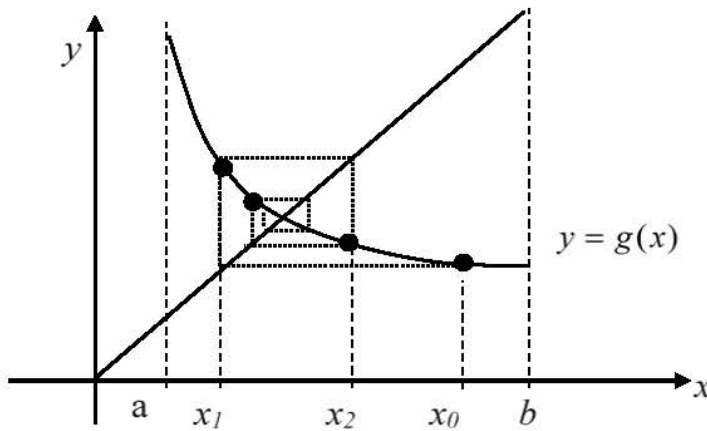


Рисунок 9.9 – Метод простої ітерації для випадку

9.3.1.6 Визначення комплексних коренів

Для визначення комплексних коренів можна застосовувати ті ж самі методи, що й для дійсних коренів, але при цьому оперують вже арифметикою комплексних чисел (контроль збіжності та похибки ведеться за модулем комплексного числа), що не завжди зручно.

Існує низка спеціальних методів, які дозволяють оцінювати комплексні корені, проводячи обчислення з дійсними числами. Більшість з цих методів базується на перетворенні початкового алгебраїчного рівняння (9.10) на добуток квадратичних множників виду

$$x^2 + px + q,$$

де p, q – коефіцієнти.

Проміжною формою для здійснення такого перетворення є рівняння у вигляді

$$(x^2 + px + q) \cdot (x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \dots + b_3x + b_2) + b_1x + b_0 = 0, \quad (9.17)$$

де $b_1x + b_0$ – лінійний залишковий член, який прагнуть звести до нуля, і щоб початкове рівняння (9.10) ділилося на квадратичний співмножник $x^2 + px + q$ без залишку.

Для того, щоб знайти коефіцієнти $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_3, b_2$ при припущенні $b_1 = b_0 = 0$, розглянемо систему рівнянь, що виходять з еквівалентності рівнянь (9.10) та (9.17):

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_{n-1} - p, \\ b_{n-2} = a_{n-2} - pb_{n-1} - q, \\ \vdots \\ b_{n-j} = a_{n-j} - pb_{n+1-j} - qb_{n+2-j}, \\ b_3 = a_3 - pb_4 - qb_5, \\ b_2 = a_2 - pb_3 - qp_4, \\ 0 = a_1 - pb_2 - qb_3, \\ 0 = a_0 - qb_2. \end{cases} \quad (9.18)$$

Вона може бути розв'язана методом прогонки чи ітераційним методом Ліна, алгоритм якого наведений на рис. 9.10.

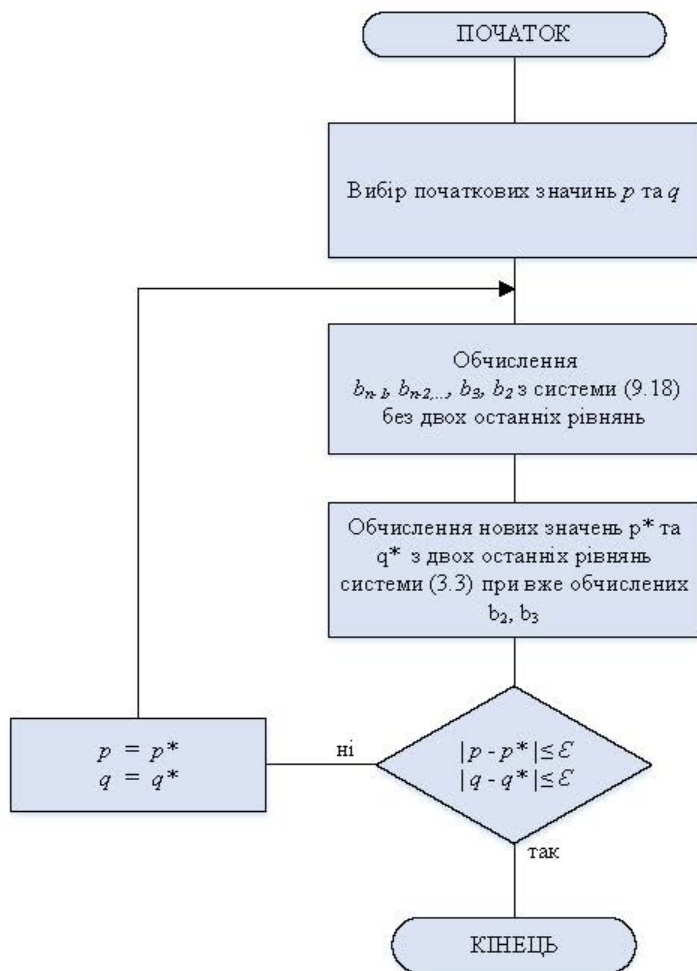


Рисунок 9.10 – Алгоритм методу Ліна

9.3.2 Розв'язання систем нелінійних рівнянь

В загальному випадку система з n нелінійних рівнянь з n невідомими подається у вигляді:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (9.19)$$

Оскільки нелінійні функції, що входять до системи, неможливо описати якоюсь визначеною загальною формою, то не може бути запропоновано будь-якого аналітичного прямого методу для розв'язання такої системи. З наближених ітераційних методів найбільш простим є метод простої ітерації, що базується на приведенні системи (9.19) до системи нелінійних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

або

$$X = G(X),$$

$$\text{де } G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Далі може бути застосований алгоритм, аналогічний методу Гаусса-Зейделя для систем лінійних рівнянь. В його основі ітераційні рівняння, що пов'язують $(m+1)$ та m ітерації

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = g_1(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), \\ x_2^{(m+1)} = g_2(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), \\ \vdots \\ x_n^{(m+1)} = g_n(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \dots, x_n^{(m)}). \end{cases}$$

Для цього методу дуже важко забезпечити збіжність, а інтервал збіжності може бути настільки вузьким, що вибір початкових наближень сильно ускладнюється.

В загальному випадку цей метод буде збігатися, якщо $\|G'(x)\| < 1$, де $\|G'(x)\|$ – норма матриці частинних похідних функцій за змінними x_1, x_2, \dots, x_n .

$$G'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Для розв'язання систем нелінійних рівнянь широке застосування набув більш стійкий метод – метод Ньютона. Він є аналогом методу Ньютона для одного рівняння і базується на розкладанні всіх n рівнянь у ряд Тейлора:

$$f_1(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + R_n;$$

$$\dots$$

$$f_n(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_n(x_1, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + R_n;$$

де R_n – члени другого та більших порядків, що в подальшому відкидаються.

Задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \vdots \\ -f_n \end{bmatrix}.$$

В цій системі матрицю частинних похідних називають матрицею Якобі і позначають $J(X)$.

Знайдені для певного $(m+1)$ кроку ітерації значення Δx_i використовуються як поправки до попередніх наближень

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = x_1^{(m)} + \Delta x_1, \\ \dots \\ x_n^{(m+1)} = x_n^{(m)} + \Delta x_n. \end{cases}$$

Загальна ітераційна формула в матричному поданні має вигляд:

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} - J^{-1} [X^{(m)}]_F [X^{(m)}],$$

де $F[X^{(m)}]$ – вектор-стовпець значень функцій f_1, f_2, \dots, f_n для наближень $X^{(m)}$; $J^{-1}[X^{(m)}]$ – обернена матриця Якобі.

Алгоритм методу Ньютона наведено на рис. 9.11.



Рисунок 9.11 – Алгоритм методу Ньютона для систем нелінійних рівнянь

Певні труднощі при реалізації алгоритму методу Ньютона виникають при оберненні матриці Якобі. Для цього використовуються відомі з лінійної алгебри способи обернення матриць.

Існує багато варіантів застосування методу Ньютона. Наприклад, модифікований метод Ньютона

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} - J^{-1}[X^{(0)}]F[X^{(m)}].$$

В цьому методі не треба обчислювати обернену матрицю Якобі на кожному кроці розрахунків, що спрощує алгоритм, але уповільнює збіжність і робить метод більш чутливим до вибору початкового наближення.

Метод Ньютона з параметром τ

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} - \tau J^{-1}[X^{(m)}] F[X^{(m)}].$$

Цей метод дещо схожий з методом послідовної верхньої релаксації для систем лінійних рівнянь.

Застосовуються також різноманітні гібридні методи, в яких поєднується метод Ньютона з методом простої ітерації.

Збіжність методу Ньютона оцінюється шляхом обчислення показника

$$q = \frac{M^2 LP}{2} < 1,$$

де

$$M \geq \|J^{-1}(X)\|,$$

$$L \geq \|J(X)\|,$$

$$P \geq \|J(X)\|,$$

причому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} MP \sum_{m=0}^l q^{2^m - 1} \rightarrow 0.$$

Похибка на m -й ітерації визначається нерівністю

$$\Delta \leq MP \frac{q^{2^m - 1}}{1 - q^{2^m}}.$$

9.3.3 Загальні висновки щодо застосування методів розв'язання нелінійних задач

При відшукуванні комплексних коренів розв'язання алгебраїчних рівнянь слід користуватися методами, що базуються на розкладанні вихідного рівняння на добуток квадратичних співмножників. Якщо треба відшукати всі корені рівняння (наприклад, в задачах аналізу стійкості систем автоматичного керування високого порядку), то треба контролювати кількість та кратність коренів за допомогою базових алгебраїчних теорем та правил, які наведено в цьому розділі. При знаходженні одного кореня у заданому інтервалі значень (наприклад, в задачах градування нелінійних перетворювачів та засобів вимірювання) можна використовувати метод Ньютона чи простої ітерації (якщо виконуються умови їх збіжності в інтервалі, де проводяться обчислення), як найшвидші методи, а у випадку, коли збіжність забезпечити важко, – метод половинного ділення як більш повільний, але надійний метод. В задачах з

трансцендентними рівняннями загальні рекомендації дати дуже важко і більш покладаються на досвід дослідника, який розв'язує задачу та фізичну інтерпретацію досліджуваного процесу.

9.4 Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь

Переважає більшість об'єктів є нестационарними та працюють в динамічних режимах, тобто вони змінюються у часі під впливом внутрішніх і зовнішніх чинників. Як моделі динаміки таких об'єктів використовуються диференціальні рівняння. Постановка задачі розв'язання диференціальних рівнянь викладена в 8 розділі цієї книги. Там же наведено аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь. Але аналітичні методи дозволяють знайти розв'язок невеликої кількості типів рівнянь, тому їх застосування є вельми обмеженим. На відміну від них чисельні методи дозволяють розв'язувати значно більшу кількість задач. В основі застосування чисельних методів лежить дискретизація відрізка $[a, b]$ з кроком h , в результаті чого формується послідовність вузлів $x_k = a + h \cdot k$, $k = \overline{0, n}$, $n = \frac{b-a}{h}$. Питома функція $y(x)$ знаходиться у вигляді таблично заданої функції, значення якої розраховуються у виділених вузлах.

9.4.1 Методи розв'язання задачі Коші

Нехай дано диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (9.20)$$

Потрібно знайти функцію на відрізку від $x=a$ до $x=b$, що задовольняє, як рівняння (9.20), так і початкову умову $y(a) = y_0$ (при цьому завжди припускається, що існує єдиний розв'язок на всьому відрізку).

Основою чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь є розкладання функції y в ряд Тейлора в околі початкової точки

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \dots + \frac{1}{k!} h^k y^{(k)}(x_0) \dots,$$

де h – відстань (крок) між початковою точкою x_0 і точкою $x_1 = x_0 + h$, в якій відшукується розв'язок.

В різних методах враховується різна кількість членів розкладу (в багатокрокових методах в поєднанні з інтерполяційними формулами), що визначає точність обчислень. При використанні цих методів на комп'ютерах слід розрізняти похибки округлення через обмеженість кількості значущих цифр; похибка зрізання (обмеження) – методична похибка, що пов'язана з апроксимацією розв'язків скінченними рядами, замість нескінченних, наприклад, рядами Тейлора з обмеженою кількістю членів.

Внаслідок цих причин виникають два види похибок:

– локальна – сума похибок, що вносяться в обчислювальний процес на конкретному кроці;

– глобальна (сумарна) – різниця між точним і обчисленим значеннями, яка містить так звану похибку розповсюдження внаслідок накопичення помилок на попередніх етапах обчислення.

Порядок методу дорівнює p , якщо існує таке додатне число c

$$\Delta \leq ch^{p+1}, \quad (9.21)$$

де Δ – локальна помилка; h – крок дискретизації.

Число c не залежить від номера кроку і його величини, а визначається похідними і довжиною інтервалу. При апроксимації розв'язання рядами Тейлора воно зв'язане зі степенем членів ряду, які відкидаються.

Методи розв'язання задачі Коші поділяють на однокрокові та багатокрокові.

В однокрокових методах для знаходження наступної точки на кривій $y = f(x)$ потрібна інформація лише про один попередній крок (методи Ейлера і Рунге – Кутта).

В багатокрокових методах (прогнозу і корекції) для знаходження наступної точки на кривій $y = f(x)$ потрібна інформація більш ніж про одну з попередніх точок. Щоб отримати достатньо точне чисельне значення часто використовується ітераційна процедура (наприклад, в методах Мілна–Адамса, Башфорта, Хеммінга).

9.4.1.1 Однокрокові методи

Найбільш простим однокроковим методом, який потребує мінімальних витрат обчислювальних ресурсів, але дає змогу обчислювати результат із порівняно низькою точністю, є метод Ейлера.

В цьому методі для оцінювання наступної точки на кривій $y=f(x)$ використовується лише один лінійний член в формулі Тейлора,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0),$$

де $y'(x_0)$ визначається з початкового рівняння.

Цей процес можна розповсюдити на наступні кроки:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Метод Ейлера є методом першого порядку ($p = 1$)

$$\Delta \leq ch^2,$$

де $c = (M_1 + M_0M_2)/2$, M_1, M_2 – визначаються як

$$M_0 \geq |f(x, y)|,$$

$$M_1 \geq \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|,$$

$$M_2 \geq \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$$

для всіх $x \in [a, b]$ і $y = y(x)$.

Метод Ейлера, крім значної похибки зрізання, часто буває нестійким (малі локальні помилки призводять до значного збільшення глобальної).

Цей метод можна вдосконалити різними способами. Найбільш відомі два з них: виправлений метод Ейлера і модифікований метод Ейлера (в літературі зустрічаються інші назви цих методів, наприклад, модифікований метод Ейлера й удосконалений метод ламаних).

Ітераційні формули для цих методів мають вигляд, відповідно:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hy_n^*) \right],$$

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{h}{2} y_n^* \right),$$

де $y_n^* = f(x_n, y_n)$.

Геометрична інтерпретація зображена на рис. 9.12, 9.13.

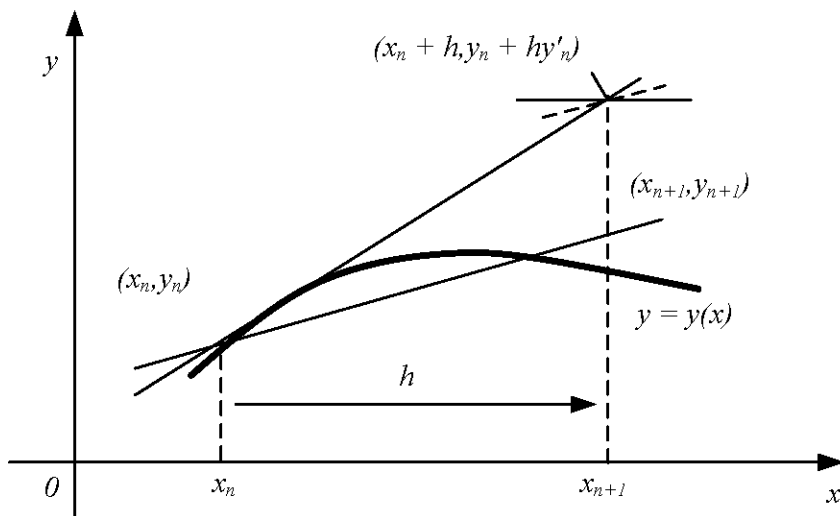


Рисунок 9.12 – Виправлений метод Ейлера

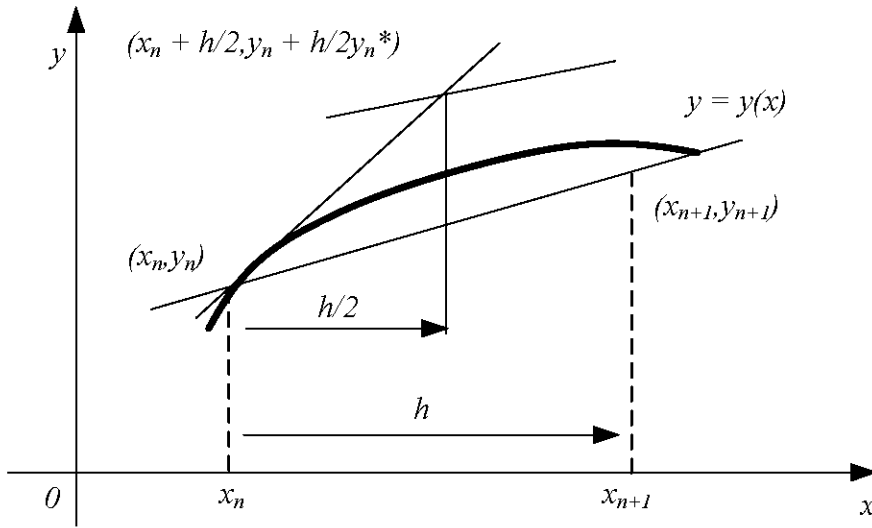


Рисунок 9.13 – Модифікований метод Ейлера

Це методи другого порядку, їх похибка має третій степінь, що досягається покращенням апроксимації похідної. Ідея полягає у спробі зберегти або оцінити член другого порядку у формулі Тейлора. Однак збільшення точності вимагає додаткових витрат машинного часу на обчислення y_n^* . Ще більш висока точність може бути досягнута при обчисленні вищих похідних і збереженні більшої кількості членів ряду Тейлора. Такими методами є методи Рунге – Кутта.

Принцип, на якому побудований модифікований метод Ейлера, можна пояснити, користуючись рядом Тейлора і зберігаючи в ньому член з h^2 . Апроксимація другої похідної $y''(x_0)$ здійснюється кінцевою різницею

$$y''(x_0) = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h}.$$

Аналогічно обчисленню другої похідної в кінцево-різницевому вигляді можна обчислити більш високі похідні: значення n -ї за значеннями попередньої $(n-1)$ -ї.

Метод Рунге–Кутта дає набір формул для обчислення координат внутрішніх точок, які потрібні для реалізації цієї ідеї. Оскільки існує ряд способів знаходження цих точок, то метод Рунге–Кутта об'єднує цілий клас методів для розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку.

Найбільш розповсюджений класичний метод четвертого порядку точності:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6},$$

де

$$k_0 = hf(x_n, y_n) \quad k_1 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_0}{2}\right);$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2}\right); \quad k_3 = hf(x_n + h; y_n + k_2).$$

Метод Ейлера і його модифікації ще називають методами Рунге–Кутта першого і другого порядку. Метод Рунге–Кутта має значно більшу точність, що дозволяє збільшити крок розв'язання. Його максимальну величину визначає припустима похибка. Такий вибір часто здійснюється автоматично і входить як складова частина в алгоритм, побудований за методом Рунге–Кутта.

Будь-яку з формул однокрокових методів можна використовувати для розв'язання систем диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь вищих порядків, які часто використовуються для опису складних динамічних процесів. Найбільше розповсюдження отримали системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}.$$

Для отримання однозначного розв'язку цієї системи задають початкові умови:

$$\begin{cases} y_1(a) = y_1^0 \\ y_2(a) = y_2^0 \\ \dots \\ y_n(a) = y_n^0 \end{cases}.$$

У векторному вигляді ця система записується так:

$$\begin{cases} \bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(a) = \bar{y}^0 \end{cases}.$$

У формулах однокрокових методів для розв'язання такої задачі Коші потрібно лише перейти до векторної форми. Наприклад, формули методу Рунге–Кутта 4-го порядку розв'язання задачі Коші для системи n диференціальних рівнянь першого порядку мають вигляд:

$$y_k(x_{i+1}) = y_k(x_i) + \frac{1}{6}(\eta_{1k}^i + 2\eta_{2k}^i + 2\eta_{3k}^i + \eta_{4k}^i),$$

де $\eta_{1k}^i = h \cdot f_k(x_i, y_1(x_i), \dots, y_n(x_i))$,

$$\eta_{2k}^i = h \cdot f_k(x_i + \frac{h}{2}, y_1(x_i) + \frac{\eta_{11}^i}{2}, \dots, y_n(x_i) + \frac{\eta_{1n}^i}{2}),$$

$$\eta_{3k}^i = h \cdot f_k(x_i + \frac{h}{2}, y_1(x_i) + \frac{\eta_{21}^i}{2}, \dots, y_n(x_i) + \frac{\eta_{2n}^i}{2}),$$

$$\eta_{4k}^i = h \cdot f_k(x_i + h, y_1(x_i) + \eta_{31}^i, \dots, y_n(x_i) + \eta_{3n}^i),$$

$k = \overline{1, n}$ – номер рівняння,

$i = \overline{0, m}$ – номер вузла, $x_0 = a$.

Задачу Коші для диференціального рівняння порядку n можна звести до задачі Коші для системи n диференціальних рівнянь першого порядку.

Нехай задача Коші має вигляд:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(a) = y_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(a) = y_{n-1} \end{cases}.$$

Зробимо заміну:

$$\begin{cases} z_1(x) = y'(x) \\ z_2(x) = y^{(2)}(x) \\ \dots \\ z_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases}.$$

Як результат отримаємо систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y'(x) = z_1(x) \\ z_1'(x) = z_2(x) \\ \dots \\ z_{n-2}'(x) = z_{n-1}(x) \\ z_{n-1}'(x) = f(x, y(x), z_1(x), \dots, z_{n-1}(x)) \end{cases}.$$

Початкові умови приймуть вигляд:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z_1(x_0) = y_1 \\ \dots \\ z_{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}.$$

Як приклад розглянемо розв'язання звичайного диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Нехай $z = \frac{dy}{dx}$, тоді $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$; і система набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \\ \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \end{cases}$$

де $f(x, y, z) = z$.

Задача Коші в цьому випадку містить дві початкових умови:

$$y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = y'(x_0) = z_0.$$

Формули Рунге – Кутта для цього випадку мають вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + k \quad \text{і} \quad z_{n+1} = z_n + l,$$

$$\text{де} \quad k = \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}, \quad l = \frac{l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3}{6},$$

$$k_0 = h z_n,$$

$$l_0 = h g(x_n, y_n, z_n),$$

$$k_1 = h \left(z_n + \frac{l_0}{2} \right),$$

$$l_1 = h g \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}, z_n + \frac{l_0}{2} \right),$$

$$k_2 = h \left(z_n + \frac{l_1}{2} \right),$$

$$l_2 = h g \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2} \right),$$

$$k_3 = h(z_n + l_2),$$

$$l_3 = h g(x_n + h, y_n + k_2, z_n + l_2).$$

Раніше було відзначено, що помилка зрізання при використанні методу Рунге–Кутта n -го порядку $\Delta \leq ch^{n+1}$. Обчислення верхніх границь для

коефіцієнта c є складною задачею, пов'язаною з необхідністю оцінювання ряду додаткових параметрів. Існує декілька способів для оперативного обчислення c . Найбільшого поширення набув екстраполяційний метод Річардсона (ще його називають методом Рунге), коли послідовно знаходять значення y_n з кроком h і з кроком $\frac{h}{2}$, а після цього прирівнюють отримані величини та визначають c з рівняння:

$$y_n^{(h)} + ch^{n+1} = y_n^{\left(\frac{h}{2}\right)} + c\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1},$$

що відповідає точному значенню y_n .

Отримаємо оціночне співвідношення:

$$c = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} \frac{\left[y_n^{\left(\frac{h}{2}\right)} - y_n^{(h)} \right]}{h^{n+1}}.$$

Можна виділити загальні риси однокрокових методів.

1. Щоб отримати інформацію у новій точці, потрібно мати дані лише в одній попередній точці. Цю властивість називають “самостартуванням” (*selfstarting*).

2. В основі всіх однокрокових методів лежить розкладання функції в ряд Тейлора, в якому зберігаються члени, що містять степені до k включно. Ціле число k називається порядком методу. Локальна похибка на одному кроці має порядок $k+1$. Для обчислення глобальної(повної) похибки треба додавати похибки на всіх попередніх кроках.

3. Всі однокрокові методи не вимагають обчислення похідних – обчислюється лише сама функція, але можуть вимагатися її значення в декількох проміжних точках.

4. Властивість “самостартуванням” дозволяє легко змінювати розмір кроку обчислення.

9.4.1.2 Багатокрокові методи

В цих методах для обчислення значення нової точки використовується інформація про декілька значень, що отримані раніше. Для цього використовуються дві формули: прогнозу і корекції. Алгоритм обчислення для всіх методів прогнозу і корекції однаковий та зображений на рис. 9.14. Вказані методи відрізняються лише формулами і не мають властивості “самостартуванням”, оскільки вимагають знання попередніх значень. Перш ніж

використовувати метод прогнозу і корекції, обчислюють початкові дані за допомогою будь-якого однокрокового методу. Часто для цього використовують метод Рунге–Кутта.

Обчислення виконують таким чином. Спочатку за формулою прогнозу та початковим значенням змінних знаходять значення $y_{n+1}^{(0)}$. Індекс (0) означає, що значення, яке прогнозується, є одним із послідовності значень y_{n+1} в міру їх уточнення. За значенням $y_{n+1}^{(0)}$ за допомогою початкового диференціального рівняння (9.20) знаходять похідну $y'_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$, яка після цього підставляється у формулу корекції для обчислення уточненого значення $y_{n+1}^{(j+1)}$. В свою чергу, за $y_{n+1}^{(j+1)}$ знаходять похідну $y'_{n+1}^{(j+1)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j+1)})$. Якщо це значення не достатньо близьке до попереднього, то воно вводиться у формулу корекції і ітераційний процес продовжується. У випадку близькості значень похідних визначається y_{n+1} , яке і є остаточним. Після цього процес повторюється на наступному кроці, на якому обчислюється y_{n+2} .

Зазвичай при виведенні формул прогнозу і корекції розв'язання рівняння розглядають як процес наближеного інтегрування, а самі формули отримують за допомогою методів чисельного інтегрування.

Якщо диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ проінтегрувати в інтервалі значень від x_n до x_{n+k} , то результат матиме вигляд

$$y(x_{n+k}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x, y) dx.$$

Цей інтеграл не можна обчислити безпосередньо, тому що $y(x)$ – невідома функція. Вибір методу наближеного інтегрування і буде визначати метод розв'язання диференціальних рівнянь. На етапі прогнозу можна використовувати будь-яку формулу чисельного інтегрування, якщо до неї не входить попереднє значення $y'(x_{n+1})$.

В таблицю 9.3 зведені найбільш розповсюджені формули прогнозу і корекції. Для більшості методів прогнозу і корекції оцінюють похибку, користуючись таким співвідношенням:

$$\Delta \leq \frac{1}{5} [y_n^{(0)} - y_n^{(j)}]$$

Мірою похибки є $y_n^{(j)}$, що входить до алгоритму рис. 9.14.

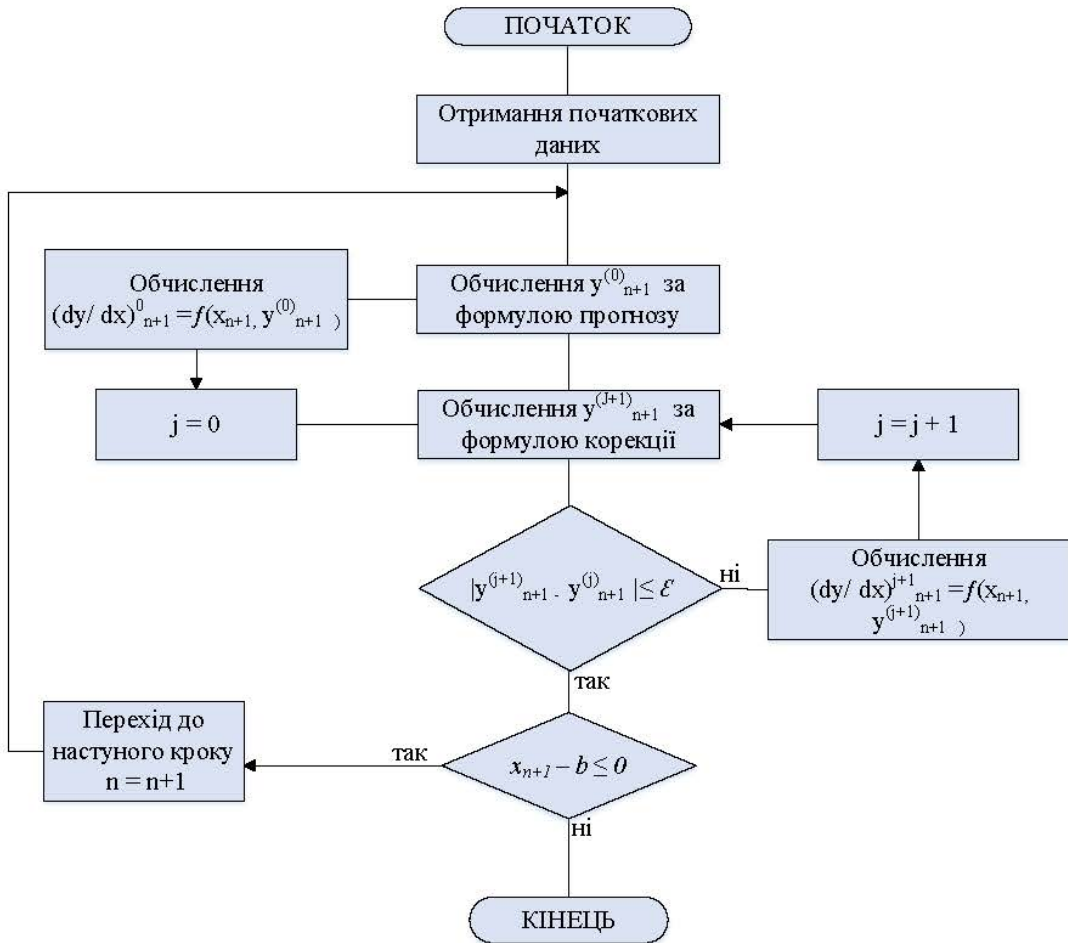


Рисунок 9.14 – Алгоритм методів прогнозу та корекції

Часто в довідниках наводяться більш точні формули для оцінювання похибки багатокрокових методів.

При виборі величини кроку можна скористатися умовою:

$$h < \frac{2}{M_2},$$

де $M_2 = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\max}$.

Виконання цієї умови необхідно для збіжності ітераційного процесу відшукування розв'язку.

Таблиця 9.3 – Найбільш поширені формули прогнозу і корекції

Метод	Формула прогнозу	Формула корекції
Мілна	$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h^*$ $*(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}),$ $\Delta \leq \frac{28}{90}h^5 y^{(v)},$ <p>де $y^{(v)}$ – n' ята похідна $f(x, y)$</p>	$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{1}{3}h^*$ $*(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}),$ $\Delta \leq \frac{1}{90}h^5 y^{(v)}$
Адамса – Башфорта	$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h^*$ $*(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}),$ $\Delta \leq \frac{251}{720}h^5 y^{(v)}$	$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h^*$ $*(9y'_{n+1} - 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}),$ $\Delta \leq \frac{19}{720}h^5 y^{(v)}$
Хеммінга	$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-3} + \frac{3}{4}h^*$ $*(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$ <p>Уточнення прогнозу</p> $\bar{y}_{n+1}^{(0)} = y_{n+1}^{(0)} +$ $+ \frac{112}{121}(y_n - y_n^{(0)})^*$ $*[\bar{y}_{n+1}^{(0)}] = f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(0)})$	$y_{n+1}^{(j+1)} = \frac{1}{8}*(9y_n - y_{n-2}) +$ $+ \frac{3}{8}h^*([\bar{y}_{n+1}^{(j)}] + 2y'_n - y'_{n-1})$
	$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h^*$ $*(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}),$ $\Delta \leq \frac{28}{90}h^5 y^{(v)}$	$y_{n+1} = \frac{1}{8}h^*$ $*[9y_n - y_{n-2} + 3h(y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})],$ $\Delta \leq \frac{1}{40}h^5 y^{(v)}$

Однак у багатьох практичних випадках складність оцінювання величини M_2 приводить до того, що найбільш зручним для вибору кроку є спосіб, побудований на оцінюванні Δ у процесі обчислень і зменшенні кроку, якщо похибка надто велика. При цьому необхідно враховувати, що оптимальне число ітерацій дорівнює двом.

Основні особливості, що притаманні багатокроковим методам:

1) за допомогою цих методів не можна розпочати розв'язання задачі, оскільки для їх використання необхідна інформація про значення функції в кількох точках;

2) можна отримати оцінку похибки зрізання, не звертаючись до обчислення додаткових величин;

3) методи прогнозу і корекції не дозволяють легко змінювати крок обчислень, для цього необхідно весь ітераційний процес починати спочатку.

9.4.1.3 “Жорсткі” задачі

Існують звичайні диференціальні рівняння, для яких складно отримати задовільний розв’язок з використанням описаних вище методів. Виникнення таких задач пов’язано з поняттям *сталої часу* диференціального рівняння, – проміжком часу, коли змінна частина розв’язку зменшується в e разів(історично склалося, що цей параметр називається “*сталою часу*”, хоча аргумент може бути і не часової природи). Рівняння порядку n має n складових і кожна з них має свою постійну часу. Якщо будь-які дві з них суттєво(на практиці в сто і більше разів) різняться за величиною або яка-небудь з них достатньо мала порівняно з інтервалом часу, на якому відшукується розв’язок, то задача називається “жорсткою”, і її практично неможливо якісно розв’язати звичайними чисельними методами. В таких випадках крок повинен бути достатньо малим, щоб можна було враховувати приріст складових розв’язку, які найбільш швидко змінюються, навіть після того, як їх внесок стане практично непомітним. Але зменшення кроку призводить до збільшення витрат часу обчислень і накопиченню помилок. Розроблені спеціальні методи для розв’язування таких задач, які часто зустрічаються в теорії автоматичного керування.

Найбільш простим є так званий обернений метод Ейлера, в якому розв’язок знаходиться з рівняння, яке містить y_{n+1} у неявному вигляді:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_{n+1}).$$

На практиці “жорсткими” можуть виявитися рівняння, у яких коефіцієнти при похідних суттєво (в сто і більше разів) відрізняються один від одного.

9.4.1.4 Загальні висновки щодо вибору методу чисельного розв’язання задачі Коші

Порівнюючи ефективність однокрокових і багатокрокових методів, виділяють такі особливості:

1. Однокрокові методи на відміну від багатокрокових дозволяють одразу почати розв’язання задачі (“самостартування”) і легко змінювати крок в процесі обчислень.

2. При використанні багатокрокових методів існує можливість оцінювання похибки на кроці, тому значення кроку обирається оптимальним, а в однокрокових – з деяким запасом, що знижує швидкодію.

3. При однаковій точності багатокрокові методи вимагають меншого обсягу обчислень. Наприклад, в методі Рунге–Кутта четвертого порядку точності доводиться обчислювати чотири значення функції на кожному кроці, а

для забезпечення збіжності методу прогнозу і корекції того ж порядку точності – достатньо двох.

4. Багатокрокові методи вимагають більшого обсягу пам'яті комп'ютерів, тому що оперують більшою кількістю початкових даних.

Перед початком розв'язання задачі необхідно провести перевірку на “жорсткість” і у випадку позитивного результату використати спеціальні методи. Якщо задача Коші дуже складна, то зазвичай перевага надається методу прогнозу і корекції, який має до того ж більшу швидкодію. Початок розв'язання задачі при цьому проводиться за допомогою однокрокових методів. Якщо для обчислення чергового значення y_i вимагається більш ніж дві ітерації або якщо помилка зрізання дуже велика, то необхідно зменшити крок h . З іншого боку, при дуже малій похибці зрізання можна збільшити крок, тим самим підвищити швидкодію, але при цьому весь процес розв'язання треба починати спочатку. Інколи на практиці вимагається мінімізувати час підготовки задачі до розв'язання. Тоді доцільно використовувати методи Рунге–Кутта.

На закінчення слід відзначити, що велике значення для ефективного розв'язання задачі мають досвід, інтуїція і кваліфікація користувача як при постановці задачі, так і в процесі вибору методу розробки алгоритму і програми для ЕОМ. При цьому часто зручно користуватись вже готовими програмними засобами, які є в наявності (наприклад, в пакетах MAPLE, МАТЕМАТИКА).

9.4.2 Методи розв'язання крайових задач

Методи розв'язання крайових задач розглянемо на прикладі звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$$

при граничних умовах $y(a) = A$ $y(b) = B$. Методи розв'язання крайових задач розділяють на дві групи: методи, що побудовані на заміні розв'язання крайової задачі розв'язанням декількох задач Коші (методи “стрілянини”) та різницеві методи.

9.4.2.1 Метод “стрілянини”

Якщо звичайне диференціальне рівняння другого порядку – лінійне, то воно має вигляд:

$$y'' = f_1(x)y' + f_2(x)y + f_3(x)$$

причому $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Крайову задачу можна звести до задачі Коші введенням додаткової початкової умови, крім $y(a) = A$ вводиться $y'(a) = \alpha_1$.

Знайшовши розв'язок $y_1(x)$, можна поставити іншу початкову умову $y'(a) = \alpha_2$ і отримати інший розв'язок $y_2(x)$. Якщо $y_1(b) = \beta_1$ а $y_2(b) = \beta_2$, причому $\beta_1 \neq \beta_2$, то розв'язок

$$y(x) = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} [(B - \beta_2)y_1(x) + (\beta_1 - B)y_2(x)]$$

буде задовольняти обидві початкові умови.

При розв'язуванні нелінійного звичайного диференціального рівняння методами “стрілянини” крайова задача зводиться до розв'язування декількох задач Коші, послідовно вводячи в початкові умови значення α :

$$y(a) = A \text{ і } y'(a) = \alpha$$

і намагаючись знайти розв'язок, який задовольняє умову $y(b) = B$.

При цьому алгоритм досягнення мети будується на основі одного з методів оптимізації. Однак цей шлях розв'язання задачі пов'язаний з великими обчислювальними труднощами, і тому у випадку нелінійних диференціальних рівнянь перевага надається різницевим методам.

9.4.2.2 Різницеві методи

Апарат різницевих методів (*difference methods*) являє собою потужний засіб чисельного розв'язування звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь у частинних похідних. У його основі лежить подання незалежного аргументу на відрізку $[a, b]$ у вигляді дискретної множини точок x_i , $i=0, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, яка називається сіткою. В цій книзі вже розглядалося в 7 розділі застосування різницевих методів до розв'язання задачі інтерполяції.

Найбільше поширення отримала рівномірна сітка з кроком $x_i - x_{i-1} = h$. При цьому замість неперервної функції $f(x)$ розглядається сіткова функція $y_i = f(x_i)$. Аналогічно проводиться дискретизація функції багатьох змінних, наприклад, двох:

$$x_{ij}, \quad i=0, \dots, n, \quad j=0, \dots, m, \quad y_{ij} = f(x_{ij}).$$

Крім найбільш розповсюджені прямокутної сітки використовують полярну, трикутну, скошену та інші, зображені на рис. 9.15. Багатовимірні сітки знаходять застосування в задачах з частинними похідними за декількома незалежними змінними.

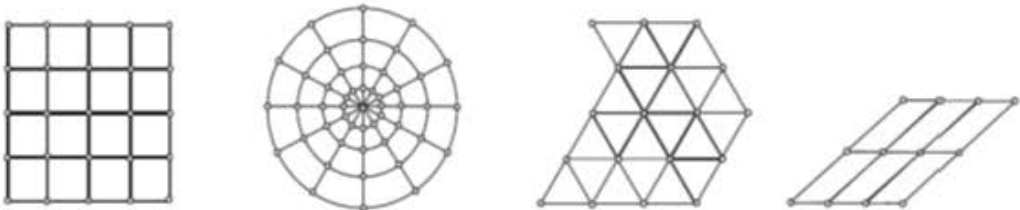


Рисунок 9.15 – Двовимірні сітки

Розв'язання задачі різницевиими методами складається з двох етапів:

- отримання дискретної (різничевої) апроксимації диференціальних рівнянь і дослідження отриманих при цьому різницевих рівнянь;
- розв'язання різницевих рівнянь.

При отриманні різницевих схем важливу роль відіграє загальна вимога, щоб різницева схема якомога краще наближала основні властивості початкового диференціального рівняння. Такі різницеві схеми можна отримати за допомогою варіаційних принципів та інтегральних співвідношень. Оцінювання точності різничевої схеми зводиться до вивчення похибки апроксимації та стійкості. Сіткову функцію можна розглядати як функцію цілочислового аргументу

$$y(i) = y_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для y_i можна ввести операції, які є дискретним (різницевим) аналогом операцій диференціювання та інтегрування.

Аналогом першої похідної є різниці першого порядку:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \text{ – права різниця;}$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \text{ – ліва різниця;}$$

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) \text{ – центральна різниця.}$$

Зауважимо, що $\Delta y_i = \nabla y_{i+1}$.

Далі можна записати різниці другого порядку

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\Delta \nabla y_i = \Delta(y_i - y_{i-1}) = (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}) = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1},$$

тобто $\Delta^2 y_i = \Delta \nabla y_{i+1}$.

Аналогічно визначається різниця m -го порядку:

$$\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i).$$

Звідси виходить, що

$$\sum_{j=k}^i \Delta y_j = y_{i+1} - y_k, \quad \sum_{j=k}^i \nabla y_j = y_i - y_{k-1}.$$

На множині вузлів сітки, яка називається шаблоном заміною неперервний диференціальний оператор Lu різницевим оператором $L_h u$.

Наприклад, різницеві оператори для першої похідної на трьох вузлах сітки $(x-h, x, x+h)$

$$L_h^+ y = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y_x^+,$$

$$L_h^- y = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} = y_x^-,$$

$$L_h^0 y = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y_x^0$$

— це права, ліва і центральна, відповідно, різницеві похідні.

Аналогічно для другої похідної

$$\begin{aligned} L_h y &= \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = \frac{y_x^+(x) - y_x^-(x)}{h} = \\ &= \frac{y_x^-(x+h) - y_x^-(x)}{h} = y_{xx}^-(x). \end{aligned}$$

При розв'язуванні крайової задачі записуються різницеві рівняння для всіх n вузлів області змінення $x \in [a, b]$. Враховуючи дві граничні умови $y_0 = y(a)$ та $y_n = y(b)$, отримують систему з $n-1$ алгебраїчних рівнянь з $n-1$ невідомими y_i . Якщо початкове звичайне диференціальне рівняння лінійне, то задача зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а якщо нелінійне — то нелінійних або трансцендентних алгебраїчних систем. Привести крайову задачу, яку можна розв'язати методом кінцевих різниць, до вигляду, зручного для розробки програми для ЕОМ, складно, оскільки формулювання кожної задачі залежить від вигляду диференціального рівняння, яке розглядають.

В цьому розділі поданий лише короткий опис різницевого підходу без деталізації методів побудови і дослідження різницевої схеми. Взагалі різницеві методи є універсальними методами чисельного аналізу, хоча й розглядаються, в більшості випадків, у зв'язку з розв'язанням крайових задач і диференціальних рівнянь в частинних похідних. Наприклад, метод Ейлера розв'язання задачі Коші може бути інтерпретований як використання одновимірного різницевого оператора. Прикладом узагальненого підходу до розв'язання різноманітних задач обчислювальної математики різницевою методами можуть слугувати праці академіка А. А. Самарського, що містять детальний аналіз і дослідження питань теорії і практики використання різницевої схеми.

9.5 Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних

З розв'язанням диференціальних рівнянь в частинних похідних (*differential equations in partial derivatives*) інженерам і дослідникам доводиться зустрічатися у багатьох галузях науки і техніки, в аеро- і гідродинаміці, ядерній фізиці, радіозв'язку, теорії автоматичного керування, вимірювальній техніці. В таких рівняннях містяться частинні похідні і шукана величина залежить одразу від декількох змінних. Нагадаємо диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними, яке вже розглянуто у 8 розділі:

$$\begin{aligned}
 A(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \\
 E(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + D(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + F(x, y) = G(x, y).
 \end{aligned}
 \tag{9.22}$$

Аналогічно звичайним диференціальним рівнянням єдиний розв'язок рівняння (9.22) можна отримати, лише задавши додаткові умови, але оскільки тут присутні дві незалежні змінні x та y , умова повинна задаватися для якої-небудь кривої у площині x/y . Ця умова може бути накладена на функцію f або/та на її похідні та залежати від типу рівняння, яке визначає її вигляд і характер зміни.

Існують три типи диференціальних рівнянь другого порядку:

- еліптичні, при $B^2 - 4AC < 0$;
- параболічні, при $B^2 - 4AC = 0$;
- гіперболічні, при $B^2 - 4AC > 0$.

Рівняння можуть переходити з одного типу в інший залежно від значень коефіцієнтів.

Еліптичні рівняння описують усталені (стаціонарні) процеси, причому задача ставиться в замкненій області, і в кожній точці на межі цієї області задаються граничні умови. Інші два типи рівнянь описують еволюційні процеси. В таких задачах найбільш поширений випадок, коли на одній частині межі ставлять граничні умови в декількох точках межі, а на іншій – початкові тільки в одній точці.

Загальні методи аналітичного розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних розглянуто в попередньому розділі, а в цьому зосереджено увагу на чисельних методах та алгоритмах і на їх застосуванні для рівнянь другого порядку.

Приклади деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних, які описують різні типи задач, наведені в таблиці 9.4.

В таблиці використані прийняті позначення найбільш поширених

операторів:

$$\text{оператор Лапласа } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

$$\text{бігармонічний оператор } \Delta^2 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}.$$

Таблиця 9.4 – Диференціальні рівняння в частинних похідних

Рівняння	Математична форма	Приклади задач, в яких зустрічається рівняння
Лапласа	$\Delta f = 0$	Усталена течія рідини. Стационарні теплові поля
Пуассона	$\Delta f = -R$	Теплопередача з внутрішнім джерелом тепла
Дифузії	$\Delta f = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	Нестационарна теплопровідність
Хвильове	$\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	Розповсюдження хвиль
Бігармонічне	$\Delta^2 f = F(x, y)$	Деформація пластин

Існують два основних методи чисельного розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних: різницевий метод (метод скінченних різниць) і метод скінченних елементів. В сучасній прикладній математиці обидва методи розглядаються як інтерпретації використання загальної теорії різницевого схем до розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних.

В основі методу скінченних елементів лежить варіаційне обчислення. Диференціальне рівняння, яке описує задачу й відповідні граничні умови, використовується для постановки варіаційної задачі. В методі скінченних елементів фізична задача замінюється кусково-гладкою моделлю. Цей метод вимагає складної постановки задачі, високої кваліфікації й досвіду, неуніверсальний (кожне розв'язання застосовується лише для конкретної задачі). Метод скінченних елементів знайшов широке використання для розв'язання спеціальних задач в теоретичній механіці, гідродинаміці, теорії поля, він складний, вимагає серйозної підготовки і знань в конкретній сфері використання, для його достатньо повного викладу довелося б написати спеціальний підручник. Тому в даній роботі не наводиться докладний виклад методу скінченних елементів, тим більше, що при розв'язанні задач проектування комп'ютерних систем частіше використовується різницевий метод.

9.5.1 Різницевий метод

Для диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних найчастіше використовується двовимірна прямокутна сітка. Центральні-різницеві шаблони, що їх застосовують на двовимірній квадратній сітці з кроком h , зображеній на рис. 9.16 можуть бути отримані аналогічно одновимірному випадку.

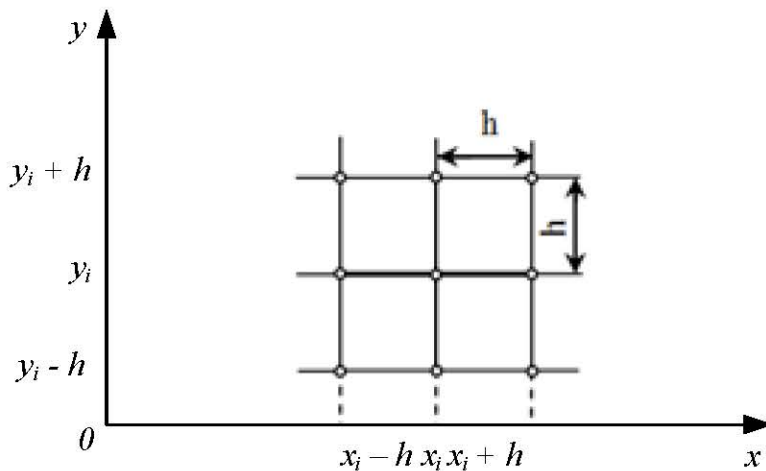


Рисунок 9.16 – Квадратна сітка

Для зручності позначення $f(x_i + h, y_i)$ замінимо на $f_{i+1,j}$ (індекс j надається незалежній змінній y , а i стосується до x). Користуючись цим позначенням, отримаємо вирази для частинних похідних, з якими доводиться зустрічатися на практиці й використання яких ілюструється відповідними обчислювальними шаблонами (таблиця 9.5).

З цих елементів будуються більш складні обчислювальні шаблони для диференціальних рівнянь. Додавання похідних здійснюється суперпозицією відповідних обчислювальних шаблонів. Цим методом конструюються шаблони для Δf і $\Delta^2 f$ (рис. 9.17) з шаблонів для частинних похідних.

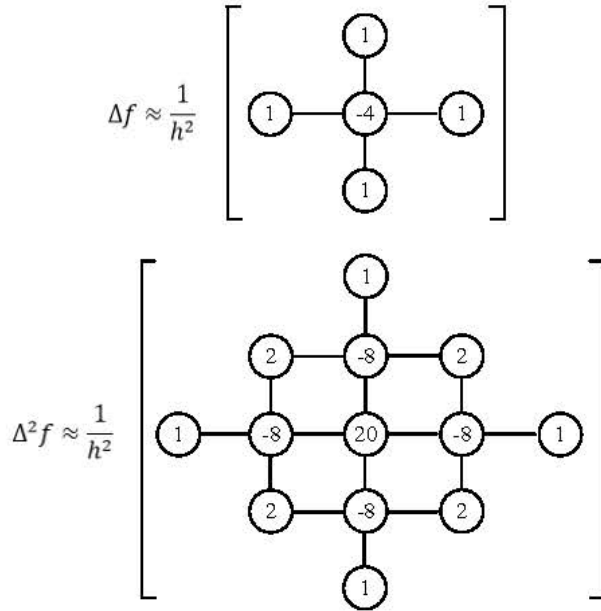
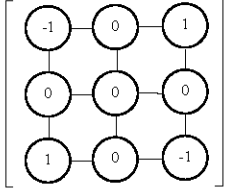
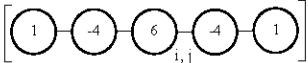
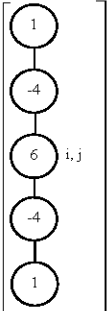


Рисунок 9.17 – Обчислювальні шаблони для операторів

Таблиця 9.5 – Обчислювальні шаблони для похідних

$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \approx \frac{1}{2h}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ & & i,j \end{bmatrix}$
$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h} \approx \frac{1}{2h}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ & & i,j \end{bmatrix}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} \approx \frac{1}{h^2}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & & i,j \end{bmatrix}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2} \approx \frac{1}{h^2}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ & & i,j \end{bmatrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4h^2} \approx \frac{1}{4h^2}$	
$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \approx \frac{1}{h^4}$	
$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \approx \frac{1}{h^4}$	

Всі наведені обчислювальні шаблони мають похибку другого порядку. Можна побудувати більш точні обчислювальні шаблони, якщо внести у розгляд додаткові вузли. Іноді, щоб звести до мінімуму розповсюдження похибок, користуються лівими або правими різницями.

Часто труднощі, що пов'язані з використанням прямокутної сітки, виникають через межу неправильної конфігурації, яка не проходить через вузли сітки. Розглянемо приклад розв'язання такої задачі для обчислювального шаблону рівняння Лапласа в області, що обмежена довільною кривою, яка зображена на рис. 9.18.

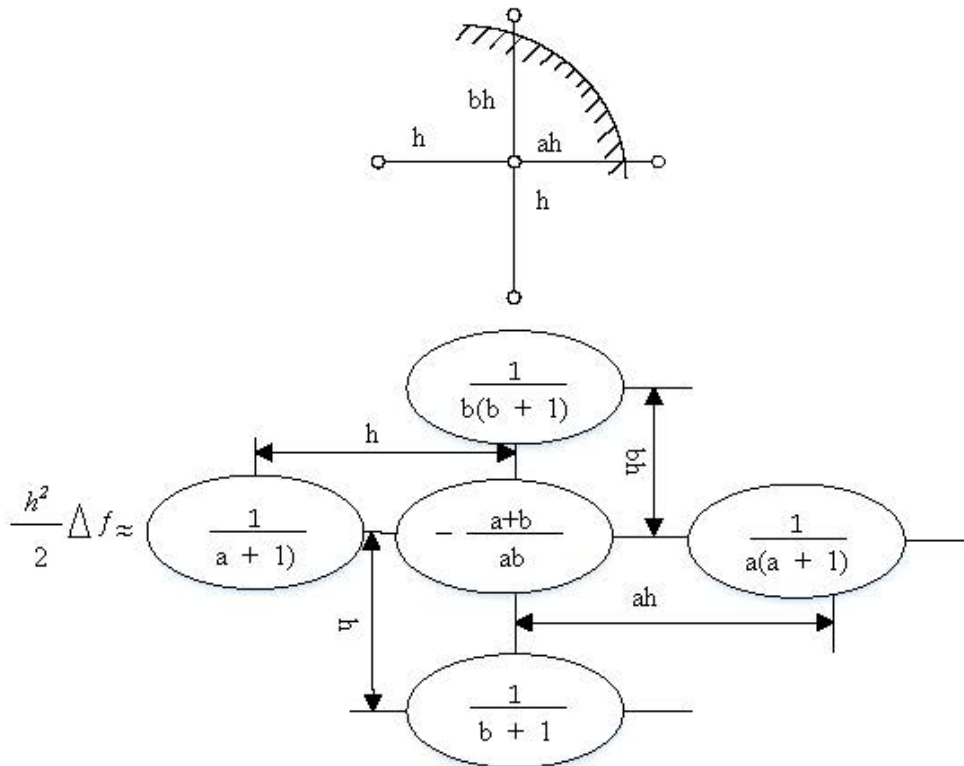


Рисунок 9.18 – Обчислювальний шаблон для границі неправильної форми

Другі частинні похідні для вузлів, які лежать на межі області, можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{f_a - f_{i,j}}{ah} - \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h}}{0,5(ah+h)};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{\frac{f_b - f_{i,j}}{bh} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{h}}{0,5(bh+h)}.$$

Додавши другі похідні, отримаємо:

$$\Delta f \approx \frac{2}{h^2} \left(\frac{f_{i-1,j}}{1+a} + \frac{f_a}{a(1+a)} + \frac{f_b}{b(1+b)} + \frac{f_{i,j-1}}{1+b} - \frac{a+b}{ab} f_{i,j} \right).$$

Застосувавши обчислювальний шаблон до кожного з n вузлів сітки, отримаємо систему з n рівнянь, яка може бути лінійною, якщо початкове диференціальне рівняння має відповідну структуру. В цьому випадку розв'язання задачі зводиться до розв'язання системи рівнянь вигляду:

$$\begin{bmatrix} \text{матриця} \\ \text{коефіцієнтів} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{невідоме значення } u \\ \text{вузлах (вектор – стовпець)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{вектор – стовпець} \\ \text{вільних членів} \end{bmatrix},$$

яка розв'язується найчастіше ітераційними методами.

9.5.2 Розв'язання окремих типів диференціальних рівнянь в частинних похідних

Практичні методи і алгоритми розв'язання різних типів диференціальних рівнянь в частинних похідних мають свої особливості і вимагають окремого розгляду на прикладі найбільш розповсюджених задач.

9.5.2.1 Еліптичні рівняння

До еліптичних рівнянь (elliptic equations) приводиться багато різних фізичних задач: розрахунок напружень, які виникають при пружному скручуванні довгого циліндричного стрижня; розподіл електричних напруг на площині, що проводить струм; задача про стаціонарні течії тепла в двовимірному тілі. Часто виникає необхідність розв'язання таких задач і в теорії автоматичного керування. Більшість еліптичних рівнянь описується рівнянням Пуассона або його окремим випадком – рівнянням Лапласа.

Розглянемо класичну задачу Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутній області, яка формулюється таким чином: знайти неперервну функцію $f(x,y)$, яка задовольняє всередині прямокутної області $\Omega = \{(x, y) / 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ рівняння Лапласа:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

і приймає на межі області задані значення:

$$x=0; f(0,y) = f_1(y),$$

$$x=a; f(a,y) = f_2(y),$$

$$y=0; f(x,0) = f_3(x),$$

$$y=b; f(x,b) = f_4(x).$$

Введемо в області розв'язання двовимірну сітку з кроком h по осі x і l по осі y . Тоді, користуючись прийнятими в попередніх розділах позначеннями і апроксимуючи рівняння Лапласа різницеvim рівнянням, отримаємо таку систему лінійних рівнянь (прийmemo для спрощення $l=h$):

$$f_{ij} = \frac{1}{4}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}), \quad (9.23)$$

$$f_{i,0} = f_3(x_i), \quad f_{i,m} = f_4(x_i), \quad f_{0,j} = f_1(y_j), \quad f_{n,j} = f_2(y_j).$$

при $i=1,2,\dots,n-1$; $j=1,\dots,m-1$.

Ця система рівнянь має велику кількість нульових елементів і задовольняє умову збіжності при використанні ітераційних методів. Найбільше використання для розв'язання таких систем знайшов метод Гаусса – Зейделя, який, коли застосовується до еліптичних різницевих рівнянь, називається методом Лібмана або методом послідовних зміщень. Порядок ітерацій можна простежити, переписавши систему (9.23) у вигляді:

$$f_{1,1}^{(m+1)} = \frac{1}{4} [f_3(h) + f_1(h) + f_{2,1}^{(m)} + f_{1,2}^{(m)}],$$

$$f_{2,1}^{(m+1)} = \frac{1}{4} [f_3(2h) + f_{1,1}^{(m+1)} + f_{3,1}^{(m)} + f_{2,2}^{(m)}],$$

$$f_{3,1}^{(m+1)} = \frac{1}{4} [f_3(3h) + f_{2,1}^{(m+1)} + f_{4,1}^{(m)} + f_{3,2}^{(m)}],$$

$$f_{n-1,1}^{(m+1)} = \frac{1}{4} \left\{ f_3[(n-1)h] + f_2(h) + f_{n-2,1}^{(m+1)} + f_{n-1,2}^{(m)} \right\},$$

$$f_{1,2}^{(m+1)} = \frac{1}{4} [f_1(2h) + f_{1,1}^{(m+1)} + f_{2,2}^{(m)} + f_{1,3}^{(m)}],$$

$$f_{2,2}^{(m+1)} = \frac{1}{4} [f_{2,1}^{(m+1)} + f_{1,2}^{(m+1)} + f_{3,2}^{(m)} + f_{2,3}^{(m)}],$$

де верхніми індексами позначено порядковий номер ітерації: m – попередня, $m+1$ – наступна.

Зазвичай вважають $f_{i,j}^{(0)} = 0$ для всіх i, j . Система рівнянь легко розв'язується на ЕОМ. Взагалі кажучи, будь-які еліптичні рівняння, які не містять $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, зводяться до систем різницевих рівнянь, які можна розв'язувати як методом Лібмана, так і іншими ітераційними методами (Якобі, послідовної верхньої релаксації та ін.), оскільки для них виконуються умови збіжності. Для еліптичних рівнянь, які містять $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в загальному вигляді, питання про

збіжність ітераційних методів не має теоретичного розв'язку і необхідно розглядати отриману систему рівнянь в кожному конкретному випадку.

9.5.2.2 Гіперболічні рівняння

Найчастіше зустрічається в інженерній практиці гіперболічне рівняння в частинних похідних (hyperbolic equations in partial derivatives) – хвильове рівняння, яке описує різні види коливань: коливання струни або мембрани, розповсюдження звукових хвиль в різних середовищах тощо.

В загальному вигляді задача формулюється таким чином: знайти функцію $f(x, t)$, яка задовольняє всередині області $\Omega = \{(x, t), 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T\}$ рівняння

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (c = \text{const} > 0),$$

Початкові

$$f(x, 0) = f_0(x) ,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x,0} = g(x)$$

і граничні умови

$$f(0, t) = \mu_1(t) ,$$

$$f(a, t) = \mu_2(t) .$$

Оскільки заміна змінних $t = c t$ приводить рівняння до вигляду:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ,$$

то надалі приймаємо $c=1$.

Переходячи до різницевого рівняння на сітці з кроком h по x й τ по t з центральними різницями, отримаємо

$$\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\tau^2} .$$

Якщо ввести $r = \frac{\tau}{h}$, то вираз для $f_{i,j+1}$ набуде вигляду:

$$f_{i,j+1} = r^2 (f_{i+1,j} + f_{i-1,j}) + 2(1 - r^2) f_{i,j} - f_{i,j-1} . \quad (9.24)$$

Схема розв'язання за рівнянням (9.24) називається тришаровою, оскільки

так зв'язує значення $f_{i,j}$ на трьох часових шарах $j-1, j, j+1$. Ця схема явна й дозволяє в явному вигляді виразити $f_{i,j}$ через значення f з попередніх шарів (існують неявні схеми, основані на використанні інших обчислювальних шаблонів, але вони вимагають більшого обсягу обчислень при розв'язанні системи рівнянь). Для знаходження розв'язку на першому шарі зазвичай використовують інтерполяційні методи. Наприклад,

$$f_{i,1} = f_{i,0} + \tau g(x_i). \quad (9.25)$$

Співвідношення сторін сітки визначається величиною r , яка є мірою стійкості отриманого розв'язку. При $r > 1$ розв'язок нестійкий, при $r < 1$ хоча й стійкий, але точність його при зменшенні r спадає, при $r = 1$ різницевий розв'язок стійкий і збігається з точним. Вибір $r = 1$ зручний ще й тим, що при цьому спрощується співвідношення (9.25)

$$f_{i,j+1} = f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - f_{i,j-1}.$$

9.5.2.3 Параболічні рівняння

Прикладом задачі, яка приводить до параболічного рівняння (parabolic equation) в частинних похідних, є задача про теплопередачу по довгому стрижню. Вона описується рівнянням теплопередачі (або дифузії).

Задача полягає у знаходженні $f(x, t)$, яка задовольняє в області $\Omega = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T\}$ рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (k = \text{const} > 0),$$

початкові

$$f(x, 0) = f_0(x)$$

і граничні умови першого роду

$$f(0, t) = \mu_1(t) \quad ,$$

$$f(a, t) = \mu_2(t) \quad .$$

Заміна змінних $t = k t$ приводить рівняння до вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

тому надалі будемо вважати $k=1$.

Можливі два варіанти отримання різницевого рівняння на сітці з кроком h по x та τ по t (рис. 9.19).

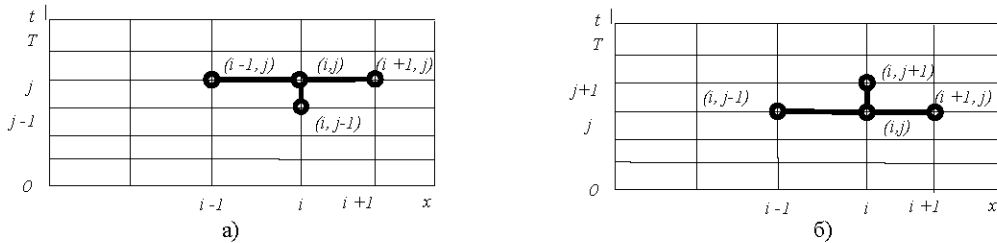


Рисунок 9.19 – Обчислювальні шаблони для параболічних рівнянь

Варіант з апроксимацією на чотириточковому шаблоні (рис. 9.19, а) приводить до неявної двошарової різницевої схеми

$$2f_{i+1,j} - (1+2r)f_{i,j} + 2f_{i-1,j} = -f_{i,j-1},$$

де $r = \frac{\tau}{h^2}$.

Ця схема, доповнена рівняннями, отриманими з крайових умов

$$f_{0,j} = \mu_1(t_j); \quad f_{n,j} = \mu_2(t_j),$$

зводить задачу до розв'язання системи рівнянь, які мають стійкий розв'язок при будь-яких значеннях r .

Варіант з апроксимацією на чотириточковому шаблоні (рис. 9.19, б) призводить до явної двошарової системи

$$f_{i,j+1} = rf_{i+1,j} + (1-2r)f_{i,j} + 2f_{i-1,j}.$$

Ця схема стійка тільки при $r \leq 0,5$, що приводить до необхідності проводити обчислення з дуже малим кроком по t , який обмежує швидкодію і вимагає більших витрат часу ЕОМ. Тому для параболічних рівнянь більш широке розповсюдження отримала неявна схема.

9.5.3 Загальні рекомендації до чисельного розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних

На початковому етапі вибирається метод розв'язання задачі. Зазвичай простіше використовувати різницевий метод, який вимагає більш простої підготовки задачі до розв'язання, але в ряді випадків для задач з добре розробленою теорією (наприклад, задач механіки) доцільно звертатися до методу скінченних елементів.

При визначенні кроку розв'язання задачі основним фактором є точність

(якщо висока, то необхідна або дуже дрібна сітка, або розбиття на дуже малі елементи). При цьому необхідно враховувати, що похибка різницевого методу має другий порядок. Її оцінювання можна проводити аналогічно звичайним диференціальним рівнянням за методом Рунге.

У випадку симетрії в області розв'язання можна число вузлів зменшити в два або навіть у чотири рази (при симетрії по обох осях координат). Це дозволяє отримати економію часу та обсягу обчислень.

Велику роль для ефективного розв'язання задачі відіграє вибір початкових наближень. При використанні ітераційних методів від цього значною мірою залежить швидкість збігання. Часто має сенс розв'язувати задачу в декілька етапів: на першому за допомогою грубої сітки (або розбиття на крупні елементи) отримують добре початкове наближення, на наступних – шукають більш точний розв'язок на дрібній сітці.

9.6 Чисельне інтегрування

В багатьох задачах, що пов'язані з аналізом, ідентифікацією, оцінюванням якості систем виникає необхідність обчислення певних інтегралів.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ й відома її первісна $F(x)$, то визначений інтеграл від a до b може бути обчислений за формулою Ньютона – Лейбніца

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де $F'(x) = f(x)$.

Графічно інтеграл визначається площею, що обмежується графіком функції $y = f(x)$.

Але часто точно обчислити інтеграл важко через велику складність аналітичних перетворень, а інколи це взагалі неможливо (у випадках невласних інтегралів), чи коли підінтегральна функція задана набором числових даних, наприклад, отриманих з експерименту.

Задача чисельного інтегрування (numerical integration) функції полягає в обчисленні значення визначеного інтеграла на основі ряду значень підінтегральної функції. Формули чисельного інтегрування часто називають квадратурними.

Найбільш відомими методами знаходження визначених інтегралів є:

- формули прямокутників;
- методи Ньютона–Котеса, Гаусса, Чебишева, які основані на використанні так званих квадратурних формул, отриманих заміною $f(x)$ інтерполяційними багаточленами;
- методи Монте–Карло, основані на використанні статистичних моделей.

9.6.1 Формули прямокутників

Ідея методу полягає в розбитті відрізка інтегрування на дрібні частини $[x_{i-1}, x_i]$ і у побудові прямокутників, які спираються на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ й мають висоту $f(\xi_i)$. Якщо розбиття відрізка рівномірне, то $x_i = a + i \cdot h$, де h – крок:

$$h = \frac{(a - b)}{n}, \quad \overline{0, n..}$$

Вважається, що інтеграл дорівнює приблизно сумі площ побудованих прямокутників. *Узагальнена квадратурна формула прямокутників* має вигляд:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

де точка $\xi_i \in (x_i, x_{i-1})$.

В залежності від вибору ξ_i розрізняють формули лівих, правих й середніх прямокутників.

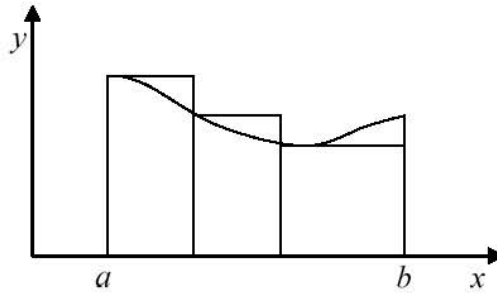
Нехай $\xi_i = x_{i-1}$. **Формула лівих прямокутників**, має вигляд:

$$I \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ – для нерівновіддалених вузлів,}$$

$$I \approx h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \text{ – для рівновіддалених вузлів.}$$

Порядок точності формули – перший.

Геометрична інтерпретація наведена на рис. 9.20.



Нехай $\xi_i = x_i$. **Формула правих прямокутників**, має вигляд:

$$I \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ – для нерівновіддалених вузлів,}$$

$$I \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i) \text{ – для рівновіддалених вузлів.}$$

Порядок точності формули – перший.

Геометрична інтерпретація наведена на рис. 9.21.

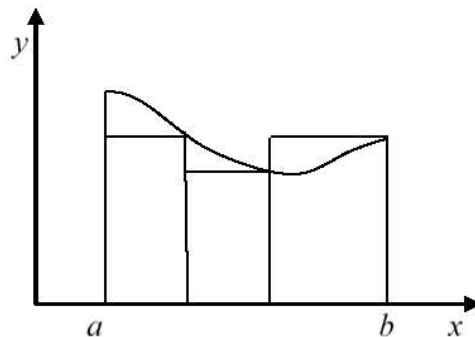


Рисунок 9.21 – Метод правих прямокутників

Нехай $\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$, **формула середніх прямокутників** має вигляд:

$$I \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{– для нерівновіддалених вузлів,}$$

$$I \approx h \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \quad \text{– для рівновіддалених вузлів.}$$

Порядок точності формул – другий.

Геометрична інтерпретація наведена на рис. 9.22.

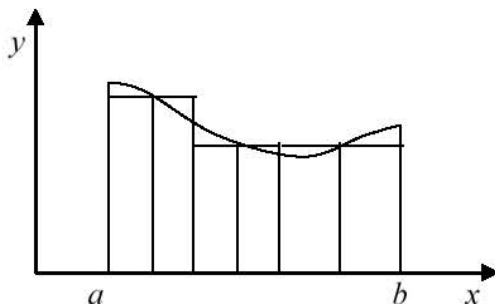


Рисунок 9.22 – Метод середніх прямокутників

Формули лівих та правих прямокутників можуть бути використані як для аналітично заданих функцій, так і для функцій, заданих таблично. Метод середніх прямокутників може використовуватись для пошуку інтегралів тільки від аналітично заданих функцій.

9.6.2 Формули Ньютона–Котеса

Для виведення формул Ньютона–Котеса інтеграл зображується у вигляді

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + \Delta, \quad (9.26)$$

де x_i – вузли інтерполяції; A_i – коефіцієнти, які залежать від вигляду формули;

Δ – похибка квадратурної формули.

Замінюючи в (9.26) підінтегральну функцію відповідним інтерполяційним поліномом Лагранжа для n рівновіддалених вузлів з кроком $h = \frac{b-a}{n}$, можна одержати таку формулу для розрахунку коефіцієнтів A_i при довільній кількості вузлів.

$$A_i = \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-1)!} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-i)} dq, \quad (9.27)$$

де $q = \frac{x-a}{h}$ – приведена змінна.

Звичайно коефіцієнти $H_i = \frac{A_i}{b-a}$ називають коефіцієнтами Котеса.

При цьому формула (9.26) набуває вигляду

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i f(x_i) \quad (9.28)$$

і має такі властивості:

$$\sum_{i=0}^n H_i = 1 \quad i \quad H_i = H_{n-i}$$

При $n=1$ і $n=2$ із (9.27) та (9.28) отримаємо формули трапецій і Сімпсона:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})).$$

В таблиці 9.6 наведені значення коефіцієнтів для $n = 1, 2, \dots, 8$.

Таблиця 9.6 – Коефіцієнти Котеса

$\begin{matrix} H \\ N \end{matrix}$	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	Загальний знаменник n
1	1	1								2

2	1	4	1							6
3	1	3	3	1						8
4	7	32	12	32	7					90
5	19	75	50	50	75	19				288
6	41	216	27	272	27	216	41			840
7	751	3577	1223	2989	2989	1223	3577	751		17280
8	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989	28350

Похибки формул трапецій і Сімпсона визначаються, відповідно, із виразів

$$\Delta = -\frac{h^3}{12}M_2 \quad \text{та} \quad \Delta = -\frac{h^5}{90}M_4,$$

де M_2 і M_4 – максимальні значення другої та четвертої похідних $f(x)$ при $x \in (a, b)$.

Складові формули Ньютона – Котеса отримаємо шляхом комбінації простих формул. Наприклад, для формул трапецій і Сімпсона (для парних n)

$$I = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_1) + \dots + f(x_n)],$$

$$I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_1) + 4f(x_1) + \dots + f(x_n)].$$

Причому похибки складових формул будуть, відповідно,

$$\Delta = -n \frac{h^3}{12} M_2 \quad \text{та} \quad \Delta = -n \frac{h^5}{180} M_4.$$

Аналогічно можна отримати складові формули Ньютона–Котеса більш високих порядків.

Для оцінювання похибки на практиці можна користуватись методом Рунге (екстраполяції Річардсона), аналогічно тому, як це робиться для однокрокових методів розв'язання задачі Коші.

9.6.3 Формула Чебишова

Формула (9.28) може бути приведена до вигляду

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (9.29)$$

заміною змінних

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t.$$

При виведенні формули Чебишова використовуються такі умови:

- коефіцієнти A_i рівні між собою;
- квадратурна формула (9.29) точна для всіх поліномів до степеня n включно.

За цих умов формула (9.29) має вигляд:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i). \quad (9.30)$$

Для знаходження t_i використовуємо другу умову, згідно з якою формула (9.30) повинна бути точною для функції вигляду

$$f(t) = t^k, k = 1, \dots, n.$$

Після підстановки цих функцій в (9.30) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = \frac{n}{3}, \\ \dots \\ t_1^n + t_2^n + \dots + t_n^n = \frac{n[1 - (-1)^{n+1}]}{2(n+1)}. \end{cases} \quad (9.31)$$

Система рівнянь (9.31) має розв'язок при $n < 8$ та $n = 9$. В цій обмеженій точності і полягає недолік формули Чебишова. Значення t_i для різних n наведені в таблиці 9.7.

Для довільного інтервалу (a, b) формула (9.30) приймає вигляд

$$I = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

де

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i.$$

Таблиця 9.7 – Значення абсцис t_i в формулі Чебишова

n	i	t_i
2	1;2	$\mp 0,577350$
3	1;3	$\mp 0,707107$
	2	0
4	1;4	$\mp 0,794654$
	2;3	$\mp 0,187592$
5	1;5	$\mp 0,832498$
	2;4	$\mp 0,3745413$
	3	0

n	i	t_i
6	1;6	$\mp 0,866247$
	2;5	$\mp 0,422519$
	3;4	$\mp 0,266635$
7	1;7	$\mp 0,883862$
	2;6	$\mp 0,529657$
	3;5	$\mp 0,323912$
	4	0

Похибка обчислень за методом Чебишова:

$$\Delta = \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) dx - \frac{b-a}{n(n+1)!} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{n+1} f^{(n+1)}(x).$$

9.6.4 Формула Гаусса

Формула Гаусса називається формулою найвищої алгебраїчної точності. Для формули вигляду (9.29) найвища точність може бути досягнута для поліномів степеня $(2n - 1)$, які визначаються $2n$ постійними t_i і A_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Завдання полягає у визначенні коефіцієнтів A_i і абсцис точок t_i .

Для знаходження цих постійних розглянемо виконання формули (9.29) для функцій вигляду

$$f(t) = t^k, k = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Враховуючи, що

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \begin{cases} 2/(k+1) \\ 0 \end{cases},$$

отримаємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n A_i = 2; \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^2 = 1; \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1}; \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{array} \right. \quad (9.32)$$

Ця система нелінійна, і її звичайне розв'язання пов'язане зі значними обчислювальними труднощами. Але якщо використовувати систему для поліномів вигляду

$$f(t) = t^k P_n(t), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

де $P_n(t)$ – поліном Лежандра, тоді її можна звести до лінійної відносно коефіцієнтів A_i з заданими точками t_i . Оскільки степені поліномів у співвідношенні не перевищують $2n-1$, повинна виконуватися система (9.32), і формула (9.29) приймає вигляд

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) \quad (9.33)$$

В результаті властивості ортогональності ліва частина виразу (9.33) дорівнює 0, тоді

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0,$$

що завжди забезпечується при будь-яких значеннях A_i в точках t_i , які відповідають кореням відповідних поліномів Лежандра.

Підставляючи ці значення t_i в систему (9.32) і враховуючи перші n рівнянь, можна визначити коефіцієнти A_i .

Формула (9.29), де t_i – нулі полінома Лежандра $P_n(t)$, а $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ визначаються із системи (9.32), називається формулою Гаусса.

Значення t_i, A_i для різних n наведені в таблиці 9.8.

Таблиця 9.8 – Параметри формули Гаусса

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1;2	$\mp 0,57735027$	1
3	1;3	$\mp 0,77459667$	$5/9=0,55555556$
	2	0	$8/9=0,88888889$
4	1;4	$\mp 0,86113631$	0,34785484
	2;3	$\mp 0,33998104$	0,65214516
6	1;6	$\mp 0,93246951$	0,17132450
	2;5	$\mp 0,66120939$	0,36076158
	3;4	$\mp 0,238619119$	0,46791394
7	1;7	$\mp 0,94910791$	0,12948496
	2;6	$\mp 0,74153119$	0,27970540
	3;5	$\mp 0,40584515$	0,38183006
	4	0	0,41795918
8	1;8	$\mp 0,96028986$	0,10122854
	2;7	$\mp 0,79666648$	0,22238104
	3;6	$\mp 0,52553142$	0,31370664
	4;5	$\mp 0,18343464$	0,36268378

Для довільного інтервалу (a,b) формула для методу Гаусса приймає вигляд

$$I = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i),$$

де $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$.

Оцінка похибки формули Гаусса з n вузлами визначається зі співвідношення

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 M_{2n}}{2^{2n+1} [(2n)!]^3 (2n+1)}$$

де M_{2n} – максимальне значення $2n$ похідної на відрізку $[a, b]$.

У випадку, коли підінтегральна функція задана аналітично, може бути поставлена задача про знаходження інтеграла з наперед заданою точністю. Оскільки точність розглянутих вище квадратурних формул залежить від кроку h , то точність результату можна підвищити, зменшуючи крок. Наприклад, можна ділити крок навпіл. В цьому випадку для оцінювання наближення до точного значення інтеграла використовують вже згадуваний метод Рунге:

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I}{2^p - 1},$$

де I – точне значення інтеграла; I_h – наближене значення, отримане з кроком h ; $I_{h/2}$ – наближене значення, отримане з кроком $h/2$; p – порядок точності квадратурної формули.

Тому для знаходження інтеграла з заданою точністю ε потрібно обрати квадратурну формулу й початковий крок $h=h_0$. Далі розрахувати інтеграл з кроком $h/2$. Зменшувати крок навпіл необхідно до тих пір, поки не виконається умова:

$$|I_{h/2} - I_h| < \varepsilon.$$

Коли ця умова виконана, інтеграл приблизно дорівнює $I_{h/2}$.

9.6.5 Алгоритми застосування чисельних методів

Послідовність застосування формул Ньютона–Котеса.

1. Вибір формули і знаходження (за допомогою таблиці 9.6) коефіцієнтів A_j .
2. Складання алгоритму та програми, причому:
 - у випадку задання дискретних значень $y_i = f(x_i)$ через крок h ці значення підставляються в (9.21);
 - у випадку задання функції $y = f(x)$ значення $y_i = f(x_i)$ обчислюються, причому $x_i = x_0 + ih = a + ih (a \leq x \leq b)$.
3. Оцінювання похибки.

Послідовність застосування методу Гаусса

1. Вибір порядку методу і знаходження (за допомогою таблиці 9.8) коефіцієнтів A_j і значень $t_j (-1 \leq t \leq 1)$.
2. Розбиття інтервалу $a \leq x \leq b$ на I інтервалів (рис. 9.23).
3. Знаходження значень для кожного інтервалу ($j=1, \dots, I$)

$$I = \sum_{j=1}^I I_j.$$

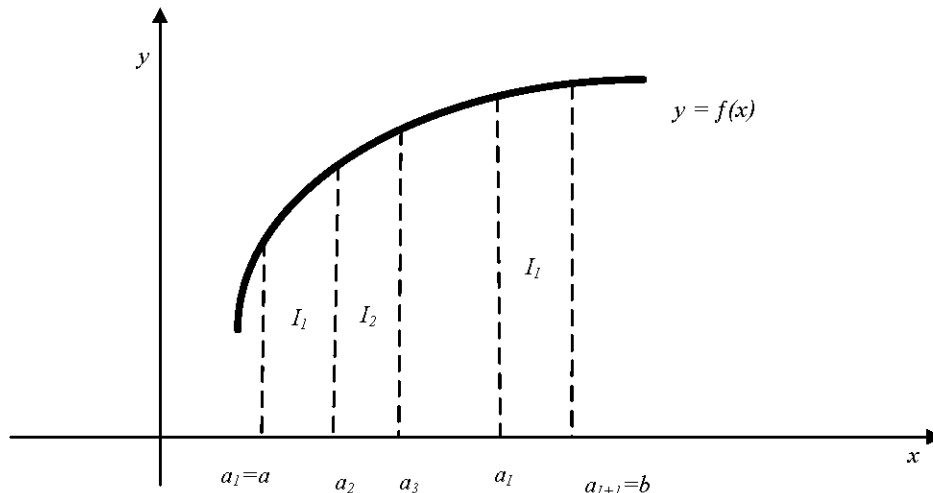


Рисунок 9.23 – Метод Гаусса. Розбивка інтервалу

При цьому значення абсцис x_j всередині кожного інтервалу j знаходяться за формулою

$$x_i = \frac{a_{j+1} + a_j}{2} + \frac{a_{j+1} - a_j}{2} t_i, \quad (9.34)$$

де

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= a_j + h; & a_1 &= a \\ a_{l+1} &= b & j &= 1, \dots, l; \\ h &= \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

I_j знаходяться за формулою:

$$I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx = \frac{(a_{j+1} - a_j)}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (9.35)$$

4. Оцінювання похибки.

В методі Чебишова послідовність дій аналогічна методу Гаусса, але в пункті 1 коефіцієнти t_j беруться з таблиці 9.8, а в пункті 3 для знаходження j -го інтеграла використовується формула

$$I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx = \frac{(a_{j+1} - a_j)}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (9.36)$$

де x_i оцінюється тим же чином, що і в методі Гаусса, за формулою (9.34).

9.6.6 Метод Монте – Карло

Метод чисельного інтегрування Монте–Карло – це найбільш відоме застосування статистичного моделювання для розв’язання прикладних математичних задач.

Якщо з послідовністю випадкових чисел $\{x_i\} \in X$ з законом розподілу ймовірностей $f_x(x)$ провести функціональне перетворення

$$y_i = \varphi(x_i),$$

то математичне сподівання отриманої послідовності випадкових чисел $\{y_i\} \in Y$

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_x(x) dx \quad (9.37)$$

при обсязі вибірки більше декількох тисяч чисел з достатньо високою точністю може бути оцінено за формулою

$$m_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (9.38)$$

Введемо в вирази (9.34), (9.35) так звану функцію індикатора області

$$1[a, b, x] = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases}$$

Якщо тепер обрати функцію

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{f_x(x)},$$

то кінцевий вираз буде мати вигляд

$$I = m_y = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{f_x(x_i)} 1[a, b, x_i].$$

Похибка методу Монте – Карло визначається похибкою генерації псевдовипадкової послідовності чисел, що згенеровані на ЕОМ, та обсягом вибірки. Вона може бути оцінена із співвідношення

$$\Delta = \frac{1}{2\sqrt{n(1-P)}}, \quad (9.39)$$

де P – гарантована ймовірність потрапляння похибки в інтервал $[-\Delta; +\Delta]$.

Кількість випробувань n не залежить від кратності інтеграла, тому метод Монте–Карло знаходить застосування для обчислення багатократних інтегралів,

де застосовувати інші методи чисельного інтегрування неефективно через помітне збільшення кількості обчислювальних операцій.

Розглянемо послідовність дій при обчисленні кратних інтегралів. Для реалізації цієї процедури перш за все потрібно мати m генераторів випадкових чисел, де m дорівнює кратності інтегрування.

Геометрично, обчислення m -кратного інтеграла

$$I = \iiint_{(S)} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad (9.40)$$

де $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – неперервна функція в обмеженій замкненій області S , зводиться до визначення $(m+1)$ -вимірного об'єму прямого циліндра в просторі $0x_1, x_2, \dots, x_m, y$, що побудований на основі S і обмежений зверху поверхнею $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Для перетворення інтеграла (9.40) таким чином, щоб нова область інтегрування цілком знаходилась всередині одиничного m -вимірного куба σ , зробимо заміну змінних

$$x_i = a_i + (b_i - a_i)\xi_i,$$

де ξ_i – відповідні координати від 0 до 1; a_i, b_i – граничні значення координат, де розташована область інтегрування.

Тоді з (9.40) отримуємо

$$I = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_m - b_m) I_\xi,$$

де

$$I_\xi = \iiint_{(\sigma)} \dots \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m.$$

Якщо застосувати m генераторів рівномірно розподілених випадкових чисел в діапазоні $(0,1)$, то обчислення середнього значення функції від їх комбінацій з застосуванням багатовимірного індикатора області інтегрування дасть шукану оцінку інтеграла

$$I_\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}) 1[\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}]$$

де $1[\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{mi}]$ дорівнює 1, якщо точка потрапляє всередину області інтегрування, і 0, якщо не потрапляє.

Похибка обчислення m -кратного інтеграла за методом Монте – Карло оцінюється аналогічно однократному за формулою (9.39).

9.7 Чисельне диференціювання

Задача полягає в тому, щоб для заданої диференційовної функції $f(x)$ знайти похідну в точці x_0 .

9.7.1 Чисельне диференціювання аналітично заданих функцій

Наближене диференціювання аналітично заданих функцій може бути потрібне при розробці універсальної процедури пошуку похідної для великої кількості різних функцій, або у випадку, коли аналітичний вигляд похідної надто громіздкий і призводить до втрати точності.

В основі чисельного диференціювання (numerical differentiation) аналітично заданих функцій покладено визначення похідної:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Оскільки невідомо, яке значення h узяти, будується послідовність $\{h_k\}$ так, щоб $h_k \rightarrow 0$ (наприклад, $h_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$) і, відповідно, формується послідовність $\{D_k\}$

$$D_k = \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (9.41)$$

Розрахунок елементів послідовності проводять до тих пір, поки виконується умова:

$$|D_{n+1} - D_n| < |D_n - D_{n-1}|$$

Якщо відома точність ε , з якою потрібно знайти похідну, то умова завершення може бути такою:

$$|D_{n+1} - D_n| < \varepsilon.$$

Порядок точності результату в цьому методі перший $O(h)$.

Порядок точності (найвища степінь поліному, для якої чисельний метод дає точний розв'язок) попереднього методу можна підвищити, використовуючи замість формули (9.41) інші вирази. Розглянемо ці формули.

Формула другого порядку точності $O(h^2)$ для обчислення похідної:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Аналогічно можна отримати такі формули для старших похідних точності порядку $O(h^2)$:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

$$f'''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3},$$

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}.$$

Сам алгоритм залишається незмінним. Формується послідовність $\{h_k\}$ так, щоб $h_k \rightarrow 0$ й відповідно обчислюються елементи послідовності $\{D_k\}$, для розрахунку яких замість виразу (9.41) використовується одна з отриманих формул.

Існують формули більш високих порядків точності, їх можна знайти в спеціальній літературі.

9.7.2 Чисельне диференціювання таблично заданих функцій

При розв'язанні багатьох практичних задач виникає необхідність визначення похідних від функцій, що задаються масивами даних, отриманих з експерименту. В цьому випадку безпосереднє диференціювання може дати хибні результати, тому що не відокремлено шум, що суттєво впливає на похідну. Приклад зображено на рис. 9.24, де $f(t)$ – корисний сигнал, $\tilde{f}(t)$ – вимірний сигнал (з шумом).

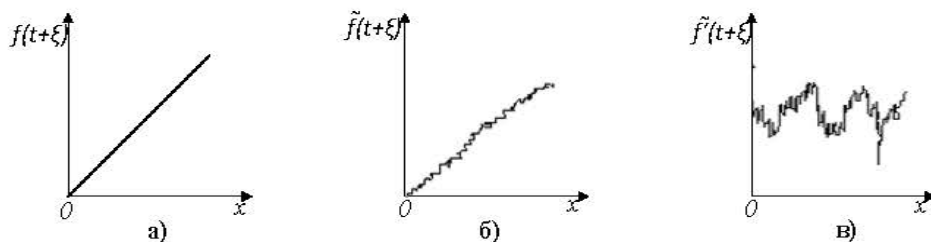


Рисунок 9.24 – Приклади корисного та виміряного сигналу

Зрозуміло, що похідна від $f(t)$ буде містити випадкову складову (якщо завада описується $\xi = A \sin(\omega t)$, то її похідна $\xi' = A\omega \cos(\omega t)$, тобто диференціювання збільшує заваду у ω разів, що вносить велику похибку у визначення реальної похідної від x . Практичним шляхом розв'язання цієї проблеми є згладжування сигналу, що отриманий з експерименту, шляхом інтерполяції чи апроксимації, а далі диференціювання інтерполяційного полінома (чи апроксимувальної функції). При цьому для отримання похідних вищих порядків треба ставити умову їх збігання для сигналу та його інтерполяційного полінома. Похибка похідної інтерполяційної функції $P(t)$ дорівнює похідній від похибки цієї функції:

$$\Delta(t) = \tilde{f}(t) - P(t),$$

$$\Delta^*(t) = \tilde{f}'(t) - P'(t),$$

тобто внаслідок лінійності операцій диференціювання та віднімання маємо

$$\Delta^*(t) = \Delta'(t).$$

В довідниках існують спеціальні таблиці, що дозволяють знаходити з застосуванням різних різницевих інтерполяційних формул значення похідних. Взагалі такі формули нескладно отримати для будь-яких методів інтерполяції шляхом диференціювання інтерполяційних формул в загальному вигляді.

Ключові слова

Локальна похибка, глобальна похибка, абсолютна похибка, відносна похибка, ітераційний алгоритм, збіжність, стійкість, коректність методів та алгоритмів, системи лінійних рівнянь, метод Крамера, метод Гаусса, метод Гаусса-Жордана, метод Гаусса-Зейделя, умови збіжності, власні значення, власні вектори, методи перетворень подібності, метод Хаусхолдера, нелінійні рівняння, алгебраїчні та трансцендентні, метод половинного ділення, метод хорд, метод простої ітерації, метод Ньютона, метод січних, комплексні корені, метод Ліна, метод Ньютона для систем нелінійних рівнянь, матриця Якобі, чисельне інтегрування, чисельне диференціювання, звичайні диференціальні рівняння, задача Коші, крайова задача, однокрокові методи, багатокрокові методи, порядок методу, “жорсткі” задачі, метод “стрілянини”, різниці, порядок різниць, різницеві шаблони, задачі в частинних похідних, еліптичні, параболічні, гіперболічні рівняння.

Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.1

1. Що є джерелом похибок обчислювальних методів та алгоритмів?
2. Чим відрізняються локальна та глобальна похибки?
3. Дайте означення абсолютної та відносної похибок обчислень.
4. Що таке ітераційні методи та алгоритми?
5. Як перевірити збіжність ітераційних алгоритмів?
6. Дайте означення стійкості та коректності обчислювальних методів та алгоритмів.
7. Наведіть приклади обчислювальних задач спеціальності. Класифікуйте їх за математичними методами та фізичною сутністю.

Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.2

1. Чим відрізняються прямі та непрямі методи розв’язання систем лінійних рівнянь? Дайте порівняльну оцінку.
2. Розкрити суть методів Крамера, Гаусса (і його різновидів), прогонки.
3. Як подається система рівнянь для застосування ітераційних методів?
4. Як перевірити збіжність ітераційних алгоритмів?
5. Чим відрізняються алгоритми ітераційних методів Якобі, Гаусса – Зейделя, послідовної верхньої релаксації?
6. Розв’язати наведену нижче систему рівнянь методом Крамера. Скласти алгоритм і програму розв’язання.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15; \\ x_1 - x_3 + 7x_4 = 26; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -10; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 20; \\ x_1 + x_3 - x_4 + 10x_5 = 50. \end{cases}$$

7. Розв'язати систему рівнянь з прикладу 6 методом Гаусса. Скласти алгоритм і програму.
8. Розв'язати систему рівнянь з прикладу 6 методом Гаусса – Жордана. Скласти алгоритм і програму.
9. Розв'язати систему рівнянь з прикладу 6 модифікованим методом Гаусса. Скласти алгоритм і програму.
10. Чи можна розв'язати систему рівнянь з прикладу 6 методом прогонки? Скласти алгоритм і програму для розв'язання методом прогонки системи з n рівнянь та тридіагональною матрицею коефіцієнтів.
11. Розв'язати вказаними в п. 6, 7, 8, 9, 10 методами на ЕОМ таку систему:

$$11.1 \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 12 \\ 30 \\ 14 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$11.2 \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$11.3 \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 15 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 38 \\ 5 \\ 4 \\ 14 \\ 19 \end{vmatrix}$$

12. Розв'язати методом Якобі наведену нижче систему. Скласти алгоритм і програму. Перевірити збіжність.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{4}, \\ x_2 = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} - \frac{x_3}{10} + \frac{x_4}{2}, \\ x_3 = \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{10}, \\ x_4 = \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} + 2. \end{cases}$$

13. Розв'язати методом Гаусса – Зейделя систему з п. 12. Скласти алгоритм і програму. Перевірити збіжність
14. Розв'язати методом послідовної верхньої релаксації систему з п. 12 з параметром релаксації $\omega = 1,5$.
15. Сформулювати проблему визначення власних значень матриці.
16. Яка матриця називається несингулярною?
17. Сформулювати умову ортогональності матриці.
18. Назвати властивості власних значень та векторів.
19. Чим відрізняються прямі та ітераційні методи визначення власних значень та векторів?
20. Визначити прямим методом власні значення та вектори матриць:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

21. Скласти алгоритм, програму та визначити власні значення матриць з п. 20 ітераційним методом.
22. Дати загальну характеристику методів перетворень подібності.
23. Чим відрізняються LQ та QR методи ?
24. Дати порівняльну оцінку, аналіз ефективності та умов застосування різних методів визначення власних значень та векторів.

Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.3

1. Навести класифікацію нелінійних рівнянь і систем та методів їх розв'язання. В яких задачах з спеціальності виникає потреба розв'язання таких задач?
2. Сформулювати головні теореми та правила відносно кількості та вигляду коренів алгебраїчних рівнянь.
3. Розв'язати алгебраїчне рівняння з комплексними коренями

$$x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 - x - 1 = 0.$$

Похибка оцінки кожного кореня не повинна перевищувати 0.05.

4. Чому для розв'язання систем нелінійних рівнянь можливе застосування тільки ітераційних методів?
5. Назвати ітераційні методи для розв'язання систем нелінійних рівнянь та порівняти їх.
6. Як оцінюється збіжність ітераційних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь?
7. Скласти алгоритм і програму та розв'язати на ЕОМ методами половинного ділення, хорд, Ньютона, січних та простої ітерації (оцінити інтервал збіжності) з похибками $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ такі рівняння:

$$x^4 + x^2 - x + 1 = 0;$$

$$x^3 - 7x + 2 = 0;$$

$$x^5 - 10x^2 + 5 = 0;$$

$$x^3 - 2x^2 - 1 = 0;$$

$$x^5 - x^2 - 3 = 0;$$

$$x^2 - \ln x = 0;$$

$$x - 10 \sin x = 0;$$

$$x^3 - 2 \operatorname{tg} x + 5 = 0;$$

$$x^2 - x + \operatorname{tg} x = 0.$$

8. Порівняти ефективність (час розрахунків та кількість ітерацій для досягнення заданої похибки) різних методів.
9. Знайти матриці Якобі для систем нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3^2 = 14 \\ \ln|x_1| + x_2^2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \sin \frac{\pi x_2}{4} - x_3 = 1 \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \cos x_1 + x_2 + \ln \frac{x_3}{3} = 2 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 = 8 \\ \frac{\operatorname{arctg} x_1}{\pi} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{12} = 1 \end{cases}$$

10. Як знайти матрицю обернену заданій? Скласти алгоритм.

1. Розв'язати на ЕОМ системи рівнянь з п. 7 методом Ньютона та модифікованим методом Ньютона. Скласти алгоритм та програму. Оцінити збіжність.
2. Дати порівняльну оцінку та рекомендації щодо вибору методів розв'язання нелінійних рівнянь та систем.

Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.4

1. Сформулюйте задачу Коші і крайову задачу. В чому відмінність у постановці цих задач?
2. Наведіть приклади звичайних диференціальних рівнянь, які розв'язуються лише чисельними методами.
3. Дайте порівняльну оцінку і визначте області застосування методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.
4. Чи можлива крайова задача для рівнянь першого порядку?
5. Що таке похибка зрізання (обмеження)? Чим визначається порядок похибки методу?
6. Покажіть, що загальна формула для методу Рунге – Кутта, застосована до рівняння $y' = -y$ з початковою умовою $y(0) = 1$, приводить до співвідношення $y_n = (1 - h + \frac{h^2}{2})^n \approx e^{-x_n}$.
7. В чому подібність між методами прогнозу та корекції і виправленим методом Ейлера?
8. Як оцінюються похибки методів Ейлера, Рунге – Кутта, прогнозу і корекції?
9. Дайте геометричну інтерпретацію методів Ейлера.
10. Що таке властивість «самостартування» методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь?
11. Як обирається крок при використанні багатокрокових методів розв'язання?
12. Які рівняння називають “жорсткими”? У чому особливості їх розв'язання?
13. Для розв'язання яких крайових задач може використовуватись метод “стрілянини”? Як отримати розв'язок крайової задачі з розв'язків декількох задач Коші в цьому методі?
14. З яких етапів складається розв'язання задачі різницевиими методами?
15. Запишіть всі можливі різницеві оператори для першої і другої похідних.
16. Як визначаються різницеві оператори для похідних більш високих порядків?

Контрольні запитання та завдання до підрозділу 9.5

1. Наведіть приклади інженерних задач, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.
2. На які типи можна поділити диференціальні рівняння другого порядку в частинних похідних залежно від коефіцієнтів, які входять до них?
3. Які методи існують для розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних?
4. Як конструюються обчислювальні шаблони для частинних похідних? Отримайте обчислювальні шаблони для оператора Лапласа та бігармонічного оператора.
5. Як використовується різницевий метод у випадку, коли межа області, де шукають розв'язок, не проходить через вузли сітки? Наведіть приклад обчислювального шаблону?
6. Якими різницевими методами розв'язується класична задача Діріхле для рівнянь Лапласа в прямокутній області? Доведіть їх збіжність.
7. Отримайте тришарову схему розв'язання гіперболічних рівнянь. В яких випадках розв'язок стійкий?
8. Порівняйте ефективність використання явної і неявної схем розв'язання параболічних рівнянь в частинних похідних.
9. Як вибирається крок при розв'язанні диференціальних рівнянь в частинних похідних?

Контрольні запитання та завдання до підрозділів 9.6-9.7

1. Перелічіть методи чисельного інтегрування?
2. Чому необхідні методи і алгоритми чисельного інтегрування?
3. Яка послідовність застосування методів Ньютона – Котеса? Розробіть алгоритм. Чим відрізняються прості формули Ньютона – Котеса від складених?
4. Як отримують формули Ньютона – Котеса? Виведіть прості формули трапецій та Сімпсона для чисельного інтегрування та складені формули.
5. Як застосовуються методи Гаусса і Чебишова? Розробіть алгоритм.
6. Як визначаються коефіцієнти в формулі Гаусса для чисельного інтегрування? Чому її називають формулою найвищої алгебраїчної точності?
7. Як оцінюється похибка методів чисельного інтегрування?
8. Порівняйте методи Чебишова, Гаусса, Ньютона – Котеса?
9. Згадайте метод прямокутників. В чому його суть? Розробіть алгоритм.
10. Розробіть алгоритм та наведіть приклад програми чисельного інтегрування

за методом Монте – Карло для двократного інтеграла $I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) dx dy$,

де область інтегрування σ визначається такими нерівностями

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 2x - 1.$$

Чи потраплять в область інтегрування точки з координатами (0.55; 0.75), (0.25; 0.75), (0.25; 0.25), (0.99; 0.70)?

11. Коли потрібні методи чисельного диференціювання аналітично заданих функцій і в чому вони полягають?

Література

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
2. Кветний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень / Кветний Р. Н. – Вінниця : ВНТУ, 2001. – 218 с.
3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 448 с.
4. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень / під заг. ред. Р. Н. Кветного – Вінниця : ВНТУ, 2012. – ч. 1 – 196 с.; ч. 2 – 230 с.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1986. – 832 с.
6. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. – К. : Вища школа, 1986. – 264 с.
7. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підручник / Ляшенко М. Я., Головань М. С. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.
8. Маликов В. Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ / Маликов В. Т., Кветний Р. Н. – К. : Вища школа, 1989. – 362 с.
9. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарский А. А. – М. : Наука, 1987. – 234 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
11. Скурихин В. Н. Математическое моделирование / Скурихин В. Н., Шифрин В. Б., Дубровский В. В. – К. : Техніка, 1983. – 270 с.
12. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці / Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. – К. : Вид. група ВНУ, 2006. – 480 с.
13. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 279 с.

14. Чабан В. Чисельні методи / В. Чабан. – Львів : Вид. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2001. – 186 с.
15. Оборский Г. А. Моделирование систем / Г. А. Оборский, А. Ф. Дашенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин – Одесса : Астропринт, 2013. – 664с.
16. Kvyetnyu R. Basics of Modelling and Computational Methods / R. Kvyetnyu. – Вінниця : ВДТУ, 2007. – 147 с.

10 ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Імітаційне моделювання є окремим випадком чисельних експериментів. *Імітаційне моделювання* у сучасному розумінні – це чисельний експеримент зі складною математичною моделлю, яка описує поведінку системи і реалізується на комп'ютері.

Чисельним експериментом називають експеримент із складною математичною моделлю, яка описує поведінку системи і реалізується на комп'ютері.

Головною перевагою чисельних експериментів перед натурними експериментами є їх доступність та відносно низька вартість. Вони дозволяють без витрат на створення системи перевірити її характеристики в процесі майбутньої експлуатації, обрати оптимальні параметри, прогнозувати поведінку системи і передбачати можливість виникнення критичних ситуацій. Але все це можливе лише за однієї умови: адекватність моделі щодо відтворення усіх аспектів функціонування системи. Забезпечення і доведення адекватності моделі є достатньо складною задачею.

Як правило, адекватність моделі не буває повною. Для проведення успішних чисельних експериментів необхідно, щоб лише суттєві для мети моделювання властивості об'єкта правильно відображалися моделлю. Нагадаємо, що такі моделі називаються гомеоморфними (див. підрозділ 1.4.1).

Важливою особливістю чисельних експериментів є можливість отримання результатів у зручній формі і масштабі. Зокрема, це особливо важливо при дослідженні дуже повільних, або навпаки – дуже швидких процесів. Так наприклад, натурний експеримент щодо проектування системи керування інкубатором мав би тривати місяці, а натурний експеримент щодо дослідження траєкторії польоту кулі у неоднорідному середовищі вимагав би апаратури реєстрації міросекундних процесів. У той же час чисельний експеримент завдяки вибору зручного масштабу часу (коефіцієнта подібності інтервалів часу - див. «Теорію подібності» у підрозділі 1.4.2) дозволяє отримувати результати зі швидкістю, яка є зручною для користувача.

Сучасні математичні пакети надають дуже широкі можливості і зручні інструменти для проведення чисельних експериментів. Вони забезпечують наочне графічне відображення результатів експериментів, легку зміну умов експерименту і можливість дослідження впливу цих змін на поведінку системи.

І на останок зробимо важливе зауваження: ***результати чисельних експериментів обов'язково повинні перевірятися на практиці!***

10.1 Постановка задачі імітаційного моделювання

Імітаційне моделювання – це метод дослідження, при якому досліджувана система замінюється моделлю, що з достатньою точністю описує реальну систему, з нею проводяться експерименти з метою одержання інформації про цю систему.

До імітаційного моделювання вдаються, коли:

- дорого або неможливо експериментувати на реальному об'єкті;
- неможливо побудувати аналітичну модель, тому що в системі є логічні причинно-наслідкові зв'язки, нелінійні динамічні блони, стохастичні (випадкові) впливи;
- необхідно дослідити поведінку системи впродовж часу.

Імітаційне моделювання може застосовуватися у різних сферах діяльності. Особливо ефективно моделювання при вирішенні таких завдань:

- дослідження характеристик складних систем управління;
- проектування та аналіз виробничих систем;
- оцінювання різних систем озброєнь;
- визначення вимог до устаткування та протоколів мереж зв'язку;
- модернізація різних процесів у діловій сфері;
- аналіз фінансових і економічних систем.

Основна задача імітаційного моделювання полягає у декомпозиції системи на відносно прості блоки (підсистеми), аналітичні моделі яких відомі або можуть бути легко отримані; поданні вхідних впливів на систему у вигляді послідовності числових значень, які надходять з певним інтервалом (інтервалом дискретизації процесів у часі); здійсненні їх перетворень послідовно та відповідно до математичних залежностей, які описують послідовність і зміст перетворення сигналів і даних у реальній системі.

Найбільш розповсюдженим способом побудови імітаційної моделі є *статистичне моделювання*.

Методика статистичного моделювання містить в собі ряд послідовних етапів:

- моделювання на комп'ютері випадкових впливів на систему у вигляді числових послідовностей із заданою кореляцією і законом розподілення ймовірностей;
- моделювання перетворення сигналів;
- статистична обробка результатів моделювання.

Таким чином, імітаційне моделювання ґрунтується на наявних моделях сигналів і перетворень і фактично є способом організації отримання результатів від моделі.

10.2 Використання агрегатного принципу для імітаційного моделювання

Імітаційне моделювання суттєво спрощує процес отримання результатів через можливість використання агрегатного принципу. Це означає, що відпадає необхідність розв'язування складних систем рівнянь, які описують функціонування замкнених систем управління.

Пояснимо ці переваги на прикладі. Нехай необхідно здійснити моделювання нелінійної динамічної системи, структурна схема якої зображена на рис. 10.1

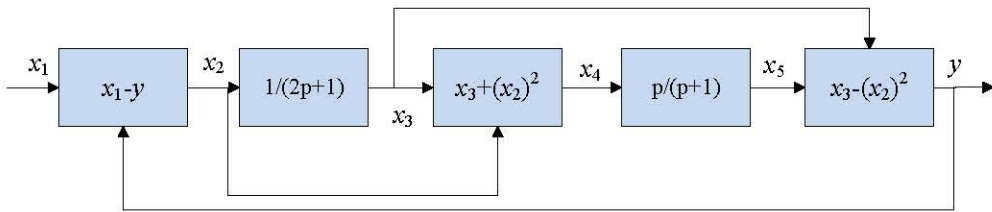


Рисунок 10.1 – Приклад нелінійної динамічної системи

Наведена система описується системою рівнянь

$$\begin{cases} x_2(t) = x_1(t) - y(t) \\ 2 \frac{dx_3(t)}{dt} + x_3(t) = x_2(t) \\ x_4(t) = x_3(t) + x_2^2(t) \\ \frac{dx_5(t)}{dt} + x_5(t) = \frac{dx_4(t)}{dt} \\ y(t) = x_3(t) - x_2^2(t) \end{cases} \quad (10.1)$$

Нелінійні перетворення (у наведеному прикладі – третє і п'яте) моделюються простими функціональними залежностями. Моделювання динамічних перетворень здійснюється на основі дискретної моделі (3.43) - (3.44):

$$y_0 = \sum_{i=0}^n K_{x_i} x_{-i} + \sum_{i=1}^m K_{y_i} y_{-i},$$

де від'ємні індекси означають попередні моменти часу, по відношенню до поточного моменту, а

$$K_{x_i} = \frac{(-1)^i \sum_{j=i}^n C_j^i \frac{a_j}{\Delta t^j}}{\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Delta t^j}},$$

$$K_{y_i} = \frac{(-1)^{i+1} \sum_{j=i}^m C_j^i \frac{b_j}{\Delta t^j}}{\sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Delta t^j}}.$$

У окремих випадках:

$$1. W(p) = \frac{1}{Tp}. \quad (10.2)$$

Тут $n=0$, $m=1$, $a_0=1$, $b_1=T$, $b_0=0$;

$$y_0 = \frac{x_0 - \left[\frac{T}{\Delta t} (-1)^i y_{-1} \right]}{\frac{T}{\Delta t}} = y_{-1} + \frac{1}{T} X \Delta t. \quad (10.3)$$

Очевидно, передатна функція (10.2) відповідає інтегратору, а вираз (10.3) є кусково-ступінчастою апроксимацією інтегрування.

$$2. W(p) = \frac{1}{Tp+1}. \quad (10.4)$$

Тут $n=0$, $m=1$, $a_0=1$, $b_1=T$, $b_0=1$;

$$y_0 = \frac{x_0 - \left[\frac{T}{\Delta t} (-1) y_{-1} \right]}{1 + \frac{T}{\Delta t}} = \frac{\frac{T}{\Delta t} y_{-1} + x_0}{1 + \frac{T}{\Delta t}}. \quad (10.5)$$

Очевидно, передатна функція (10.4) відповідає аперіодичному ланцюгу, а вираз (10.5) є рекурсивною сумою зі зменшенням вагових коефіцієнтів “застарілих даних”.

$$3. W(p) = Tp. \quad (10.6)$$

Тут $n=1$, $m=0$, $a_0=0$, $a_1=T$, $b_0=1$;

$$y_0 = \frac{T}{\Delta t} (x_0 - x_{-1}) = T \frac{x_0 - x_{-1}}{\Delta t}. \quad (10.7)$$

Очевидно, передатна функція (10.6) відповідає диференціатору, а вираз (10.7) є дискретним аналогом похідної.

Скориставшись наведеним способом, отримуємо систему (10.1) у дискретному вигляді

$$\begin{cases} x_2(i) = x_1(i) - y(i) \\ x_3(i) = \frac{2x_3(i-1) + x_2(i)}{3} \\ x_4(i) = x_3(i) + x_2^2(i) \\ x_5(i) = \frac{x_4(i) - x_4(i-1) + x_5(i-1)}{2} \\ y(i) = x_3(i) - x_2^2(i) \end{cases} \quad (10.8)$$

Наведені системи рівнянь (10.1) і (10.8) важко розв'язати аналітично відносно $y(t)$ (або $y(i)$ у дискретному варіанті): перша через нелінійність диференціального рівняння, до якого зводиться система, друга – через велику кількість невідомих. В результаті система, зображена на рис. 10.1, не може бути промодельована за комплексним принципом, тобто одразу уся в цілому, натомість легко моделюється за агрегатним принципом, коли кожне перетворення здійснюється окремо і послідовно. У дискретному варіанті, який власне і використовується для імітаційного моделювання, необхідно лише визначити попередні і початкові значення усіх змінних (виходячи з міркування, що початок моделювання збігається з моментом увімкнення системи, звичайно вважають, що початковий і попередні стани системи нульові).

Приклад. Нехай задана система керування (рис. 10.2).

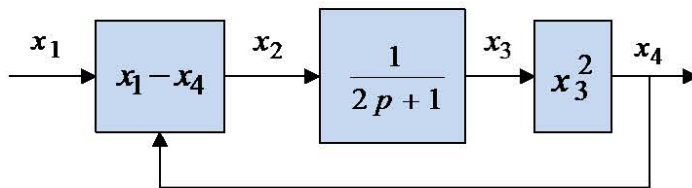


Рисунок 10.2 – Приклад замкненої системи керування

Тоді динамічний блок буде моделюватися перетворенням (10.5)

$$x_3 = \frac{\frac{2}{\Delta t} x_3 + x_2}{1 + \frac{2}{\Delta t}}$$

Вважатимемо $\Delta t = 1$ с. Тоді загальний алгоритм імітаційного моделювання буде складатися з таких дій.

1) *Задаємо інтервал кореляції τ і діапазон D вхідного сигналу, кількість тактів генерування вхідного сигналу N .*

2) *Визначаємо кількість тактів на інтервалі кореляції $m = \tau / \Delta t$*

3) *Задаємо початкові умови $x_{10}=0, x_{20}=0, x_{30}=0, x_{40}=0$.*

4) Генеруємо m випадкових чисел $u_1 \dots u_m$ з нормальним розподілом і розкидом D .

5) Задаємо $i = 1$.

6) Обчислюємо $x_{1i} = \frac{1}{m} \sum_{j=i}^{i+m-1} u_j$.

7) Обчислюємо $x_{2i} = x_{1i} - x_{4i-1}$.

8) Обчислюємо $x_{3i} = \frac{2x_{3i-1} + x_{2i}}{3}$.

9) Обчислюємо $x_{4i} = x_{3i}^2$.

10) Обчислюємо $i = i + 1$.

11) Якщо $i \leq N$ генеруємо нове число u_j і повертаємось до кроку 6

12) Розраховуємо математичні сподівання M_{x_1} , M_{x_4} і дисперсії D_{x_1} ,

D_{x_4} .

13) Змінюємо інтервал кореляції τ і діапазон D вхідного сигналу і повертаємось до кроку 2.

14) Будуємо графіки залежності коефіцієнта перетворення $k_1 = \frac{M_{x_4}}{M_{x_1}}$ і

коефіцієнту фільтрації $k_2 = \frac{D_{x_4}}{D_{x_1}}$ від інтервалу кореляції τ і діапазону D вхідного сигналу.

15) Аналізуємо властивості системи і робимо висновки.

10.3 Алгоритми генерування тестових послідовностей

Розглянемо детальніше найскладніший з етапів – генерування випадкових чисел із заданим законом розподілу ймовірностей і кореляційними властивостями. Цю задачу розв’язують в декілька етапів. Спочатку отримують послідовність рівномірно розподілених на інтервалі $[0,1]$ випадкових чисел, а з неї – послідовність випадкових чисел із заданим законом розподілення.

Виділяють три основних методи формування таких послідовностей.

1. Пряме перетворення числа x_i , яке є реалізацією випадкової величини X , що рівномірно розподілена на інтервалі $[0,1]$, за допомогою деякої функції W_N у число y_i , яке може бути розглянуте як реалізація випадкової величини Y , що має заданий закон розподілення. Функція необхідного нелінійного перетворення може бути визначена з рівняння (1.94), в якому у даному випадку f_x – рівномірний розподіл, f_y – необхідний нам розподіл, $N(x)$ – шукане нелінійне перетворення.

2. Відсіювання чисел із початкової послідовності рівномірно розподілених на інтервалі $[0,1]$ випадкових чисел таким чином, щоб числа, які залишились, були розподілені за заданим законом.

3. Моделювання умов відповідних граничних теорем теорії ймовірності. Зокрема, для отримання послідовності з нормальним законом розподілу достатньо усереднювати декілька (не менше 6) даних, розподілених за рівномірним законом.

На практиці доцільно використовувати всі три методи формування. Вибір оптимального методу визначається, виходячи з мети й задач моделювання та їх особливостей.

Складнішим є генерування *випадкових числових послідовностей* із заданими законами розподілу ймовірностей та кореляційними функціями.

Відомий метод отримання числових послідовностей з допомогою *сортування* вихідних послідовностей. Метод ґрунтується на тому, що коефіцієнт кореляції випадкових чисел залежить більше від порядку їх розташування, ніж від величини. Саме тому дві випадкових послідовності, що відповідають двом різним розподіленням, у випадку, якщо вони впорядковані приблизно однаково, будуть мати приблизно рівні коефіцієнти кореляції.

Відповідно до методу сортування генерується випадкова послідовність $X(k)$ із заданою *кореляційною функцією*, але довільним розподілом. Ставиться їй у відповідність послідовність цілих чисел $I(k)=k$ (тобто члени послідовності нумеруються). Потім обидві послідовності попарно сортуються. При цьому величини $X(k)$ розташовуються за зростанням, а масив $I(k)$ «запам’ятовує» їх попереднє положення (місце в несортованому масиві $X(k)$). Таким чином, масив цілих чисел $I(k)$ відображає кореляцію між елементами масиву $X(k)$. Після впорядкування масив $X(k)$ цікавості не викликає, оскільки вся інформація про кореляційну функцію тепер знаходиться в масиві $I(k)$.

Потім генерується випадкова послідовність $Y(k)$ із заданим *законом розподілу ймовірностей* і нульовою кореляцією і записується на місце масиву $X(k)$. Після цього вона сортується порядку зростання. Далі масиви $I(k)$ і $Y(k)$ попарно сортуються, причому масив $I(k)$ розташовується у порядку зростання. Схема алгоритму наведена на рис. 10.3.

Алгоритм сортування доцільно використовувати в тих випадках, коли для моделювання достатньо невеликої кількості статистичних даних, що не потребує оперування числовими масивами великої розмірності. При великій розмірності цих масивів суттєво збільшується час моделювання.

Відомий алгоритм *фільтрації*, що потребує менших витрат машинного часу для отримання випадкового процесу із заданою кореляцією і законом розподілу ймовірностей, який базується на використанні нормального стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ як початкового. Завжди існує таке нелінійне безінерційне перетворення $Y=W_N(X)$, яке перетворює нормальну функцію щільності $f_X(x)$ процесу $X(t)$ на задану $f_Y(y)$. Якщо вихідний процес $X(t)$ має кореляційну функцію $R_{XX}(\tau)$, то перетворений процес $Y(t)$ буде мати кореляційну функцію $R_{YY}(\tau)$, що відрізняється від функції $R_{XX}(\tau)$ і пов'язана з нею деякою залежністю $R_{YY}=J(R_{XX})$. Вигляд цієї залежності визначає перетворення $Y=W_N(X)$. Для того щоб, кореляційна функція перетвореного процесу була заданою, необхідно вибрати кореляційну функцію вихідного процесу:

$$R_{XX}(\tau) = J^{-1}[R_{YY}(\tau)]. \quad (10.9)$$

При використанні цього методу підготовча робота складається з таких етапів.

1. Знаходження функції перетворення $Y=W_N(X)$ за заданою функцією щільності $f_Y(y)$.
2. Отримання за знайденою функцією $Y=W_N(X)$ залежності $R_{YY}=J(R_{XX})$.

3. Розв'язання рівняння $R_{YY}=J(R_{XX})$ відносно R_{XX} , тобто визначення кореляційної функції $R_{XX}(\tau)$ нормального вихідного процесу $X(t)$.

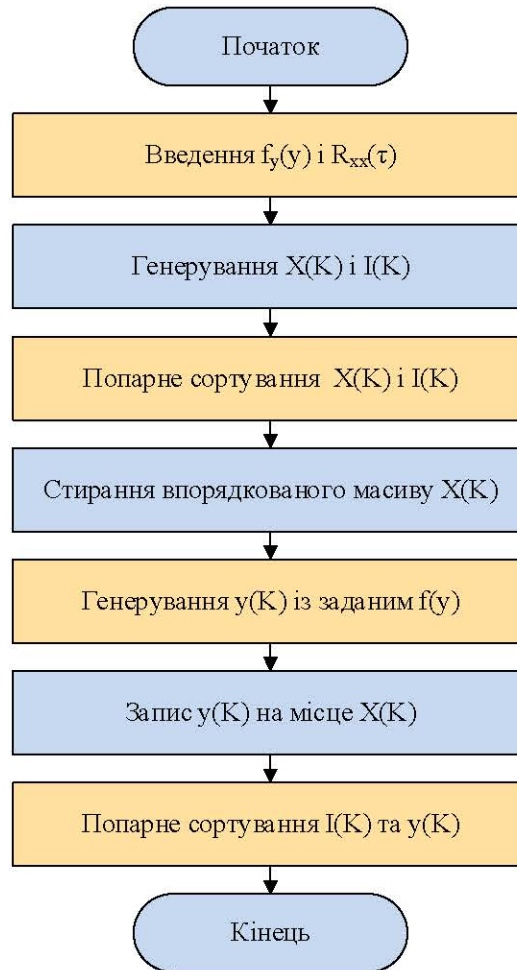


Рисунок 10.3 – Алгоритм генерування випадкової числової послідовності із заданими статистичними характеристиками методом сортування

Після закінчення підготовчої роботи моделювання випадкового процесу із заданими характеристиками зводиться до формування дискретних реалізацій $X[n]$ нормального випадкового процесу $X(t)$ і перетворення цих реалізацій за формулою

$$Y[n] = W_N \{X[n]\}. \quad (10.10)$$

Описаний алгоритм потребує менших витрат часу, ніж алгоритм сортування, не потребує накопичення і зберігання у пам'яті числових масивів великої розмірності. Недоліком методу є його складність для програмування і великий обсяг підготовчої роботи.

При використанні обох описаних алгоритмів виникає задача генерування на комп'ютері випадкових числових послідовностей із заданими законами розподілення і нульовою кореляцією та випадкових числових послідовностей із заданою кореляційною функцією та довільним розподіленням.

Задача дещо спрощується при генеруванні нормальної послідовності із заданою кореляційною функцією, оскільки отримання заданої кореляційної функції виконується шляхом лінійної фільтрації, яка не призводить до втрати нормальності розподілу послідовності даних.

Методика генерування нормальної послідовності із заданою кореляційною функцією передбачає використання початкової послідовності типу «нормальний білий шум» – таку послідовність звичайно генерують стандартні генератори. Спектральна щільність потужності такої послідовності є константою

$G_{xx} = D_x / 2\pi$. Методика складається з кроків:

1. Підготовчий етап:

1.1. Знаходження спектральної щільності необхідної послідовності як перетворення Фур'є заданої кореляційної функції $G'_{xx}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$;

1.2. Знаходження амплітудно-частотної характеристики необхідного фільтра $A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|G'_{xx}(j\omega)|}{D_x / 2\pi}$;

1.3. Знаходження відповідного дискретного перетворення за формулою (5.41);

2. Власне моделювання:

2.1. Генерування початкової послідовності типу нормального білого шуму з заданою дисперсією;

2.2. Перетворення її за знайденою формулою дискретної фільтрації – отримання вхідної послідовності для імітаційної моделі;

2.3. Імітація перетворення вхідних даних системою;

3. Обробка результатів імітаційного моделювання.

Окремим випадком є генерування числової послідовності з нормальним розподілом ймовірностей і експоненціальною автокореляційною функцією. Цей вид випадкової послідовності є найпоширенішим і найлегшим для генерування. Генерування здійснюється у два етапи:

1. Генерування некорельованої рівномірно розподіленої послідовності $\{x_i\}$ за допомогою будь-якої програми-генератора, які наразі є в усіх мовах програмування;

2. Перетворення на задану послідовність $\{x'_j\}$ методом підрахунку ковзного середнього

$$x'_j = \frac{1}{m} \sum_{i=j}^{j+m-1} x_i.$$

При $m \geq 6$ через дію умов центральної граничної теореми теорії ймовірностей розподіл послідовності $\{x'_j\}$ буде близьким до нормального. Крім того, елементи цієї послідовності при утворенні мають різну кількість спільних доданків, наприклад:

$$\text{при } m = 6 \text{ маємо } x'_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_6,$$

$$x'_2 = x_2 + \dots + x_6 + x_7,$$

$$x'_3 = x_3 + \dots + x_6 + x_7 + x_8,$$

тобто x'_1 має 5 спільних доданків з x'_2 , 4 спільних доданки з x'_3 і т. д., що приводить до поступового зменшення зв'язку між елементами отриманої послідовності. Це приблизно відповідає експоненціальному характеру кореляційної функції. Очевидно, інтервал кореляції цієї послідовності буде $m - 1$.

10.3.1 Обробка результатів імітаційного моделювання

Обробка результатів імітаційного моделювання здійснюється за тими ж правилами і методиками, що й обробка результатів реальних натурних експериментів. Зокрема, якщо моделями вхідних сигналів є випадкові числові послідовності, то для обробки результатів використовуються методи дисперсійного, кореляційного і регресійного аналізу, розглянуті у підрозділі 6.1.

10.3.2 Оцінювання необхідного обсягу тестів та трудомісткості імітаційного моделювання

Основою для визначення необхідного обсягу тестових даних є оцінка похибки імітаційного моделювання. Залежно від вигляду статистичних характеристик вихідних сигналів імітаційної моделі, які необхідно оцінити у конкретній задачі, похибки оцінки обчислюються за формулами:

– при оцінюванні розподілу ймовірностей способом підрахування кількості даних, які потрапляють у кожен інтервал розбиття діапазону можливих значень (спосіб побудови гістограми) відносна похибка розраховується за формулою

$$\varepsilon_p^* = \sqrt{(1 - P_A) / N}, \quad (10.11)$$

де P_A – ймовірність потрапляння даного у окремий інтервал; N – обсяг вибірки.

При оцінюванні розподілу ймовірностей на основі визначення відносного часу перебування у заданому інтервалі

$$\varepsilon_{p^*} = \sqrt{\frac{2(1-P_A)\tau}{TP_A}}, \quad (10.12)$$

де T – загальний час спостереження; τ – інтервал надходження дискретних даних;

– при оцінюванні середнього значення усієї множини результатів моделювання і відсутності кореляції між окремими результатами

$$\varepsilon_{m^*} = \frac{1}{m_x} \sqrt{\frac{D_x}{N}} = \frac{\sigma_x}{m_x \sqrt{N}}, \quad (10.13)$$

де m_x і σ_x – математичне сподівання і с.к.в. результатів.

При оцінюванні поточного середнього значення методом ковзного середнього на основі рекурентної формули $m_x = \frac{m_x(n-1) + x}{n}$ і відсутності кореляції між окремими результатами

$$\varepsilon_{m^*} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{m_x^2}{m_x^2} - 1 \right)} = \frac{\sigma_x}{m_x \sqrt{n}}; \quad (10.14)$$

– при оцінюванні дисперсії нормально розподіленої послідовності і відсутності кореляції між окремими результатами

$$\varepsilon_D = \frac{\sigma_D}{D_x} = \sqrt{\frac{2}{N-1}}; \quad (10.15)$$

– при оцінюванні коефіцієнта кореляції на основі зіставлення часу перевищення деякого рівня U у двох корельованих послідовностях

$$\varepsilon_{\rho^2}^2 = \frac{D[\rho_{x^*}^*(\tau)]}{U^2 \rho_{x^*}^2(\tau)} = \frac{1}{(\beta_{\rho^*}^*)} = \frac{[1 - \rho_{x^*}^2(\tau)]}{N \rho_{x^*}^2(\tau)}, \quad (10.16)$$

де $\beta_{\rho^*}^* = U/\sigma_{\rho^*}^*(\tau)$.

З наведених співвідношень видно, що в усіх випадках похибка прямо чи опосередковано (через час проведення моделювання) залежить від кількості отриманих даних. Тому необхідна кількість даних може бути знайдена шляхом розв'язування нерівності

$$\varepsilon(N) \leq \varepsilon_{\max}, \quad (10.17)$$

де ε_{\max} – максимально допустима похибка моделювання.

Наприклад, для оцінювання закону розподілу ймовірностей шляхом побудови гістограми скористаємось нерівністю на основі формули (10.11)

$$\sqrt{(1-P)/N} \leq \varepsilon_{\max}. \quad (10.18)$$

Якщо гістограма будується на 10 інтервалах розбиття діапазону можливих значень результатів і попередній гіпотезі, що цей закон близький до трикутного, розрахуємо мінімальну ймовірність (з формули видно, що кількість даних обернена до ймовірності)

$$P_{\min} = \frac{1}{2} \cdot (0,1D_0) \cdot (0,2h),$$

де D_0 – діапазон; h – висота трикутного розподілу. Враховуючи, що $\frac{1}{2}D_0h = 1$, отримуємо $P_{\min} = 0,02$.

Розв'язуючи нерівність (10.18) відносно N , знаходимо, що для отримання відносної статистичної похибки не гірше 0,1 (тобто 10% – досить неточний експеримент!) на кожному інтервалі необхідно мати $N \geq (1-0,02)/0,1^2$, тобто не менше 98 даних, а усього для 10 інтервалів імітаційна вибірка повинна містити не менше 980 даних.

При попередній гіпотезі про нормальність закону розподілу результатів кількість даних повинна бути значно більшою, оскільки на кінцях діапазону значення ймовірності для нормального закону менше, ніж для трикутного. Очевидно, найменша кількість даних необхідна за умови гіпотези про рівномірний характер розподілу результатів.

Оскільки заздалегідь невідомо, виправдається висунута гіпотеза, чи ні, то найчастіше імітаційний експеримент проводять у два етапи: спочатку генерують мінімальну кількість даних, проводять експеримент, попередньо визначають тип розподілу ймовірностей результатів, а потім уточнюють розрахунок необхідної кількості даних і проводять додаткове моделювання.

10.3.3 Програмні пакети для імітаційного моделювання

Інтерактивне середовище моделювання SIMULINK

Програма SIMULINK є додатком до пакета MATLAB. В певному сенсі SIMULINK можна розглядати як самостійний продукт фірми MathWorks, однак він працює лише за наявності ядра MATLAB і використовує функції, які входять до його складу.

Додаток SIMULINK є інтерактивним інструментом для моделювання, імітації та аналізу динамічних систем, охоплюючи дискретні, неперервні, гібридні, нелінійні та розривні системи, за допомогою якого можна поєднувати блоки, що відповідають окремим елементам динамічної системи в єдине ціле й вивчати їх поведінку в часі.

Розробка моделей засобами SIMULINK (S-моделі) основана на технології drag-and-drop («перетягни і залиш»). Для побудови S-моделі використовуються модулі (або блоки), які зберігаються в бібліотеці SIMULINK. Компоненти моде-

лей, які містяться в ряді бібліотек і за допомогою миші можуть переноситися в основне вікно та з'єднуватися один з одним необхідними зв'язками. До складу моделей можуть входити джерела сигналів різного виду, віртуальні реєструвальні прилади, графічні засоби анімації. Подвійне клацання мишею на блоці моделі виводить вікно зі списком його параметрів, які користувач може змінювати. Запуск імітації забезпечує математичне моделювання побудованої моделі з наочним візуальним поданням результатів.

Пакет заснований на побудові блокових схем шляхом перенесення блоків з бібліотеки компонентів у вікно редагування створюваної користувачем моделі. Блоки можуть бути пов'язані одні з одним як за інформацією, так і за управлінням. Вид зв'язку залежить від типу блока та логіки роботи моделі. Дані, якими обмінюються блоки, можуть бути скалярними величинами, векторами або матрицями довільної розмірності.

Будь-яка S-модель може мати ієрархічну структуру, тобто складатись з моделей більш низького рівня, причому кількість рівнів ієрархії практично не обмежена. Разом з іншими параметрами моделювання користувач може задавати спосіб зміни модельного часу (з постійним чи змінним кроком), а також умови завершення моделювання.

В ході моделювання надається можливість спостерігати за процесами, які відбуваються в системі. Для цього використовуються спеціальні «оглядові вікна», які входять до складу бібліотеки SIMULINK. Характеристики, які цікавлять користувача, можуть бути подані як в числовій, так і в графічній формах.

Застосування принципів структурного і модульного програмування дозволяє подавати різноманітні алгоритми у вигляді набору уніфікованих програмних модулів, що покращує оглядовість програми, полегшує її відлагодження, і в кінцевому результаті, зменшує загальний обсяг програмного забезпечення, яке необхідно розробити. При цьому, на відміну від класичних способів моделювання, користувач не має необхідності досконало вивчати мову програмування і чисельні методи математики. Йому достатньо загальних знань, необхідних при роботі за комп'ютером, і знань тієї предметної області, в якій він працює. До того ж склад бібліотеки SIMULINK може бути доповнений користувачем за рахунок розробки власних блоків.

Варто відмітити, що у складі MATLAB є велика кількість інших додатків, оснований на методах графічного (візуального) програмування, які припускають можливість сумісної роботи з додатком SIMULINK.

Aerospace Blockset – містить спеціальні інструменти для моделювання авіаційних, космічних, реактивних і турбореактивних систем.

DSP Blockset – призначений для проектування систем і моделювання задач цифрової обробки сигналів (DSP).

Дані бібліотеки містять в собі такі ключові операції, як класична, багатоступенева і адаптивна фільтрації, перетворення, матричні операції і лінійна алгебра, статистика і спектральний аналіз.

Nonlinear Control Design Blockset – надає користувачу графічний інтерфейс для налаштування параметрів динамічних об'єктів

SimPowerSystems – призначений для моделювання електротехнічних і електроенергетичних пристроїв і систем.

SimMechanics – дозволяє моделювати системи управління за допомогою ненаправлених сигнальних графів, об'єднувати їх з фізичними моделями і моделями з інших бібліотек.

Моделювання за допомогою SIMULINK складається з таких кроків:

- вибір або створення блоків моделі.
- організація зв'язків між блоками моделі.
- встановлення параметрів окремих блоків.
- організація виведення результатів моделювання.
- запуск моделі і отримання результату.

На рис. 10.4 наведений елементарний приклад подібного моделювання. Ви в інтерактивному режимі складаєте з блоків необхідну модель і бачите на екрані віртуального осцилографа результат моделювання.

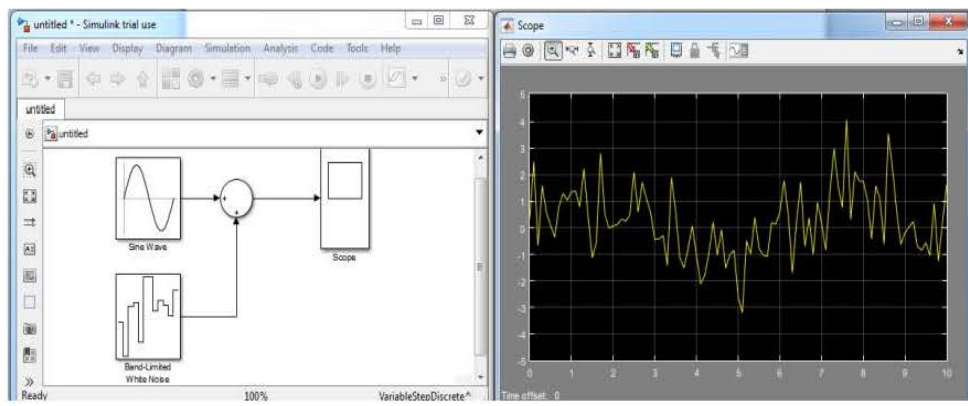


Рисунок 10.4 – Принцип візуального програмування в SIMULINK

На рис. 10.5 показаний процес моделювання простої системи – гідравлічного циліндра. Контроль здійснюється за допомогою віртуальних осцилографів – на рис. 10.6 видно екрани двох таких осцилографів і вікно простої підсистеми моделі. Можливе моделювання складних систем, що складаються з безлічі підсистем. Simulink складає і вирішує рівняння стану моделі і дозволяє підключати в потрібні точки різноманітні віртуальні вимірювальні прилади.

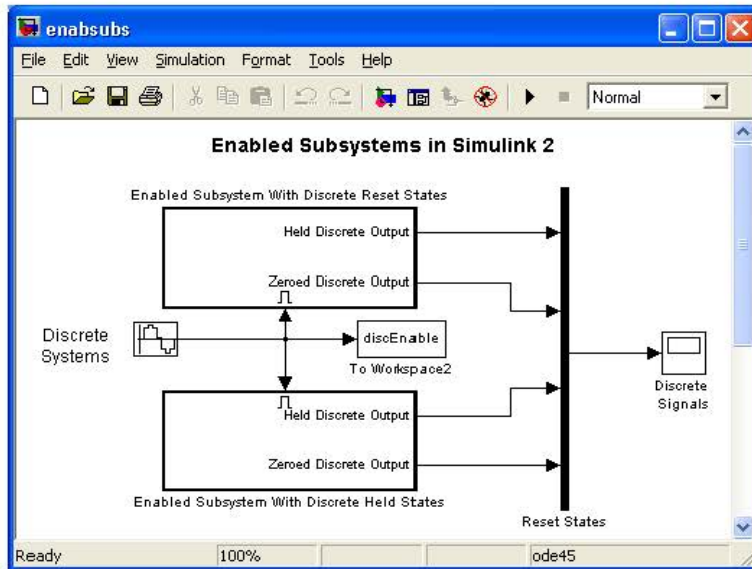


Рисунок 10.5 – Процес моделювання гідравлічного циліндра

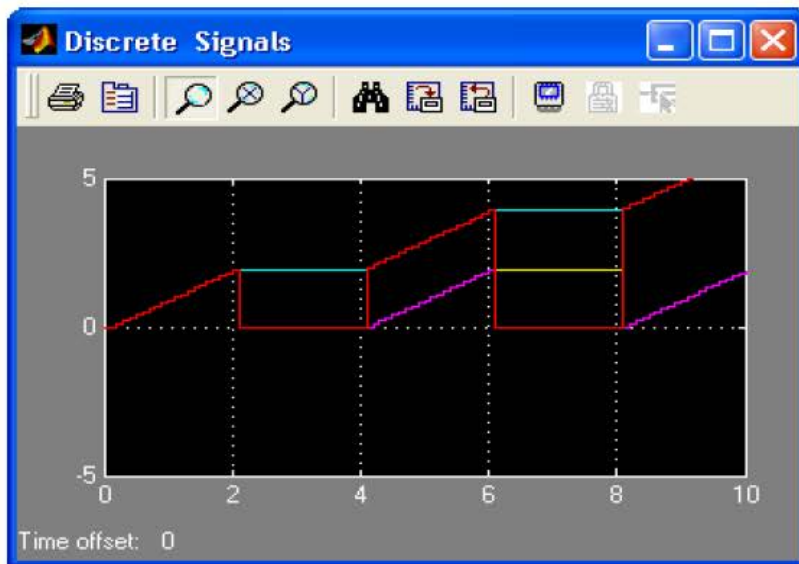


Рисунок 10.6 – Приклад моделювання системи гідравлічного циліндра за допомогою розширення Simulink

Принципи моделювання в SIMULINK

Для запуску програми необхідно попередньо запустити пакет MATLAB. Після відкриття основного вікна програми MATLAB (рис. 10.7) необхідно запусити програму SIMULINK.

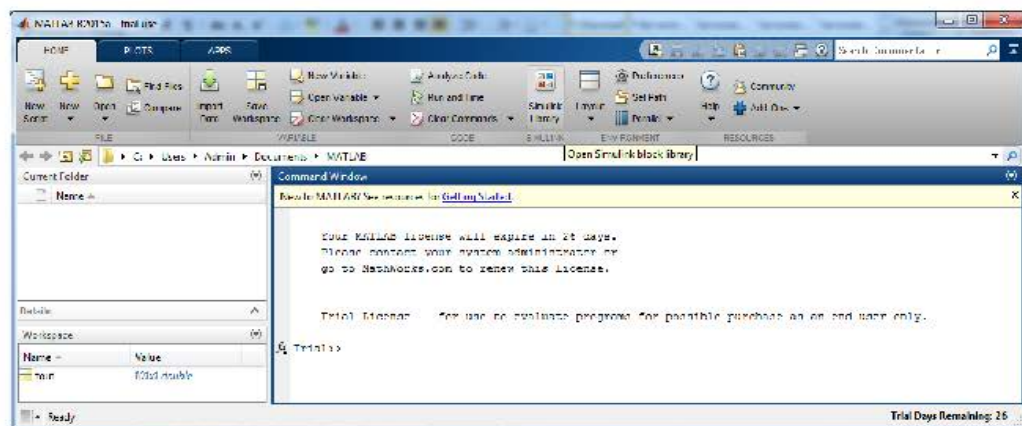


Рисунок 10.7 – Основне вікно програми MATLAB

При запуску відкривається вікно оглядача розділів бібліотеки SIMULINK (рис. 10.8).

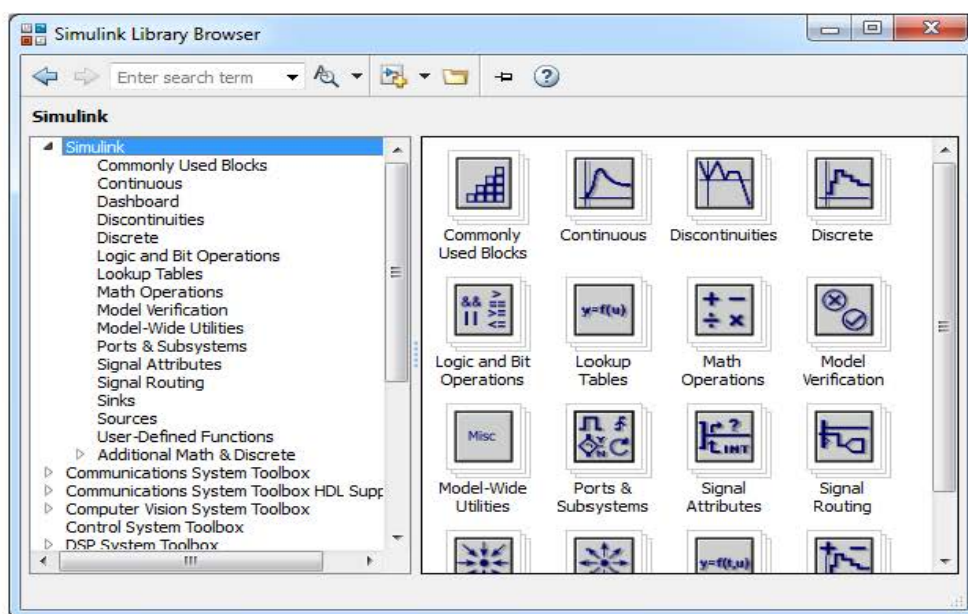


Рисунок 10.8 – Вікно оглядача розділів бібліотеки SIMULINK

Бібліотека SIMULINK містить такі основні розділи:

1. *Commonly Used Blocks* – блоки, які використовуються найчастіше;
2. *Continuous* – компоненти з неперервними характеристиками;
3. *Dashboard* – панель приладів;
4. *Discontinuities* – компоненти з розривними характеристиками;
5. *Discrete* – дискретні компоненти;
6. *Logic and Bit Operations* – логічні і бітові компоненти;
7. *Lookup Tables* – довідкові таблиці;
8. *Math Operations* – математичні компоненти;
9. *Model Verification* – верифікація моделей;
10. *Model-Wide Utilities* – утиліти;
11. *Ports & Subsystems* – порти і підсистеми;
12. *Signal Attributes* – атрибути сигналів;
13. *Signal Routing* – маршрутизація сигналів;
14. *Sinks* – пристрої реєстрації;
15. *Sources* – джерела сигналів і впливів;
16. *User-Defined Functions* – функції, які задаються користувачем.

Для створення моделі в середовищі SIMULINK необхідно:

1. Створити новий файл моделі. Для цього потрібно використати кнопку New Model на панелі інструментів оглядача розділів бібліотеки SIMULINK (рис. 10.9).

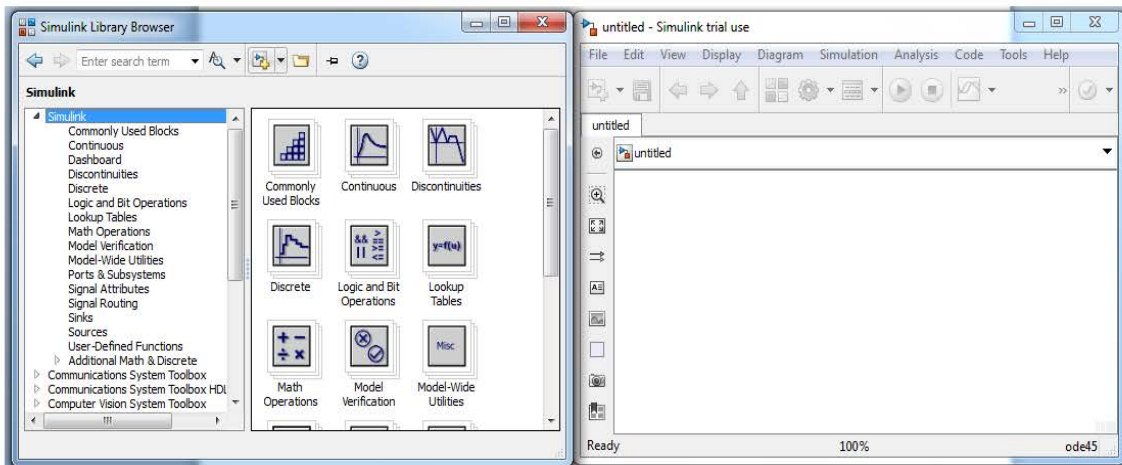


Рисунок 10.9 – Створення нового файлу моделі і результуюче вікно моделі

2. Розташувати блоки у вікні моделі (рис 10.10). Для цього необхідно відкрити відповідний розділ бібліотеки (наприклад, Sources – Джерела). Далі, вказавши курсором на потрібний блок і натиснувши ліву кнопку миші, “перетягнути” блок у створене вікно. Параметри блоків можна змінювати шляхом відкриття вікна окремого блока за допомогою подвійного кліку по обраному блоку мишкою.

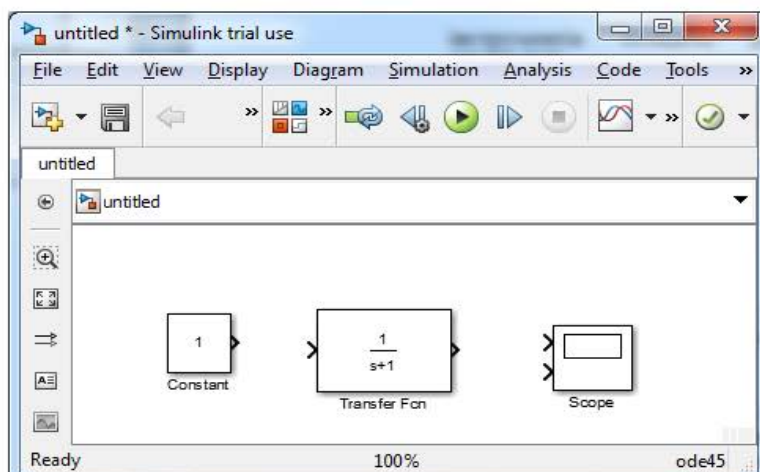


Рисунок 10.10 – Вікно моделі, яке містить блоки

Для видалення блока необхідно обрати блок і натиснути клавішу Delete на клавіатурі.

3. Після встановлення на схемі всіх блоків з потрібних бібліотек необхідно виконати з'єднання елементів схеми (рис. 10.11).

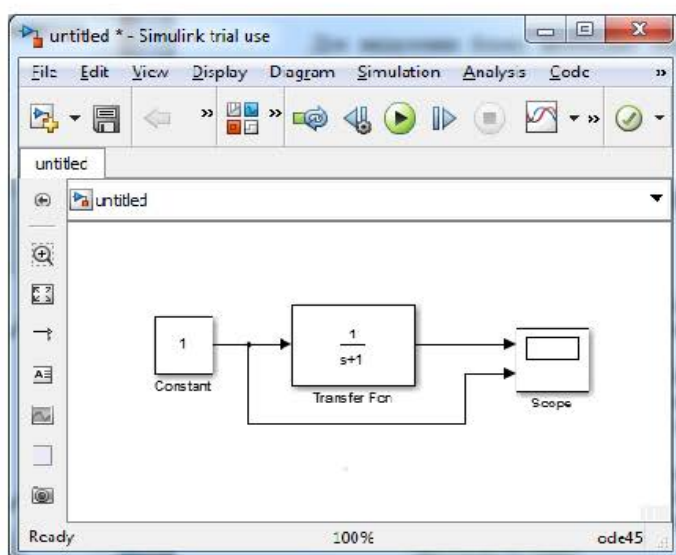


Рисунок 10.11 – Схема моделі

Для з'єднання блоків потрібно вказати курсором на "вихід" блока, а потім натиснути і, не відпускаючи ліву кнопку миші, провести лінію до "входу" іншого блока.

Для створення точки розгалуження в з'єднувальній лінії необхідно навести курсором на місце, де потрібно встановити вузол, і натиснувши праву кнопку миші, протягнути лінію.

Для видалення лінії потрібно обрати лінію і натиснути клавішу Delete на клавіатурі.

4. Після побудови схеми необхідно зберегти її у вигляді файлу на диску, обравши пункт меню File/Save As... у вікні схеми і вказавши ім'я файлу.

5. Виконання розрахунку. Виконання розрахунку здійснюється за допомогою пункту меню Simulation/Run або відповідної кнопки на панелі інструментів.

6. Завершення роботи. Для цього необхідно зберегти модель у файлі, закрити вікно моделі, вікно оглядача бібліотек, а також основне вікно пакету MATLAB.

Приклади застосування Simulink для вирішення практичних задач

Приклад 1. Розглянемо приклад побудови моделі сигналу виду $x(t) = 2 \sin \pi t + 0,2t^2$ на інтервалі $[0; 10]$, і відобразимо його на віртуальному осцилографі.

Сигнал $2 \sin \pi t$ задається в параметрах блока Sin Wave (рис. 10.12). Для сигналу $0,2t^2$ використовується три блоки – блок лінійного сигналу, масштабний блок і блок математичної функції, де була обрана функція піднесення до квадрату. Інтервал моделювання заданий в межах від 0 до 10 у налаштуваннях вікна віртуального осцилографа.

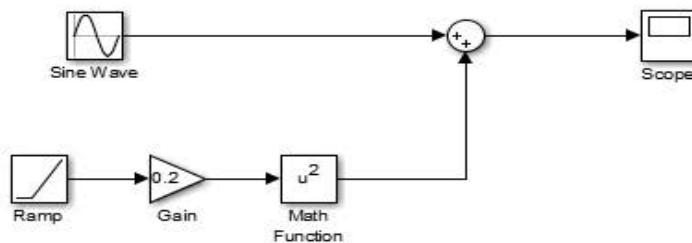


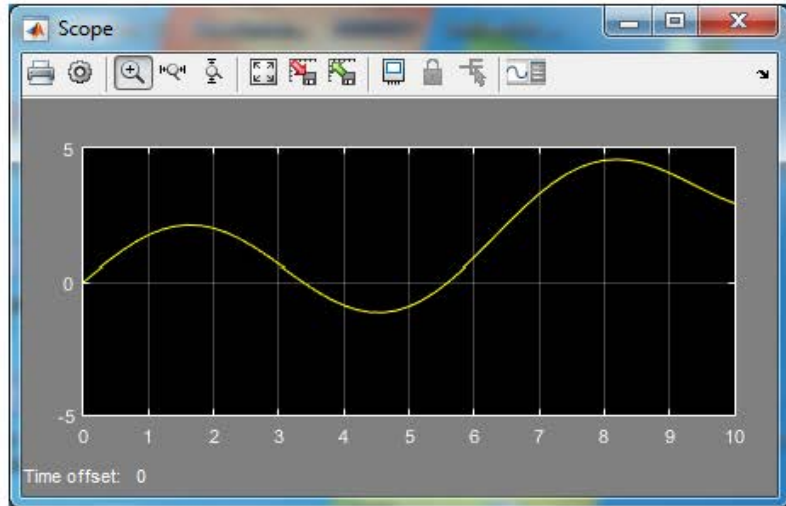
Рисунок 10.12 – Модель сигналу $x(t) = 2 \sin \pi t + 0,2t^2$

Результати роботи виведені на екран віртуального осцилографа (рис. 10.13).

Приклад 2. В аналоговій обчислювальній техніці існує декілька способів моделювання об'єктів, які описуються системами алгебраїчних рівнянь. Один з них, найбільш поширений, зводиться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок якої і дає вирішення алгебраїчної задачі.

Нехай безінерційний об'єкт описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Рисунок 10.13 – Сигнал $x(t) = 2 \sin \pi t + 0,2t^2$ на інтервалі $[0;10]$

Для побудови моделі даного об'єкта використаємо метод зведення до еквівалентної системи диференціальних рівнянь.

Введемо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \frac{dx_n}{dt} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n - b_n = 0 \end{cases}$$

Як тільки всі похідні набудуть згасаючого характеру, тобто $\frac{dx_i}{dt} = 0$, отримаємо розв'язок $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Для еквівалентності цих двох систем рівнянь має забезпечуватись згасаючий розв'язок системи диференціальних рівнянь. Достатньою умовою, яка забезпечує згасаючий розв'язок, є додатно визначена матриця коефіцієнтів лінійної системи рівнянь.

Для визначення того є матриця додатно або від'ємно визначеною, застосовують Критерій Сильвестра. Згідно з ним квадратна матриця вважається додатно визначеною в тому випадку, якщо всі визначники матриць меншого порядку приймають значення ≥ 0 .

Нехай необхідно знайти розв'язок системи:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -1,5 \\ 4x_1 + 0,5x_2 + 5x_3 = 11,5 \end{cases} .$$

Перейдемо до еквівалентної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2,5 - 5x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -1,5 - 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = 11,5 - 4x_1 - 0,5x_2 - 5x_3 \end{cases} .$$

Модель системи і результати її роботи наведені на рис. 10.14 і рис. 10.15 відповідно.

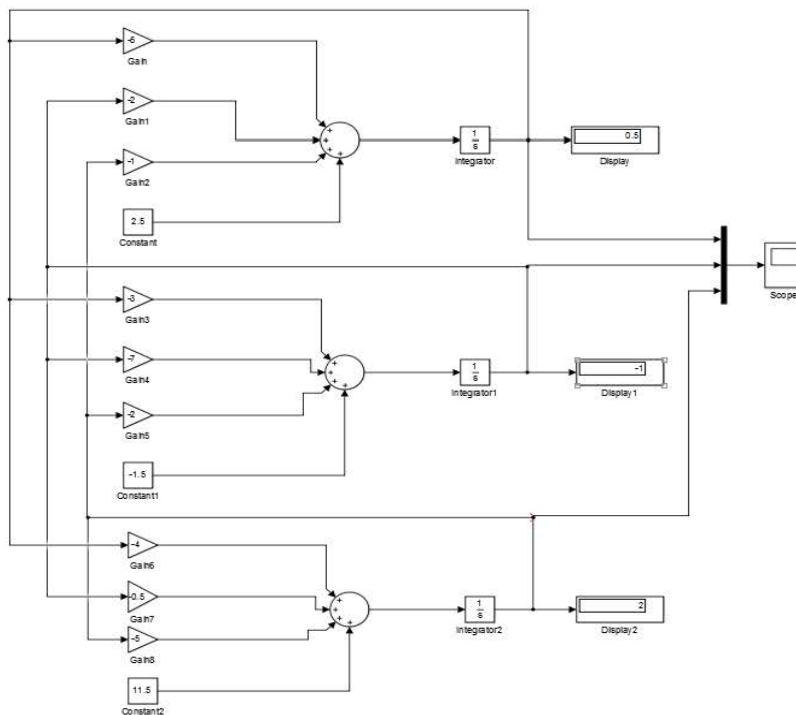


Рисунок 10.14 – Модель системи лінійних алгебраїчних рівнянь третього порядку

Розв'язок системи рівнянь, відображений на цифрових реєстраторах, становить:

$$x_1 = 0,5;$$

$$x_2 = -1;$$

$$x_3 = 2.$$

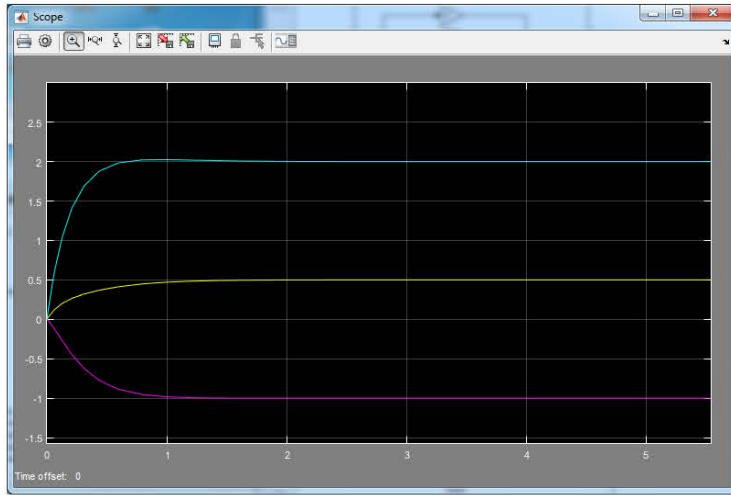


Рисунок 10.15 – Перехідний процес встановлення розв’язку системи рівнянь

Приклад 3. Поширеним способом опису поведінки динамічної системи є система диференціальних або інтегрально-диференціальних рівнянь.

Розглянемо реалізацію такої математичної моделі в SIMULINK.

Нехай є модель динамічної системи, яка описується диференціальним рівнянням 3-го порядку.

Задане диференціальне рівняння:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2,5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 2,5 y(t) = e^{-t};$$

$$y(0) = 1;$$

$$y'(0) = -1;$$

$$y''(0) = 2.$$

Для зручності моделювання подамо дане диференціальне рівняння у формі Коші. Введемо нові змінні:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \frac{dy}{dt} \\ x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases}.$$

Подаємо рівняння за допомогою введених змінних:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{d^3 y}{dt^3} = -2,5x_1 - 6x_2 - 2,5x_3 + e^{-t} \end{cases}$$

Оскільки операція диференціювання збільшує похибку (див. розділ 9), то за допомогою інтегрування система диференціальних рівнянь перетворюється на систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = \int_0^t x_2 dt \\ x_2 = \int_0^t x_3 dt \\ x_3 = -2,5 \int_0^t x_1 dt - 6 \int_0^t x_2 dt - 2,5 \int_0^t x_3 dt - e^{-t} \end{cases}$$

Структурна схема моделі динамічної системи, побудована за звичайними правилами аналогової обчислювальної техніки, наведена на рис. 10.16.

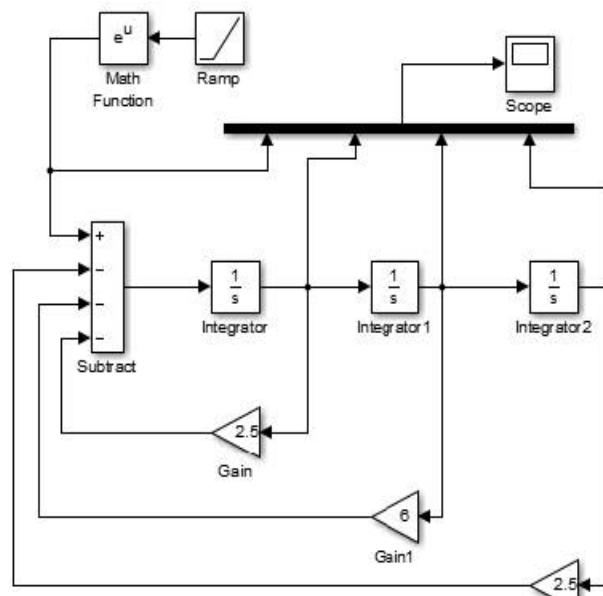


Рисунок 10.16 – Структурна схема моделі динамічної системи третього порядку

На виході першого інтегратора маємо сигнал x_3 , на виході другого – сигнал x_2 , на виході третього – сигнал x_1 . Коефіцієнти рівняння встановлюються у вікнах параметрів масштабних блоків Gain. Сигнали з відповідними коефіцієнтами надходять на суматор з від’ємними знаками, що відповідають рівнянню Коші. Початкові умови для функцій і похідних задаються у вікнах параметрів інтеграторів. Права частина диференціального рівняння, яка сформована за допомогою блоків лінійного сигналу Ramp (генератор аргументу $-t$) і блока функції Math Function, налаштованого на реалізацію експоненти, також надходить на суматор з додатним знаком. Візуалізація перехідного процесу наведена на екрані віртуального осцилографа (рис. 10.17).

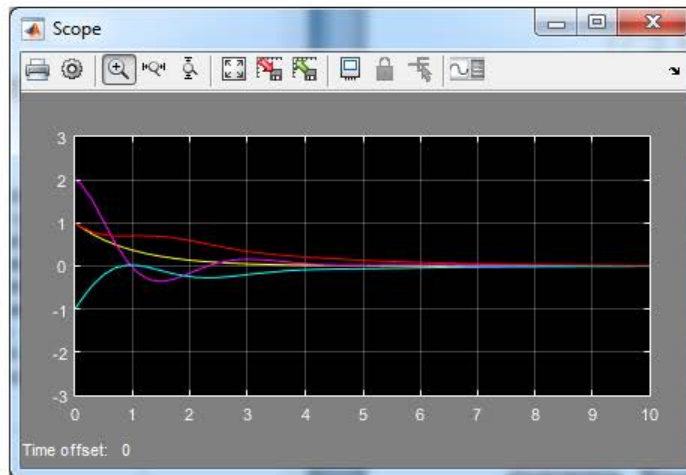


Рисунок 10.17 – Перехідний процес системи 3-го порядку

Приклад 4. Дуже поширеними зараз є задачі моделювання систем автоматичного управління. Розглянемо на прикладі. Нехай у нас вже є комбінована система, що містить релейний елемент, змодельована у середовищі SIMULINK (рис. 10.18).

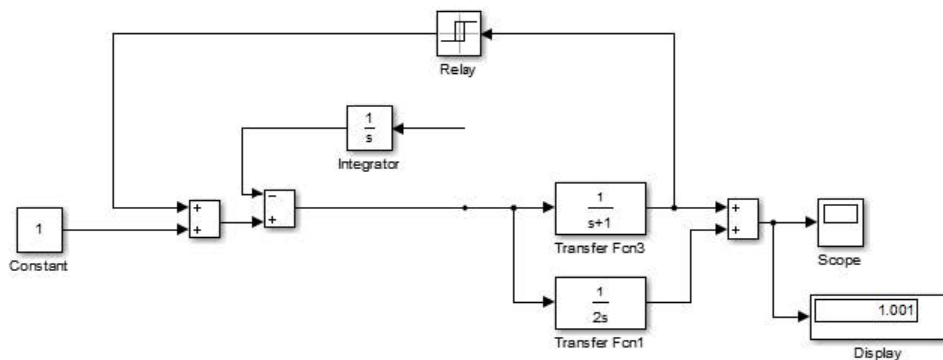


Рисунок 10.18 – Система автоматичного управління

Припустимо, що нам необхідно знайти сигнал на виході системи. Зробити це без застосування певних програмних додатків дуже важко. Крім того, виконання обчислень займає багато часу. Зокрема, для того, щоб знайти вихідний сигнал, необхідно спочатку знайти передатну функцію системи. Наступним кроком буде знаходження спектральної щільності потужності вхідного сигналу. Знаючи передатну функцію системи і спектральну щільність потужності вхідного сигналу, шляхом їх множення знайдемо спектральну щільність потужності вихідного сигналу. І нарешті, виконавши обернене перетворення Лапласа, отримаємо сам вихідний сигнал. Зрозуміло, що обрахування інтегралів Лапласа є досить трудомістким, звідки й випливає актуальність використання спеціалізованих програмних засобів. У нашому випадку дослідити вищенаведену систему можна лише шляхом імітаційного моделювання, оскільки вона не є лінійною.

Змодельовавши схему у SIMULINK, ми можемо як вивести чисельний результат, так і оцінити результат візуально за допомогою графіка на віртуальному осцилографі (рис. 10.19).

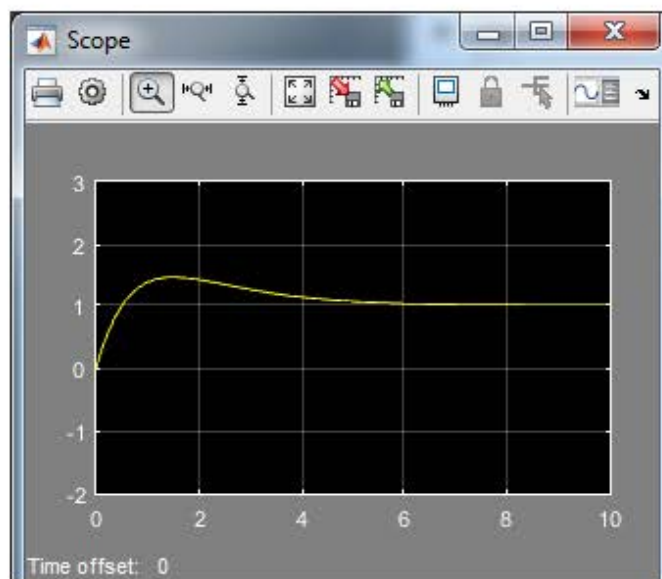



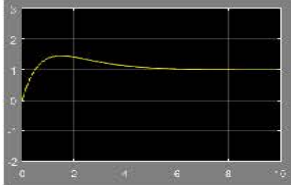

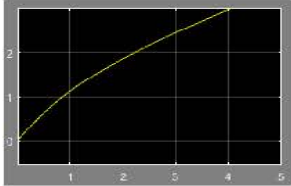

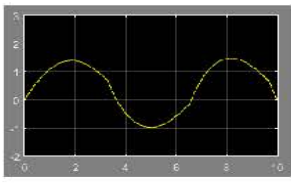

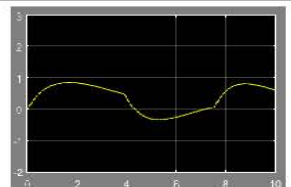

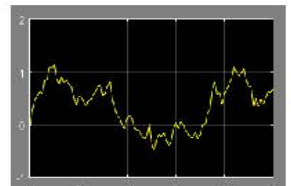

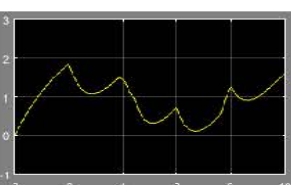
Рисунок 10.19 – Результат моделювання системи автоматичного управління

Розглянемо як змінюється сигнал на виході вищенаведеної системи залежно від різних видів вхідних впливів. Порівняльна характеристика залежностей вхідних і вихідних сигналів наведена у таблиці 10.1. В таблиці також зазначено параметри вхідних впливів.

Головною перевагою чисельних експериментів перед натурними експериментами є їх доступність та відносно низька вартість. Вони дозволяють без витрат на створення системи перевірити її характеристики в процесі майбутньої

експлуатації, обрати оптимальні параметри, прогнозувати поведінку системи і передбачати можливість виникнення критичних ситуацій.

Таблиця 10.1 – Результати моделювання для різних вхідних сигналів

№	Вхідний сигнал	Вихідний сигнал
1	 (константа) Параметри: Constant value: 1	
2	 (лінійний сигнал) Параметри: Slope: 1	
3	 (синусоїда) Параметри: Amplitude: 1, Frequency: 1	
4	 (синусоїда) Параметри: Amplitude: 0.2, Frequency: 1	
5	 (випадкове число) Параметри: Mean: 0 Variance: 1	
6	 (повторювана послідовність) Параметри: Time Values: [0 2] Output Values: [0 2]	

Спеціалізована мова моделювання GPSS

GPSS World (GPSSW, General Purpose System Simulation World – Світова загальноцільова система моделювання), розроблена для ОС Windows.

GPSS була розроблена співробітником компанії IBM Джефрі Гордоном на початку 1960-х років. Не зважаючи на те, що система є досить старою, вона залишається актуальною і на сьогоднішній день, надаючи можливість використовувати одну з найпопулярніших мов моделювання у світі.

Цей програмний продукт увібрав у себе весь арсенал новітніх інформаційних технологій. Він містить розвинені графічні оболонки для створення моделей та інтерпретації вихідних результатів моделювання, засоби мультимедіа та відео, об'єктно-орієнтоване програмування та ін. В основу системи GPSS World покладена мова імітаційного моделювання GPSS (General Purpose System Simulation – Загальноцільова система моделювання).

Для студентів доступна безкоштовна версія програми GPSSW, яку можна скачати за посиланням: <http://gpss-world-student-version.software.informer.com/download/>.

Програма GPSS World має досить простий та зрозумілий інтерфейс користувача. При відкритті програми можна побачити пусту робочу область (рис. 10.20). Більшість функцій, що передбачені у даному додатку, поки не доступні. Для їх активації необхідно створити модель, натиснувши на іконку New або File→New, чи відкрити уже існуючий файл, натиснувши на іконку Open або обравши у меню пункт File→Open. При створенні нового файлу користувачу пропонується обрати створення моделі або текстового документа (як у елементарному текстовому редакторі).

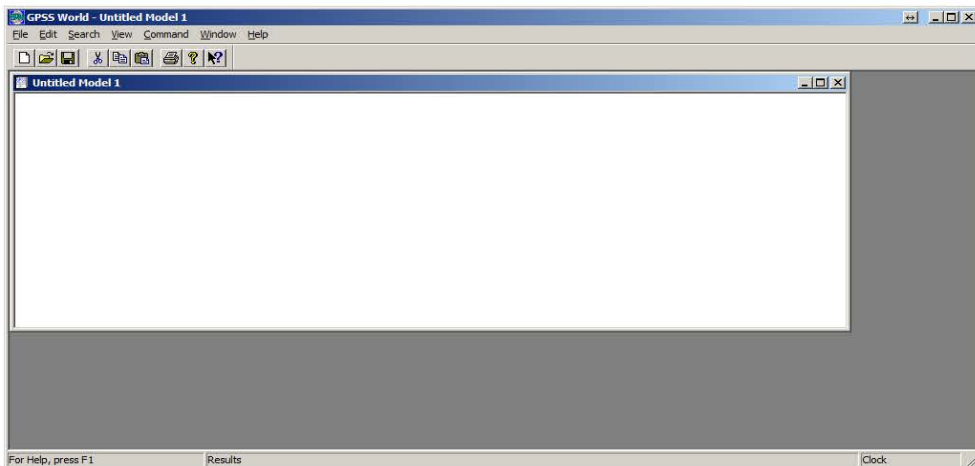


Рисунок 10.20 – Головне вікно середовища програмування GPSS

Пункт меню *Edit* крім стандартних операцій редагування (Undo, Cut, Copy, Paste, Insert line, Delete line, Font) містить наступні підпункти:

- Insert GPSS blocks – вставка блоків GPSS (рис. 10.21);

ADOPT	ASSEMBLE	ALTER
ADVANCE	CLOSE	COUNT
ASSIGN	GATE	DISPLACE
BUFFER	JOIN	EXAMINE
DEPART	LINK	EXECUTE
ENTER	LOGIC	FAVAIL
GENERATE	LOOP	FUNAVAIL
LEAVE	MATCH	GATHER
MARK	OPEN	INDEX
MSAVEVALUE	PREEMPT	INTEGRATION
PLUS	PRIORITY	SAVAIL
QUEUE	READ	SCAN
RELEASE	REMOVE	SELECT
SAVEVALUE	RETURN	SUNAVAIL
SEIZE	SEEK	TABULATE
SPLIT	TEST	TRACE
TERMINATE	UNLINK	UNTRACE
TRANSFER	WRITE	

Рисунок 10.21 – Блоки GPSS

- Insert experiment – вставлення експерименту (рис. 10.22):
 - Screening – відображуваного;

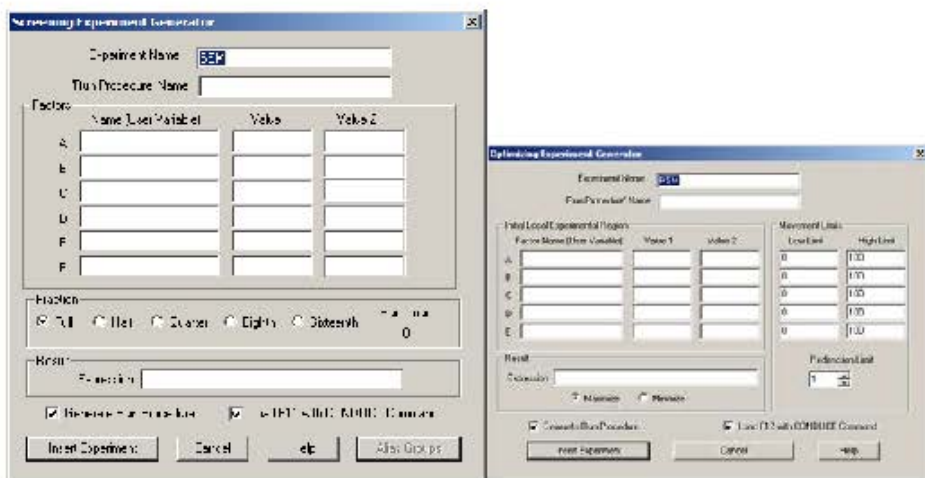


Рисунок 10.22 – Вікна експериментів

- Optimizing – з оптимізації;
 - Settings – налаштування роботи GPSS Word. Містить вкладки для налаштування параметрів моделювання, звітів, функціональних ключів, виразів тощо (рис. 10.23)

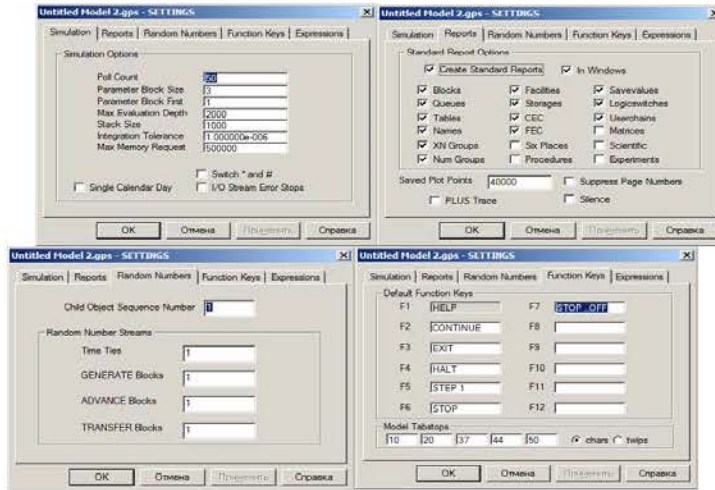


Рисунок 10.23 – Налаштування GPSS World

Пункт Search містить дії пов'язані зпошуком конкретних частин тексту, зокрема крім стандартних операцій (Find/Replace, Go to line, Next bookmark, Mark, Unmark, Unmark all, Select to bookmark) містить засоби пошуку помилок:

- Next error – наступна помилка (доступно у режимі компіляції);
- Previous error – попередня помилка;

Пункт View:

- Toolbar – визначає чи відобразити панель інструментів;
- Entity details – визначає чи відобразити параметри елементів програми;
- Simulation clock – визначає чи відобразити час моделювання.

Пункт Command містить у собі основні команди для керування плином програми:

- Create simulation (Ctrl + Alt + S) – створити модель – запускає роботу написаної програми;
- Retranslate (Ctrl + Alt + R) – ретранслювати програму;
- Repeat last command (Ctrl + Alt + L) – повторити останню команду;
- CONDUCT – почати експеримент. Це – миттєва команда, що посилається призупиненому процесу моделювання;
- START – почати моделювання;
- STEP 1 (Ctrl + Alt + 1) – перейти до першого кроку;
- HALT (Ctrl + Alt + H) – перервати виконання програми. Ця команда не лише зупиняє моделювання, але і видаляє усі команди, що розміщені у черзі команд моделювання;
- CONTINUE (Ctrl + Alt + C) – продовжити виконання програми;
- CLEAR – очистити статистику (дана команда повертає модель до початкового стану);
- RESET – скидання статистики;
- SHOW – розрахувати та відобразити вираз;

– Custom – введення деякої команди.

Пункт Window – дозволяє використати різні варіанти подання моделі, зокрема

– Simulation window – надає доступ до великого різноманіття форм представлення результатів моделювання, які користувач може обрати (вікна текстового та модельного редактора, журнал подій, вікно блоків, вікно відображення значень виразів, динаміки роботи модельованих пристроїв, логістичних перемикачів, вікна для відображення матриць, графіків, черг, збережених значень, накопичувачів і таблиць);

– Simulation snapshots – вікна знімків моделювання – відображає стан моделі у деякі моменти часу (знімки відображення транзакцій моделювання, стану ланцюга поточних дій, ланцюга майбутніх дій, стан числових груп моделі, ланцюги сутностей користувачів).

Для кращого розуміння моделювання мовою GPSS необхідно мати уявлення про категорії об'єктів, що використовуються при створенні моделей. Існує 7 категорій об'єктів у мові GPSS:

– *Динамічна категорія*. Ця категорія містить у собі транзакти. Це – об'єкти, що являють собою аналог потоків із певними характеристиками. Вони створюються у деяких точках моделі та просуваються за допомогою планувальника блоками та, згодом, знищуються;

– *Операційна категорія*. Ця категорія містить у собі блоки. Вони визначають логіку функціонування моделі системи і визначають шляхи руху транзактів між об'єктами апаратної категорії. Існують блоки для створення та знищення транзактів, керування числовими атрибутами об'єкта, затримку транзакту на деякий період часу, зміна маршруту переміщення транзакту у моделі, організації введення та виведення інформації, групування і т. д.;

– *Апаратна категорія*. Її об'єкти являють собою складові модельованої системи. Вони мають деякі характеристики і можуть бути змінені під дією транзактів. Апаратна категорія містить в собі логічні ключі, одно- та багатоканальні пристрої;

– *Обчислювальна категорія* містить змінні, функції та генератори випадкових чисел;

– *Статистична категорія* містить черги та таблиці;

– *Запам'ятовувальна категорія* включає у себе комірки та матриці комірок;

– *Групуюча категорія* – числові групи, групи транзактів та списки.

Опишемо деякі стандартні блоки, які необхідні для створення нескладної моделі. Деякі із них згадувалися раніше при описі пункту меню Command.

Блок START. Відповідає за початок моделювання та присвоєння лічильнику Termination Count деякого значення, заданого параметром.

Блок GENERATE. Даний блок створює та вводить у модель транзакти (групами або по одному) через задані інтервали часу. Кожна модель повинна містити хоча б 1 блок GENERATE. Обмежень на їх кількість немає.

Блок TERMINATE. Даний блок видаляє транзакти з моделі. Даний блок має необов'язковий операнд, що визначає необхідність зменшити лічильник Termination Count.

Блок STEP намагається здійснити обмежену кількість входів у блоки.

Блок STORAGE. Даний блок визначає сутність Storage. Його перший параметр визначає ім'я деякого одноканального пристрою, а другий – кількість приборів даного пристрою або місткість об'єкта.

Блок ADVANCE затримує транзакт на час, визначений операндом. Причому, можна задати приблизний час затримки із деяким відхиленням, що визначається іншим операндом.

Блок SEIZE моделює зайняття транзактом одноканального пристрою. Час же затримки визначається блоком ADVANCE, описаним вище. Єдиний параметр блока SEIZE визначає назву пристрою, який буде зайнято.

Блок RELEASE дозволяє звільнити пристрій, ім'я якого задане єдиним операндом блока, що був зайнятий при використанні блока SEIZE.

Блок QUEUE поміщає транзакт у кінець черги. Причому, його перший параметр являє собою ім'я черги, а другий – кількість елементів, що додаються у чергу (за замовчуванням дане число становить 1).

Блок DEPART (LEAVE) дозволяє транзакту покинути чергу. Перший параметр визначає чергу, яку покидає транзакт. Другий параметр – це кількість одиниць, на яку зменшується черга (за замовчуванням це значення становить 1).

Блок INITIAL ініціалізує чи модифікує сутності Logicswitch, Savevalue чи Matrix.

Блок CLEAR обнулює усю статистику та звільняє транзакти.

Блок CONDUCT запускає до виконання експеримент.

Блок CONTINUE дозволяє продовжити виконання призупиненого експерименту.

Блок EQU присвоює деяке значення змінній, створеній користувачем.

Блок EXIT завершує сеанс роботи у системі GPSS World.

Блок HALT перериває процес моделювання та видаляє усі команди у черзі.

Блок SHOW обробляє та виводить на екран значення виразу.

Блок INCLUDE дає змогу зчитати та транслювати допоміжний файл моделі.

Блок RESET повністю обнуляє статистику моделі.

Блок REPORT надає запит на виведення поточного звіту.

Також використовуються блоки TABLE, B VARIABLE (булева змінна), FUNCTION, MATRIX та інші, що використовуються для визначення різних типів об'єктів (як матриці та змінні) і режимів їх використання.

Розглянемо *приклад* моделювання процесу обслуговування запитів в СМО на наступному прикладі (рис. 10.24). Нехай на вхід надходять запити кожних 5 ± 1 секунди. Черга працює за принципом FIFO. Обробка кожного запиту займає 3 ± 1 секунди. Змоделюємо роботу даної системи протягом 400 секунд та виведемо статистику її роботи.

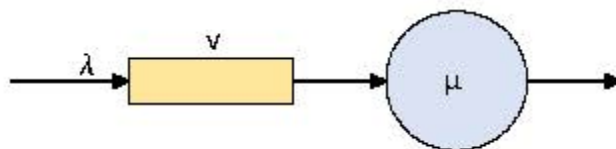


Рисунок 10.24 – Приклад одноканальної СМО з чергою

Для виконання описаного вище завдання створимо імітаційну модель. Її код наведено нижче:

```

GENERATE 5, 2 ; Моделюємо надходження запитів
QUEUE SYSQ ; Запити потрапляють у чергу названу
                SYSQ, де вони очікують обробки
SEIZE SYSPR ; Запити надходять на обробку процесором
                SYSPR
DEPART SYSQ ; При цьому вони виходять із черги
ADVANCE 3, 1 ; Моделюємо обробку запиту процесором
RELEASE SYSPR ; Звільняємо його, щоб дозволити обро-
                бку наступних запитів
TERMINATE ; Дозволяємо транзакту закінчити роботу у
                даному блоці програми
GENERATE 400 ; визначаємо час моделювання. Таким чи-
                ном транзакт прийде у момент часу 400
TERMINATE 1 ; Завершення моделювання

```

Синтаксис даної мови дозволяє писати коментарі у рядку після символу «;».

Оберемо пункт меню Command→Create Simulation для створення моделі та Command→START 1, щоб запустити виконання моделі з першої секунди. У результаті ми побачимо зображене на рис. 10.25.

За замовчуванням виводиться журнал, в якому виконується реєстрація подій, пов'язаних із моделюванням, та звіт, що описує статистику роботи моделі.

Для нас важливі також такі значення, отримані у процесі моделювання:

- START TIME – час початку моделювання;
- END TIME – час закінчення моделювання;
- BLOCKS – саме стільки блоків було використано нами для моделювання даного процесу;
- FACILITY – перелік працюючого обладнання, що обслуговує користувачів (у нашому випадку це один обслуговуючий процесор FACILITIES = 1);
- DELAY = 0 – усі запити, що надійшли до моменту закінчення моделювання, були оброблені;

- ENTRIES = 80 – кількість входжень запитів для обслуговування до пристрою;
- UTIL = 0.593 – коефіцієнт використання пристрою – пристрій працює 59,3% усього часу;
- AVE. TIME = 2.964 – показує, скільки часу у середньому пішло на обслуговування одного запиту;
- AVAIL = 1 – доступність процесора.
- QUEUE – черга (STAND):
- MAX = 1 – максимальна місткість черги за час роботи;
- CONT. = 0 – означає, що на момент закінчення моделювання у черзі не залишилося жодного запиту;
- ENTRY = 80 – кількість входжень у чергу;
- ENTRY(0) = 80 – кількість входжень без очікування у черзі;
- AVE. TIME = 0.000 – середній час очікування у черзі.

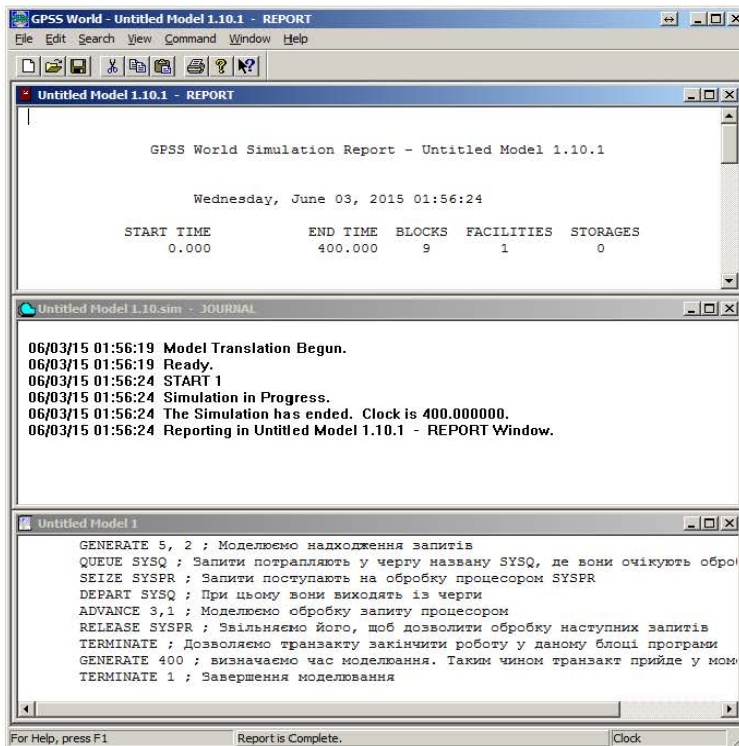


Рисунок 10.25 – Результати моделювання

З цих результатів ми можемо зробити висновок про те, що запити стабільно та швидко обробляються без необхідності простоювання у черзі на обробку. Процесор простоює $(100 - 59,3) = 40,7\%$ часу своєї роботи, отже, можна підвищувати навантаження на нього. Якщо ж зменшити час надходження запитів у систему до 1 ± 2 секунд, а час їх обробки збільшити до 13, то результати уже будуть

гіршими. Кількість запитів, що потраплять на обробку, зменшиться аж до 31, коефіцієнт використання пристрою обслуговування зросте до 99,5%. Максимальна кількість запитів, що простоюватимуть у черзі, становитиме 367, причому, середній час очікування перевищуватиме 183 секунди, що є неприпустимим.

Також можна більш докладно розглянути результати моделювання, використовуючи різні типи вікон, що пропонуються системою GPSS World (рис. 10.26).

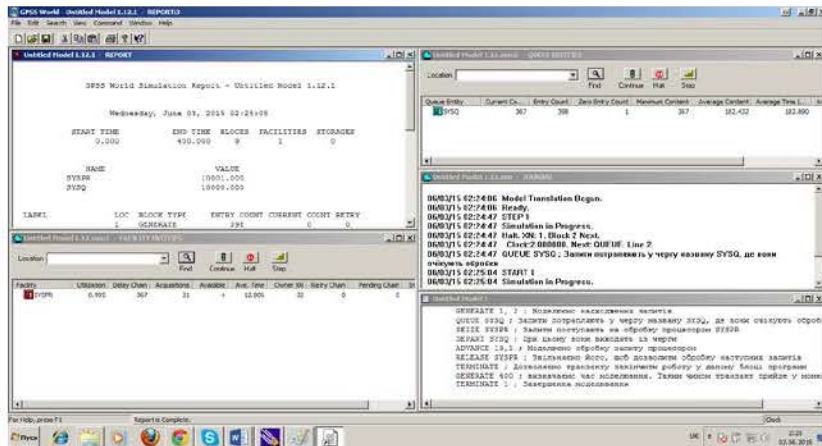


Рисунок 10.26 – Вікна перегляду програми, даних тощо

Таким чином система GPSS World дозволяє моделювати процеси у системах масового обслуговування та вираховувати можливий вплив зміни їх окремих параметрів на діяльність систем в цілому.

Система GPSS World надає можливість виводити у графічному вигляді дані за великою кількістю параметрів. Кожен тип об'єктів GPSS має власний набір стандартних числових атрибутів (СЧА):

- Системні об'єкти:
 - C1 – поточне значення умовного часу;
 - AC1 – поточне значення абсолютного часу;
- Транзакти:
 - P – значення параметра активного транзакту;
 - PR – пріоритет активного транзакту;
 - M1 – час перебування у моделі активного транзакту. Обчислюється як різниця поточного значення абсолютного часу та часу народження активного транзакту;
 - MP – транзитний час перебування у моделі активного транзакту. Розраховується як різниця поточного значення абсолютного часу та вміщуваного параметра активного транзакту;
 - XN1 – номер активного транзакту.
- Блоки:

- N – загальна кількість транзактів, що увійшли в блок;
- W – загальна кількість транзактів у блоці.
- Прилади:
 - F – Стан приладу (0 – вільний, 1 – усі інші випадки);
 - FV – прапорець готовності приладу до використання (1 – готовий, 0 – ні);
 - FR – коефіцієнт використання приладу;
 - FC – загальна кількість моментів заняття приладу;
 - FT – середній час використання приладу однією задачею;
- Об'єкти пам'яті.
- Ключі.
- Черги:
 - Q – поточна довжина черги;
 - QA – зважена за часом середня довжина черги;
 - QM – максимальна довжина черги;
 - QC – загальна кількість входжень у чергу;
 - QZ – число нульових входів у чергу;
 - QT – середній час перебування транзактів у черзі (враховуючи нульові входи);
 - QX – середній час перебування транзактів у черзі (без нульових входів);
- Таблиці.
- Генератори випадкових чисел – RN – число, вираховане генератором.
- Списки користувачів.

За умов попереднього прикладу запити надходили на вхід системи приблизно кожних 5 секунд, а обробка 1 запиту займала всього 3 секунди. Таким чином, запитам не доводилося простоювати у черзі. Це видно із нижченаведеного графіка рис. 10.27.

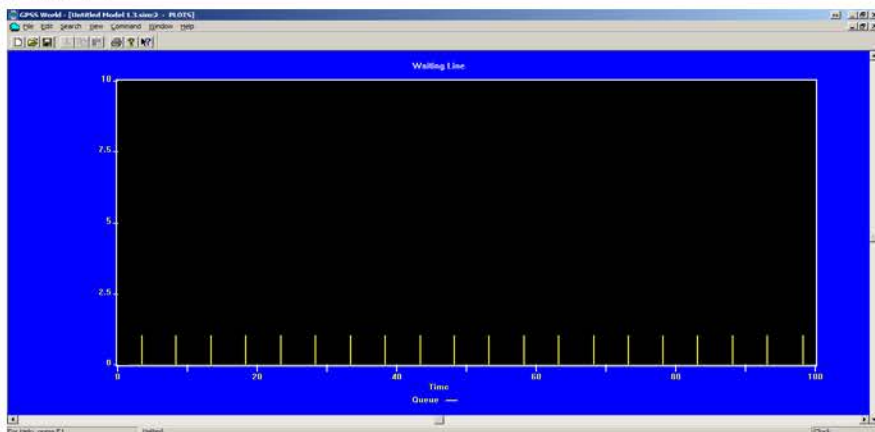


Рисунок 10.27 – Приклад графічного подання результатів

Запит потрапляв у чергу і одразу ж із неї виходив та обслуговувався. Внесемо деякі зміни у програму. Змінимо значення 2 рядків:

```
GENERATE 4, 2 ; Тепер запити приходитимуть частіше,
приблизно, раз у 4 секунди
QUEUE SYSQ
SEIZE SYSPR
DEPART SYSQ
ADVANCE 6,1 ; Збільшимо час обробки запитів до, при-
близно, 6 секунд
RELEASE SYSPR
TERMINATE
GENERATE 400
TERMINATE 1
```

Як ми бачимо з графіка рис. 10.28, незважаючи на те, що запити виходять із черги на обслуговування, вони недостатньо швидко обробляються. У результаті ми можемо побачити постійне накопичення запитів.

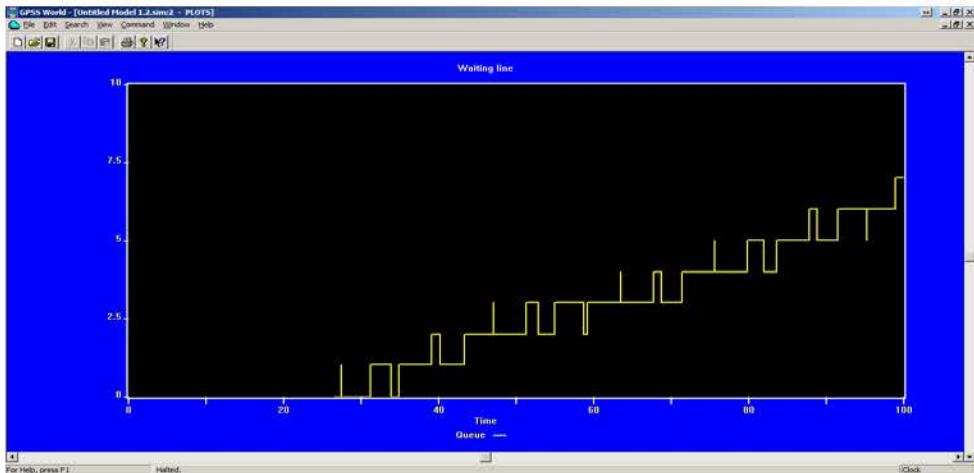


Рисунок 10.28 – Приклад графічного подання результа-

Ключові слова

Чисельний експеримент, імітаційне моделювання, статистичне моделювання, агрегатний принцип, нелінійні перетворення, динамічні перетворення, дискретна модель, генерування тестових послідовностей, закон розподілу ймовірностей, кореляційна функція, SIMULINK, drag-and-drop, блоки моделі, GPSS.

Контрольні запитання:

1. Як здійснюється генерування даних з заданими статистичними характеристиками?
2. Як здійснюється моделювання лінійних динамічних підсистем?
3. Як здійснюється моделювання нелінійних підсистем?
4. Які статистичні характеристики має випадкова числова послідовність, яка генерується стандартною програмною функцією random?
5. Як програмним шляхом на основі центральної граничної теореми отримати числову послідовність з нормальним розподілом ймовірностей?
6. Запропонуйте спосіб генерування двох взаємно корельованих послідовностей (Рекомендація: скористайтесь рівнянням регресії).
7. Оцініть обсяг чисельного експерименту, необхідний для отримання щільності розподілу результату моделювання у 20 точках зі зведеною похибкою не більше 2%.
8. Порівняйте модель у вигляді об'єктно-орієнтованої програми з агрегатною моделлю. Виділіть спільні і відмінні аспекти.
9. В чому полягає принципова різниця між аналітичними та імітаційними моделями?
10. Інструменти імітаційного моделювання, призначення та класифікація. Сучасні тенденції в імітаційному моделюванні.
11. Охарактеризуйте призначення і можливості середовища моделювання SIMULINK.
12. Охарактеризуйте призначення і можливості мови моделювання GPSS.
13. Сформувати та візуалізувати сигнали заданої форми:

$$y = (1 + 2 \sin(2t))^2;$$

$$y = \sqrt{1 + 0,5 \sin(2t)}.$$

14. Побудувати віртуальні моделі:
 - Синтезувати структурну схему моделі системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6,5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - 0,5 = 0 \end{cases}$$

- Синтезувати структурну схему моделі диференціального рівняння третього порядку:

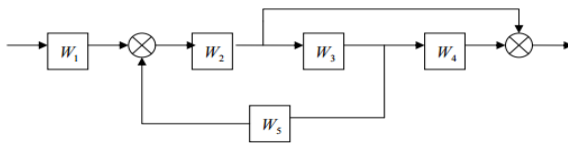
$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 0,5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0,9 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0;$$

$$y(0) = 2;$$

$$y'(0) = -1;$$

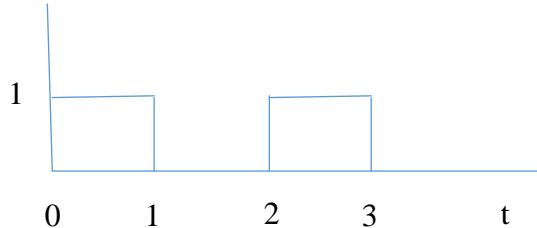
$$y''(0) = 0.$$

15. Дана система автоматичного управління:



$$W_1 = \frac{1}{s}; \quad W_2 = 2s; \quad W_3 = \frac{1}{2s+3}; \quad W_4 = 3s; \quad W_5 = \frac{1}{5s+1}.$$

Промоделювати систему і знайти сигнал на її виході, якщо вхідний сигнал є періодичною послідовністю прямокутних імпульсів



Література

1. Боев В. Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS WORLD : учебное пособие / Боев В. Д. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 368 с.
2. Боев В. Д. Компьютерное моделирование. Элементы теории и практики : учебное пособие / Боев В. Д. Сыпченко Р. П. – СПб. : Военная академия свя-ти, 2009. – 432 с.
3. Васильев В. В. Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем в среде MATLAB/SIMULINK / В. В. Васильев, Л. А. Симак, А. М. Рыбникова – К. : НАН Украины, 2008. – 91 с.
1. Власов А. Обзор систем имитационного моделирования, OR/MS Today [Електронний ресурс] – Режим доступу :

<http://avlasov.livejournal.com/27126.html>

2. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування : навчальний посібник / В. М. Дубовой – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 308 с.
3. Дубовой В. М. Моделювання систем контролю та керування / Дубовой В. М. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 175 с.
4. Карпов Ю. Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5 / Карпов Ю. Г. – СПб : БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.
5. Кветний Р. Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень / під заг. ред. Р. Н. Кветного – Вінниця, ВНТУ, 2012. – ч. 1 – 196 с.; ч. 2 – 230 с.
6. Маликов В. Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ / Маликов В. Т., Кветный Р. Н. – К. : Выща школа, 1989. – 362 с.
7. Павловский Ю. Н. Имитационное моделирование / Ю. Н. Павловский, Н. В. Белотелов, Ю. И. Бродский. – М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 236 с.
8. Пухов Г. Е. Справочник по аналоговой вычислительной технике / Пухов Г. Е., Беляков В. Г., Бердяков Г. И. – К. : Техніка, 1975. – 431 с.
9. Томашевский В. Имитационное моделирование в среде GPSS / Томашевский В., Жданова Е. – М. : Бестселлер, 2003. – 416 с.
10. Шеннон Р. Дж. Имитационное моделирование систем – наука и искусство / Шеннон Р. Дж. – М. : Мир, 1980. – 418 с.
11. Шульгин В. И. Основы работы с SIMULINK MATLAB / В. И. Шульгин – Харьков : НАУ им. Н. Е. Жуковского, 2010. – 60 с.
12. Щербаков В. С. Основы моделирования систем автоматического регулирования и электротехнических систем в среде MATLAB и SIMULINK : учебное пособие / В. С. Щербаков, А. А. Руппель, В. А. Глушец – Омск : СибАДИ, 2003. – 161 с.

11 ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ МОДЕЛЮВАННЯ

Сучасний процес математичного моделювання неможливо уявити без використання спеціалізованих програмних засобів. Існує ряд програмних засобів, що дозволяє будувати моделі без використання складних математичних функцій і знання спеціальної мови програмування. Прикладом таких засобів можуть служити різні пакети імітаційного моделювання та CASE-засоби (Ithink, Vensim, Pilgrim, Stella і т. д.). Але такі програмні засоби не завжди задовольняють вимоги дослідників, зосереджених на математично вивіреному аналізі динамічних моделей. В такому випадку доцільно використовувати системи комп'ютерної математики (MatLab, MathCAD, Maple та інші), що дозволяють використовувати широкий спектр математичних функцій, і ряд спеціалізованих засобів для моделювання динамічних систем.

11.1 Стандарти моделювання

Сучасні технічні, організаційні, соціальні та інші об'єкти і системи є дуже складними. Над їх дослідженням, проектуванням, управлінням зазвичай працюють колективно, причому ці колективи можуть частково знаходитися у різних місцях, навіть у різних державах. Природно виникає потреба у обміні інформацією. Такою інформацією про предмет спільної роботи є моделі. З розвитком і поширенням застосування комп'ютерних технологій для підтримки спільної роботи з аналізу, специфікації, проектування та перевірки систем впроваджується концепція Model-Based Systems Engineering (MBSE) – Системна інженерія, яка ґрунтується на моделюванні.

Обов'язковою передумовою успішного обміну інформацією є «спільна мова» фахівців. Таку спільну мову визначають *стандарти моделювання*. Стандарти моделювання відіграють важливу роль у визначенні узгоджених концепцій моделювання системи, які орієнтують на конкретну сферу інтересів і забезпечення інтеграції різних типів моделей. Стандарти моделювання дозволяють організувати міжгалузевий, міжпроектний і перехресний зв'язок. Цей зв'язок дає можливість зменшити вимоги до навчання фахівців-практиків та дозволяє повторне використання моделей.

Стандарти моделювання включають в себе стандарти для мов моделювання, для обміну даними між моделями і перетворення однієї моделі на іншу. Кожен тип моделі може використовуватися для подання різних аспектів системи, наприклад, це набір системних компонентів, їх взаємозв'язків і інтерфейсів, або система для забезпечення аналізу продуктивності, точності, надійності, стійкості тощо.

Над створенням стандартів моделювання працюють такі міжнародні організації: IEEE Standard Society, ISO – International Standard Organization, SISO – Simulation Interoperability Standards Organization та інші.

В середині 90-х років 20-го століття при міністерстві оборони США було створено спеціальний підрозділ DMSO (Defence Modeling & Simulation Office), який в 1996 році почав координувати дослідження зі створення спеціальної технології HLA, що визначає загальну архітектуру всіх розроблюваних в США систем моделювання. З цього моменту всім розробникам засобів і систем моделювання пропонувалося слідувати стандартам HLA. І до теперішнього часу DMSO відповідає за поширення і підтримку всіх стандартів HLA. У 1998 році HLA була розповсюджена для стандартизації в НАТО.

Організація SISO (Simulation Interoperability Standards Organization) координує з IEEE і OMG (Object Management Group) завершення робіт по стандартам HLA.

Стандарт (технологія) HLA - це сукупність методик, угод, алгоритмів, які дозволяють узгодити використання вже існуючих, і різних за своєю суттю, моделей та систем моделювання для скорочення часу на розробку нової системи моделювання.

Крім того, технологія HLA дозволяє створювати розподілені і інтерактивні системи моделювання. Під терміном «розподілена система» мають на увазі: територіальну віддаленість учасників один від одного та логічну відокремленість різних учасників моделювання. Під інтерактивністю системи розуміють здатність її підсистем, модулів і елементів видавати і приймати повідомлення від інших підсистем, модулів і елементів. Обмін повідомленнями дозволяє організувати спільне функціонування різних учасників моделювання.

Деякі стандарти моделювання.

Integrated DEFinition (IDEF).

IDEF — стандарти сімейства ICAM (Integrated Computer-Aided Manufacturing) для вирішення завдань моделювання складних систем, дозволяють відображати і аналізувати моделі діяльності широкого спектру складних систем в різних розрізах. При цьому широта і глибина обстеження процесів в системі визначається самим розробником, що дозволяє не перевантажувати створювану модель зайвими даними. IDEF - методології створювалися в рамках запропонованої ВПС США програми комп'ютеризації промисловості - ICAM, в ході реалізації якої виявилася потреба в розробці методів аналізу процесів взаємодії в виробничих (промислових) системах. Принциповою вимогою при розробці цих методологій була можливість ефективного обміну інформацією між усіма фахівцями - учасниками програми ICAM (звідси назва Icam DEFinition, чи інший варіант Integrated DEFinition). На цей час до IDEF можна віднести такі стандарти.

IDEF0 (Function Modeling) – методологія функціонального моделювання. За допомогою наочної графічної мови IDEF0 досліджувана система подається у

вигляді набору взаємопов'язаних функціональних блоків. Як правило, моделювання засобами IDEF0 є першим етапом вивчення будь-якої системи.

IDEF1, SISO-STD-008-01-2012, SISO-STD-008-2010 (Information Modeling) – методологія моделювання інформаційних потоків усередині системи, що дозволяє відображати і аналізувати їх структуру і взаємозв'язки. IDEF1X (IDEF1 Extended - Data Modeling) – методологія моделювання баз даних на основі моделі «сутність-зв'язок». Застосовується для побудови інформаційної моделі, яка подає структуру інформації, необхідної для підтримки функцій виробничої системи або середовища.

IDEF2 (Simulation Model Design) – методологія динамічного моделювання розвитку систем на базі «розфарбованих мереж Петрі» (CPN - Color Petri Nets).

IDEF3 (Process Description Capture – Документування технологічних процесів) – методологія документування процесів, що відбуваються в системі (наприклад, на підприємстві), дає можливість описання сценарія і послідовності операцій для кожного процесу.

IDEF4, SISO-STD-003-2006 (Object-Oriented Design) – методологія побудови об'єктно-орієнтованих систем, яка дозволяє відображати структуру об'єктів і принципи їх взаємодії.

IDEF5, W3C 2004b (Ontology Description Capture) – стандарт онтологічного дослідження складних систем. З використанням методології IDEF5 онтологія системи може бути описана за допомогою певного словника термінів і правил, на підставі яких можуть бути сформовані достовірні твердження про стан розглянутої системи в деякий момент часу.

IDEF6 (Design Rationale Capture) – засоби обґрунтування проектних дій. Призначення IDEF6 полягає в полегшенні отримання знань про причини, обставини, приховані мотиви, які обумовлюють обрані методи моделювання. IDEF6 акцентує увагу саме на процесі створення моделі.

IDEF8, SISO-STD-013-2014 (User Interface Modeling) – засоби моделювання інтерфейсів взаємодії оператора і системи.

IDEF9 (Scenario-Driven IS Design – Business Constraint Discovery method) – методика дослідження вимог в умовах ведення бізнесу на підприємстві.

IDEF14 (Network Design) – методика проектування комп'ютерних мереж, на основі аналізу вимог, специфічних мережевих компонентів, існуючих конфігурацій мереж. Також забезпечує підтримку рішень, пов'язаних з раціональним управлінням матеріальними ресурсами, що дозволяє досягти суттєвої економії.

IEEE 1516-2000 (Standard for Modeling and Simulation High Level Architecture) – стандарт для моделювання архітектури високого рівня.

IEEE 1278 (Standard for Distributed Interactive Simulation) – стандарт для моделювання взаємодії в розподілених системах.

SISO-STD-013-2014 забезпечує функціональну сумісність графічних систем подання процесів у системах.

SISO-STD-012-2013 забезпечує стандартизований формат для запису домовленостей щодо об'єднання систем на основі мови розмітки XML.

11.2 Засоби архітектурного моделювання складних систем

На найвищому рівні опису модель структури системи разом з моделлю основних принципів її функціонування називають *архітектурою*. Поширені системи архітектурного моделювання відрізняються, в основному, особливостями спрямування на моделі структури або функцій (процесів), моделі програмних, апаратних засобів чи персоналу, моделі для окремих предметних галузей.

Методи моделювання програмованих виробничих систем останнім часом набувають усе більшої актуальності. Для цього використовуються як засоби моделювання, що вбудовані у САПР, наприклад, в системах Factory-Link (US DATA Co., США), InTouch (Wonderware, США), Genesis (Iconics, США), RealFlex (BJ Software Systems, США), Sitex (Jade Software, Великобританія), FIX (Intellution, США), Trace-Mode (AdAstra, Росія), IGSS (Seven Technologie, Данія), Image (Технолінк, Росія), так і спеціалізовані засоби структурно-логічного моделювання програмованих систем, зокрема UML (уніфікована мова моделювання).

11.2.1 Уніфікована мова системного моделювання UML

Структурний аналіз і метод Джексона розробки систем (JSD) як універсальні методи моделювання і проектування складних систем вперше були запропоновані ще у 70-х роках двадцятого століття. У 80-90-х роках XX ст. до них додалися об'єктно-орієнтовані методи, запропоновані Г.Бучем і Д.Рамбо. Ці методи інтегровані в єдиний уніфікований метод на основі мови *UML (Unified Modeling Language)*. Мова UML є досить строгим і потужним засобом моделювання, який може бути ефективно використаний для побудови концептуальних, логічних і графічних моделей складних систем різного цільового призначення.

UML створена для візуального моделювання систем на основі об'єктно-орієнтованого підходу. Ця мова створювалася для оптимізації процесу розроблення програмних систем, що дозволяє збільшити ефективність їх реалізації у кілька разів і помітно поліпшити якість кінцевого продукту. Вона дозволяє будувати моделі для усіх фаз життєвого циклу програмного забезпечення.

Наразі зареєстровано як міжнародний стандарт ISO/IEC 19501:2005 «Information technology – Open Distributed Processing – Unified Modeling Language (UML)».

Словник мови UML містить три види блоків:

- сутності;
- відношення;
- діаграми.

Сутності в UML – це абстракції, які є основними елементами моделі. Відношення пов'язують сутності; діаграми наочно зображують відношення і взаємодію сутностей.

В UML є чотири типи сутностей:

- структурні;
- поведінкові;
- групувальні;
- анотаційні.

Структурні сутності – показують складові частини моделі, які відповідають концептуальним або фізичним елементам системи. Існують 7 видів структурних сутностей: *Клас*, *Інтерфейс*, *Кооперація*, *Прецедент*, *Активний клас*, *Компонент*, *Вузол*.

Поведінкові сутності описують поведінку системи у часі і просторі. Існує 2 основних типи поведінкових сутностей: *Взаємодія* і *Автомат*.

Групувальні сутності є частинами моделі UML з функціями організації. Це блоки, на які можна розкласти модель. Є тільки 1 первинна групувальна сутність – *пакет*.

Анотаційні сутності – пояснювальні частини моделі UML. Це коментарі для додаткового опису, роз'яснення або примітки до елемента моделі. Є 1 базовий тип анотаційних елементів – *примітка*.

У мові UML визначені 4 типи відношень:

- залежність;
- асоціація;
- узагальнення;
- реалізація.

Діаграма (diagram) – графічне зображення сукупності елементів моделі у формі зв'язного графу, вершинам і ребрам (дугам) якого приписується певний зміст.

У мові UML визначені такі канонічні діаграми:

- варіантів використання (use case diagram, діаграма сценаріїв, діаграма прецедентів);
- класів (class diagram);
- кооперації (collaboration diagram, діаграми співробітництва);
- послідовності (sequence diagram);
- станів (statechart diagram);
- діяльності (activity diagram);
- компонентів (component diagram);
- розгортання (deployment diagram).

Кожна з цих діаграм деталізує і конкретизує різні уявлення про модель складної системи в термінах мови UML. При цьому ***діаграма варіантів використання є найбільш загальною концептуальною моделлю складної системи, яка є початковою для побудови решти діаграм.*** Приклад діаграми варіантів використання наведений на рис. 11.1.

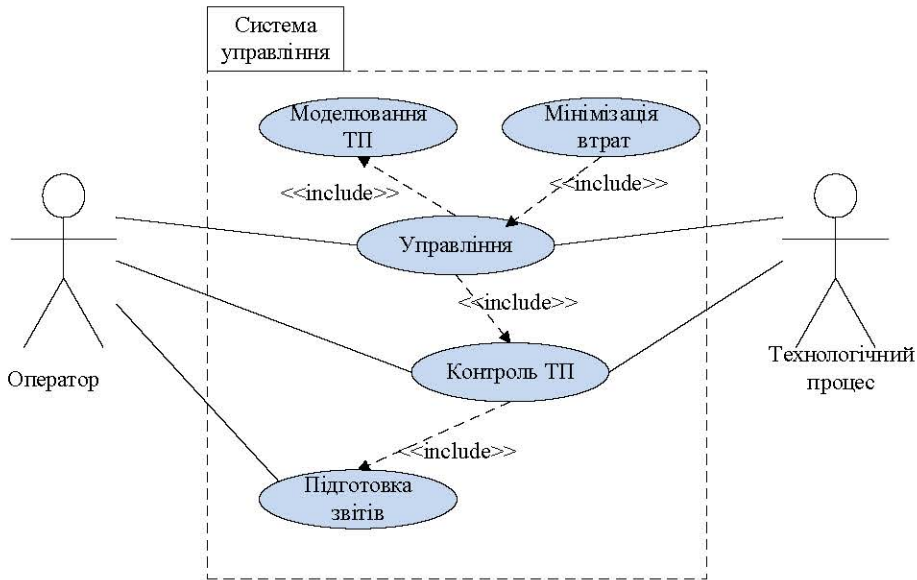


Рисунок 11.1 – Діаграма варіантів використання системи управління

Є різні точки зору на побудову діаграм класів залежно від цілей їх застосування:

- концептуальна точка зору – діаграма класів описує модель предметної області, в ній присутні лише класи прикладних об'єктів;
- точка зору специфікації – діаграма класів застосовується при проектуванні інформаційних систем;
- точка зору реалізації – діаграма класів містить класи, що використовуються безпосередньо в програмному коді (при використанні об'єктно-орієнтованих мов програмування).

Взаємозв'язок – це особливий тип логічних відносин між сутностями, показаних на діаграмах класів і об'єктів. У UML наявні нижченаведені види відносин: *Асоціація* показує, що об'єкти однієї сутності (класу) пов'язані з об'єктами іншої сутності.

Агрегація – проста асоціація між двома класами відображає структурні відношення між рівноправними сутностями, коли обидва класи знаходяться на одному концептуальному рівні і жоден не важливіший за іншого.

Композиція – більш строгий варіант агрегації. Якщо контейнер буде знищений, то весь його вміст також буде знищено. Графічно подається як і агрегація, але з зафарбованим ромбиком.

Узагальнення (спадкування) показує, що один з двох зв'язаних класів (підтип) є окремим випадком (формою) іншого (надтипу), який називається узагальненням першого. На практиці це означає, що будь-який екземпляр підтипу є також екземпляром надтипу.

Потужність відносини (мультиплікатор) означає число зв'язків між кожним екземпляром класу (об'єктом) на початку лінії з екземпляром класу в кінці.

Діаграми класів (class diagram) при моделюванні об'єктно-орієнтованих систем зустрічаються частіше інших. На таких діаграмах відображається безліч класів, інтерфейсів, кооперацій і відношень між ними. Діаграма класів служить для подання статичної структури моделі системи в термінології класів об'єктно-орієнтованого програмування. Крім того, діаграми класів складають основу ще двох діаграм – компонентів і розгортання.

Діаграма класів (рис. 11.2) може відбивати різні взаємозв'язки між такими окремими сутностями предметної області, як об'єкти і підсистеми, а також описує їхню внутрішню структуру і типи відношень. На даній діаграмі не вказується інформація про тимчасові аспекти функціонування системи.

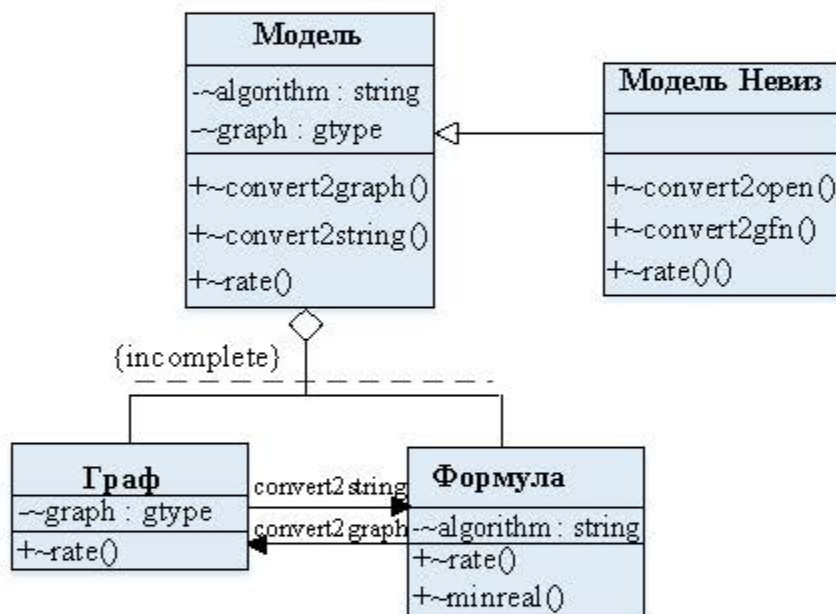


Рисунок 11.2 – Діаграма класів

Діаграма послідовності (sequence diagram) – діаграма, на якій показано взаємодію об'єктів (обмін між ними сигналами і повідомленнями), впорядковане за часом, з відображенням тривалості обробки і порядку їх появи.

Основними елементами діаграми послідовності (рис. 11.3) є позначення об'єктів (прямокутники з назвами об'єктів), вертикальні «лінії життя» (lifeline), що відображають плин часу, прямокутники, що відображають діяльність об'єкта або виконання ним певної функції (прямокутники на пунктирній «лінії життя»), і стрілки, що показують обмін сигналами або повідомленнями між об'єктами.

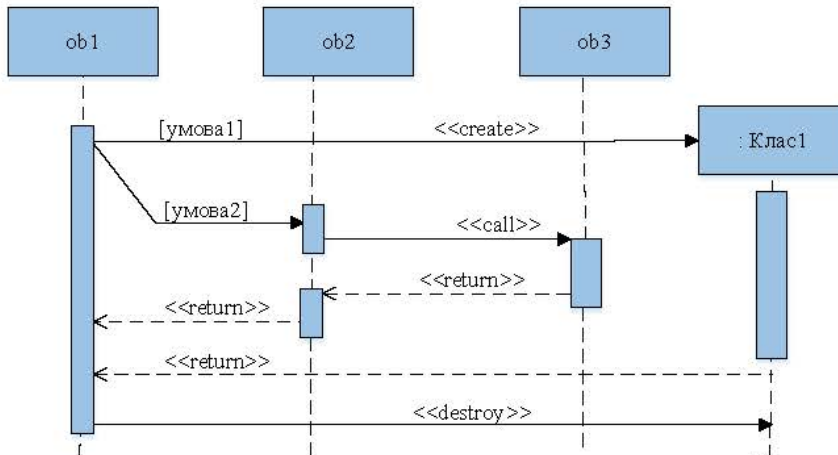


Рисунок 11.3 – Приклад діаграми послідовності

Діаграми станів і діяльності (activity diagram) призначені для моделювання поведінки системи. Діаграми діяльності (рис. 11.4) використовуються при моделюванні бізнес-процесів, технологічних процесів, послідовних і паралельних обчислень.

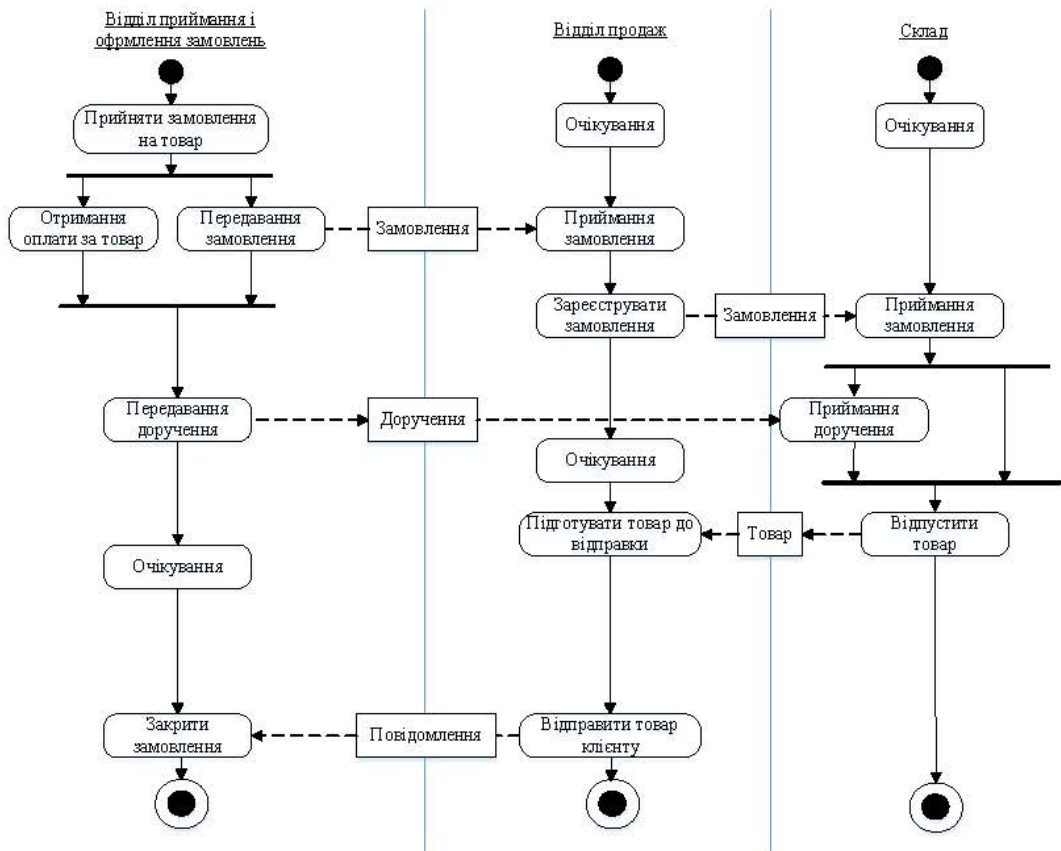


Рисунок 11.4 – Фрагмент діаграми діяльності компанії

При цьому кожна дія розділяється на фундаментальні процеси. На діаграмі діяльності управління здійснюється через:

- потоки управління;
- визначені потоки даних.

Діаграма діяльності близька за змістом до блок-схеми алгоритму, однак має ширші можливості опису систем. Зокрема, на діаграмах діяльності показують паралельне функціонування окремих об'єктів системи (діяльність кожного об'єкта показується на окремій «доріжці») і обмін даними (сигналами, впливами) між ними.

Діаграма розгортання (deployment diagram, рис. 11.5) в UML моделює фізичне розгортання артефактів на вузлах. Наприклад, щоб описати веб-сайт діаграма розгортання повинна показувати, які апаратні компоненти («вузли») існують (наприклад, веб-сервер, сервер бази даних, сервер-додаток), які програмні компоненти («артефакти») працюють на кожному вузлі (наприклад, веб-додаток, база даних), і як різні частини цього комплексу з'єднуються один з одним (наприклад, JDBC, REST, RMI).

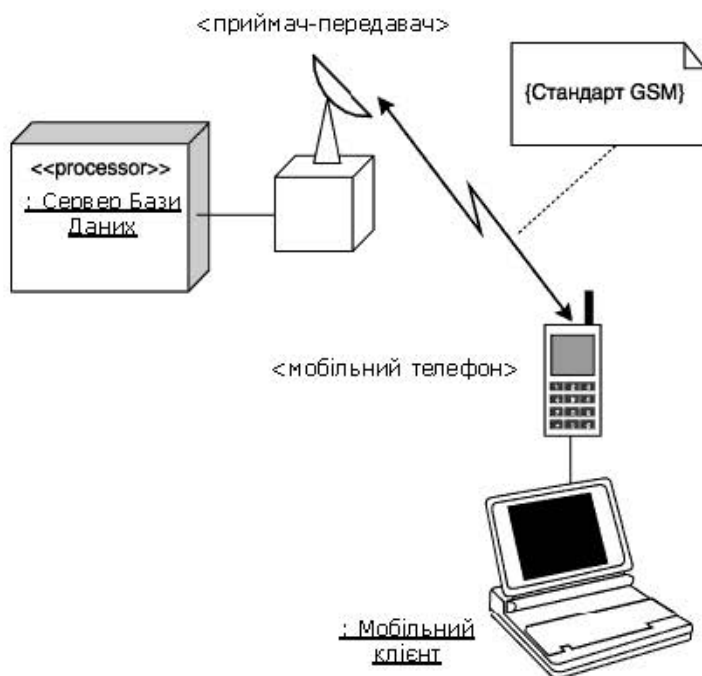


Рисунок 11.5 – Діаграма розгортання для системи мобільного доступу до корпоративної бази даних

Вузли подаються у вигляді прямокутних паралелепіпедів з артефактами, розташованими в них, зображеними у вигляді прямокутників. Вузли можуть мати підвузли, які подаються як вкладені прямокутні паралелепіпеди. Один вузол

діаграми розгортання може концептуально подавати множину таких фізичних вузлів, як кластер серверів баз даних.

Подібно до діаграми послідовності, *діаграми кооперації* (collaboration diagram, рис. 11.6) відображають потік подій в конкретному сценарії варіанта використання. Головна особливість діаграм кооперації полягає в можливості графічно подати не тільки послідовність взаємодії, але й усі структурні відносини між об'єктами, які беруть участь у цій взаємодії.

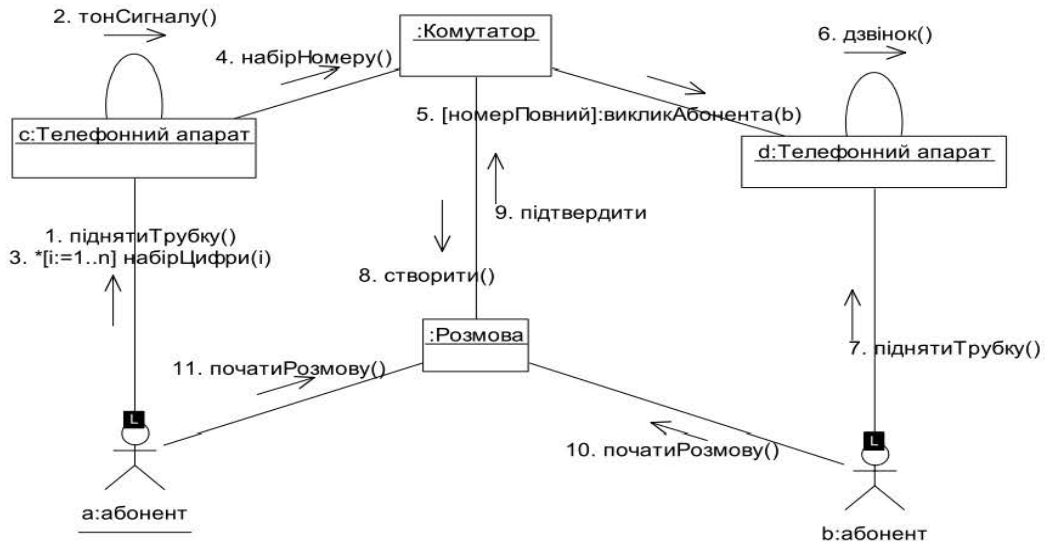


Рисунок 11.6 – Діаграма кооперації моделі початку телефонної

Перш за все, на діаграмі кооперації у вигляді прямокутників зображуються об'єкти, які беруть участь у взаємодії, що містять ім'я об'єкта, його клас і, можливо, значення атрибутів. Далі, як і на діаграмі класів, вказуються асоціації між об'єктами у вигляді різних з'єднувальних ліній. При цьому можна явно вказати імена асоціації та ролей, які грають об'єкти в даній асоціації. Додатково можуть бути зображені динамічні зв'язки – потоки повідомлень. Вони подаються також у вигляді з'єднувальних ліній між об'єктами, над якими розташовується стрілка з вказанням напрямку, імені повідомлення і порядкового номера в загальній послідовності ініціалізації повідомлень.

Усі розглянуті раніше діаграми відображали концептуальні аспекти побудови моделі системи і належали до логічного рівня подання. *Діаграма компонентів* (component diagram, рис. 11.7) описує особливості фізичного подання системи. Діаграма компонентів дозволяє визначити архітектуру розроблюваної системи, встановивши залежності між програмними компонентами, в ролі яких може виступати вихідний, бінарний і виконавчий коди. Основними графічними елементами діаграми компонентів є компоненти, інтерфейси і залежності між ними. Діаграма компонентів розробляється для цілей:

- візуалізації загальної структури вихідного коду програмної системи;
- специфікації виконуваного варіанта програмної системи;
- забезпечення багаторазового використання окремих фрагментів програмного коду;
- подання концептуальної і фізичної схем баз даних.

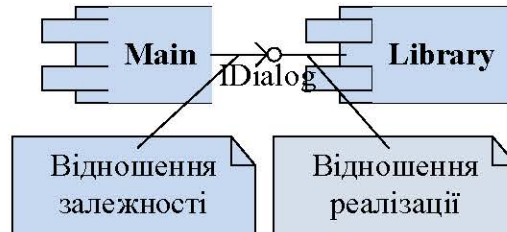


Рисунок 11.7 – Фрагмент діаграми компонентів

Діаграма компонентів забезпечує узгоджений перехід від логічного подання до конкретної реалізації проекту у формі програмного коду. Одні компоненти можуть існувати тільки на етапі компіляції програмного коду, інші – на етапі його виконання. Діаграма компонентів відображає загальні залежності між компонентами, розглядаючи останні як класифікатори.

Наприклад, зображений фрагмент діаграми компонентів (рис. 11.7) відображає інформацію про те, що компонент Main залежить від імпортованого інтерфейсу IDialog, який реалізується компонентом Library. У цьому випадку для компонента Library інтерфейс IDialog є експортованим.

11.2.2 Мова моделювання бізнес-процесів BPMML

У 2006 р. міжнародний консорціум з розробки описів процесів у комп'ютерних технологіях (Object Management Group, Inc. – OMG) опублікував остаточну версію мови моделювання бізнес-процесів BPMML (Business Process Modeling Language), на основі якої наразі створені і використовуються декілька похідних засобів моделювання, зокрема BPMN (Business Process Model and Notation).

Специфікація BPMN описує умовні позначення для відображення бізнес-процесів у вигляді діаграм бізнес-процесів. BPMN орієнтована як на технічних фахівців, так і на бізнес-користувачів. Для цього мова використовує базовий набір інтуїтивно зрозумілих елементів, які дозволяють визначати складні семантичні конструкції. Крім того, специфікація BPMN визначає, як діаграми, що описують бізнес-процес, можуть бути трансформовані у виконуваний моделі мовою BPMML. Специфікація BPMN 2.0 також може виконуватись та переноситись (тобто процес, нарисований в одному редакторі від одного виробника,

може бути виконаний на движку бізнес-процесів зовсім іншого виробника, за умови, якщо вони підтримують BPMN 2.0).

Основна мета BPMN – створення стандартного набору умовних позначень, зрозумілих усім бізнес-користувачам. Бізнес-користувачі – це також бізнес-аналітики, які створюють і поліпшують процеси, технічні розробники, відповідальні за реалізацію процесів, і менеджери, що стежать за процесами і керують ними. Отже, BPMN призначена бути сполучною ланкою між фазою дизайну бізнес-процесу і фазою його реалізації.

Використання BPMN

Моделювання бізнес-процесів використовується для донесення широкого спектра інформації до різних категорій користувачів. Діаграми бізнес-процесів дозволяють описувати наскрізні бізнес-процеси, але в той же час допомагають швидко розуміти процес і легко орієнтуватися в його логіці. У наскрізній BPMN-моделі можна виділити три типи підмоделей:

- окремі (внутрішні) бізнес-процеси;
- абстрактні (відкриті) бізнес-процеси;
- процеси взаємодії (глобальні).

Моделювання в BPMN здійснюється за допомогою діаграм з невеликим числом графічних елементів. Це допомагає користувачам швидко розуміти логіку процесу. Виділяють чотири основні категорії елементів:

- об'єкти потоку управління: події, дії та логічні оператори;
- з'єднувальні об'єкти: потік управління, потік повідомлень та асоціації;
- ролі: пули і доріжки;
- артефакти: дані, групи і текстові анотації.

Елементи цих чотирьох категорій дозволяють будувати найпростіші діаграми бізнес-процесів. Об'єкти потоку управління поділяються на три основні типи: події (events), дії (activities) і логічні оператори (gateways).

Елементи потоку є ключовими для формування моделі процесу. Події використовуються для позначення початку і завершення процесу. Крім того, можуть бути проміжні події (Intermediate). Як правило, подія має причину (так званий тригер) і зображується в BPMN у вигляді кола з вільним центром, призначеним для відображення різних тригерів або результатів («Повідомлення», «Таймер», «Помилка», «Скасування», «Компенсація», «Правило», «Зв'язок», «Множинний», «Завершення»). Для кожного тригера є відповідне умовне позначення

Події зображуються колом і означають певну подію в світі. Події ініціюють дії або є їх результатами. За розташуванням в процесі події можуть бути класифіковані на початкові (start), проміжні (intermediate) і завершальні (end) (рис. 11.8).

	Початок	Проміжок	Кінець	
	Обробка		Генерація	
Простий				
Повідомлення				
Таймер				
Помилка				
Відміна				
Компенсація				
Умова				
Сигнал				
Складний				
Посилання				
Зупин-				

Рисунок 11.8 – Позначення подій в BPMN

Дії зображуються прямокутниками з округленими кутами. Серед дій розрізняють завдання і підпроцеси. Графічне зображення згорнутого підпроцесу – знак плюс біля нижньої межі прямокутника (рис. 11.9).

Логічні оператори зображуються ромбами і є точками прийняття рішень у процесі. За допомогою логічних операторів організовується розгалуження і синхронізація потоків управління в моделі процесу.

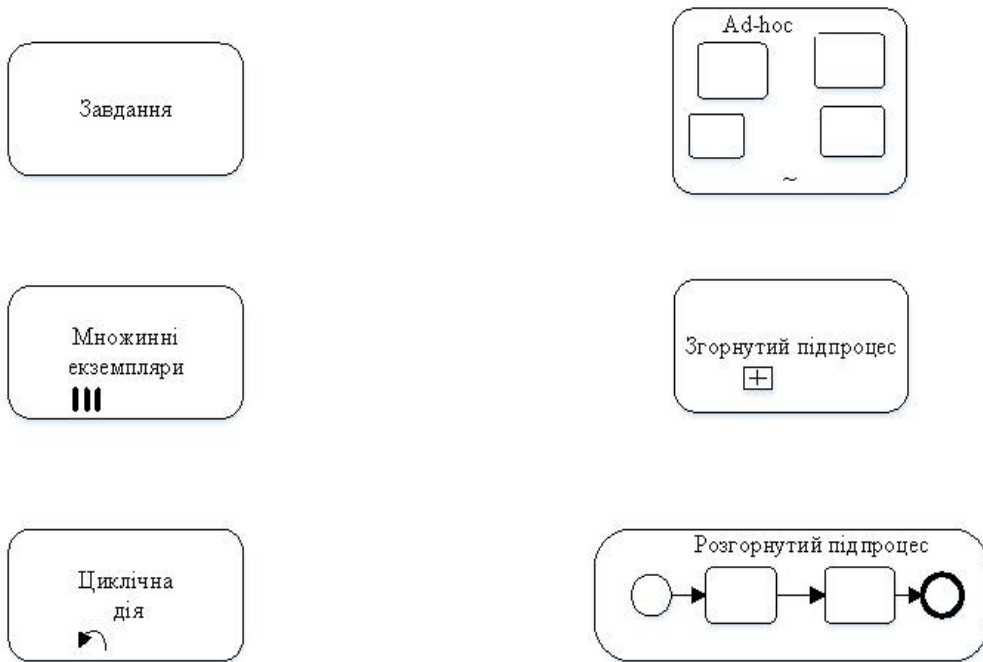
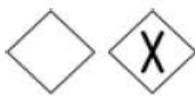






Рисунок 11.9 – Графічне зображення дій (завдання і підпроцеси)

- 
Оператор виключного АБО, що керується даними
- 
Оператор виключного АБО, що керується об'єктами
- 
Оператор виключного АБО
- 
Оператор І
- 
Складений оператор

Фрагмент моделі бізнес-процесу за стандартом BPMN наведено на рисунку 11.10.

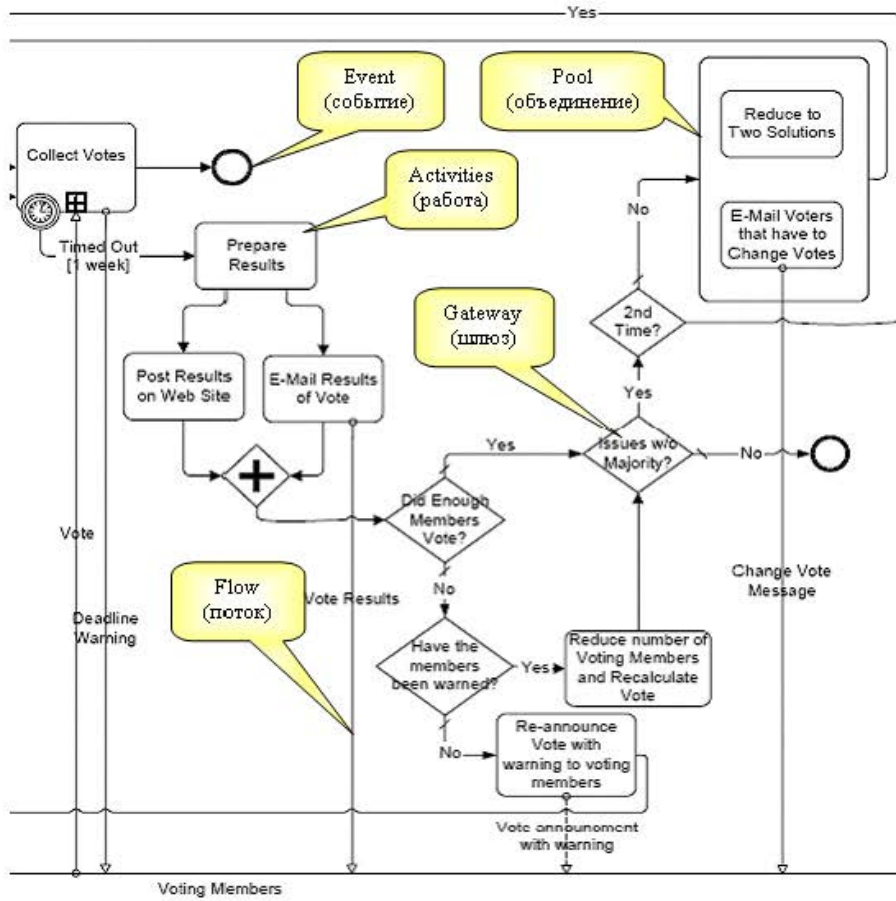


Рисунок 11.10 – Фрагмент моделі бізнес-процесу за стандартом BPMN

11.3 Моделювання в середовищах математичних пакетів

Одним з напрямків застосування програмного забезпечення є автоматизація дослідження й проектування систем. Це й не дивно, адже, розробляючи такі системи, фахівці з комп'ютерних наук намагалися в першу чергу розв'язати свої проблеми, полегшити свою працю. В результаті з'явилися дуже потужні математичні пакети та середовища (*MathCad*, *MatLab*, *Mathematica*, *Maple*, *Derive*, *VisSim*, *Genius*, *ANSYS* та інші), що суттєво спрощують моделювання. Сучасні математичні пакети можна використовувати і як звичайний калькулятор, і як засоби для спрощення виразів при розв'язанні будь-яких математичних задач, і як генератори графіки або навіть звука. Стандартними стали також засоби взаємодії з Internet шляхом генерації HTML-сторінок прямо в процесі обчислень.

Звичайно, кваліфікований користувач, який в достатній мірі володіє однією з мов програмування (C++, Java, Pascal, Fortran, Prolog та іншими), може самостійно створити окрему програму або комплекс програм, що дозволить реалізувати на ПК алгоритм його задачі. Проте такий підхід потребує, як правило, великих витрат праці на програмування, відлагодження та тестування кожної програми. Тому для скорочення часу програмування було створено згадані прикладні програмні пакети, сфери використання яких у значній мірі перекриваються. Для найбільш ефективного використання обчислювальної техніки необхідно правильно вибрати найкращий пакет програм на ранній стадії розв'язання прикладної задачі. Адже реальна мета полягає у вирішенні певної проблеми, а обчислення – всього лише проміжний етап на шляху до цього.

При дослідженні систем автоматички, стохастичних процесів, систем прийняття рішень та інших однією з найбільш ефективних є програмна система **Matlab** з широким класом предметно-орієнтованих бібліотек (toolbox) та інструментом візуального імітаційного моделювання Simulink (див. п.10.3). У системі MatLab також існують широкі можливості для програмування. Її бібліотека *CMath* (компілятор MatLab) є об'єктною і містить понад 300 процедур обробки даних мовою C. У середині пакета можна використовувати як процедури самої MatLab, так і стандартні процедури мови C, що робить цей інструмент наймогутнішою підмогою при розробці додатків (використовуючи компілятор C Math, можна вбудовувати будь-які процедури MatLab у готові додатки).

Для візуального моделювання та моделювання спільно з реальною апаратурою більш зручним є програмний пакет VisSim.

Аналітичні перетворення дозволяють виконувати більшість математичних програмних продуктів MathCad, Mathematica, Maple. З цих трьох поширених математичних пакетів найпотужнішим є Maple. Ядро символічних обчислень Maple входить до складу цілого ряду систем комп'ютерної математики – від систем для широкого кола користувачів типу MathCad – до однієї із кращих систем для чисельних розрахунків і моделювання MatLab.

11.3.1 Середовище MathCAD

На відміну від потужного та орієнтованого на високоефективні обчислення при аналізі даних пакета MatLab, програма **MathCad** – це, скоріше, редактор математичних текстів із широкими можливостями символічних обчислень і прекрасним інтерфейсом. Інтерфейс програми MathCad дуже простий, а можливості візуалізації широкі. Всі обчислення тут здійснюються на рівні візуального запису виразів у загальнозвуженій математичній формі. Пакет має гарні підказки, докладну документацію, цілий ряд додаткових модулів та вбудованих функцій. Однак стосовно математичних можливостей MathCad поступається системам Maple, Mathematica, MatLab. Не зважаючи на це, з програми MathCad випущено багато книжок і навчальних курсів. Сьогодні ця система стала буквально міжнародним стандартом для технічних обчислень. Розробники Mathcad зробили все можливе, щоб користувач, який не має спеціальних знань з програмування, міг реалізувати велику кількість обчислювальних методів та досягти значного результату в області математичних розрахунків. У цієї системи є й ефективні засоби типової *наукової графіки*. Системи MathCAD орієнтовані на масового користувача.

До засобів нових версій MathCAD відносяться налаштування під будь-який відомий тип друкувального пристрою, багатий набір шрифтів, можливість використання всіх інструментів Windows, графіку і сучасний багатовіконний інтерфейс, також є ефективні засоби кольорового оформлення документів, створення анімаційних (рухливих) графіків і звукового супроводу. Текстовий, формульний і графічний редактори об'єднані з обчислювальними можливостями. Передбачено і можливість об'єднання з іншими математичними і графічними системами для розв'язання особливо складних задач. Звідси і назва таких систем – інтегровані системи.

Передбачено імпорт будь-яких графічних зображень – від простих і спеціальних графіків функцій до багатоколірних репродукцій художніх творів. Уведено засоби анімації малюнків і програвання відеофайлів зі звуковим стереофонічним супроводом.

Усі версії MathCAD під Windows дозволяють працювати як з латинськими літерами, так і з кирилицею, грецьким алфавітом і взагалі з будь-якими символами, доступними Windows. Останні версії системи MathCAD дають нові засоби для підготовки складних документів. У них передбачено різноманітний виклик одних документів з інших, можливість закриття окремих частин документів, гіпертекстові і гіпермедіа-переходи, об'єктно-орієнтоване програмування складних задач, при якому програма складається автоматично за завданням користувача, а саме завдання формулюється природною математичною мовою спілкування із системою.

Інтерфейс користувача системи створений так, що користувач, який має елементарні навички роботи з Windows-додатками, може відразу почати роботу з MathCAD.

Основну частину екрана займає вікно редагування (рис. 11.11). Вгорі вікна розташовані рядки з типовими елементами інтерфейсу. Верхній рядок – титульний. Другий рядок вікна системи – головне меню. Основні функції головного меню дублюються кнопками швидкого керування. Панелі з ними знаходяться під рядком головного меню. Їх можна виводити на екран чи забирати з нього за допомогою відповідних опцій позиції View (Вигляд) головного меню Windows.

Звичайно є також дві панелі: панель інструментів (яка дублює ряд найбільш розповсюджених команд і операцій) і панель форматування для вибору типу і розміру шрифтів і способу вирівнювання текстових коментарів (ці панелі видно на рис. 11.12).

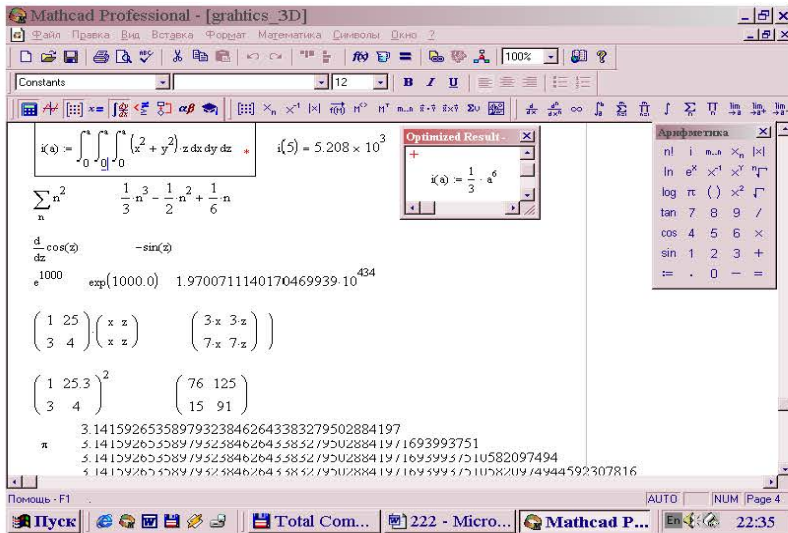


Рисунок 11.11 – Робочий екран системи MathCAD

У нових версіях використовуються більш зручні переміщувані *складальні панелі* (в оригіналі Palletes – палітри) з такими елементами, що показані на рис. 11.12. За їх допомогою можна вводити в документи практично усі відомі математичні символи й оператори. Застосування панелей для вибору шаблонів математичних знаків дуже зручне, оскільки не треба запам'ятовувати різноманітні поєднання клавіш, що використовуються для введення спеціальних математичних символів.

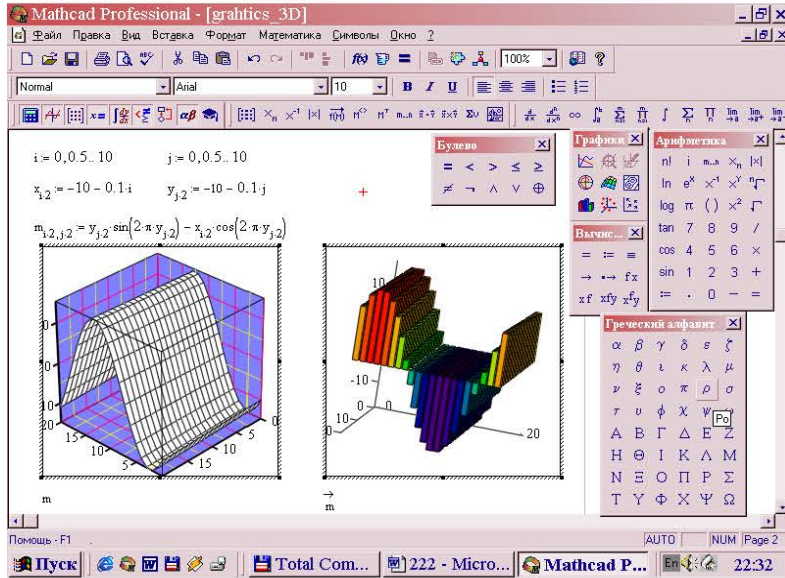


Рисунок 11.12 – Панелі MathCAD

Система MathCAD надає великі можливості для моделювання систем керування. Так наприклад, вона дозволяє здійснювати пряме та обернене *перетворення Лапласа* у символному вигляді. Це відкриває великі можливості моделювання *перехідних процесів* у системах. Послідовність моделювання перехідного процесу (рис. 11.13):

- задаємо передатну функцію;
- в передатній функції виділяємо змінну i в меню Symbolics→Transform обираємо обернене перетворення за Лапласом. В результаті отримуємо імпульсну перехідну функцію;
- отриманий вираз інтегруємо і отримуємо перехідну функцію;
- за допомогою панелі інструментів будуємо перехідну характеристику на основі перехідної функції.

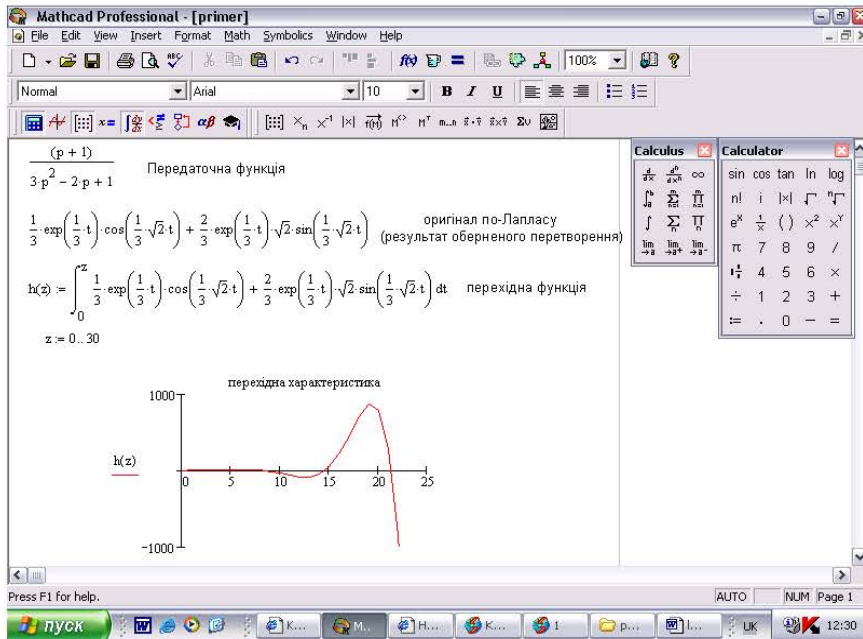


Рисунок 11.13 – Приклад розрахунку перехідної характеристики

11.3.2 Середовище MatLab

MatLab містить обчислення, візуалізацію і програмування в зручному середовищі, де задачі і розв'язки виражаються у формі, близькій до математичної. Типові використання MatLab:

- математичні обчислення;
- створення алгоритмів;
- моделювання;
- аналіз даних, дослідження і візуалізація;
- наукова й інженерна графіка;
- розробка застосувань, включаючи створення графічного інтерфейсу.

MatLab – інтерактивна система, в якій основним елементом даних є масив. Це дозволяє розв'язувати різні задачі, пов'язані з технічними обчисленнями, особливо ті, в яких використовуються матриці і вектори, у кілька разів швидше, ніж при написанні програм з використанням таких «скалярних» мов програмування, як С.

У MatLab важлива роль приділяється спеціалізованим групам програм, які називаються *toolboxes*. Вони дозволяють застосовувати спеціалізовані методи. *Toolboxes* – це колекції функцій MatLab (М-файлів), що дозволяють розв'язувати окремі класи задач. *Toolboxes* застосовуються для обробки сигналів, моделювання систем контролю, нейронних мереж, нечіткої логіки тощо.

Система MatLab складається з п'яти основних частин.

1. *Мова MatLab*. Це мова матриць і масивів високого рівня з керуванням потоками, функціями, структурами даних, введенням-виведенням.

2. *Середовище MatLab*. Це набір інструментів і пристосувань, з якими працює користувач чи програміст MatLab. Воно містить у собі засоби для керування змінними в робочому просторі MatLab, введення і виведення даних, а також для створення, контролю і налагодження М-файлів і застосувань MatLab.

3. *Керована графіка*. Це графічна система MatLab, що містить у собі команди високого рівня для візуалізації дво- і тривимірних даних, обробки зображень, анімації й ілюстративної графіки. Вона також містить у собі команди низького рівня, що дозволяють редагувати зовнішній вигляд графіки.

4. *Бібліотека математичних функцій*. Це велика колекція обчислювальних алгоритмів від таких елементарних функцій, як сума, синус, косинус, комплексна арифметика, до більш складних, таких як обернення матриць, знаходження власних значень, функції Бесселя, швидке перетворення Фур'є тощо.

5. *Програмний інтерфейс*. Це бібліотека, що дозволяє писати програми на Сі, які взаємодіють з MatLab. Вона містить засоби для виклику програм з MatLab (динамічний зв'язок), використовуючи MatLab як обчислювальний інструмент, і для читання-запису М-файлів.

Simulink – це інтерактивна система для моделювання нелінійних динамічних систем, що супроводжує MatLab. Вона являє собою графічне середовище, що дозволяє створювати модель процесу шляхом перетаскування блоків і діаграм на екрані і маніпуляції ними. Simulink працює з лінійними, нелінійними, неперервними, дискретними, багатовимірними системами.

Blocksets – це доповнення до Simulink, що забезпечують бібліотеки блоків для таких спеціалізованих застосувань, як зв'язок, обробка сигналів, енергетичні системи.

Real-Time Workshop – це програма, що дозволяє генерувати С-код з блоків діаграм і запускати його на виконання на різних системах реального часу.

Операційне середовище системи MatLab – це інтерфейс, що підтримує зв'язок цієї системи із зовнішнім світом – діалог з користувачем через командний рядок чи графічний інтерфейс, перегляд робочої області і шляхів доступу, редактор і відлагоджувальник М-файлів, робота з файлами й оболонкою DOS, експорт і імпорт даних, інтерактивний доступ до довідкової інформації, динамічна взаємодія із зовнішніми системами Microsoft Word, Excel Microsoft Word, Excel тощо. Реалізуються інтерфейси через командне вікно, інструментальну панель, системи перегляду робочої області і шляхів доступу, редактор М-файлів, спеціальні меню і т. д.

Командне вікно системи MatLab показане на рис. 11.14. Тут же показане низхідне меню File.

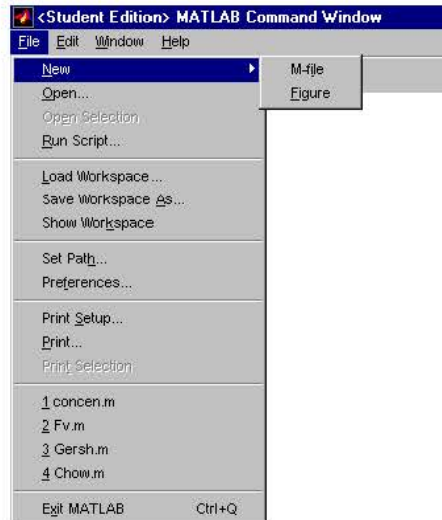


Рисунок 11.14 – Вікно команд MatLab

Інструментальна панель командного вікна системи MatLab дозволяє забезпечити простий доступ до операцій над M-файлами.

Редактор M-файлів M-file Editor/Debugger може бути викликаний з командного рядка командою «edit» чи «edit <ім'я M-файла>».

Робоча область системи MatLab – це область пам'яті, в якій розміщені змінні системи. Вміст цієї області можна переглянути з командного рядка за допомогою команд «who» і «whos». Команда «who» виводить тільки імена змінних, а команда «whos» – інформацію про розміри масивів і тип змінної.

Спеціальний засіб перегляду Workspace Browser забезпечує зображення команди «whos» у вигляді графічного інтерфейсу. Для того, щоб відкрити Workspace Browser треба або вибрати опцію Show Workspace з меню File menu, або скористатися кнопкою Workspace Browser інструментальної панелі. У результаті цих операцій на екран буде виведене вікно (рис. 11.15).

Існує багато способів одержання інформації про функції системи MatLab у процесі роботи:

- команда help;
- команда lookfor;
- меню Help;
- перегляд і виведення на друк сторінок документації;
- звертання до Web-сервера фірми The MathWorks.

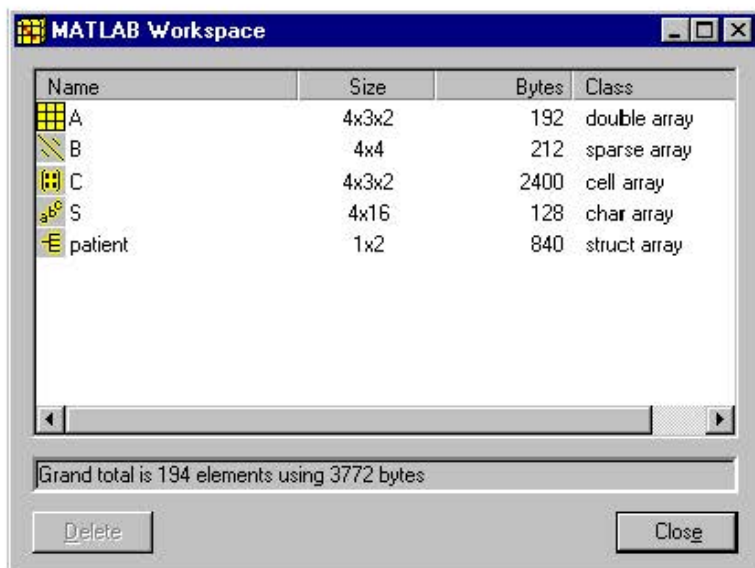


Рисунок 11.15 – Вікно перегляду структур даних. У прикладі: A – тривимірний масив чисел подвійної точності; B – масив розрідженої структури; C – масив комірок; S – масив символів; patient – масив записів

Для візуалізації моделювання система MatLab має бібліотеку Image Processing Toolbox, що забезпечує широкий спектр функцій, які підтримують візуалізацію проведених обчислень безпосередньо із середовища MatLab, збільшення та аналіз, а також можливість побудови алгоритмів обробки зображень. Систему MatLab можна використовувати для обробки зображень, сконструювавши власні алгоритми, які будуть працювати з масивами графіки як з матрицями даних. Оскільки мова MatLab оптимізована для роботи з матрицями, в результаті забезпечується простота використання, висока швидкість і економічність проведення операцій над зображеннями.

Серед інших бібліотек системи MatLab можна також відзначити System Identification Toolbox – набір інструментів для створення математичних моделей динамічних систем, заснованих на спостережуваних вхідних/вихідних даних. Особливістю цього інструменту є наявність гнучкого користувацького інтерфейсу, що дозволяє організувати дані й моделі. Бібліотека System Identification Toolbox підтримує як параметричні, так і непараметричні методи. Інтерфейс системи полегшує попередню обробку даних, роботу з ітеративним процесом створення моделей для одержання оцінок і виділення найбільш значимих даних. Що стосується математичних обчислень, то MatLab надає доступ до величезної кількості підпрограм, що містяться в бібліотеці NAG Foundation Library компанії Numerical Algorithms Group Ltd (інструмент має сотні функцій з різних розділів математики, і багато з цих програм було розроблено широковідомими у світі фахівцями). Це унікальна колекція реалізацій сучасних чисель-

них методів комп'ютерної математики, створених за останні три десятиліття років. Лише додану до системи велику кількість документації цілком можна розглядати як фундаментальний багатотомний електронний довідник з математичного забезпечення. Сьогодні система MatLab широко використовується в техніці, науці та освіті, але все-таки вона більше підходить для аналізу даних і організації обчислень, ніж для чисто математичних викладок.

11.3.3 Інші математичні пакети

SCILAB – програма (пакет програм) для вирішення завдань чисельних і технічних обчислень, що є аналогом частини пакета MatLab і має схожу з ним мову програмування (в складі є утиліта, яка дозволяє конвертувати документи Matlab → Scilab).

Програма доступна для різних операційних систем, також Microsoft Windows і Linux. Є можливість розширення програми зовнішніми програмами і модулями, написаними на різних мовах програмування.

Scilab дозволяє працювати з елементарними функціями і великою кількістю спеціальних функцій (Бесселя, Неймана, інтегральними функціями), має потужні засоби роботи з матрицями, поліномами (у тому числі і символічні), проводити чисельні обчислення (наприклад чисельна інтеграція) і розв'язання завдань лінійної алгебри, оптимізації і моделювання, обчислювати статистичні функції, а також використовується як засіб для побудови і роботи з графіками. Робочий екран системи Scilab показано на рис. 11.16.

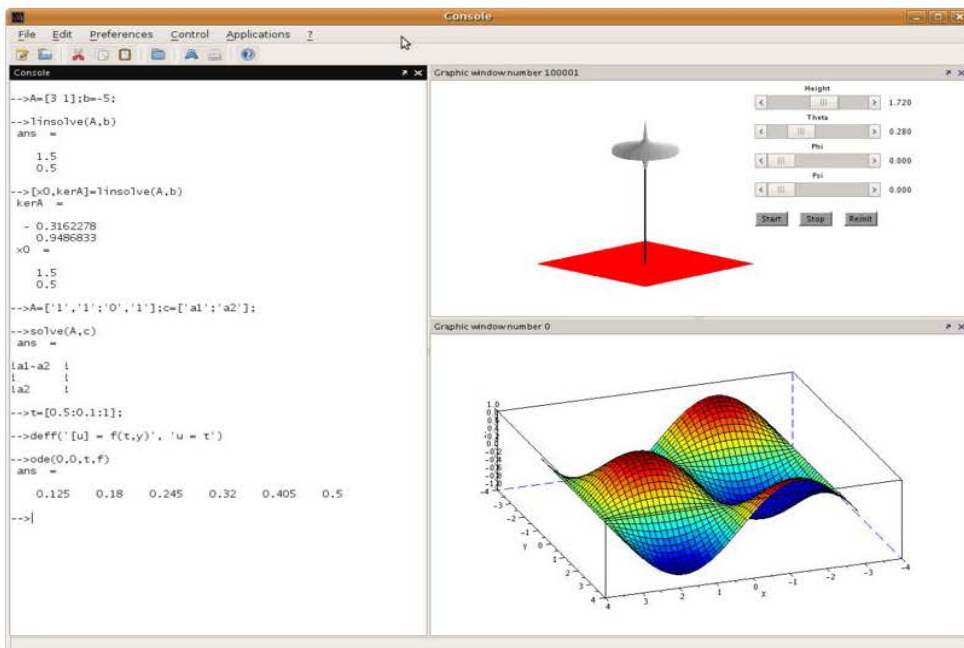


Рисунок 11.16 – Робочий екран системи Scilab

До складу пакету також входить Scicos – інструмент для редагування блокових діаграм і моделювання (аналог *simulink* в пакеті *MatLab*). Є можливість спільної роботи *Scilab* з програмою *LabVIEW*.

Maple – програмний пакет, система комп'ютерної алгебри. Створено в компанії *Waterloo Maple Inc.*, яка заснована в 1984 році, як і ряд програмних продуктів, орієнтованих на складні математичні обчислення, візуалізацію даних та моделювання. Пакет *Maple* складається з ядра (процедур, написаних мовою *C* і добре оптимізованих), бібліотеки, написаної на *Maple*-мові, і розвиненого зовнішнього інтерфейсу. Ядро виконує більшість базових операцій, а бібліотека містить безліч команд – процедур, що виконуються в режимі інтерпретації.

Інтерфейс *Maple* заснований на концепції робочого поля (*worksheet*) або документа, що містить рядки введення-виведення, текст, а також графіки. Робочий екран системи *Maple* показано на рис. 11.17. Робота з пакетом відбувається в режимі інтерпретатора. У рядку введення користувач задає команду, натискає клавішу *Enter* і отримує результат – рядок (або рядки) виведення або повідомлення про помилково введену команду. Робочі вікна (листи) системи *Maple* можуть бути використані не тільки як інтерактивні середовища для вирішення завдань, але і як система для підготовки технічних документів. Для полегшення документування та організації результатів обчислень в системі є опції розбиття на параграфи і розділи, а також додавання гіперпосилань.

Maple можна використовувати як дуже потужний калькулятор для підрахунків за заданими формулами і як розвинуту систему для різного роду обчислень. Перевага *Maple* – це здатність виконувати арифметичні дії в символічному вигляді. Програму можна використовувати для вирішення завдань диференціального й інтегрального числення, обчислення меж, розкладів в ряди, підсумовування рядів, множення, для інтегральних перетворень (таких як перетворення Лапласа, *Z*-перетворення, перетворення Мелліна або Фур'є), а також для дослідження неперервних або кусково-неперервних функцій. В *Maple* наявні також пакети підпрограм для вирішення завдань евклідової та аналітичної геометрії, теорії чисел, теорії ймовірностей і математичної статистики, комбінаторики, теорії груп, чисельної апроксимації і лінійної оптимізації (симплекс-метод), а також завдань фінансової математики та багатьох інших. Для технічних застосувань в *Maple* є довідники фізичних констант і одиниць фізичних величин з автоматичним перерахунком формул.

Система *Maple* підтримує як двовимірну, так і тривимірну графіку. Можна подати явні, неявні і параметричні функції, а також багатовимірні функції і просто набори даних в графічному вигляді, двовимірні графіки відразу декількох функцій, створювати графіки конформних перетворень функцій з комплексними числами і будувати графіки функцій в логарифмічній, подвійній логарифмічній, параметричній, фазовій, полярній і контурній формі. Можна графічно подавати нерівності, неявно задані функції, розв'язки диференціальних рівнянь. *Maple*

може будувати поверхні і криві в тривимірному поданні, включаючи поверхні, задані явною і параметричною функціями, а також рішеннями диференціальних рівнянь. При цьому є можливість подання у вигляді дво- або тривимірної анімації.

Приклад робочого екрану Maple подано на рис. 11.17.

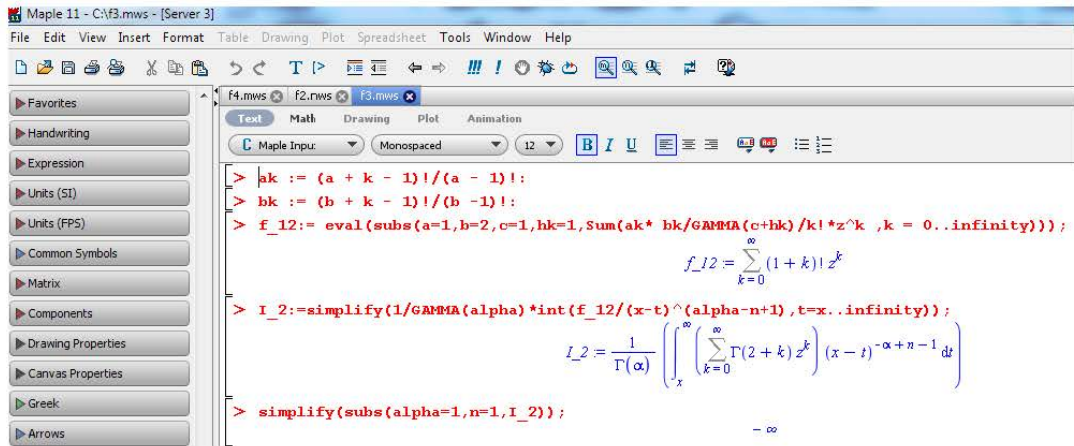


Рисунок 11.17 – Робочий екран системи Maple.

При програмуванні система Maple використовує процедурну мову 4-го покоління (4GL). Ця мова спеціально призначено для швидкої розробки математичних підпрограм і додатків користувача. Синтаксис цієї мови аналогічний синтаксису універсальних мов високого рівня: C, Fortran, Basic і Pascal. Maple може генерувати код, сумісний з такими мовами програмування, як Fortran, C, і з мовою набору тексту LaTeX. Одна з переваг цієї властивості – здатність забезпечувати доступ до спеціалізованих числових програм, максимально пришвидшуючи вирішення складних завдань. Наприклад, використовуючи систему Maple, можна розробити певну математичну модель, а потім з її допомогою згенерувати код мовою C, відповідний цій моделі.

Таким чином, переваги Maple – це символічні обчислення, що дає більшу точність, можливість доступу до спеціалізованих числових програм, величезну кількість спеціальних функцій та чисел, вбудованих пакетів, що дозволяє робити обчислення будь-якої складності і спрямованості.

Mathematica – система комп'ютерної алгебри компанії Wolfram Research. Містить функції як для аналітичних перетворень, так і для чисельних розрахунків. Крім того, програма підтримує роботу з графікою і звуком, також побудову дво- і тривимірних графіків функцій, рисування довільних геометричних фігур, імпорт і експорт зображень і звуку.

Система Mathematica складається з ядра (обчислювальний механізм) і зовнішньої оболонки (візуальний інтерфейс), які взаємодіють через протокол MathLink. Робочий екран системи Mathematica показано на рис. 11.18. Для роз-

ширення набору функцій служать бібліотека (Library) і набір пакетів розширення (Add-on Packages). Пакети розширень створюються власною мовою програмування систем Mathematica і є головним засобом для розвитку можливостей системи та їх адаптації до вирішення конкретних класів задач користувача. Інтерфейс пакета будується з декількох базових понять: зошит (Notebooks), комірка (Cell) і палітра (Palettes). Зошитом називається файл, з яким працює користувач. У ньому створюються і обчислюються формули, будуються графіки і таблиці. При бажанні, в зошиті можна навіть програти звуковий файл або фільм. Зошит складається з комірок. Вся інформація, яка є в зошиті, зберігається в його комірках. Як тільки в порожньому новому файлі набирається хоча б один символ, Mathematica створить для нього комірку. Всі комірки можна розділити на три типи: комірки введення – в них задаються команди (формули), які будуть обчислені; комірки результату, в яких виводяться результати обчислень; інші комірки: з текстом, заголовки і все інше, що вводить користувач і обчислювати не треба. Палітри містять вікна з кнопками, які виконують різні дії: від додавання грецької букви, до розкриття дужок у алгебраїчному виразі.

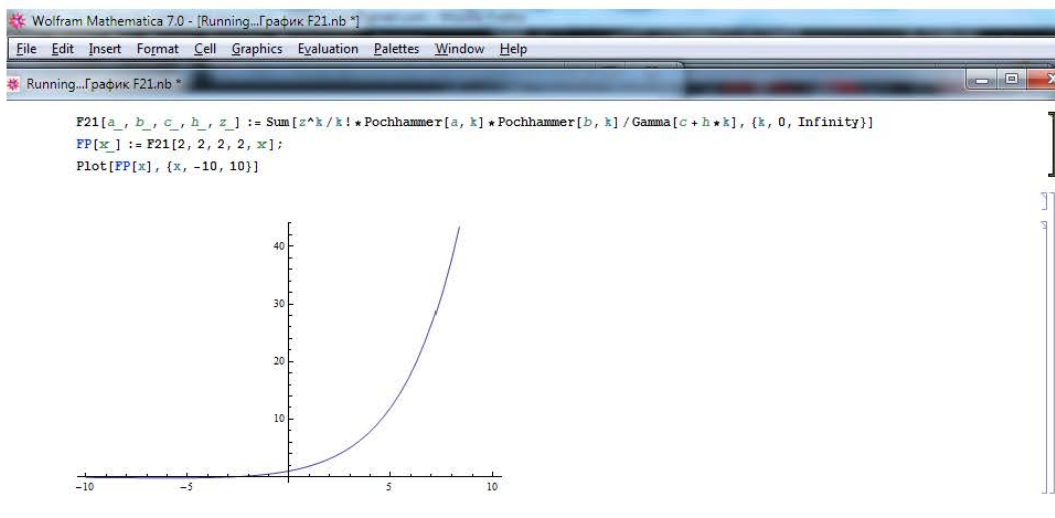


Рисунок 11.18 – Робочий екран системи Mathematica. Графік гіпергеометричної функції Гаусса в Mathematica

Однією з переваг пакета Mathematica є виконання арифметичних дій в символічному вигляді, наприклад, функція Solve шукає розв'язки в символічному вигляді, а NSolve – в чисельному.

Можливості аналітичних перетворень у системі Mathematica:

- розв'язання систем поліноміальних і тригонометричних рівнянь і нерівностей, а також трансцендентних рівнянь, що зводяться до них;
- розв'язання рекурентних рівнянь;
- спрощення виразів;

- знаходження меж;
- інтегрування та диференціювання функцій;
- знаходження скінченних і нескінченних сум і добутків;
- розв'язання диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних;
- перетворення Фур'є і Лапласа, а також Z-перетворення;
- розкладання функції в ряд Тейлора, операції з рядами Тейлора (додавання, множення, композиція, отримання оберненої функції тощо).

Можливості чисельних розрахунків:

- обчислення значень функцій, в тому числі спеціальних, з довільною точністю;
- розв'язання систем рівнянь;
- знаходження меж;
- інтегрування та диференціювання;
- знаходження сум і добутків;
- розв'язання диференціальних рівнянь і рівнянь в частинних похідних;
- поліноміальна інтерполяція функції від довільного числа аргументів;
- перетворення Фур'є і Лапласа, а також Z-перетворення.

Теорія чисел:

- визначення простого числа за його порядковим номером, визначення кількості простих чисел, що не перевищують дане;
- дискретне перетворення Фур'є;
- розкладання числа на прості множники, знаходження НОД та НОК.

Лінійна алгебра:

- операції з матрицями (додавання, множення, знаходження оберненої матриці, множення на вектор, отримання визначника);
- пошук власних значень і власних векторів.
- графіка та звук:
- побудова графіків функцій, в тому числі параметричних кривих і поверхонь;
- побудова геометричних фігур (ламаних, кіл, прямокутників тощо);
- відтворення звуку, графік якого задається аналітичною функцією або набором точок;
- імпорт і експорт графіки в багатьох растрових і векторних форматах, а також звуку.

Таким чином, переваги пакета Mathematica – це можливість символічних обчислень, розв'язання завдань різного рівня складності, реалізації анімаційних графіків, відтворення звуків, наявність довідкової системи з великою кількістю практичних прикладів, розвиненої мови програмування.

11.4 Можливості моделювання у системі Microsoft Office

Розуміючи важливість моделювання при розв'язанні найпоширеніших задач, розробники найпопулярнішого пакета Microsoft Office передбачили таку можливість у цій системі. Вона ґрунтується, головним чином, на використанні *табличного процесора* Excel та мови Visual Basic for Application, призначеної для програмування застосувачів Microsoft Office.

11.4.1 Розрахункові та оптимізаційні задачі в системі Excel

Процесор Excel містить *інтерпретатор формул*, який дозволяє виконувати розрахунки практично необмеженої складності. Формула може містити функції, посилання, оператори і константи. Вікно для вибору функцій, що можуть бути використані у формулах, наведене на рис. 11.19.

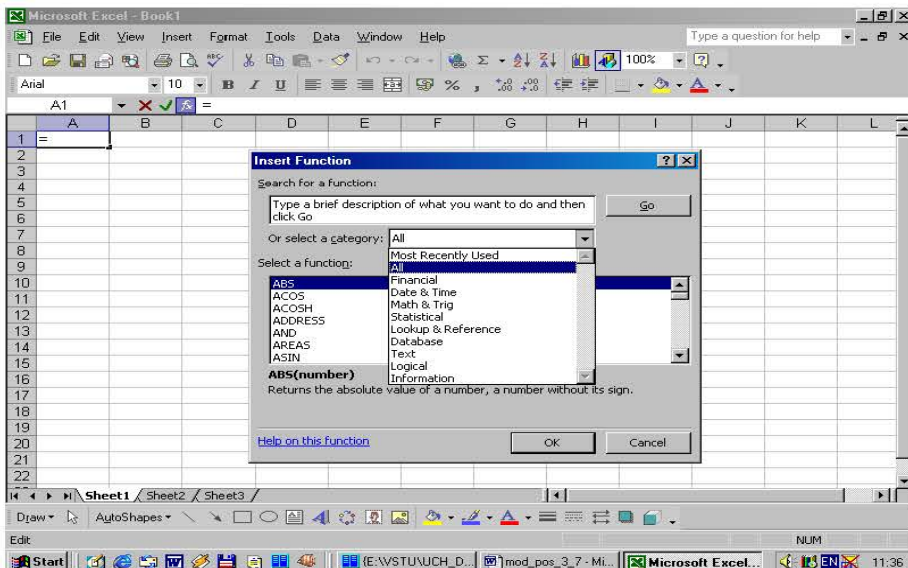


Рисунок 11.19 – Математичні функції Excel

Використання мови Visual Basic дозволяє ще розширити можливості Excel, створюючи складні логічні та циклічні алгоритми обчислень.

Результати моделювання найчастіше подаються у вигляді діаграм. Діаграми є засобом наочного подання даних, яке полегшує виконання порівнянь, виявлення закономірностей і тенденцій даних. Різноманітні вбудовані засоби Excel для побудови *графіків* і *діаграм*, які наведені на рис. 11.20, дозволяють здійснити просту і наочну візуалізацію результатів моделювання.

Важливою перевагою Excel є спрощення статистичної обробки даних. Зокрема, Excel дозволяє будувати лінії тренду. Нагадаємо, що лінії тренду дозволяють графічно відображати тенденції процесів і прогнозувати їх зміни у регресійному аналізі.

Excel дозволяє обчислити ковзне середнє, яке згладжує відхилення даних. Для цього у Excel використовуються функції РОСТ() або ТЕНДЕНЦИЯ().

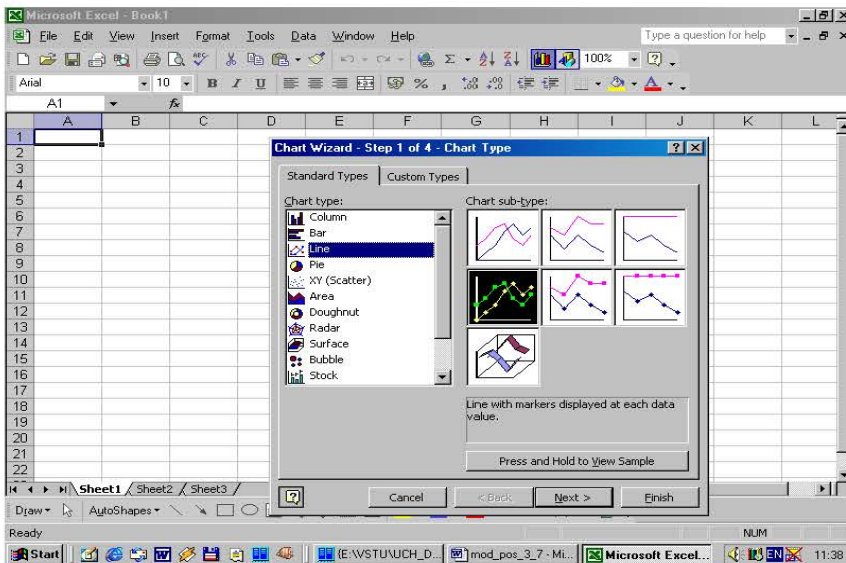


Рисунок 11.20 – Графічні засоби Excel

11.4.2 Задачі моделювання в системі Access

Система управління базами даних Microsoft Access також містить засоби для обробки даних. Оскільки результати тривалих спостережень за процесами, що підлягають ідентифікації, зберігаються найчастіше саме у базах даних, то відповідні можливості СУБД є дуже корисними. У системі Access такі можливості надає підсистема побудови виразів (формул).

Вікно будівника виразів складається з трьох розділів (рис. 11.21).

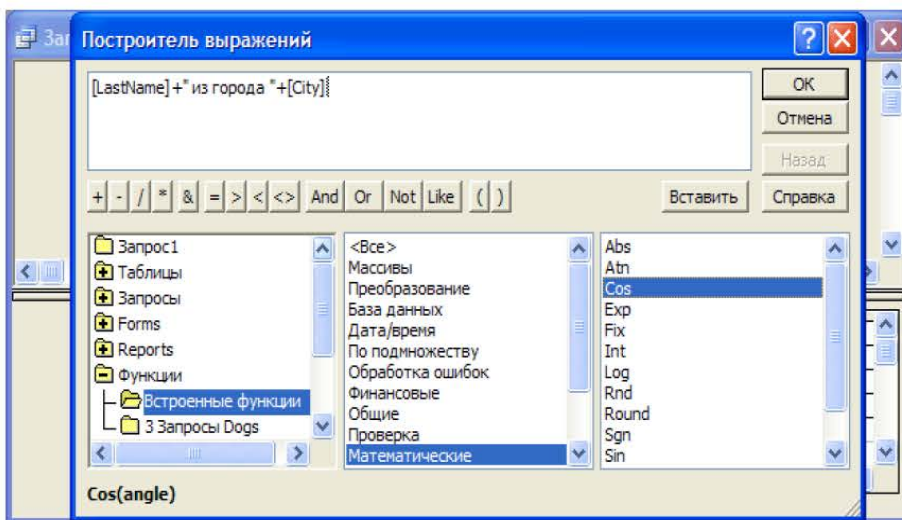


Рисунок 11.21 – Вікно будівника виразів

Елементи виразу. У нижній частині вікна будівника знаходяться три поля:

– у лівому полі виводяться папки, що містять таблиці, запити, форми, об'єкти бази даних, вбудовані і визначені користувачем функції, константи, оператори й загальні вирази;

– у середньому полі задаються певні елементи або типи елементів для папки, заданої в лівому полі. Наприклад, якщо вибрати в лівому полі «Вбудовані функції», то в середньому полі з'явиться список всіх типів функцій Microsoft Access;

– у правому полі виводиться список значень (якщо вони існують) для елементів, заданих у лівому і середньому полях. Наприклад, якщо вибрати в лівому полі «Вбудовані функції» і тип функції в середньому, то в правому полі буде виведений список всіх вбудованих функцій вибраного типу.

11.5 Системи автоматизованого проектування

Математичні моделі, що реалізуються за допомогою математичних пакетів MathCAD, MATLAB, Simulink та інших, зручні, їх можна легко модифікувати, для виконання математичних перетворень та обчислень в цих пакетах існують готові стандартні засоби. Але різноманіття задач, які виникають при дослідженні і застосуванні моделей, значно ширше за можливості будь-якого пакета. Так, наприклад, застосуванню стандартних пакетів у системах автоматичного керування реального часу перешкоджає, як правило, низька швидкодія, а у вбудованих системах на базі контролерів ці пакети взагалі не працюють, оскільки для їх застосування необхідна відповідна операційна система.

У таких випадках для моделювання розробляють спеціалізовані програми, для написання яких використовують *універсальні мови програмування*.

У сучасному виробництві широке застосування одержали **САПР – системи автоматизованого проектування (CAD, computer aided design)**, які дозволяють проектувати системи з меншими витратами часу та засобів, зі збільшенням точності спроектованих процесів і програм обробки.

Математичне забезпечення САПР характеризується різноманітністю методів обчислювальної математики, статистики, математичного програмування, дискретної математики, штучного інтелекту. Програмні комплекси САПР відносять до числа найбільш складних сучасних програмних систем, заснованих на операційних системах Unix, Windows, мовах програмування C, C++, Java і інших, сучасних CASE-технологіях, реляційних і об'єктно-орієнтованих системах управління базами даних (СУБД), стандартах тощо.

Проектування, при якому всі проектні рішення або їхню частину одержують шляхом взаємодії людини та ЕОМ, називають *автоматизованим* на відміну від *ручного* (без використання ЕОМ) або *автоматичного* (без участі людини на проміжних етапах). САПР звичайно використовується разом із системами автоматизації інженерних розрахунків і аналізу САЕ (Computer-Aided engineering).

Структура САПР

САПР складається з проектувальної і обслуговувальної підсистем. Проектувальні підсистеми безпосередньо виконують проектні процедури. Прикладами проектувальних підсистем можуть слугувати підсистеми геометричного тривимірного моделювання механічних об'єктів, виготовлення конструкторської документації, схемотехнічного аналізу, трасування з'єднань у друкованих платах.

Обслуговувальні підсистеми забезпечують функціонування проектувальних підсистем, їхню сукупність часто називають системним середовищем (або оболонкою) САПР. Типовими обслуговувальними підсистемами є підсистеми керування проектними даними (PDM – Product Data Management), керування процесом проектування (DesPM – Design Process Management), користувацького

інтерфейсу для зв'язку розробників з EOM, CASE (Computer Aided Software Engineering) для розробки та супроводу програмного забезпечення САПР, навчальні підсистеми для освоєння користувачами технологій, реалізованих у САПР. На сьогодні створено велику кількість програмно-методичних комплексів для САПР з різними ступенем спеціалізації й прикладною орієнтацією. У результаті автоматизація проектування стала необхідною складовою частиною підготовки інженерів різних спеціальностей; інженер, що не має знань та не вміє працювати в САПР, не може вважатися повноцінним фахівцем.

Поширені САПР світових виробників

AutoCAD – найвідоміший із продуктів компанії Autodesk, універсальна система автоматизованого проектування, що поєднує у собі функції двовимірного креслення й тривимірного моделювання. З'явилася в 1982 році і була однією з перших САПР, розроблених для РС. Швидко завоювала популярність серед проектувальників, інженерів і конструкторів різних галузей промисловості завдяки демократичним цінам.

AutoCAD прискорює щоденну роботу зі створення креслень, підвищує швидкість і точність їхнього виконання. Середовище концептуального проектування забезпечує легке й інтуїтивне створення та редагування твердих тіл і поверхонь. AutoCAD дозволяє легко й швидко створювати на основі моделі розрізи й проекції, ефективно формувати комплекти креслень і керувати ними: групувати їх за розділами проекту та іншими логічними категоріями, створювати переліки аркушів, керувати видами креслень, архівувати комплекти проектної документації та організовувати спільну роботу фахівців. Наявні в AutoCAD такі засоби візуалізації, як анімація й реалістичне тонування, допомагають виявити будь-які вади на ранніх етапах проектування. Інтерфейс AutoCAD показано на рис. 11.22.

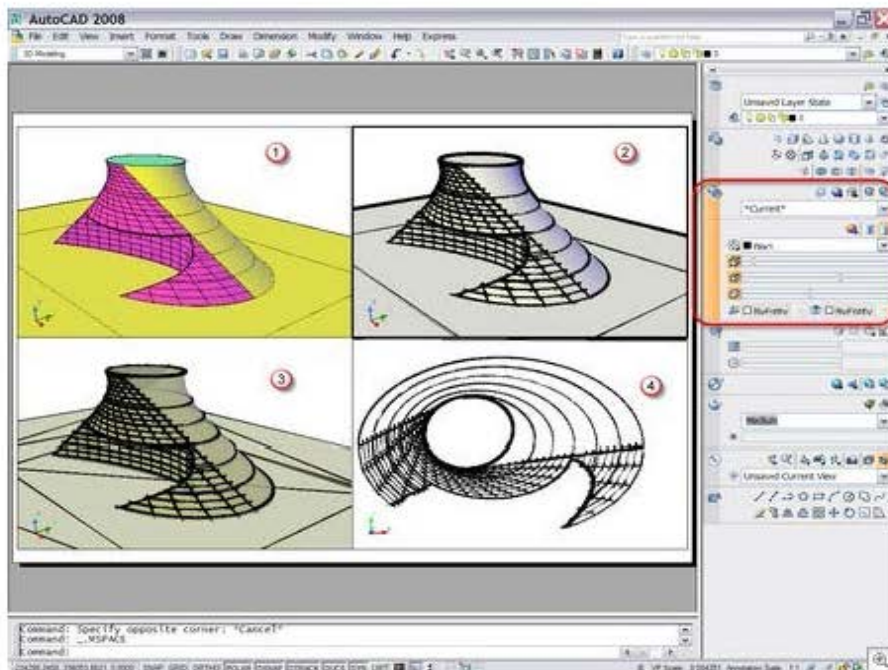


Рисунок 11.22 – Інтерфейс AutoCAD з прикладом 3D-моделювання

Формат DWG, що використовується в AutoCAD, є стандартом серед проєктувальників різних галузей промисловості, крім того, є можливість експорту й імпорту інших розповсюджених файлових форматів, наприклад, pdf, що дозволяє ефективно організувати обмін даними між фахівцями.

Програма постійно розвивається, серед можливостей, що з'явилися нещодавно, можна назвати параметричні взаємозв'язки між об'єктами, створення та редагування об'єктів довільної форми тощо. Існують спеціалізовані галузеві різновиди AutoCAD для архітектури, дорожнього будівництва та землевпорядження, електротехніки, машинобудування тощо. Для фахівців, яким не потрібні функції роботи з 3D-графікою, існує полегшена версія AutoCAD, призначена для створення двовимірних креслень – AutoCAD LT.

Рішення Autodesk для промислового виробництва й машинобудування засновані на технології цифрових прототипів, тобто надають конструкторам, інженерам, дизайнерам і технологам можливість повністю досліджувати виріб ще на етапі проєктування. За допомогою даної технології виробники створюють цифрові моделі та проекти, конструюють, перевіряють, оптимізують і керують ними на всіх етапах – від ідеї до реального втілення.

AutoCAD Mechanical – продукт на платформі AutoCAD для промислового виробництва, що є частиною технології цифрових прототипів Autodesk. Він допомагає прискорити процес проєктування, дозволяючи в той же час використовувати досвід і проекти, накопичені при роботі в AutoCAD. Маючи у своєму складі бібліотеки ДСТУ, стандартних деталей і функції автоматизації типових завдань, він забезпечує значний вигравш у продуктивності при проєктуванні.

AutoCAD Electrical – це AutoCAD для проектування електричних систем керування, що є важливою частиною технології цифрових прототипів Autodesk і що дозволяє працювати швидко, якісно й зі значно меншими витратами в знайомому середовищі проектування. Спеціалізовані функції й великі бібліотеки умовних позначень дозволяють підвищити продуктивність, усунути ризик виникнення помилок і забезпечити точність інформації, переданої у виробництво.

AutoCAD Inventor Suite являє собою збалансований набір рішень Autodesk для проектування та конструювання в промисловому виробництві. Рішення поєднують у собі інтуїтивне середовище 3D моделювання деталей і виробів з інструментами, дозволяють конструкторам зосередитися на функціональних вимогах до проекту.

MechaniCS – додаток до AutoCAD або Autodesk Inventor, призначений для оформлення креслень відповідно до ЕСКД, проектування систем гідропневмолементаментів, зубчастих зачеплень, валів, інженерного аналізу, розрахунку розмірних ланцюгів, створення користувацьких бібліотек. MechaniCS забезпечує фахівця всім необхідним для проектування машинобудівних об'єктів: більш ніж 1500 стандартами (включаючи ДСТУ, ОСТ, ДІ і ISO) і уніфікованими компонентами, можливістю створювати власні інтелектуальні об'єкти, виконувати інженерні розрахунки з відображенням результатів на моделі, оформляти проекції креслень за ЕСКД і багато іншого. MechaniCS дає конструкторові можливість застосовувати не тільки геометричні параметри стандартних елементів, але й їхні механічні властивості. На об'єкти в складальних кресленнях (при використанні AutoCAD) можна накладати геометричні і параметричні залежності, використовувати попередньо встановлені залежності при їхньому розміщенні на кресленні.

CATIA – система автоматизованого проектування французької фірми Dassault Systems. CATIA V1 була анонсована в 1981 році. У даний момент у світі використовуються дві версії – V4 і V5, які значно відрізняються між собою. CATIA V4 була анонсована в 1993 році й створювалася для Unix-подібних операційних систем, CATIA V5 була анонсована в 1998 році, і це перша з версій, що може працювати під керуванням Microsoft Windows. За запевненнями Dassault Systems, CATIA V5 була написана «з нуля» і втілила в собі передові технології САПР. Спочатку CATIA V5 не користувалася особливою популярністю на ринку, і щоб стимулювати її використання Dassault Systems висунула концепцію PLM (Product Lifecycle Management). Ідея PLM виявилася вдалою і її підхопила майже вся індустрія САПР. У лютому 2008 року Dassault Systems анонсувала нову версію системи – CATIA V6. V6 буде підтримувати програми моделювання для всіх інженерних дисциплін і колективні бізнес-процеси протягом життєвого циклу виробу. Нова концепція фірми одержала назву «PLM 2.0 на платформі V6». Суть концепції – тривимірне моделювання і колективна робота в реальному часі. Для зв'язку між людьми, що перебувають у різних точках світу, передбачені засоби простого підключення до Web. PLM 2.0 – це новий підхід, що відкриває можливість використовувати інтелектуальні результати онлайнного вза-

ємозв'язку. Кожний користувач може придумувати, розробляти продукти та обмінюватися інформацією універсальною 3D-мовою. Користувачі зможуть у наочній формі оперувати одночасно віртуальними та реальними об'єктами.

Pro/Engineer – CAD система високого рівня. Містить у собі всі необхідні модулі для твердотілого моделювання деталей і створення креслярської документації. Має вбудовані можливості для проектування зварних конструкцій.

SolidWorks – продукт компанії SolidWorks Corporation, система автоматизованого проектування у трьох вимірах, працює під керуванням Microsoft Windows. Розроблена як альтернатива для двовимірних програм САПР. Набула популярності завдяки простому інтерфейсу. Основний продукт SolidWorks містить інструменти для тривимірного моделювання, створення креслень, роботи з листовим металом, зварними конструкціями і поверхнями довільної форми. Є можливість імпортування великої кількості файлів 2D і 3D CAD-програм. Є API для програмування в середовищі Visual Basic і C. Також є програма для аналізу методом кінцевих елементів початкового рівня CosmosXpress.

ADEM (Automated Design Engineering Manufacturing) – російська інтегрована CAD/CAM/CAPP-система, призначена для автоматизації конструкторсько-технологічної підготовки виробництва (КТПВ). ADEM була створена як єдиний продукт, що містить в собі інструментарій для проєктантів і конструкторів (CAD), технологів (CAPP – Computer-Aided Process Planning) і програмістів ЧПК. Тому вона містить декілька різних предметно-орієнтованих САПР під єдиною логікою керування і на єдиній інформаційній базі. ADEM дозволяє автоматизувати такі види робіт: 3D і 2D моделювання та проектування; оформлення проєктно-конструкторської й технологічної документації; проектування технологічних процесів; аналіз технологічності й нормування проєкту; програмування устаткування. ADEM застосовується у різних галузях: авіаційній, атомній, аерокосмічній, машинобудівній, металургійній, верстатобудівній та інших.

T-FLEX CAD – система автоматизованого проектування, розроблена компанією «Топ Системи» з можливостями параметричного моделювання і наявністю засобів оформлення конструкторської документації відповідно до стандартів серії ЕСКД (Єдина система конструкторської документації). T-FLEX CAD є ядром комплексу T-FLEX CAD/CAM/CAE/CAPP/PDM – набору засобів для вирішення завдань технічної підготовки виробництва в різних галузях промисловості. Комплекс поєднує системи для конструкторського і технологічного проектування, модулі підготовки програм керування для верстатів та інженерних розрахунків. Всі програми комплексу функціонують на єдиній інформаційній платформі системи технічного документообігу і ведення складу виробів.

bCAD – дво- і тривимірна система автоматизованого проектування, розроблена російською компанією «ПРОПРО Група». bCAD являє собою інтегрований пакет для двовимірного креслення, об'ємного моделювання й реалістичної візуалізації (рис. 11.23).

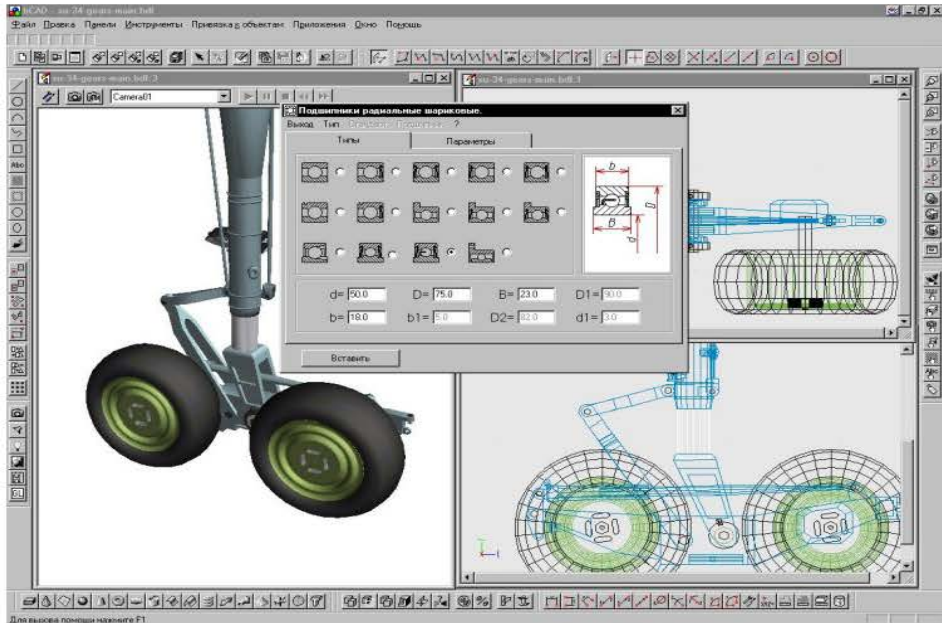


Рисунок 11.23 – Интерфейс bCAD з прикладом 3D-моделювання

Система одержала широке поширення в меблевому виробництві та дизайні інтер'єрів. Незважаючи на досить розвинені засоби проектування, у промисловості практично не застосовується.

КОМПАС – система автоматизованого проектування, розроблена російською компанією «АСКОН» з можливостями оформлення проектної й конструкторської документації відповідно до стандартів серії ЕСКД і СПДБ (Система проектної документації для будівництва). Існує у двох версіях: Компас-График і КОМПАС-3D, відповідно призначених для плоского креслення і тривимірного проектування.

Ключові слова

Сутності, відношення, діаграми, залежність, асоціація, узагальнення, реалізація, діаграма прецедентів, діаграма класів, діаграма кооперації, діаграма послідовності, діаграма станів, діаграма діяльності, діаграма компонентів, діаграма розгортання, UML, BPMN; імітаційне моделювання, статистичне моделювання, чисельний експеримент; інтерфейс користувача; багатовіконний інтерфейс, гіпертекст, наукова графіка, складальні панелі, аналітичні (символьні) перетворення; мова MatLab, середовище MatLab, бібліотека математичних функцій; табличний процесор, інтерпретатор формул, графік, діаграма; універсальна мова програмування, система автоматизації програмування, об'єктно-орієнтоване проектування

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. Назвіть основні типи UML-діаграм.
2. Як пов'язана UML-діаграма прецедентів з діаграмою класів?
3. Як пов'язана UML-діаграма класів з діаграмами діяльності і послідовності?
4. На якій UML-діаграмі показують технічні засоби системи?
5. Яка UML-діаграма подає алгоритмічну модель системи?
6. Чим відрізняється UML-діаграма діяльності від графічної схеми алгоритму?
7. Дана САУ другого порядку. Побудуйте її перехідну характеристику двома способами: шляхом розв'язання диференціального рівняння чисельними методами і за допомогою символьних перетворень. Порівняйте результати.
8. Дана САУ другого порядку. Побудуйте її перехідну характеристику за допомогою табличного процесора Excel.
9. Які універсальні мови програмування Ви знаєте?
10. Проведіть аналіз та класифікацію декількох математичних моделей в цікавій для вас сфері, опишіть особливості кожного етапу моделювання. Встановіть аналоги розглянутих математичних моделей в інших сферах.
11. Наведіть приклади сучасних САПР.
12. Проведіть порівняння можливостей поширених програмних систем для математичних обчислень.

Література

1. Алямовский А. А. SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике / А. А. Алямовский [и др.]. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 800 с
2. Буч Г., Рамбо Д., Якобсон И. Язык UML. Руководство пользователя. 2-е изд.: Пер. с англ. Мухин Н. – М.: ДМК Пресс, 2006. – 496 с.: ил.

3. Гетц К. Программирование в Microsoft Office. Для пользователя : пер. с англ. / Гетц К., Джилберт М. – К. : ВНУ, 2000. – 384 с.
4. Дубовой В. М. Основы застосування ЕОМ в інженерній діяльності / Дубовой В. М., Кветний Р. Н. – К. : ІСД МО України, 1994. – 285 с.
5. Дубовой В. М. Програмування комп'ютеризованих систем управління та автоматизації / Дубовой В. М., Кветний Р. Н. – Вінниця : ВДТУ, 1997. – 208 с.
6. Дьяконов В. П. MATLAB 6 : учебный курс / Дьяконов В. П. – СПб. : Питер, 2001. – 592 с.
7. Дьяконов В. П. Математические пакеты расширения MatLAB. Специальный справочник / В. Дьяконов, В. Круглов. – СПб. : Питер, 2001. – 488 с.
8. Дьяконов В.П. Система MathCAD: Справочное издание/ Дьяконов В. П. – Москва: Издательство «Радио и связь», 1993. — 128 с.
9. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / Дьяконов В. П. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 624 с.
10. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / Дьяконов В. П. – СОЛОН-Пресс. – 2006.– 720 с.
11. Кобелев Н. Б. Имитационное моделирование / Н.Б. Кобелев, В. А. Половников, В. В. Девятков. – М. : КУРС: НИЦ Инфра-М, 2013. – 368 с.
12. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень / під заг. ред. Р. Н. Кветного – Вінниця, ВНТУ. 2012. – ч. 1–196 с.; ч. 2 – 230 с.
13. Киндлер Е. Языки моделирования : пер. с чешского / Киндлер Е. – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 288 с.
14. Краткие руководства по началу работы с Office 2013 (Электронный документ) – режим доступа: <https://support.office.com/ru-ru/article/краткие-руководства-по-началу-работы-с-Office-2013-4a8aa04a-f7f3-4a4d-823c-3dbc4b8672a1>
15. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) : перевод с англ. / К. Ли. – СПб. : Питер, 1996. – 559 с.
16. Розенберг Д. Применение объектно-ориентированного моделирования с использованием UML и анализ прецедентов.: пер. с англ. / Д. Розенберг, К. Скотт. – М. : ДМК, 2002.
17. Советов Б. Я. Моделирование систем : учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М. : Высш. шк., 2001. – 343 с.
18. Федоров А. Borland Pascal в среде Windows / Федоров А., Рогаткин Д. – К. : Диалектика, 1993. – 656 с.
19. Якобсон А. Унифицированный процесс разработки программного обеспечения.: пер. с англ / А. Якобсон, Г. Буч, Дж. Рамбо – СПб : Питер, 2002.– 496 с.

12. МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛІННЯ

Застосування є головним етапом життєвого циклу моделі. Саме на етапі практичного застосування остаточно з'ясовується її придатність для розв'язання тих задач, для яких вона створена. Можна виділити три головних напрямки застосування моделей:

- для розв'язання задач проектування;
- для оптимізації роботи системи в процесі експлуатації;
- для прогнозування процесів з метою розробки законів керування ними.

12.1 Модель як складова задачі оптимізації

Оптимізація систем може здійснюватися як на етапі проектування, так і на етапі експлуатації. На етапі проектування оптимізують структуру і параметри системи та її підсистем переважно на основі функціонально-вартісних критеріїв (враховують вартість технічних засобів і програмного забезпечення, терміни розробки, які теж пов'язані з витратами, та інші характеристики у контексті забезпечення певного рівня якості роботи системи). На етапі експлуатації оптимізують закон управління. Інколи на цьому етапі теж враховують економічні показники, зокрема, витрати енергії, але переважно оптимізують за технічними показниками: швидкодія, точність, вірогідність тощо.

Масове поширення оптимальних систем останнім часом зумовлене загальною комп'ютеризацією практично усіх систем управління і навіть простих регуляторів. Якщо раніше для створення оптимальних систем були необхідні складні технічні засоби, і кожна оптимальна система була оригінальним винаходом розробників, то наразі розрахунок і формування оптимального управління програмним шляхом доступне у будь-якій системі.

Нагадаємо, що задача оптимізації складається з таких елементів:

- *критерію оптимальності K* , максимум або мінімум якого необхідно забезпечити;
- *характеристик системи X* , за допомогою зміни яких і забезпечується досягнення оптимуму;
- *обмежень на параметри і характеристики системи $L(X, \Theta_X)$* , які повинні задовольняти оптимальний розв'язок;
- *моделі $F[X, \Theta_X, K]$* , яка встановлює залежність між характеристиками системи, параметрами оптимізації і критеріями;
- *умов оптимізації*, які визначають спосіб подання решти компонент постановки задачі.

Критерій оптимальності найчастіше є композицією багатьох характеристик системи. Якби ці характеристики були незалежними, задача пошуку оптимального розв'язку була б тривіальною. Але характеристики реальної системи

пов'язані між собою моделлю F . Залежно від форми подання модель може розглядатися або як доповнення критерію оптимальності, яке дозволяє скоротити кількість змінних, або як додаткове обмеження.

Звичайна постановка задачі оптимізації така: в деякому просторі S тим чи іншим засобом на основі *обмежень* виділяється деяка непуста множина M точок цього простору, яку називають припустимою множиною. Далі фіксується деяка дійсна функція $f(x)$, що задана в усіх точках x допустимої множини. Вона називається цільовою функцією або *критерієм оптимальності*. Задача оптимізації полягає в тому, щоб знайти точку x_0 в множині M , для якої функція $f(x)$ приймає екстремальне (максимальне або мінімальне) значення. В першому випадку для всіх точок x множини M задовольняється нерівність $f(x_0) \geq f(x)$, в другому випадку – нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

В практичних задачах можливі дві основні постановки оптимізаційних задач. В першому випадку задача розглядається в звичайному (евклідовому) просторі кінцевої розмірності. Точками x допустимої множини будуть кортежі $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ дійсних чисел, цільовою ж функцією $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ буде звичайна дійсна функція від n дійсних аргументів. Таку задачу ми будемо називати в подальшому задачею оптимізації функцій. В другому випадку постановки оптимізаційної задачі в якості припустимої множини виступає деяка множина M функцій дійсних змінних $y(x_1, \dots, x_m)$, а цільовою функцією є деякий функціонал F , який ставить у відповідність кожній функції $y(x_1, \dots, x_m)$ деяке дійсне число $F(y)$. Цю задачу ми будемо називати задачею оптимізації функціоналів або варіаційною задачею.

12.1.1 Класифікація задач оптимізації

Задачі оптимізації відрізняються великим розмаїттям, оскільки кожен з п'яти компонентів постановки задачі може мати декілька принципово відмінних варіантів. Скорочений перелік варіантів постановки задачі наведений на рис. 12.1 у вигляді класифікації задач. Легко підрахувати загальну кількість комбінацій компонентів постановки задач: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 576$. І для кожного з цих варіантів існує декілька методів розв'язання.

Перш за все треба розділяти задачі параметричної та структурної оптимізації.

Параметрична оптимізація є предметом, що розглядається в цьому розділі, де наведено постановку такої задачі та методи її розв'язання. Структурна оптимізація – це задача синтезу оптимальної структури системи, причому зміна структур та перетворення однієї структури в іншу здійснюється за спеціальним алгоритмом синтезу. Параметрична оптимізація об'єднує багато різних задач, що мають свої власні особливості та методи розв'язання.

Деталізована класифікація параметричної оптимізації наведена на рис. 12.2. До цього треба додати деякі коментарі:

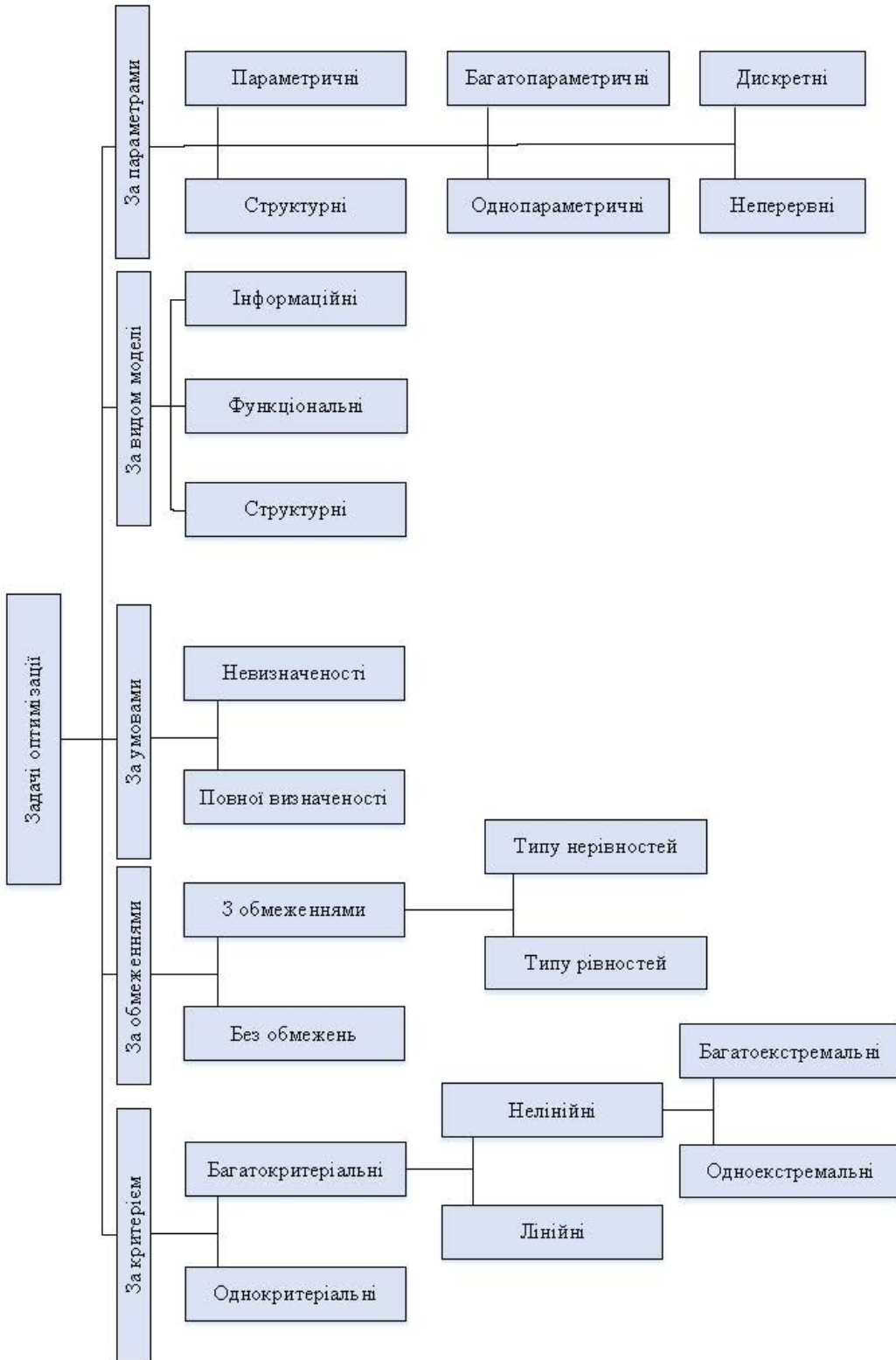


Рисунок 12.1 – Задачі оптимізації



Рисунок 12.2 – Класифікація задач параметричної оптимізації

1. Якщо існує декілька цільових функцій, то має місце задача векторної оптимізації.

2. Якщо кількість параметрів X , що керуються (тобто змінюються для досягнення оптимального значення), більше одного, то розв'язується задача багатопараметричної оптимізації.

3. Якщо існують обмеження та умови, що зв'язують параметри X , то виникає задача оптимізації з умовами, яка в кібернетичці дістала назву математичного програмування.

4. Математичне програмування об'єднує задачі нелінійного програмування (цільова функція в загальному випадку нелінійна), стохастичного програмування (параметри X – випадкова величина, а цільова функція – випадкова функція), динамічного програмування (оптимізація багатокрокових процесів пошуку рішення).

5. Якщо параметри, що керуються, приймають тільки дискретні значення, то виникає задача дискретної оптимізації, а якщо X – цілі числа, то – задача цілочислового програмування.

6. У випадку, коли цільова функція опукла, та область, де задані X , теж опукла, то має місце задача опуклого програмування. Якщо цільова функція та умови лінійні – задача лінійного (кусково-лінійного) програмування; цільова функція квадратична, а умови лінійні – квадратичного програмування; цільова функція та умови – лінійні комбінації функцій однієї змінної – сепарабельного програмування; цільова функція та умови подані у вигляді поліномів – геометричного програмування.

Визначальним для вибору методу оптимізації є вигляд критерію і обмежень, які, в свою чергу, визначаються моделлю системи.

Виділимо лише деякі характерні групи задач.

1) *Одновимірні (однопараметричні) задачі, в яких критерії залежать від однієї характеристики системи (параметра оптимізації).* Можливі варіанти цієї задачі наведені на рис. 12.3.

Крім наведених варіантів можуть існувати ще їх комбінації. Відповідно навіть для такої найпростішої групи задач використовується дуже багато методів пошуку екстремуму. Так наприклад, для випадку, зображеного на рис. 12.3, а (*лінійна залежність*), необхідна проста перевірка, який з кінців інтервалу відповідає максимуму, а який – мінімуму.

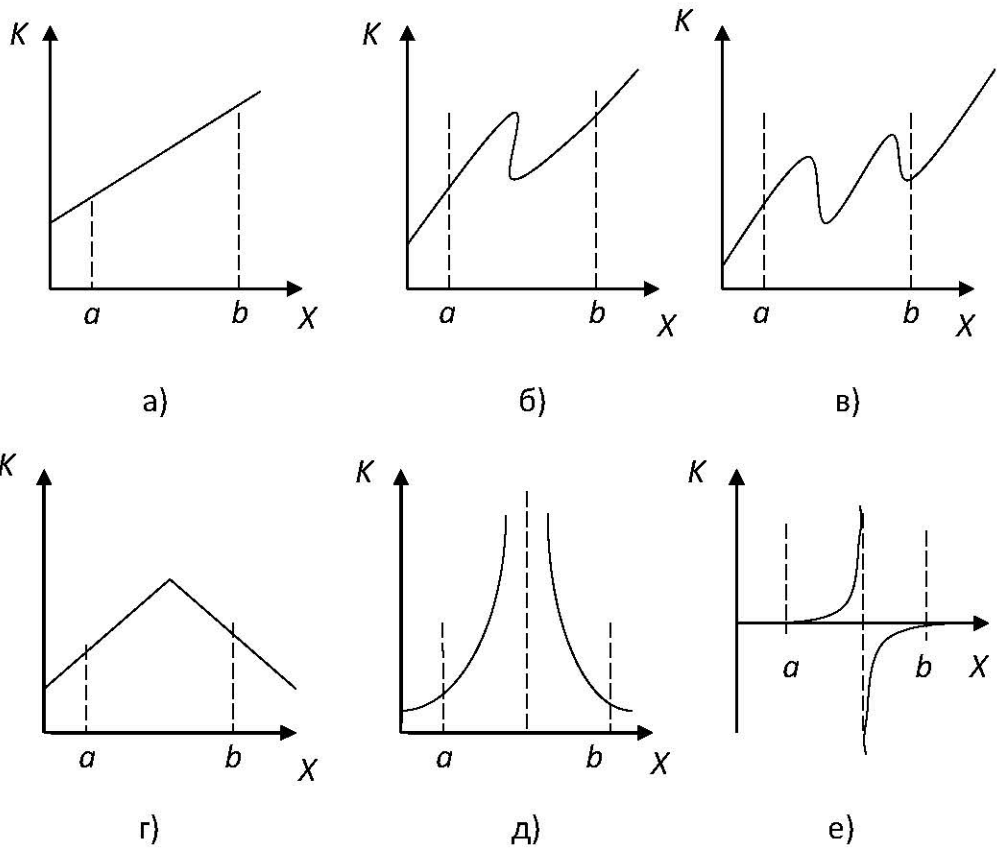
У випадку рис. 12.3, б (*нелінійна диференційовна залежність*) пошук екстремуму здійснюється шляхом диференціювання:

$$\frac{dK}{dx} = 0 \text{ – необхідна умова екстремуму,} \quad (12.1)$$

$$\frac{d^2K}{dx^2} > 0 \text{ – умова мінімуму,}$$

$$\frac{d^2K}{dx^2} < 0 \text{ – умова максимуму,}$$

після чого, як і в усіх інших випадках, ще необхідно порівняти отримане значення $K(x_{opt})$ з кінцями інтервалу $K(a)$ і $K(b)$. У випадку рис. 12.3, в (*багатоекстремальна функція*) необхідна додаткова перевірка, який з наведених екстремумів є глобальним оптимальним рішенням.



Випадки рис. 12.3, г-е відповідають *недиференційованим залежностям* $K(x)$. Для таких задач використовуються різноманітні пошукові (покрокові) методи, в яких однією з головних проблем є визначення початкової точки пошуку та критерію зупинки. Найскладнішим з цієї точки зору є випадок рис. 12.3, е. Тут при пошукові мінімуму і виборі початкової точки на інтервалі $[a, c]$ буде здійснюватись рух в напрямку точки a , що не є правильним рішенням. А при виборі точки на інтервалі $(c, b]$ постає проблема нестійкості алгоритму визначення точки зупинки в околі точки c .

2) *Багатовимірні задачі малої розмірності* (до 5 параметрів оптимізації). Можливі варіанти таких задач аналогічні першій групі з тією різницею, що критерій $K(X)$, зображується поверхнею відповідної розмірності, але перехід від одновимірного до багатовимірного випадку значно ускладнює і, відповідно, урізноманітнює методи оптимізації.

Так, при лінійній залежності $K(X)$ використовується вже ціла група методів лінійного програмування. При унімодальній диференційованій залежності $K(X)$ рівняння (12.1) перетворюється на систему рівнянь у частинних похідних,

яку часто важко розв'язати, тому використовуються різноманітні градієнтні методи. У більш складних випадках використовуються методи направленою (детермінованою) пошуку з тими ж проблемами, що й для першої групи, але ускладненими багатовимірностями.

3) *Багатовимірні задачі середньої розмірності* (від 6 до 10 параметрів оптимізації). Для цієї групи задач переваги набувають методи направленою пошуку. Методи прямих обчислень оптимального значення вже важко застосувати через велику розмірність систем рівнянь, до яких вони приводять. Але трудомісткість направленою пошуку зростає пропорційно $\prod_{i=1}^n m_i$ (де n – кількість факторів, m_i – кількість можливих значень параметрів оптимізації) і при $n > 10$ навіть для сучасних комп'ютерів стає надто високою.

4) *Багатовимірні задачі великої розмірності* (більше 10 факторів). Для таких задач незаперечної переваги набувають методи випадкового пошуку. Останнім часом ці методи набули великої популярності і бурхливого розвитку. З'явилося безліч модифікацій методу Монте-Карло, генетичні мурашині інші алгоритми.

5) *Задачі, в яких аргументами критерію оптимальності є функція*. Методи розв'язування таких задач суттєво залежать від характеру обмежень, що є складовою задачі оптимізації. Найпоширенішим методом є класичний варіаційний метод на основі невизначених множників Лагранжа, метод на основі “принципу максимуму” Понтрягіна, динамічне програмування на основі принципу Беллмана та інші.

6) *Задачі дискретної оптимізації, що ґрунтуються на графових моделях*. Методи розв'язання цих задач мають переважно комбінаторний характер з різноманітними модифікаціями, направленими на зменшення кількості варіантів.

Роль моделі при розв'язанні задачі оптимізації особливо наочна при використанні методу невизначених множників Лагранжа у поєднанні з теоремою Куна-Таккера. Відповідно до цього методу задачу пошуку екстремуму функції $K(x)$ при обмеженнях $g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$, які подають модель системи, заміняють на задачу пошуку екстремуму функції Гамільтона більшої розмірності, але без обмежень. Функція Гамільтона поєднує критерій оптимізації з моделлю

$$H(x, \lambda) = K(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x),$$

де λ_i – невизначені множники Лагранжа, які є додатковими параметрами оптимізації.

12.1.2 Багатокритеріальна оптимізація

На практиці часто виникає випадок, коли замість однієї цільової функції $f(x)$ задано декілька цільових функцій $f_1(x), \dots, f_R(x)$. Така задача багатокри-

теріальної оптимізації має декілька постановок. В одній з них потрібно оптимізувати один з критеріїв, припустимо, $f_1(x)$, причому решту $(R-1)$ критеріїв утримують в заданих межах: $a_i \leq f_i(x) \leq b_i$ ($i = 2, 3, \dots, k$). В цьому разі фактично йдеться про звичайну однокритеріальну оптимізацію. Що ж до нерівностей, які обмежують інші критерії, то їх можна розглядати як додаткові обмеження на припустиму область M .

В іншому випадку постановка полягає в упорядкуванні заданої множини критеріїв та послідовній оптимізації за кожним з них. Інакше, якщо проводять оптимізацію за першим критерієм $f_1(x)$, то одержують деяку множину $M_1 \subset M$, на якій функція $f_1(x)$ приймає оптимальне (екстремальне) значення. Приймавши його за нову допустиму множину, проводять оптимізацію за другим критерієм та одержують в результаті нову допустиму множину $M_2 \subset M_1$. Якщо продовжити цей процес, то можна одержати після оптимізації за останнім критерієм $f_R(x)$ множину M_R , яка і буде кінцевим результатом багатокритеріальної оптимізації. Звідси, якщо на деякому кроці i ($i < k$) множина M_i зведеться до однієї точки, процес оптимізації можна буде закінчити, оскільки $M_i = M_{i+1} = \dots = M_k$. Зрозуміло, що як і в випадку звичайної однокритеріальної оптимізації, задача може взагалі не мати розв'язку.

Третя постановка застосовує процес зведення багатьох критеріїв до одного за рахунок введення апріорних вагових коефіцієнтів λ_i для кожного з критеріїв $f_i(x)$. Як і коефіцієнти можуть бути вибрані будь-які дійсні числа. Їх значення вибирають, виходячи з інтуїтивного подання ступеня важливості різних критеріїв: більш важливі критерії одержують ваги з більшими абсолютними значеннями. Після встановлення ваг λ_i багатокритеріальна задача зводиться до однокритеріальної з цільовою функцією $f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_R f_R(x)$.

Замість простої лінійної комбінації вхідних критеріїв можуть використовуватися і більш складні засоби формування з них нового критерію.

В практиці проектування великих систем і управління такими системами, як правило, використовується багато критеріїв. В ряді випадків їх вдається в той чи інший спосіб звести до одного критерію і тим самим повернутися до вже дослідженого випадку однокритеріальної оптимізації.

Найпростіший спосіб такого зведення – так зване зважування критеріїв. Якщо $f_1(x), \dots, f_n(x)$ – це функції, що виражають значення використовуваних критеріїв, то кожний з них, відповідно до відносної важливості критеріїв, вибирається додатний ваговий коефіцієнт λ_i . Операція зважування критеріїв (цільо-

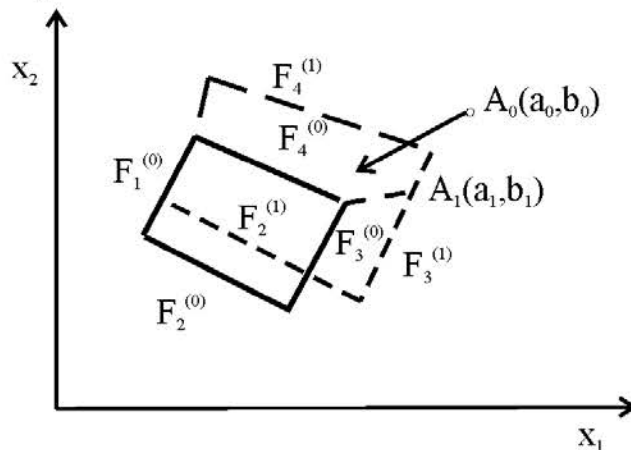
вих функцій) $f_1(x), \dots, f_n(x)$ полягає в заміні їх єдиним критерієм (цільовою функцією) $f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)$.

Але для багатьох задач, що пов'язані з великими системами, подібне зведення виявляється практично неможливим, так що в процесі оптимізації доводиться мати справу з векторною (багатокритеріальною) цільовою функцією. При цьому припустима область M може змінюватись в процесі оптимізації. Більше того, в її цілеспрямованій зміні як раз і полягає основна змістовна сутність процесу оптимізації для подібного класу задач.

Наведемо одну з характерних формалізованих постановок задачі системної оптимізації.

Розв'язок відшукується безпосередньо в просторі K критеріїв оптимізації, які ми позначимо x_1 і x_2 . Процес розв'язання починається з того, що в заданому просторі K вибирається деяка точка A_0 з координатами a_0, b_0 – бажаний розв'язок задачі. За цим будуються початкові обмеження $F_1^{(0)}(x_1, x_2) \geq 0, \dots, F_n^{(0)}(x_1, x_2) \geq 0$, що задають початкову припустиму область P_0 . Прямою перевіркою встановлюється, чи належить точка області P_0 . В першому випадку в принципі може бути застосована звичайна (класична) процедура оптимізації або за одним з критеріїв x_1, x_2 , або за тією чи іншою їх комбінацією.

Але при системному підході застосовується, зазвичай, запропонований Л. С. Понтрягіним спосіб, а саме: відповідно до моделі M вищого рівня, що управляє вибором критеріїв, точка A_0 виводиться з меж припустимої області P_0 , як це показано на рис. 12.4.



Після цього виділяються ті обмеження, які не виконуються в точці A_0 (в випадку, що розглядається, ними будуть $F_3^{(0)}$ і $F_4^{(0)}$). Звертаючись до моделей

M_3 і M_4 , які формують ці обмеження, в діалоговому режимі опробовуються ті чи інші рішення, що змінюють відповідні обмеження в потрібному напрямку (якщо така зміна можлива). Оптимальним при цьому вважається той напрямок, що зменшує абсолютну величину від'ємних відхилень $F_i^0(a_0, b_0)$ (у випадку, який розглядається, $F_3^0(a_0, b_0)$ і $F_4^0(a_0, b_0)$).

12.1.3 Гладка оптимізація

У випадку, коли функція цілі $f(x)$ і функції $p_i(x)$, які задають обмеження, є диференційованими (гладкими), для розв'язання задач оптимізації використовується знаходження градієнта. Для будь-якої функції $g(x)$, що диференціюється, її градієнтом $\nabla g(x)$ в точці x називається вектор

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Вектор градієнта $\nabla g(x)$ задає (в даній точці x) напрям найшвидшого росту функції $g(x)$, а зворотний йому напрям $-\nabla g(x)$, що називається антиградієнтом, напрям найшвидшого спадання цієї функції. Точки, в яких градієнт функції перетворюється в нуль, називаються її стаціонарними точками. Якщо екстремум функції $f(x)$ досягається всередині припустимої області (не на її межі), то в точці оптимуму $x = a$ її градієнт перетворюється в нуль, тобто має місце система рівнянь

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right|_{x=a} = 0, \dots, \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right|_{x=a} = 0.$$

Ці рівняння (умови стаціонарності функцій) мають місце не тільки для абсолютних, але й для локальних екстремумів. Разом з тим умови стаціонарності не є достатніми.

Умови Куна-Такера

У випадку, коли екстремальна точка a лежить на границі припустимої множини, вона не обов'язково є стаціонарною. Але за деякої додаткової умови може, якщо замінити цільову функцію $f(x)$ так званою функцією Лагранжа

$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(x)$, (де $p_i(x)$ – ліві частини всіх граничних умов, досягти

того, щоб граничні екстремальні точки функції $f(x)$ були стаціонарними точками функції Лагранжа $L(x)$ при відповідних значеннях параметрів λ_i .

Умова, про яку йдеться, є так званою умовою регулярності – виконується на практиці. Вона полягає в лінійній незалежності в даній точці $x = a$ градієнтів всіх мережних функцій $p_i(x)$, для яких $p_i(a) = 0$.

При виконанні цієї умови для будь-якої точки максимуму x^* в задачі “знайти $\max f(x)$ при $p_i(x) = 0, (i = 1, \dots, l), p_i(x) \geq 0, (i = l + 1, \dots, m)$ ” і для будь-якої точки мінімуму x^* в задачі “знайти $\min f(x)$ при $p_i(x) = 0, (i = 1, \dots, l), p_i(x) \leq 0, (i = l + 1, \dots, m)$ ” повинні виконуватися такі три умови, які називаються *умовами Куна-Таккера*:

1) x^* лежить в припустимій множині;

2) $\lambda_i p_i(x^*) = 0$ при $i = 1, \dots, m$;

3) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla p_i(x^*) = 0$.

де λ_i – деякі дійсні числа (множники Лагранжа), довільні для всіх умов типу рівності ($i = 1, \dots, l$) і невід’ємні для всіх умов типу нерівності ($i = l + 1, \dots, m$).

Чисельні методи гладкої оптимізації

Метод оптимізації, який використовує умови Куна-Таккера, на практиці застосовується відносно рідко через велику складність аналізу системи співвідношень, що виникає. Найчастіше застосовуються чисельні методи оптимізації, для яких достатньо вміти знаходити чисельні значення градієнта в будь-якій заданій точці.

Загальна ідея методу градієнтного спуску (підйому)

Нехай неперервно диференційовна цільова функція $f(x)$ задана в усіх точках простору X . Вирушаючи від точки x на дуже малий крок ε в будь-якому напрямку d , де d – одиничний вектор, в силу умови диференційованості функції $f(x)$. Одержимо нерівності:

$$f(x + \varepsilon d) \geq f(x) \geq f(x - \varepsilon d).$$

Це означає, що рух (на дуже малий крок) в напрямку градієнта функції забезпечує найбільший підйом, а в напрямку антиградієнта – найбільше спадання

цієї функції. Ці напрямки називають відповідно напрямком найшвидшого підйому і найшвидшого спуску функції $f(x)$ в даній точці x .

Виходячи з заданої точки x^0 , будемо послідовність точок (x^0, x^1, x^2, \dots) так, що переміщення від кожної точки x^{i-1} до наступної точки x^i проводиться в напрямку найшвидшого підйому (при пошуку максимуму) або найшвидшого спуску (при пошуку мінімуму). Важкість практичного застосування такої процедури полягає перш за все у виборі величини кроку ε_i при переході від точки x^{i-1} до точки x^i . Справа в тім, що нерівності мають місце лише в малому околі точки x , тобто для малої величини кроку ε_i . При великому значенні кроку можна, прямуючи в напрямку найшвидшого підйому, одержати не збільшення, а зменшення значення цільової функції $f(x)$. Те ж саме має місце і для процедури спуску. Отже, величину кроку ε_i в процедурах найшвидшого підйому і спуску необхідно вибирати достатньо малою. Проте при прямуванні малими кроками для наближення до екстремальної точки може знадобитись дуже велика кількість кроків. Крім того, від процедур підйому і спуску звичайно вимагається не просто наближення до екстремальної точки $x = a$, а збіжність до неї. Це означає, що зі збільшенням кількості кроків i відстань $|x^i - a|$ від точки x^i до точки екстремуму $x = a$ повинна наближатися до нуля. Це можливо лише в тому випадку, якщо з наближенням до точки екстремуму величина кроку ε_i буде наближатися до нуля. На рис. 12.5 наведений алгоритм пошуку екстремуму функції за методом градієнтного спуску.

Пропорційно-градієнтний метод

Найбільш простим способом забезпечення необхідного зменшення кроку при наближенні до точки екстремуму для диференціальної функції $f(x)$ є вибір довжини кроку ε_i пропорційним довжині вектора градієнта в точці x^{i-1} :

$$\varepsilon_i = \alpha \left| \nabla f(x^{i-1}) \right|, \quad \alpha > 0, \quad \alpha = \text{const}.$$

Такий вибір кроку означає, що перехід від точки x^{i-1} до точки x^i буде виконуватись за формулою $x_i = x^{i-1} + \alpha \nabla f(x^{i-1})$ для процедури підйому (знаходження максимуму функції $f(x)$) і за формулою $x_i = x^{i-1} - \alpha \nabla f(x^{i-1})$ для процедури спуску (знаходження мінімуму функції $f(x)$).

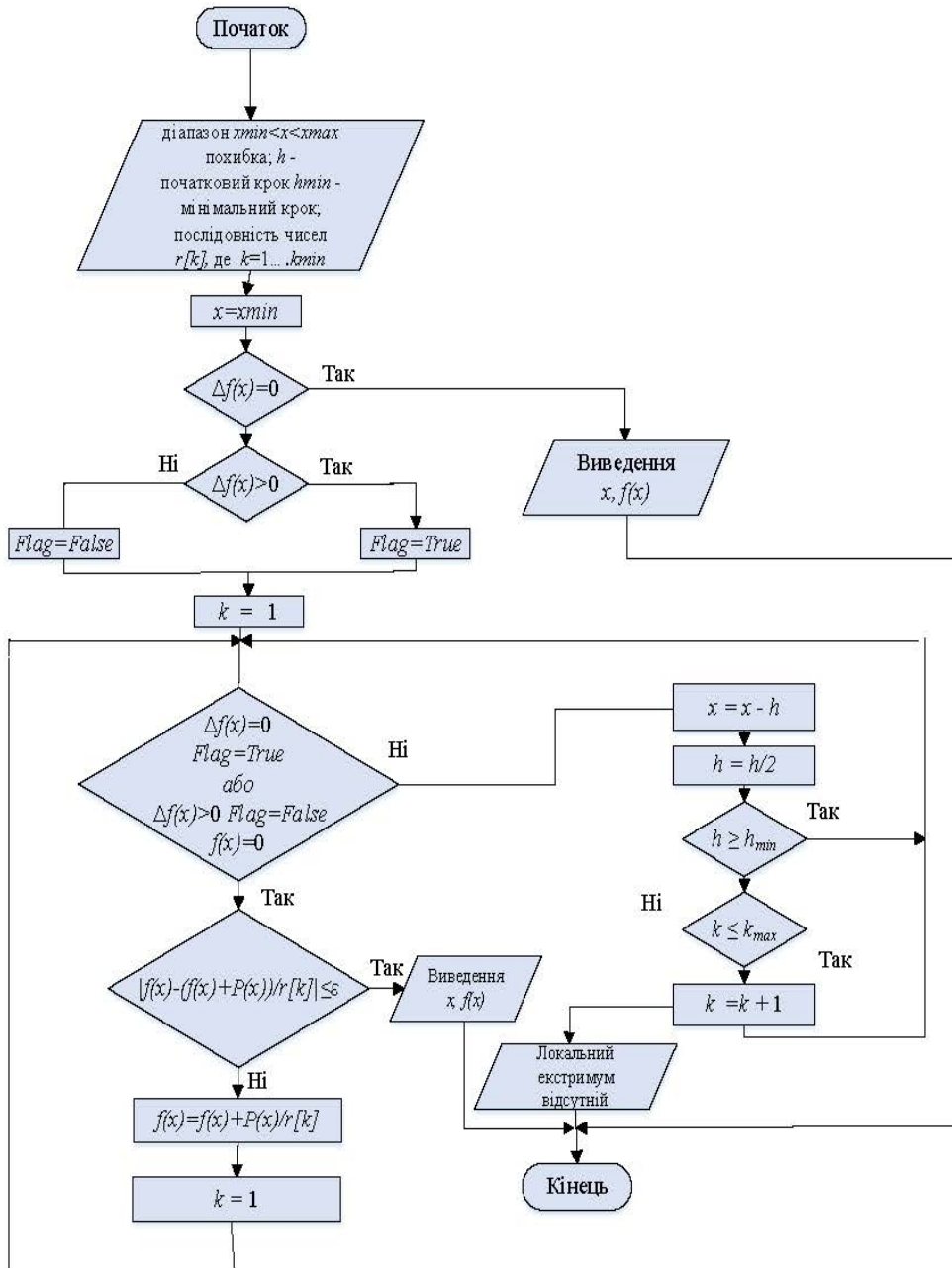


Рисунок 12.5 – Алгоритм методу градієнтного спуску (підйому)

Повнокроковий градієнтний метод

В цьому методі кожний крок градієнтного підйому або спуску виконується максимально можливої довжини, яка забезпечує необхідний напрямок зміни значення функції (тобто її збільшення або зменшення). Інакше кажучи, на півпрямій, що виходить з чергової точки x^{i-1} в напрямку градієнта (при підйомі) або

антиградієнта (при спусканні) відшукується точка абсолютного максимуму або мінімуму, яка і вибирається як наступна точка x^i .

Метод спряжених градієнтів

Для випадку, коли функція $f(x)$ – квадратний поліном, розроблена точна процедура, при повних кроках якої точки екстремуму досягаються з будь-якої початкової точки x^0 за n кроків (де n – розмірність простору). Напрямок a^{i+1} кроку від точки x^i до точки x^{i+1} задається в цьому методі такою рекурентною формулою:

$$a^{i+1} = \pm \nabla f(x^i) + \frac{|\nabla f(x^i)|^2}{|\nabla f(x^{i-1})|^2} a^i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

де $|\nabla f(x)|$ означає довжину вектора $\nabla f(x)$.

Знак плюс вибирається в тому випадку, коли розглядається задача максимізації, а знак мінус – у випадку розв'язання задачі мінімізації. Такий же вибір знака здійснюється і для напрямку a^i першого кроку ($i = 0$). Воно збігається з напрямком $\pm \nabla f(x^0)$.

Методи зведення загальної задачі оптимізації до задачі без обмежень

Чисельні методи гладкої оптимізації, які описані вище, в чистому вигляді застосовуються звичайно для задач без обмежень. Задачі загального вигляду (тобто задачі з обмеженнями) зводять до задач без обмежень за рахунок зміни цільової функції. Нехай, наприклад, потрібно знайти максимум функції $f(x)$ при обмеженнях $p_i(x) \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$). В так званому методі штрафних функцій будується функція $P(x)$, яку називають штрафною функцією і яка всередині припустимої області M приймає нульове значення, а поза нею – від'ємне. Найчастіше за таку функцію вибирають функцію вигляду

$$P(x) = -\sum_{i=1}^m \left| \min[p_i(x), 0] \right| \quad l \geq 1,$$

після чого будують послідовність додатних чисел $r_1 > r_2 > \dots > r_k > \dots$, яка збігається до нуля.

При заміні цільової функції $f(x)$ функцією

$$F_k(x) = f(x) + \frac{1}{r_k} P(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

розв'язують задачу без обмежень для цієї функції, починаючи з $k = 1$. Якщо розв'язок x^k належить припустимій області, тобто якщо всі $g_k(x^k) \geq 0$, то $x^k \in$

розв'язком початкової задачі з обмеженням. В протилежному випадку замінюють k на $k+1$ і розв'язують задачу для нової цільової функції $F_k(x)$.

Алгоритм розв'язання такої задачі наведений на рисунку 12.6.

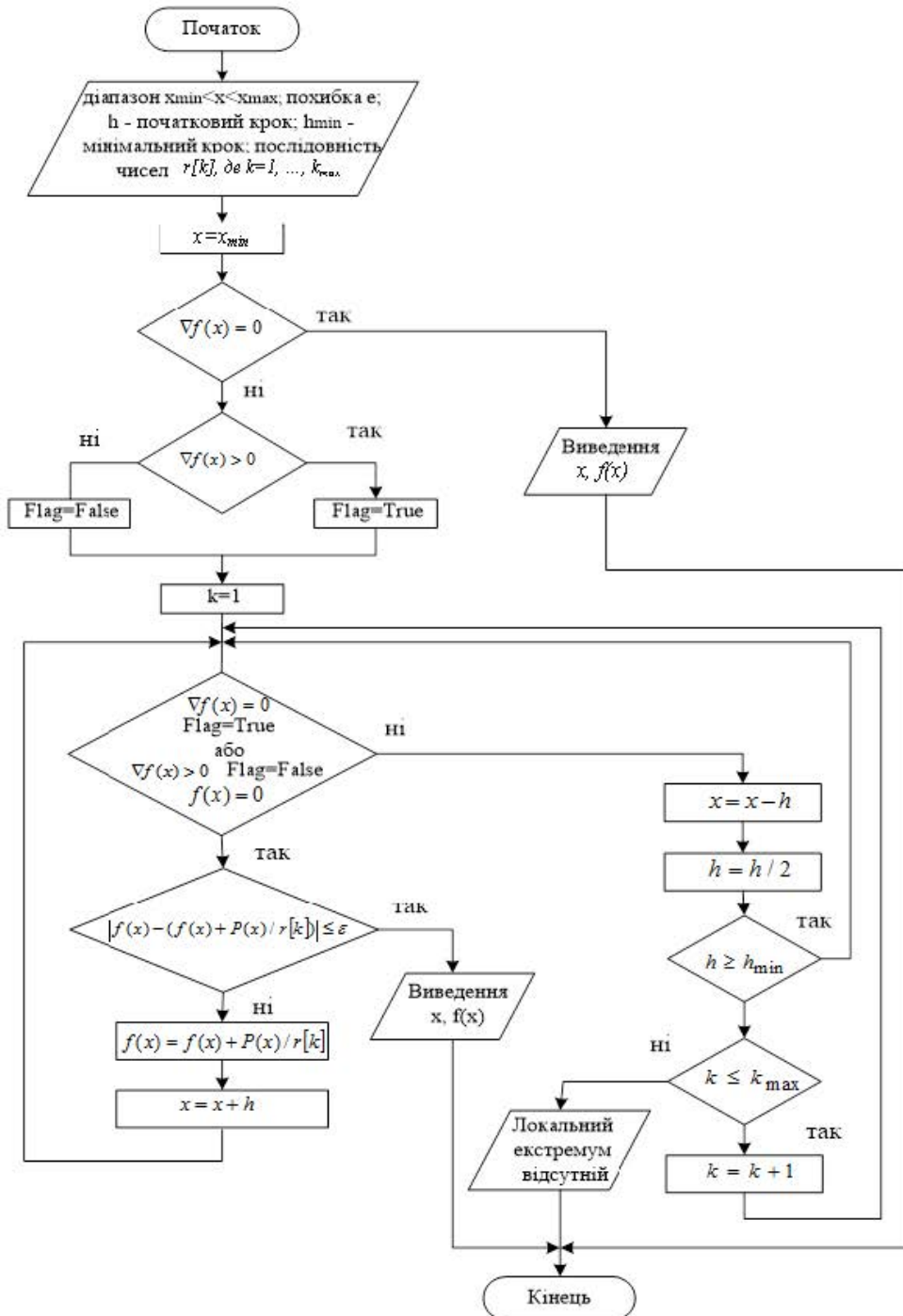


Рисунок 12.6 – Алгоритм методу штрафних функцій

В методі бар'єрів при розв'язанні задачі $\max f(x)$ при $p_i(x) \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) цільову функцію $f(x)$ замінюють функцією $F_k(x) = f(x) + r_k B(x)$, $r_k > 0$, де бар'єрна функція $B(x)$ характеризується властивістю прямувати до $-\infty$ при наближенні до границі припустимої області M зсередини. Таку функцію можна задати, наприклад, формулою:

$$B(x) = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)},$$

якщо область M задана нерівностями $p_i(x) \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$).

Таким же чином, як і в методі штрафних функцій, вибирають послідовність $\{r_k\}$ додатних чисел $r_1 > r_2 > \dots > r_k > \dots$, яка збігається до нуля.

Розв'язуються задачі без обмежень для цільових функцій $F_k(x) = f(x) + r_k B(x)$ при $k = 1, 2, \dots$

Якщо при цьому використовується той або інший чисельний метод, в якому початкова точка вибирається всередині M , то наявність бар'єра забезпечить належність екстремальної точки x^k (при її існуванні) області M . Наявність екстремуму забезпечується умовами обмеженості в області M і неперервності функцій $f(x)$ і $B(x)$.

12.1.4 Опукла оптимізація

Задача оптимізації може бути значно спрощена при накладанні на цільову функцію $f(x)$ і припустиму область M деяких обмежень. Одним з таких обмежень є так звана умова опуклості.

Множина M евклідового простору називається опуклою, якщо для будь-яких двох точок x^1 і x^2 цієї множини всі точки відрізка $[x^1, x^2]$, що їх з'єднує, також належать множині M .

Функція $f(x)$ опукла, або, точніше, опукла донизу, якщо вона визначена на опуклій множині M і для будь-яких двох точок x^1 і x^2 цієї множини значення $f(x)$ функції в будь-якій точці x відрізка $[x^1, x^2]$, не перевищують значення в тій же точці, що визначена на даному відрізку лінійної функції із значеннями $f(x_1)$ і $f(x_2)$ на його кінцевих точках. Це, в загальному випадку, виражається нерівністю

$$\alpha f(x^1) + (1 - \alpha) f(x^2) \geq f(\alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2) \text{ при } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Очевидно, що при $0 \leq \alpha \leq 1$ вираз $\alpha x^1 + (1 - \alpha) x^2$ задає різні точки відрізка $[x^1, x^2]$.

Для опуклої функції $f(x)$ в будь-якій точці x^0 , що лежить в області визначення M функції, існує вектор $r(x^0)$, для якого при будь-якому x і M виконується нерівність $f(x) - f(x^0) \geq r(x^0) \cdot (x - x^0)$.

В правій частині цієї нерівності стоїть скалярний добуток векторів $r(x^0)$ і $x - x^0$, тобто добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними. Вектор $r(x^0)$, що задовольняє цю властивість, називається узагальненим градієнтом (субградієнтом) функції $f(x)$ в точці x^0 . Звичайний градієнт (у випадку його існування і відмінності від нуля) є також узагальненим градієнтом, причому єдиним, в розглядуваній точці. Якщо функція $f(x)$ не диференційовна в деякій точці x^0 , в ній існує деяка множина узагальнених градієнтів, яку називають субградієнтною множиною функції $f(x)$ в точці x^0 .

Простий субградієнтний метод опуклої оптимізації

Для реалізації субградієнтної оптимізації в випадку задачі без обмежень процес може починатися з будь-якої точки x^0 . Зсув чергової точки x^j до наступної точки x^{j+1} здійснюється на відстань l_j в напрямку будь-якого узагальненого градієнта функції $f(x)$ в точці x^j в випадку задачі максимізації вгнутої функції і в зворотному напрямку – у випадку задачі мінімізації опуклої функції. Якщо кроки l_j зсувів обираються таким чином, що $l \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, а ряд $l_0 + l_1 + l_2 + \dots$ розбігається, то послідовність $\{x^0, x^1, \dots, x^m, \dots\}$ збігається до множини екстремуму заданої функції $f(x)$ за умови, що множина обмежена.

Для обчислення субградієнтів застосовуються різні способи. Одним з них є зведення задачі обчислення субградієнта функції, що задана складним виразом, до обчислення субградієнтів окремих компонентів цього виразу. Для подібного зведення особливо часто застосовуються такі властивості опуклих функцій.

Властивість 1. Якщо функції $f_1(x), \dots, f_m(x)$ опуклі, то опуклою буде і будь-яка їх лінійна комбінація $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i f_i(x)$ з невід'ємними коефіцієнтами

$a_i (a_i \geq 0, i = 1, \dots, m)$, а субградієнт $S(x)$ функції $f(x)$ дорівнює лінійній комбінації $\sum_{i=1}^m a_i S_i(x)$ субградієнтів $S_i(x)$ функцій $f_i(x)$.

Властивість 2. Якщо функції $f_1(x), \dots, f_m(x)$ опуклі, то опуклою буде і функція $f(x) = \max f_i(x)$, і всі субградієнтні множини $S_i(x^0)$ функцій $f_i(x)$, для яких $f(x^0) = f_i(x)$, входять в субградієнтну множину $S(x^0)$ функції $f(x)$ в будь-якій заданій точці $x = x^0$.

Методи розтягання простору

Простий субградієнтний метод, що розглянутий в попередньому розділі, може виявитися повільно збіжним, якщо області рівня цільової функції сильно витягнуті в одному напрямку, або, як часто при цьому говориться, мають вигляд вузьких і довгих ярів. Ця ситуація характерна для багатьох задач негладкої оптимізації. Для поліпшення збіжності методу в подібних випадках використовують методи розтягання простору.

Розтягання простору зводиться до заміни змінних x_1, \dots, x_k в цільовій функції $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ деякими їх лінійними комбінаціями. Особливо просто виконується розтягання в напрямку однієї з координатних осей. Змінна x_i , що відповідає цій осі, замінюється при цьому на $k^{-1}x_i$, де k – коефіцієнт розтягання, а решта залишається без змінювання.

12.1.5 Негладка оптимізація за методом координатного спуску (підйому)

При оптимізації недиференційованих функцій можна відмовитись від будь-яких узагальнень понять градієнта та використовувати лише кроки вздовж осей координат. З цією метою досліджують значення цільової функції $f(x_1, \dots, x_n)$ на черговому кроці оптимізації з приростом $\pm \delta_i$ однієї з координат і переходять від точки (x_1, \dots, x_n) до точки $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \pm \delta_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Знак приросту вибирають таким чином, щоб значення функції $f(x_1, \dots, x_n)$ змінювалось в потрібному напрямку (збільшувалось при максимізації і зменшувалось при мінімізації). Величини δ_i вибирають звичайно як в покрокових методах та забезпечують максимально можлива зміна функції в обраному напрямку.

Зсуви здійснюються по черзі по всіх осях координат, причому після зсуву по останній осі x_n знову повертаються до першої осі x_1 . Якщо повторити цей процес достатньо багато разів, як правило, можна знайти як завгодно точне наближення деякого екстремуму заданої негладкої функції в тому разі, коли виконується припущення, що такий екстремум існує.

12.1.6 Стохастична оптимізація

Іноді корисно замінити зсуви вздовж координатних осей зсувами (з відповідним знаком) вздовж випадково обраного на кожному кроці напрямку. При достатньо загальних припущеннях внаслідок таких зсувів з імовірністю одиниця за достатньо велике число кроків екстремальна точка може бути знайдена з будь-яким необхідним ступенем точності. Перевагою методу є простота кожного окремого кроку оптимізації. Методи випадкового пошуку дозволяють знаходити глобальний екстремум багатоекстремальних функцій. Більшість з них не має обмежень на вигляд критерію оптимізації, таких як вимога диференційовності (як у градієнтних методах).

Для невеликої кількості параметрів оптимізації (звичайно 1–5 параметрів) кількість кроків, порівняно з методами, які забезпечують пошук задовільних напрямків руху, у подібних простих методах, як правило, значно більша. Проте для великої кількості параметрів (більше 10) методи випадкового пошуку забезпечують швидший результат. Для середньої кількості параметрів (5–10) перевага у швидкості детермінованих або стохастичних методів залежить від конкретного вигляду критерію оптимізації.

Простий випадковий пошук

Нехай нам необхідно вирішити задачу мінімізації функції $f(\bar{x})$ за умови, що $\bar{x} \in [\bar{A} \ \bar{B}]$.

У даній області за рівномірним розподілом ймовірності обираємо випадкову точку \bar{x}_1 (рис. 12.7) і обчислюємо в ній значення функції $y_1 = f(\bar{x}_1)$. Потім вибираємо таким же чином випадкову точку \bar{x}_2 і обчислюємо $y_2 = f(\bar{x}_2)$. Запам'ятовуємо мінімальне з цих значень і точку, в якій значення функції мінімальне. Далі генеруємо нову точку. Робимо N експериментів, після чого кращу точку беремо як розв'язок задачі (в якій функція має мінімальне значення).

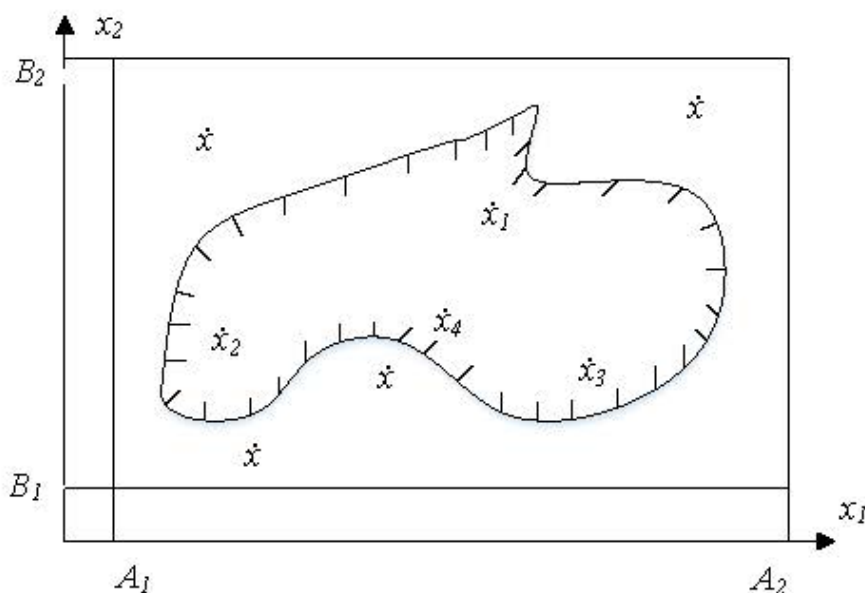


Рисунок 12.7 – Простий випадковий пошук

Ймовірність потрапляння в цей окіл при одному випробуванні дорівнює $P_e = \frac{V_e}{V}$, де $V = \prod_{i=1}^n (B_i - A_i)$ $V_e = \prod_{i=1}^n \epsilon_i$. Ймовірність непотрапляння дорівнює

$1 - P_\varepsilon$. Випробування незалежні, тому ймовірність непопадання за N експериментів дорівнює $(1 - P_\varepsilon)^N$.

Ймовірність того, що ми знайдемо розв'язок за N випробувань:

$$P = 1 - (1 - P_\varepsilon)^N.$$

Звідси неважко отримати оцінку необхідного числа випробувань N для визначення мінімуму з необхідною точністю:

$$N \geq \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - P_\varepsilon)}.$$

При розв'язанні екстремальних задач на областях зі складною геометрією зазвичай вписують цю область в n -вимірний паралелепіпед. А далі генерують в цьому n -вимірному паралелепіпеді випадкові точки за рівномірним закон, залишаючи тільки ті, які потрапляють в допустиму область.

Розрізняють ненаправлений випадковий пошук без самонавчання, направлений випадковий пошук, направлений пошук з самонавчанням.

Ненаправлений випадковий пошук (або метод статичних випробувань, метод Монте-Карло) полягає в багаторазовому моделюванні незалежних випадкових варіантів рішень з області допустимих, обчисленні в кожному з них критерію оптимізації і запам'ятовуванні найближчого до екстремуму. Метод Монте-Карло відносять до числа універсальних, оскільки він дозволяє вирішувати багатоекстремальні завдання загального вигляду з пошуку глобального екстремуму. Основний недолік методу полягає в необхідності проведення великого числа випробувань для знаходження розв'язку.

Направлений випадковий пошук без самонавчання є модернізацією ненаправленого випадкового пошуку. В основі методу лежить використання результатів пошуку попередніх кроків.

Направлений випадковий пошук з самонавчанням полягає в додаванні алгоритмів самонавчання, які коригують вектор передісторії (випадковий вектор E) переважно в напрямку вдалого попереднього кроку або в напрямку, зворотному попередньому невдалому кроці, у разі нелінійної цільової функції, наприклад шляхом перебудови ймовірностей P_1, \dots, P_i, P_n складових випадкового вектору $E = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_n)$. Так, при цільовій функції, близькій до лінійної, ймовірність кроку у вдалому напрямку збільшується, і навпаки.

Алгоритм парної проби. У даному алгоритмі чітко розділені пробний і робочий кроки.

Нехай x^{-k} – знайдене на k -му кроці найменше значення функції $f(\bar{x})$, що мінімізується. За рівномірним законом генерується випадковий одиничний вектор $\bar{\xi}$ і по обидві сторони від вихідної точки x^{-k} робляться дві проби: проводи-

мо обчислення функції в точках $\bar{x}_{1,2}^k = x^{-k} \pm g \cdot \bar{\xi}$, де g - величина пробного кроку.

Робочий крок робиться в напрямку найменшого значення цільової функції. Чергове наближення визначається співвідношенням

$$x^{-k+1} = x^{-k} + \Delta x^{-k} = \bar{x}^k + \alpha \cdot \bar{\xi} \cdot \text{sign}(f(x^{-k} - g \cdot \bar{\xi}) - f(x^{-k} + g \cdot \bar{\xi})).$$

Особливістю даного алгоритму є його підвищена тенденція до "блукання". Навіть знайшовши екстремум, алгоритм може відвести процес пошуку в сторону.

Алгоритм найкращої проби. На k -му кроці ми маємо точку x^{-k} . Генерується m випадкових одиничних векторів $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m$. Робляться пробні кроки в напрямках $g \cdot \bar{\xi}_1, \dots, g \cdot \bar{\xi}_m$ і в точках $x^{-k} + g \cdot \bar{\xi}_1, \dots, x^{-k} + g \cdot \bar{\xi}_m$ обчислюються значення функції. Вибирається той крок, який призводить до найбільшого зменшення функції: $\bar{\xi}^* = \arg \min_{i=1,m} f(x^{-k} + g \cdot \bar{\xi}_i)$. І в даному напрямку робиться крок

$$\Delta x^{-k} = \lambda \cdot \bar{\xi}^*.$$

Параметр λ може визначатися як результат мінімізації у напрямку, що визначається найкращою пробою, або вибиратися за певним законом.

Зі збільшенням числа проб обраний напрям наближається до напрямку $-\nabla f(\bar{x})$.

Якщо функція $f(\bar{x})$ близька до лінійної, то є можливість прискорити пошук, вибираючи разом з найкращою пробою і найгіршу. Тоді робочий крок можна робити або в напрямку найкращого, або в напрямку протилежному найгірший проби.

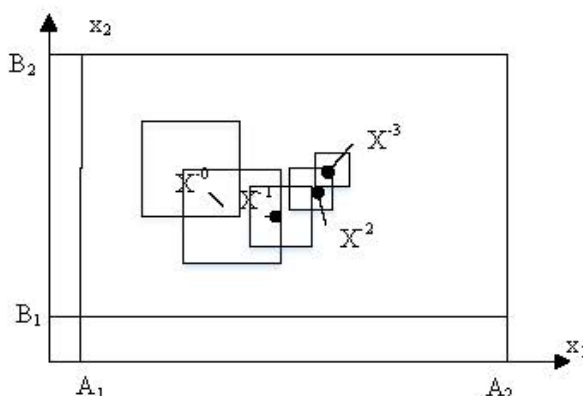


Рисунок 12.8 – Послідовність пошуку за алгоритмом найкращої проби

Векторний випадковий пошук

Метод статистичного градієнта. З вихідного стану x^{-k} робиться m незалежних проб $g \cdot \bar{\xi}_1, \dots, g \cdot \bar{\xi}_m$ у m випадкових напрямках, а потім обчислюються відповідні значення функції, що мінімізується в цих точках. Для кожної проби запам'ятовуємо приріст функції

$$\Delta f_j = f(x^{-k} + g \cdot \bar{\xi}_j) - f(x^{-k}).$$

Після цього формуємо векторну суму

$$\Delta \bar{f} = \sum_{j=1}^m \bar{\xi}_j \cdot \Delta f_j.$$

У межі при $m \rightarrow \infty$ напрямком $\Delta \bar{f}$ збігається з напрямком градієнта цільової функції. При остаточному m вектор $\Delta \bar{f}$ являє собою статистичну оцінку напрямки градієнта. У напрямку $\Delta \bar{f}$ робиться робочий крок i , в результаті, чергове наближення визначається відношенням

$$x^{-k+1} = x^{-k} - \lambda \cdot \frac{\Delta \bar{f}}{\|\Delta \bar{f}\|}.$$

При виборі оптимального значення λ , яке мінімізує функцію в заданому напрямку, ми отримуємо статистичний варіант методу найшвидшого спуску. Суттєва перевага перед детермінованими алгоритмами полягає в можливості прийняття рішення про напрямок робочого кроку при $m < n$. При $m = n$ і не випадкових ортогональних робочих кроках, спрямованих уздовж осей координат, алгоритм вироджується в градієнтний метод.

Алгоритм найкращої проби з напрямним гіперквадратом. У середині допустимої області будується гіперквадрат. У цьому гіперквадраті випадковим чином розкидається m точок $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$, в яких обчислюються значення функції. Серед збудованих точок вибираємо найкращу. Таким чином, на 1-му етапі координати випадкових точок задовольняють нерівності $a_i^1 \leq x_i \leq b_i^1$, $i = \overline{1, n}$, і $x^{-1} = \arg \min_{j=1, m} \{f(\bar{x}_j)\}$ – точка з мінімальним значенням цільової функції.

Спіраючись на цю точку, будуємо новий гіперквадрат. Точка, в якій досягається мінімум функції на k -му етапі, береться як центр нового гіперквадрата на $(k+1)$ -му етапі.

Координати вершин гіперквадрата на $(k+1)$ -му етапі визначаються співвідношеннями

$$a_i^{k+1} = x_i^{k+1} - \frac{b_i^k - a_i^{k+1}}{2}, \quad b_i^{k+1} = x_i^{k+1} - \frac{b_i^k - a_i^{k+1}}{2},$$

де x^{-k} – найкраща точка в гіперквадраті на k -му етапі.

У новому гіперквадраті виконуємо ту ж послідовність дій, випадковим чином розкидаючи m точок. В результаті здійснюється спрямоване переміщення гіперквадрата в бік зменшення функції.

В алгоритмі з навчанням сторони гіперквадрата можуть регулюватися відповідно до зміни за деяким правилом, що визначає стратегію зміни сторони гіперквадрата. У цьому випадку координати вершин гіперквадрата на $(k+1)$ -му етапі будуть визначатися співвідношеннями

$$a_i^{k+1} = x_i^{k+1} - \frac{b_i^k - a_i^k}{2\alpha}, \quad b_i^{k+1} = x_i^{k+1} - \frac{b_i^k - a_i^k}{2\alpha}.$$

Добре вибране правило регулювання стороки гіперквадрата призводить до досить ефективного алгоритму пошуку.

Генетичний алгоритм

Генетичний алгоритм (англ. Genetic algorithm) – різновид алгоритму направленого випадкового пошуку, що використовується для вирішення завдань оптимізації та моделювання шляхом випадкового підбору, комбінування і варіації шуканих параметрів.

Завдання формалізується таким чином, щоб його рішення могло бути закодованим у вигляді вектора (“генотипу”) генів, де кожен ген може бути бітом, числом або якимсь іншим об’єктом. У класичних реалізаціях генетичного алгоритму (ГА) передбачається, що генотип має фіксовану довжину. Однак існують варіанти ГА, вільні від цього обмеження.

Відповідно до ГА, деяким, звичайно випадковим, чином створюється множина генотипів початкової популяції. Вони оцінюються з використанням функції пристосованості» (fitness function), яка визначає, наскільки добре генотип наближує критерій оптимальності до екстремуму.

З отриманої множини рішень (“покоління”) з урахуванням значення «пристосованості» обираються рішення, до яких застосовуються «генетичні оператори» (“схрещування” - crossover і “мутація” - mutation), результатом чого є отримання нових рішень. Для них також обчислюється значення пристосованості, і потім проводиться відбір (“селекція”) кращих рішень в наступне покоління.

Цей набір дій повторюється ітеративно, поки не буде виконаний критерій зупинки алгоритму. Таким критерієм може бути:

- знаходження глобального, або субоптимального рішення;
- закінчення числа поколінь, відпущених на еволюцію;
- закінчення часу, відпущеного на еволюцію.

12.1.7 Лінійне програмування

Однією з задач опуклої оптимізації, що найчастіше зустрічаються, є так звана задача лінійного програмування, в якій як цільова функція, так і всі обмеження лінійні. Для розв'язання цієї задачі можуть бути застосовані загальні способи опуклої оптимізації, які описані підрозділі 12.1.4. Але на практиці для цього випадку застосовують інші, більш прості способи, з одним з яких (так званий симплекс-метод) ми зараз ознайомимося.

Постановки задач лінійного програмування, які зустрічаються на практиці, передбачають ще одне додаткове обмеження. Це умова невід'ємності значень всіх змінних. Далі, обмеження типу нерівностей $p_i(x) \geq 0$ або $p_i(x) \leq 0$ введенням додаткових змінних з невід'ємними значеннями перетворюються в рівності $p_i(x) - z_i = 0$ або $p_i(x) + z_i = 0$. Крім того, простою зміною знака цільової функції задача знаходження максимуму зводиться до задачі знаходження мінімуму. Таким чином, в лінійному програмуванні можна обмежитись лише розв'язанням задачі мінімізації.

Стандартна постановка задачі лінійного програмування полягає в тому, щоб: знайти мінімум лінійної функції $d + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ при обмеженнях $b_i + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$ ($i = 1, \dots, m$), $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$).

Інакше, йдеться про знаходження невід'ємного розв'язку $x = (x_1, \dots, x_n)$ даної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ ($i = 1, \dots, m$), яке перетворює в мінімум значення даної лінійної функції $d + \sum_{j=1}^n c_jx_j$.

Задача лінійного програмування може не мати розв'язку в таких випадках:

1) система S рівнянь $b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ ($i = 1, \dots, m$) несумісна, тобто взагалі

не має розв'язків;

2) система S не має жодного від'ємного розв'язку;

3) на множині M невід'ємних розв'язків системи S цільова функція $f = d + \sum_{j=1}^n c_jx_j$ може приймати як завгодно великі за абсолютною величиною

від'ємні значення, тобто $\min_M f = -\infty$.

Симплекс-метод

Один з найбільш розповсюджених методів розв'язування задачі лінійного програмування в стандартній постановці полягає в послідовному застосуванні до лінійних функцій так званих симплексних перетворень, що являють собою

розв'язки одного з обмежувальних рівнянь $b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ відносно деякого невідомого x_j , і підстановку знайденого таким чином значення x_j до всіх обмежувальних рівнянь і в цільову функцію $f = d + \sum_{j=1}^n c_j x_j$.

Транспортна задача

В деяких окремих випадках розв'язання задачі лінійного програмування може бути значно спрощено. Найважливішим з таких випадків є так звана транспортна задача, яку називають іноді задачею про призначення. Суть її полягає в мінімізації цільової функції

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

при $m + n$ обмеженнях типу рівнянь

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j.$$

Звичайно додатково припускається зберігання рівняння

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

інакше задача не буде мати розв'язків.

Назву транспортної задача, що розглядається, одержала тому, що до неї зводиться оптимізація плану перевезень вантажів з m пунктів відправлення з запасами a_1, \dots, a_m до n пунктів призначення з об'ємами споживання b_1, \dots, b_n . Роль коефіцієнтів c_{ij} в цільовій функції виконують питомі вартості, тобто вартості перевезення однієї одиниці вантажу з пункту i в пункт j . Задача полягає в мінімізації загальної вартості перевезення вантажів за умови, що вантажі повністю вивезені з усіх пунктів відправлення і потреби всіх пунктів призначення виявились повністю задоволеними.

Цілочислове лінійне програмування

Іноді на практиці доводиться зустрічатися з такими задачами лінійного програмування, в яких припустимі лише цілочислові розв'язки.

В загальному випадку одержання цілочислового розв'язку потребує застосування спеціальних методів, серед яких найчастіше вживають методи відтинання та розгалужень і меж.

Методи відтинань базуються на таких ідеях. Спочатку розв'язується звичайна задача лінійного програмування A_0 (з тимчасово відкинутою вимогою цілочислового розв'язку). Якщо координати точки $a^0 = (a_1, \dots, a_n)$, яка одержана в результаті розв'язання задачі A_0 , цілі числа, то ця точка дає розв'язок не тільки задачі A_0 , а й початковій задачі цілочислового лінійного програмування, яку ми домовимося позначати через A .

Якщо хоча б одна з координат точки a^0 , наприклад, a_j , не є цілим числом, то до початкової задачі цілочислового лінійного програмування додається нове обмеження, що побудоване з використанням інформації, яка є в таблиці симплекс-методу і відповідає кроку, на якому побудований розв'язок a^0 .

В результаті виходить нова задача A_1 , до якої знов застосовується та ж сама процедура. Таким чином, методи відтинань будують і розв'язують послідовність лінійних задач A_0, A_1, \dots , кожна з яких відрізняється від попередньої лише одним новим обмеженням.

Загальна задача лінійної оптимізації

В загальному випадку задача дискретної оптимізації не припускає лінійності як цільової функції $f(x)$, так і обмежень $p_i(x) \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$). Не вимагається також неодмінно цілочисельність координат точок, серед яких знаходиться розв'язок. Важливо лише, щоб вони утворювали дискретну множину M . Звичайно на практиці загальне число N точок виявляється настільки великим, що простий перебір фізично неможливий навіть при використанні найпотужніших ЕОМ. З цієї причини основна задача в дискретній оптимізації зводиться до розробки методів, які направлені на максимально можливе звуження перебору.

У так званих прямих методах дискретної оптимізації звичайно використовуються ті чи інші аналоги (в неперервному випадку) градієнтних методів, що розглядалися вище. До них відносять методи локальної оптимізації, наприклад, метод вектора спаду. Обчислювальну схему цього методу для розв'язання задачі мінімізації дійсної функції $f(x)$, що визначена на деякому просторі M дискретного метричного простору D , можна описати таким чином.

Спочатку вибираємо деяке початкове наближення $x^0 \in M$ і радіус r . В просторі D розглядаємо окіл $O(x^0, r)$ радіуса r з центром в точці x^0 . Досліджуючи координати вектора спаду, який характеризує зміни значень цільової функції в точках множини $O(x^0, r) \cap M$ порівняно з $f(x^0)$, визначаємо, чи є x^0 точкою локального мінімуму функції f . Якщо ні, то за допомогою вектора спаду в множині $O(x^0, r) \cap M$ вибираємо точку x^1 , для якої значення цільової функції менше, ніж $f(x^0)$. На наступній ітерації знову повторюємо цю ж процедуру,

виходячи вже з x^1 як з центра нового околу, і так далі. Процес обчислень вважається закінченим, якщо одержаний деякий локально оптимальний розв'язок задачі. Алгоритм методу припускає переривання обчислень на будь-якій ітерації з видачею в якості результату останнього одержаного припустимого розв'язку задачі.

В релаксаційних методах звертаються до способу ослаблення (релаксації) обмежень і заміни цільової функції $f(x)$ її мінорантою $f'(x)$ (в задачі мінімізації), тобто функцією, яка задовольняє умову $f'(x) \leq f(x)$ для всіх x .

З припустимої області M' , що здобута розширенням вихідної області $M (M' \supset M)$ за рахунок ослаблення обмежень, M' і $f'(x)$ вибираються так, щоб, по-перше, релаксована задача допускала порівняно прості способи розв'язань, і, по-друге, щоб вона найменше відрізнялась від вихідної за цільовою функцією і множиною припустимих розв'язків:

$$\min_{x \in M'} f'(x) \leq \min_{x \in M} (fx) \leq \min_{x \in M} f(x)$$

Метод розгалужень і меж (МРМ)

Цей метод дозволяє отримати точний або наближений розв'язок з заданою відносною похибкою за цільовою функцією. Суть МРМ полягає в тому, що замість вихідної задачі оптимізації $A_0 = \{\min f_0(x), x \in M_0\}$ будується і розв'язується послідовність релаксованих задач $\bar{A}_i = \{\min \bar{f}_i(x), x \in \bar{M}_i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Спочатку розв'язується задача для M_0 і $\bar{f}_0(x_0) = f_0(x_0)$, то x_0 – оптимальний розв'язок A_0 , і процес закінчується. Інакше $\bar{f}_0(x_0)$ – оцінка знизу для цільової функції на оптимальному розв'язку задачі A_0 , і алгоритм починає процес розгалуження вихідної задачі A_0 на декілька задач (безпосередніх нащадків).

12.1.8 Теорія ігор

До методів дискретної оптимізації і лінійного програмування часто доводиться звертатись при аналізі і виборі рішень в конфліктних ситуаціях, тобто при наявності сторін, що мають на меті відмінні (найчастіше – протилежні) цілі.

Стратегією гравця називають сукупність правил, що визначають поведінку гравця від початку гри до її завершення.

Задання стратегій (A, B) двох гравців в парній грі повністю визначає її наслідок, тобто виграш одного і програш другого. Гра називається скінченною, якщо в кожного гравця є лише скінченна кількість стратегій. Результати скінченної парної гри з нульовою сумою можна задавати матрицею, рядки і стовпці якої відповідають відмінним стратегіям, а її елементи - відповідні виграші однієї сторони (які дорівнюють програшам іншій).

Розглянемо гру $m \times n$ з матрицею

$$\begin{array}{cccccc}
 & B_1 & B_2 & \dots & B_n & \\
 A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \\
 A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 a_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} &
 \end{array}$$

Якщо перший гравець застосовує стратегію A_i , то другий буде прагнути до того, щоб вибором відповідної стратегії B_j звести виграш першого гравця до мінімуму. Величина цього мінімуму, яку ми позначимо α_i , дорівнює, очевидно, $\min_j a_{ij}$.

З точки зору першого гравця (при будь-яких відповідях супротивника) доцільно прагнути знайти таку стратегію, при якій α_i перетворюється в максимум. Цей максимум, який ми позначимо α , називається нижньою ціною гри. Оскільки значення α обчислюється за формулою $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$, то його називають також максиміном. Йому відповідає максимінна стратегія, дотримуючись якої, перший гравець при будь-яких стратегіях у противника забезпечить собі виграш, який не менше α (залежно від знака α це може бути і програш, який в цьому разі виявиться мінімальним).

Аналогічно визначається мінімальний програш (який може бути в дійсності і виграшем) для другого гравця: $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$.

Величина β називається верхньою ціною гри або мінімаксом. Їй відповідають мінімаксні стратегії другого гравця.

Має місце нерівність $\alpha \leq \beta$. При $\alpha = \beta$ розв'язок одержується в чистих стратегіях. Для знаходження їх достатньо виділити в платіжній матриці максимінні (тобто такі, що дорівнюють α) елементи. Будь-яка пара рядків і стовпців, на перетині яких знаходиться такий елемент, відповідає парі чистих оптимальних стратегій. При $\alpha < \beta$ перший гравець може істотно збільшити свій середній виграш порівняно з α , якщо він буде користуватись не чистою (однією єдиною) стратегією, а так званою змішаною стратегією. Змішана стратегія S полягає в тому, що при повторі гри здійснюється випадковий вибір стратегії з деякої множини змішаних стратегій, і для кожної змішаної стратегії вказується імовірність її вибору.

12.1.9 Динамічне програмування

На практиці часто доводиться зустрічатись з випадками, коли метою (ціллю) оптимізації є встановлення найкращої послідовності тих чи інших робіт

(виробничих операцій, етапів будівництва різних споруд тощо). З подібним зустрічаються при розв'язанні задач так званого динамічного програмування.

Однією з перших задач такого роду, що привернули увагу математиків, була так звана задача про комівояжера (мандрівного торговця). Суть її така: є $n+1$ місто A_0, A_1, \dots, A_n ($n \geq 1$) з заданими між ними відстанями d_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots, n$). Потрібно, відправившись з A_0 , вибрати такий маршрут пересування $A_0, A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}, A_0$, при якому комівояжер, побувавши в кожному місті по одному разу, повернувся б до вихідного пункту A_0 , пройшовши при цьому мінімально можливий сумарний шлях.

Основний спосіб динамічного програмування полягає в знаходженні правил домінування, які дозволяють робити порівняння варіантів розвитку послідовностей і завчасне відсіювання безперспективних варіантів. У ряді випадків в задачах динамічного програмування вдається одержати такі сильні правила домінування, що вони визначають елементи оптимальної послідовності однозначно один за одним. В такому випадку правила домінування називають розв'язувальними правилами.

Розв'язувальні правила звичайно виводяться за допомогою принципу оптимальності Беллмана. Суть принципу оптимальності така. Нехай критерій F (задається формулою або алгоритмом), який дає числову оцінку якості варіанта (послідовності) $A_n = A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n}$, можна застосовувати не тільки до всієї послідовності, але і до будь-якого її початкового відрізка $A_R = A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_R}$. Послідовність A_n , якій відповідає екстремальне значення критерію F , називається оптимальною. Якщо будь-який початковий відрізок оптимальної послідовності також оптимальний (в класі всіх послідовностей, складених з тих же елементів, і можливо, такий, що має ті ж початок і кінець, що і даний відрізок), то вважають, що для відповідної задачі справедливий принцип оптимальності.

Розглянемо зразок розв'язання задачі про комівояжера методом динамічного програмування:

1. Введення даних про пункти A_0, \dots, A_n і відстані між пунктами i та j d_{ij} ($d_{ij} = 0$ при $i=j$).
2. Обчислення всіх можливих варіантів відстаней, що складаються з трьох ділянок $A_0, A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$. Вони групуються за останнім пунктом i з них залишаються ті варіанти, що об'єднують однакові пункти, але мають найменший шлях.
3. До тих варіантів, що залишились додають ще четверту ділянку і повторюють процедуру з пункту 2. Це повторюється для п'ятої, шостої і т. д. ділянок, доки не повертається в пункт A_0 . Той варіант (чи варіанти), що залишились, і визначає найкоротший шлях, яким комівояжеру можна об'їздити всі міста A_i ($i=0, \dots, n$), якщо він почне та закінчить свою подорож в A_0 .

12.1.10 Варіаційні задачі

В варіаційних задачах місце змінних займають функції, а критерій оптимізації – деяка дійсна функція, що залежить від цих функцій і називається функціоналом.

В найпростішому випадку мають справу з функцією $y(x)$ однієї змінної і функціоналом вигляду

$$I = \int_{a_1}^{a_2} F(x, y, y') dx,$$

де a_1 і a_2 – константи, $F(x, y, z)$ – задана функція трьох дійсних змінних. При цьому припускається, що як сама функція $y=y(x)$, так і її похідна $y' = \frac{d}{dx} y(x)$ неперервні на відрізку $a_1 \leq x \leq a_2$.

В класичному варіаційному численні доводиться, що екстремум функції (мінімум або максимум) функціонала I досягається на функціях $y(x)$, які задовольняють диференціальне рівняння, тобто рівняння Ейлера:

$$F_y + F_{xy'} - F_{yy'} y'' - F_{y'y'} y'' = 0.$$

Тут через F_y і F_{uv} ($u = x, y$ або $y', v = y'$) позначені, відповідно, перша і друга частинні похідні функції $F(x, y, y')$ за змінною y і за змінними u, v .

12.1.11 Алгоритми на графах

Як вже зазначалося, графи широко використовуються для розв'язання різноманітних задач з використанням комп'ютерів. Це підтверджується тим, що задачам на графах присвячена половина фундаментальної праці Р.Седжвіка “Фундаментальні алгоритми на С”.

Основні задачі, які вирішуються на графах:

- 1) пошук шляху в графі – будь-якого або найкоротшого (для незважених графів найкоротший шлях – шлях, який складається з мінімальної кількості ребер; для зважених графів – це шлях з мінімальною сумарною довжиною ребер);
- 2) пошук циклів в графі: будь-яких, мінімальної та максимальної довжини;
- 3) пошук гамільтонового циклу (циклу, який проходить через всі вершини графу) та ейлерового циклу (циклу, який проходить через всі ребра графу);
- 4) побудова дерев графу, тобто виділення таких вершин і ребер, які утворюють підграф типу дерево, в тому числі кістякове дерево;
- 5) пошук критичного шляху у графі (шляху аксимальної довжини);
- 6) задача про максимальний потік: знайти такий розподіл потоків у мережі, який забезпечить максимальний сумарний потік з витоку до стоку.

Розглянемо найпоширеніші алгоритми розв'язання цих задач.

Пошук шляху в незваженому графі

Основні способи пошуку шляху у незважених графах:

- 1) способи перебору варіантів;
- 2) пошук в глибину;
- 3) пошук в ширину.

Переборні методи

Переборні методи ґрунтуються на генеруванні перестановок вершин і перевірці, чи є згенерована перестановка необхідним шляхом.

Пошук шляху в графі в глибину

Головний інструмент алгоритму пошуку в глибину – стек.

Стек – структура даних, яка діє за правилом: останнє занесене дане першим вилучається (LIFO – last input – first output).

Алгоритм пошуку шляху в глибину ґрунтується на таких кроках:

- 1) починаючи від початкової вершини, будується шлях у графі, використовуючи ребра з мінімальним номером кінцевої вершини. Послідовність вершин заноситься у стек;
- 2) якщо на цьому шляху не зустрінеться кінцева вершина, тоді зі стека вилучається остання занесена вершина і береться ребро з більшим номером кінцевої вершини;
- 3) якщо невикористаних ребер немає, знову зі стека вилучається вершина (робиться крок назад);
- 4) якщо стек став пустим, а шлях не знайдено, то його немає взагалі.

Переваги та недоліки методу пошуку в глибину: цей метод дозволяє знайти шлях у незваженому графі, знайдений шлях не є найкоротшим, але метод, у середньому, забезпечує найбільшу швидкість.

Пошук шляху у графі в ширину

Цей метод дозволяє знайти найкоротший шлях у незваженому графі.

Основний засіб для здійснення пошуку в ширину – структура даних черга.

Черга – структура даних, яка діє за правилом: перший занесений першим вилучається (FIFO: first input – first output).

Алгоритм пошуку шляху в ширину ґрунтується на таких кроках:

- 1) вершини при пошуку в ширину заносяться в *чергу*. Елемент черги складається з двох частин: номера вершини та номера елемента черги, звідки до цієї вершини потрапили;
- 2) до черги заноситься початкова вершина, а у другу частину елемента – 0 (ознака початку шляху);
- 3) розглядаються *всі* вершини, суміжні з початковою, і заносяться до черги;
- 4) якщо серед розглянутих вершин немає кінцевої – пересунути вказівник початку черги і розглянути вершини, суміжні з тією, на яку вказує вказівник;
- 5) дійшовши таким чином до кінцевої вершини, пройти шлях у зворотному порядку, використовуючи другу частину елементів черги.

Пошук шляху в зваженому графі

Якщо в графі враховуються ваги ребер, то, очевидно, це ставить задачу пошуку шляху з мінімальною або максимальною сумарною вагою.

Пошук шляху в зваженому графі методом перебору

Метод перебору є найпростішим і найнеефективнішим. Він дозволяє знайти розв'язок у будь-якому випадку (якщо розв'язок взагалі існує), але кількість варіантів, які необхідно перебрати, найчастіше надто велика.

Пошук шляху в зваженому графі методом гілок та границь

Метод дозволяє скоротити кількість варіантів у порівнянні з методом перебору. Застосовується в задачах, де критерій пошуку є монотонно зростаючою функцією кількості ребер.

Ідея методу: знаходиться перший шлях, що задовольняє умову задачі. При пошуковій іншого шляху з додаванням до нього чергового ребра перевіряємо, чи не став вже цей частковий шлях довшим за початковий (порівнюємо з границею). Якщо став, то далі нарощувати його немає сенсу – він вже заздалегідь гірший, і всі наступні варіанти (гілки), що мають своїм початком цей частковий шлях, не розглядаються.

Алгоритм Флойда-Уоршелла – динамічний алгоритм для знаходження найкоротших відстаней між усіма вершинами зваженого орієнтованого графу.

Нехай вершини графа $G = (V, E)$, $|V| = n$ пронумеровані від 1 до n і введено позначення d_{ij}^k для довжини найкоротшого шляху від i до j , який окрім самих вершин i, j проходить тільки через вершини $1 \dots k$. Очевидно, що d_{ij}^0 – довжина (вага) ребра (i, j) , якщо таке існує (в іншому випадку його довжина може бути позначена як ∞).

Існує два варіанти значення d_{ij}^k , $k \in (1, \dots, n)$:

1. Найкоротший шлях між i, j не проходить через вершину k , тоді $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$.

2. Існує більш короткий шлях між i, j , що проходить через k , тоді він спочатку йде від i до k , а потім від k до j . У цьому випадку, очевидно, $d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$.

Таким чином, для знаходження значення функції досить вибрати мінімум з двох позначених значень.

Тоді рекурентна формула для d_{ij}^k має вигляд:

$$d_{ij}^0 \text{ – довжина ребра } (i, j)$$

$$d_{ij}^k = \min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}).$$

Алгоритм Флойда-Уоршелла послідовно обчислює всі значення $\forall i, j$ для від 1 до n . Отримані значення d_{ij}^k є довжинами найкоротших шляхів між вершинами i, j .

Алгоритм Дейкстри дозволяє знайти найкоротші шляхи від заданої вершини до кожної з решти вершин графу.

Ідея алгоритму: якщо безпосередній шлях від вершини V_i до V_j більший за шлях $V_i \rightarrow V_k \rightarrow V_j$, то шлях $V_i \rightarrow V_j$ замінюють на шлях $V_i \rightarrow V_k \rightarrow V_j$.

Алгоритм використовує структуру даних масив [3, N], де N – кількість вершин. Кожен стовпець масиву складається з трьох комірок: a – розглянута вершина, b – відстань від початкової вершини до тої, що розглядається, c – попередня вершина, через яку проходить шлях до вершини, що розглядається. На початку роботи алгоритму $\forall c_i = V_0$, де V_0 – початкова вершина; $\forall b_i$ (відстані від початкової вершини до вершини V_i), які безпосередньо з'єднані з початковою вершиною одним ребром, дорівнюють вазі ребра, решта – великому значенню M , яке для даної задачі імітує нескінченність.

Розглянемо приклад виконання алгоритму Дейкстри для графу, матриця ваг якого має вигляд:

(0, 23, 12, M, M, M, M, M),
 (23, 0, 25, M, 22, M, M, 35),
 (12, 25, 0, 18, M, M, M, M),
 (M, M, 18, 0, M, 20, M, M),
 (M, 22, M, M, 0, 23, 14, M),
 (M, M, M, 20, 23, 0, 24, M),
 (M, M, M, M, 14, 24, 0, 16),
 (M, 35, M, M, M, M, 16, 0).

Послідовність кроків алгоритму (для випадку початкова вершина – 3, кінцева вершина – 8):

Крок	i	1	2	3= V_0	4	5	6	7	8= V_n
1 (поч. стан)	a	0	0	1	0	0	0	0	0
	b	12	25	0	18	999	999	999	999
	c	3	3	0	3	3	3	3	3
2	a	1	0	1	0	0	0	0	0
	b	12	25	0	18	999	999	999	999
	c	3	3	0	3	3	3	3	3
3	a	1	0	1	1	0	0	0	0
	b	12	25	0	18	999	38	999	999
	c	3	3	0	3	3	4	3	3
4	a	1	1	1	1	0	0	0	0
	b	12	25	0	18	47	38	999	60
	c	3	3	0	3	2	4	3	2

5	<i>a</i>	1	1	1	1	0	1	0	0
	<i>b</i>	12	25	0	18	47	38	62	60
	<i>c</i>	3	3	0	3	2	4	6	2
6	<i>a</i>	1	1	1	1	1	1	0	0
	<i>b</i>	12	25	0	18	47	38	61	60
	<i>c</i>	3	3	0	3	2	4	5	2
7	<i>a</i>	1	1	1	1	1	1	0	1
	<i>b</i>	12	25	0	18	47	38	61	60
	<i>c</i>	3	3	0	3	2	4	5	2
8	<i>a</i>	1	1	1	1	1	1	1	1
	<i>b</i>	12	25	0	18	47	38	61	60
	<i>c</i>	3	3	0	3	2	4	5	2

Мінімальний шлях 3-->2-->8, $L_{min} = 60.0$

Побудова мінімального кістякового дерева

Прикладом використання задачі побудови мінімального кістякового дерева є прокладання телефонної мережі між заданими пунктами.

Найчастіше для побудови мінімального кістякового дерева використовується алгоритм Пріма-Краскала. Ними доведено, що “жадібний алгоритм” дозволяє знайти мінімальне кістякове дерево. Це алгоритм, який на кожному етапі розв’язання задачі обирає найкращий варіант з точки зору критерію задачі.

Алгоритм Пріма-Краскала

Алгоритм належить до категорії «жадібних алгоритмів». Ідея алгоритму: спочатку вибирають найкоротше ребро, а його кінцеві вершини вносять до дерева – це початок дерева. Потім приєднують до нього найкоротше ребро з тих, що виходять з вершин, які належать до дерева, а входять у вершину, яка не належить до дерева. І так далі, поки всі вершини не увійдуть до складу дерева.

Задача може мати декілька розв’язків, якщо є ребра однакової довжини.

Задача про максимальний потік

Найчастіше для розв’язання задачі використовується алгоритм Форда-Фолкерсона:

1) якщо мережа має декілька витоків та декілька стоків, то вона перетворюється в мережу з одним витокком і одним стоком шляхом введення уявних витокку і стоку;

2) початок розв’язання задачі полягає у тривіальному розв’язку (коли всі потоки рівні 0);

3) виконується збільшення потоку за допомогою “збільшувальних ланцюгів”. “Збільшувальний ланцюг” – це така послідовність вершин і ребер, яка по-

чинається з витoku і закінчується стоком, і в усіх ребрах на цьому шляху потік менший за пропускну здатність, тобто може бути збільшений.

Доведено, що алгоритм буде сходиться, тобто потоки будуть наближатись до максимального значення, якщо процес збільшення починати з найкоротшого “збільшувального ланцюга”.

4) виконується збільшення потоку у “збільшувальному ланцюзі” на величину:

а) якщо граф неорієнтований

$$\min(C_{ij} - V_{ij}) \text{ для } V_{ij} > 0,$$

$$\min(C_{ij} + V_{ij}) \text{ для } V_{ij} < 0.$$

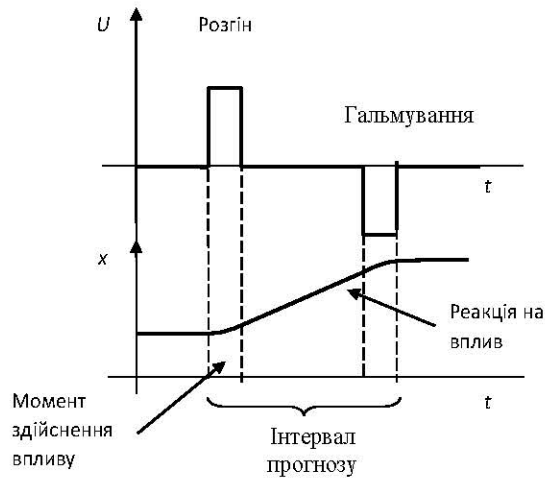
б) якщо граф орієнтований, потрібно враховувати, що напрямок дуги змінити не можна.

Оскільки для забезпечення збіжності алгоритму потрібно починати з найкоротшого збільшувального ланцюга, то в основу перебору ланцюгів кладуть метод пошуку в ширину, який не закінчується пошуком першого найкоротшого шляху, а продовжується далі.

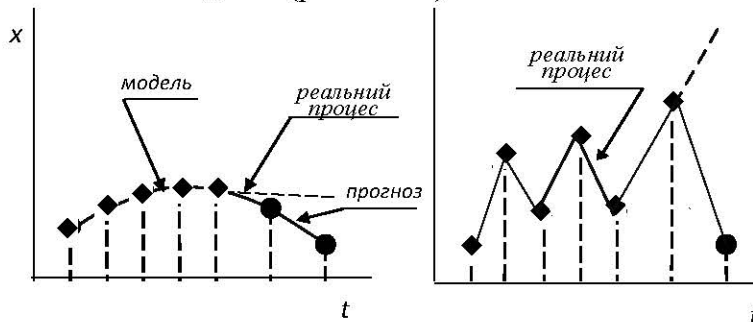
12.2. Використання моделі для оптимального прогнозування

12.2.1. Класифікація задач і методів прогнозування

Прогнозування стану об'єкта керування є одним з найважливіших застосувань моделі в системах керувань. Адже *інерційність процесів* керування приводить до того, що реакція об'єкта на керуючий вплив відбувається через певний час після здійснення впливу (рис. 12.9). Таким чином для здійснення правильного впливу необхідно передбачити стан об'єкта та всіх незалежно зовнішніх впливів.



Прогнозування може здійснюватись як на основі детермінованої, так і на основі стохастичної моделей (рис. 12.10).



Детерміноване прогнозування використовується при незначних випадкових впливах і невеликій кількості даних про попередній хід процесу.

При *стохастичному прогнозуванні* хід прогнозованого процесу у часі за попередній період необхідно подати функцією $X(t)$, що отримується за допомогою *методів стохастичної ідентифікації*. Для задачі прогнозування найчастіше використовується регресійна модель. Нагадаємо, що загальний вигляд рівняння регресії (6.26)

$$y(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon,$$

де $y(t)$ – реальне значення випадкового процесу; $\bar{y}(t)$ – значення випадкового процесу, отримане за допомогою функції регресії; ε – випадкова величина, що характеризує вплив неврахованих факторів, найчастіше – білий шум.

З математичної точки зору детерміноване прогнозування є *екстраполяцією* математичної моделі керованого процесу.

Задача екстраполяції полягає у визначенні значення функції $y(x)$ в точці, що не належить відрізьку $[x_0, x_n]$, на якому визначені вузли екстраполяції. Для екстраполяції використовуються ті ж вирази, що і при інтерполяції, але з більшою похибкою. Так, для гладких функцій екстраполяція доцільна при значеннях x , що виходять за зазначені межі не більш ніж на $h/2$, де h – крок розташування вузлів.

Алгоритм екстраполяції залежить від вибору функцій екстраполяції. Але у будь-якому випадку для екстраполяції n -го порядку необхідно зберігати n даних у буфері зі структурою черги.

12.2.2. Основи прогнозування даних

Розглянемо основи прогнозування даних на прикладі розв'язання задачі короткострокового прогнозування значень часового ряду методом експоненційного згладжування (the Method of Moving Average за Р. Брауном). Також розглянемо питання структурного моделювання систем прогнозування на основі таких алгоритмів агрегування моделей (створення ансамблів моделей), як бегінг (bagging), бустинг (boosting) і стекінг (stacking).

12.2.2.1 Часові ряди і стохастичні процеси

Розглянемо лише дискретні часові ряди, в яких спостереження проводяться через фіксований інтервал часу, що приймається за одиницю відліку. Перехід від моменту одного спостереження до моменту наступного спостереження називатимемо кроком.

Відомо, що якщо значення членів часового ряду точно визначені якою-небудь математичною функцією, то часовий ряд називається детермінованим. Якщо ці значення можуть бути описані лише за допомогою розподілу ймовірностей, часовий ряд називається випадковим.

Явище, яке розвивається у часі випадковим чином, можна розглядати й називати стохастичним процесом у випадку, якщо механізм випадкості можна

описати в поняттях теорії ймовірності. В іншому випадку випадковий процес необхідно розглядати як хаотичний.

В даному розділі розглядаються лише стохастичні процеси. При цьому відрізок часового ряду, що аналізується, розглядається як одна з окремих реалізацій (вибірка) стохастичного процесу, що вивчається, з прихованим ймовірнісним механізмом.

В свою чергу, серед стохастичних процесів виділяють клас процесів, які називають стаціонарними. Для їх математичної формалізації позначимо член часового ряду, що спостерігається в момент t , через x_t . Стохастичний процес називається стаціонарним, якщо його властивості не змінюються в часі. Зокрема, він має постійне математичне очікування $\bar{x} = M(x_t)$ (середнє значення, відносно якого він варіює), постійну дисперсію $D(x) = M[(x_t - \bar{x})^2] = \sigma_x^2$, що визначає розмах його коливань відносно середнього значення, а також постійну автоковаріацію й коефіцієнти автокореляції.

Коваріація між значеннями x_t і x_{t+k} , які відділені інтервалом в k одиниць часу, називається автоковаріацією з лагом (затримкою) k і визначається як

$$R_{xx}(k) = \text{cov}(x_t, x_{t+k}) = M[(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})].$$

Для стаціонарних процесів автоковаріація залежить лише від лагу k й $R_{xx}(0) = \sigma_x^2$. Автокореляція з лагом k є лише нормованою автоковаріацією і дорівнює:

$$p_k = \frac{M[(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})]}{\sqrt{M[(x_t - \bar{x})^2]} \sqrt{M[(x_{t+k} - \bar{x})^2]}} = \frac{M[(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - x)]}{\sigma_x^2},$$

оскільки для стаціонарного процесу $\sigma_x^2 = \text{const}$. Таким чином, k -й коефіцієнт автокореляції

$$p_k = \frac{R_{xx}(k)}{R_{xx}(0)}.$$

Коефіцієнт автокореляції має таку властивість, що $-1 \leq p_k \leq 1$.

Уявимо, що часовий ряд який генерується деякою системою, можна подати у вигляді двох компонент:

$$x_t = \xi_t + \varepsilon_t,$$

де величина ξ_t – випадковий неавтокорельований процес з нульовим математичним очікуванням й кінцевою (не обов'язково постійною) дисперсією, а величина ξ_t може бути або детермінованою функцією, або випадковим процесом, або якою-небудь їх комбінацією. Величини ε_t і ξ_t розрізняються харак-

тером впливу на значення наступних членів ряду. Змінна ε_t впливає лише на значення синхронного їй члену ряду, в той час як величина ξ_t у відомому степені визначає значення декількох чи всіх наступних членів ряду. Через величину ξ_t здійснюється взаємодія членів ряду; таким чином, в ній міститься інформація про систему, необхідна для отримання прогнозів. Назвемо величину ξ_t рівнем ряду в момент t , а закон еволюції рівня в часі – *трендом*. Таким чином, тренд може бути виражений як детермінованою, так і випадковою функціями, або їх комбінацією. Стохастичні тренди мають, наприклад, ряди з випадковим рівнем або випадковим стрибкоподібним характером зміни (випадкові процеси хвильової структури).

Наведемо приклад детермінованого тренду 2-го порядку:

$$\xi_t = a_1 + a_2 t + a_3 t^2,$$

де a_1, a_2, a_3 — постійні коефіцієнти; t — час.

Приклад випадкового тренду:

$$\xi_t = \xi_{t-1} + u_t = \xi_0 + \sum_{i=1}^t u_i$$

де ξ_0 — початкове значення; u_t — випадкова змінна.

Приклад тренду змішаного типу:

$$\xi_t = a_1 + a_2 t + u_t + q u_{t-1} + b \sin \omega t,$$

де a_1, a_2, q, b, ω - постійні коефіцієнти; u_t — випадкова змінна.

Відомо велику кількість визначень рівня і тренду ряду (див. [91, с.16]). Існуючі поняття тренду суперечливі і носять умовний характер. Кожне з цих означень скоріше вказує на окремий спосіб оцінювання тренду, а не на його сутність. Дуже часто під трендом розуміють детерміновану складову процесу, що значно збіднює вміст терміна й перешкоджає його використанню для аналізу часових рядів в загальному випадку.

Компоненти часового ряду ξ_t і ε_t неспостережні. Вони являють собою теоретичні величини. Саме їх виділення і складає предмет аналізу часового ряду в задачі прогнозування. Оцінюють майбутніх членів ряду зазвичай роблять за прогнозною моделлю. Прогнозна модель — це модель, яка апроксимує тренд. Прогнози — це оцінки майбутніх рівнів ряду, а послідовність прогнозів для різних періодів випередження $\tau = 1, 2, \dots, k$ складає оцінку тренду.

При побудові прогнозної моделі висувається гіпотеза про динаміку величини ξ_t , тобто про характер тренду. Однак у зв'язку з тим, що впевненість у гіпотезі завжди відносна, моделі, що розглядаються, наділяються адаптивними властивостями, здатністю до корекції вихідної гіпотези або навіть до заміни її

іншою, яка більш адекватно (з точки зору точності прогнозів) відображає поведінку реального ряду.

Найпростіша адаптивна модель базується на обчисленні так званого експоненційного середнього (за Р. Брауном – ковзного середнього (moving average)).

12.2.2.2 Експоненційне згладжування

Припустимо, що досліджується часовий ряд x_t . Виявлення й аналіз тенденції динамічного ряду часто здійснюється за допомогою його вирівнювання або згладжування. Експоненційне згладжування – один з найпростіших і розповсюджених прийомів вирівнювання ряду. В його основі лежить розрахунок експоненційних середніх.

Експоненційне згладжування ряду здійснюється по рекурентній формулі, яка по суті описує марковський ітераційний процес апроксимації вихідного ряду x_t :

$$S_t = \alpha x_t + \beta S_{t-1}, \quad (12.2)$$

де S_t — значення експоненційної середньої в момент t ;

α — параметр згладжування, $\alpha = \text{const}, 0 < \alpha < 1; \beta = 1 - \alpha$.

Вираз (12.2) можна переписати таким чином:

$$S_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)S_{t-1} = S_{t-1} + \alpha(x_t - S_{t-1}).$$

Експоненційне середнє на момент t тут виражене як експоненційне середнє попереднього моменту плюс частка α -різниці поточного спостереження й експоненційного середнього минулого моменту (moving average).

Якщо послідовно використовувати це рекурентне співвідношення, то експоненційне середнє S_t можна виразити через значення часового ряду x :

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha x_t + \beta S_{t-1} = \alpha x_t + \alpha \beta x_{t-1} + \beta^2 S_{t-2} \dots = \\ &= \alpha x_t + \alpha \beta x_{t-1} + \alpha \beta^2 x_{t-2} + \dots + \alpha \beta^i x_{t-i} + \dots + \beta^N S_0 = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i x_{t-i} + \beta^N S_0, \end{aligned} \quad (12.3)$$

де N — кількість членів ряду; S_0 — деяка величина, що характеризує початкові умови для першого використання формули (12.2) при $t=1$.

Оскільки $\beta < 1$, то при $N \rightarrow \infty, \beta^N \rightarrow 0$, сума коефіцієнтів $\alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \rightarrow 1$.

Тоді

$$S^i = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i x_{t-1}.$$

Таким чином, величина S_t є зваженою сумою всіх членів ряду. Причому ваги падають експоненційно залежно від давності («віку») спостереження. Це і

пояснює, чому величина S_t названа експоненційним середнім. Якщо, наприклад, $\alpha = 0.3$, то поточне спостереження буде мати вагу 0.3, а ваги попередніх даних складуть відповідно 0,21; 0,147; 0,103 і т.д.

Розглянемо ряд, згенерований моделлю

$$x_t = a_1 + \varepsilon_t,$$

де $a_1 = const$; ε_t – випадкові неавтокорельовані відхилення, або шум з середнім значенням 0 і дисперсією σ^2 .

Застосуємо до нього процедуру експоненційного згладжування (12.2). Тоді

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i x_{t-1} = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (a_1 + \varepsilon_{t-1}) = a_1 + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-1}.$$

Знайдемо математичне очікування

$$M(S_t) = M(x_t) = a_1$$

і дисперсію

$$D(S_t) = M[(S_t - a_1)^2] = M[(\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-1})^2] = \alpha^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \sigma^2 = \frac{\alpha}{2 - \alpha} \sigma^2. \quad (12.4)$$

Оскільки $0 < \alpha < 1$, то $D(S_t) < D(x_t) = \sigma^2$.

Таким чином, експоненційне середнє S_t має те ж математичне очікування, що й ряд x , але меншу дисперсію. Як видно з (12.4), при високому значенні α дисперсія експоненційного середнього несуттєво відрізняється від дисперсії ряду x_t . Чим менше α , тим більшою мірою скорочується дисперсія експоненційного середнього. Відповідно, експоненційне згладжування можна розглядати як фільтр, на вхід якого у вигляді потоку послідовно надходять члени вихідного ряду, а на виході формуються поточні значення експоненційного середнього. І чим менше α , тим більшою мірою фільтруються, приглушуються коливання вихідного ряду.

Після появи робіт Р. Брауна експоненційне середнє часто використовується для короткострокового прогнозування. У цьому випадку припускається, що ряд генерується моделлю

$$x_t = a_{1,t} + \varepsilon_t,$$

де $a_{1,t}$ – середній рівень ряду, що варіюється в часі; ε_t – випадкові неавтокорельовані відхилення з нульовим математичним очікуванням і дисперсією σ^2 .

Прогнозна модель (предиктор) має вигляд

$$\hat{x}_t(t) = \hat{a}_{1,t},$$

де $\hat{x}_t(t)$ — прогноз, зроблений в момент t на τ одиниць часу (кроків) вперед;

$\hat{a}_{1,t}$ — оцінка $a_{1,t}$ (знак \wedge над величиною тут і далі означатиме оцінку).

Оцінкою єдиного параметра моделі слугує експоненційне середнє. $\hat{a}_{1,t} = S$ Таким чином, усі властивості експоненційного середнього поширюються на прогнозну модель. Зокрема, якщо S_{t-1} розглядати як прогноз на 1 крок вперед, то у виразі (12.2) величина $x_t - S_{t-1}$ являє собою похибку цього прогнозу, а новий прогноз S_t отримується в результаті корекції попереднього прогнозу з врахуванням його помилки. В цьому і полягає сутність адаптації як процесу уточнення наступної точки прогнозу на основі поточної інформації про його попереднє значення.

При короткостроковому прогнозуванні бажано якнайшвидше відобразити зміни $a_{1,t}$ і в той же час якнайкраще «очистити» ряд від випадкових коливань.

Таким чином, з одного боку, варто збільшувати вагу більш свіжих спостережень, чого можна досягнути підвищенням α (12.3), з іншого боку, для згладжування випадкових відхилень величину α варто зменшити. Як бачимо, ці дві вимоги суперечать одна одній. Пошук компромісного значення α складає задачу оптимізації моделі.

Для з'ясування процедури розрахунку експоненційного середнього і його властивостей розглянемо числовий приклад згладжування ряду курсу акцій фірми IBM (табл. 12.1).

Результати обчислень експоненційних середніх при $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$ і $\alpha = 0.9$ наведені в табл. 12.1.

Таблиця 12.1 – Експоненційні середні

№ точки (час)	Члени ряду				№ точки (час)	Члени ряду			
		$\alpha=0.1$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.9$			$\alpha=0.1$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.9$
1	510	506,4	508,0	509,6	16	512	505,7	513,3	513,1
2	497	505,5	502,5	498,3	17	510	506,1	511,7	510,3
3	504	505,3	503,2	503,4	18	506	506,1	508,8	506,4

4	510	505,8	506,6	509,3	19	515	507,0	511,9	514,1
5	509	506,1	507,8	509,0	20	522	508,5	517,0	521,2
6	503	505,8	505,4	503,6	21	523	509,9	520,0	522,8
7	500	505,2	502,7	500,4	22	527	511,6	523,5	526,6
8	500	504,7	501,4	500,0	23	523	512,8	523,2	523,4
9	500	504,2	500,7	500,0	24	528	514,3	525,6	527,5
10	495	503,3	497,8	495,5	25	529	515,8	527,3	528,9
11	494	502,4	495,9	494,2	26	538	518,0	532,7	537,1
12	499	502,0	497,5	498,5	27	539	520,1	525,8	538,8
13	502	502,0	499,7	501,2	28	541	522,2	538,4	540,8
14	509	502,7	504,4	508,3	29	543	524,3	540,7	542,8
15	525	505,0	514,7	523,3	30	541	525,9	540,9	541,2

Визначимо S_0 як $\frac{1}{5} \sum_{i=0}^5 x_i = \frac{1}{5}(510 + 497 + 504 + 510 + 509) = 506$.

Подальші обчислення при $\alpha = 0.1$ виглядають так:

$$S_1 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)S_0 = 0.1 \times 510 + 0.9 \times 506 = 506.4;$$

$$S_2 = \alpha x_2 + (1 - \alpha)S_1 = 0.1 \times 497 + 0.9 \times 506.4 = 505.46;$$

$$S_3 = \alpha x_3 + (1 - \alpha)S_2 = 0.1 \times 504 + 0.9 \times 505.46 = 505.31$$

і т. д.

На рис. 12.11 зображений графік динаміки часового ряду й експоненційних середніх при $\alpha = 0.1$ і $\alpha = 0.5$. На графіку наочно проявляється вплив величини α на рухливість експоненційного середнього.



Рисунок 12.11 – Експоненційне згладжування часового ряду

Експоненційне згладжування являє собою найпростіший варіант самонавчальної моделі. Обчислення прості і виконуються ітеративно. Вони потребують навіть менше арифметичних операцій, ніж ковзне середнє, а масив минулої інформації зменшений до одного значення S_{t-1} . Таку модель будемо називати адаптивною експоненційного типу, а величину α – параметром адаптації. Дослідімо її властивості.

12.2.2.3 Початкові умови експоненційного згладжування

Експоненційне вирівнювання завжди потребує попереднє значення експоненційного середнього. Коли процес тільки починається, повинна бути певна величина S_0 , яка може бути використана як значення, що передувало S_1 . Якщо є минулі дані до моменту початку вирівнювання, то за початкове значення S_0 можна використовувати арифметичне середнє всіх наявних точок або якої-небудь їх частини. Коли для такого оцінювання S_0 немає даних, необхідне передбачення початкового рівня ряду.

Передбачення може бути зроблене, виходячи з апріорних знань про процес або на основі його аналогії з іншими процесами. Після k кроків вага, надана початковому значенню, дорівнює $(1 - \alpha)^k$. Якщо є впевненість в справедливості початкового значення S_0 , то можна коефіцієнт α взяти малим. Якщо такої впевненості немає, то параметру α варто надати більше значення, з таким розрахунком, щоб вплив початкового значення швидко зменшився. Однак велике значен-

ня α , як це впливає з (12.4), може стати причиною великої дисперсії коливань S_t . Якщо необхідно згасити ці коливання, то після достатнього віддалення від початкового моменту часу величину α можна зменшити.

Розглянемо роль параметра α в початковий період згладжування у випадку, коли немає впевненості в справедливості вибору початкової величини S_0 .

Таблиця 12.2 – Зміна ваг в початковий період часу при експоненційному згладжуванні з $\alpha=0,1$

Ітерація	Вага початкової величини	Вага першого члена ряду	Вага другого члена ряду	Вага третього члена ряду	Вага четвертого члена ряду
1	0,900	0,100			
2	0,810	0,090	0,100		
3	0,729	0,081	0,090	0,100	
4	0,656	0,073	0,081	0,090	0,100

Початкова величина S_0 , при збільшенні кількості ітерацій, протягом довгого часу має надмірну вагу. Навіть після 20 ітерацій вага S_0 дорівнює 0,122, що означає, що йому дається все ще більша вага, ніж будь-якому іншому члену ряду. Таким чином, у цьому випадку отримання прогнозів за експоненційним середнім, що побудоване на малому відрізку ряду (вибірці), супроводжується великими помилками. Для того, щоб елімінувати надлишкову вагу, надану початковій величині S_0 , Р. Вейд запропонував модифікувати процедуру згладжування таким чином.

Для вихідного моменту часу задається

$$S'_0 = \alpha S_0,$$

$$S'_1 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)S'_0 = \alpha x_1 + \alpha(1 - \alpha)S_0,$$

де S_0 – як і раніше, початкова оцінка рівня ряду.

Оскільки коефіцієнти α і $\alpha(1 - \alpha)$ в сумі тепер не дають 1, то варто використовувати множник, який дорівнює одиниці, поділений на суму коефіцієнтів. Таким чином, модифікованим експоненційним середнім для $t=1$ буде

$$S_1 = S'_1 \frac{1}{\alpha + \alpha(1 - \alpha)} = \left[\alpha x_1 + (1 - \alpha)S'_0 \right] \frac{1}{\alpha + \alpha(1 - \alpha)}$$

і взагалі

$$S_t = S'_0 \frac{1}{\sum_{i=0}^t \alpha(1-\alpha)^i} = \left[\alpha x_1 + (1-\alpha)S'_t \right] \frac{1}{\sum_{i=0}^t \alpha(1-\alpha)^i}.$$

Таблиця 12.3 – Зміна ваг в початковий період часу при $\alpha=0,1$ в модифікованій моделі

Ітерація	Вага початкової величини	Вага першого члену ряду	Вага другого члену ряду	Вага третього члену ряду	Вага четвертого члену ряду
1	0,474	0,526			
2	0,299	0,332	0,369		
3	0,212	0,236	0,262	0,291	
4	0,160	0,178	0,198	0,220	0,224

З табл. 12.3 можна помітити, що сутність цього методу полягає в тому, щоб забрати надлишкову вагу від ваги, що надається початковому значенню S_0 , і розподілити її пропорційно по всіх членах ряду. Прогнози, що отримуються за відповідною модифікованою моделлю, базуються більшою мірою на фактичних даних, ніж на попередній оцінці S_0 навіть при малих вибірках. Для того, щоб скоротити час обчислень, доцільно повернутись до звичайного експоненційного згладжування, коли сума коефіцієнтів $\sum_{i=0}^t \alpha(1-\alpha)^i$ наближається до 1. На основі емпіричного аналізу рекомендується здійснювати такий перехід при сумі коефіцієнтів 0,995. При заданому значенні α можна наперед визначити, на якому кроці варто повернутись до звичайної моделі.

12.2.2.4 Вибір постійної згладжування

Вибору величини постійної згладжування варто приділяти особливу увагу. Пошуки повинні бути направлені на відшукування підстав для вибору найкращого значення. Потрібно враховувати умови, при яких ця величина повинна приймати значення, близькі то одному крайньому значенню, то іншому. Неважко помітити, що при $\alpha=0$, $S_t = S_0$ спостерігається випадок абсолютної фільтрації й повної відсутності адаптації, а при $\alpha=1$ приходимо до так званої найвної моделі $\hat{x}_t(t) = S_t = x_t$, відповідно до якої прогноз на будь-який строк дорівнює поточному, фактичному значенню ряду. На практиці ця модель через простоту користується особливою популярністю.

Вище вже відмічалось, що постійна згладжування характеризує швидкість реакції моделі $\hat{x}_t(t) = S_t$ на зміни рівня процесу, але одночасно визначає і здатність системи згладжувати випадкові відхилення. Тому величині α варто надавати те чи інше проміжне значення між 0 і 1 залежно від конкретних властивостей динамічного ряду.

Як задовільний компроміс рекомендується брати її в межах від 0,1 до 0,3. Ця рекомендація не критично повторюється в ряді робіт. Між тим в [95] показано, що найкращі результати отримуються при $\alpha = 0,9$. Однак, як правило, якщо в результаті випробувань виявлено, що найкраще значення константи α близьке до 1, варто перевірити законність вибору моделі даного типу. Часто до великих значень α приводить наявність в досліджуваному ряді яскраво виражених тенденцій або сезонних коливань (висока персистентність процесу, коли показник Хьорста близький до 1 [11,22]). В цьому випадку для отримання ефективних прогнозів необхідна інша модель.

Зрозуміло, що найкраще значення α в загальному випадку повинне залежати від строку прогнозування τ . Для кон'юнктурних прогнозів більшою мірою повинна враховуватись свіжа інформація. При збільшенні періоду випередження τ більш пізня інформація, що відображає останню кон'юнктуру, повинна, скоріш за все, мати дещо меншу вагу, ніж у випадку малих τ . Для того, щоб згладити кон'юнктурні коливання, варто більшою мірою враховувати інформацію за минулі періоди часу. Для проведення подібного аналізу вводять поняття середнього віку даних. Вік поточного спостереження дорівнює 0, вік попереднього спостереження дорівнює 1 і т. д. Середній вік – сума зважених віків даних, використаних для підрахунку згладженої величини. Причому віки мають ті ж ваги, що і відповідна інформація. При експоненційному вирівнюванні вага, надана точці з віком k , дорівнює $\alpha\beta^k$, де $\beta = 1 - \alpha$, і середній вік інформації дорівнює:

$$k = 0 \times \alpha + 1 \times \alpha\beta + 2 \times \alpha\beta^2 + \dots = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} k\beta^k = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким чином, чим менше α , тим більший середній вік (ступінь забуття) інформації. Для кон'юнктурних прогнозів значення α , як правило, треба брати більшим, а для більш довгострокових – меншим. Це положення ілюструє рис. 12.12, на якому відображена залежність стандартної помилки прогнозування, яка, зазвичай, приймається за показник точності, від α . Однак характер залежностей, аналогічних тим, що зображені на рисунку, варто вивчати спеціально в кожному конкретному випадку.

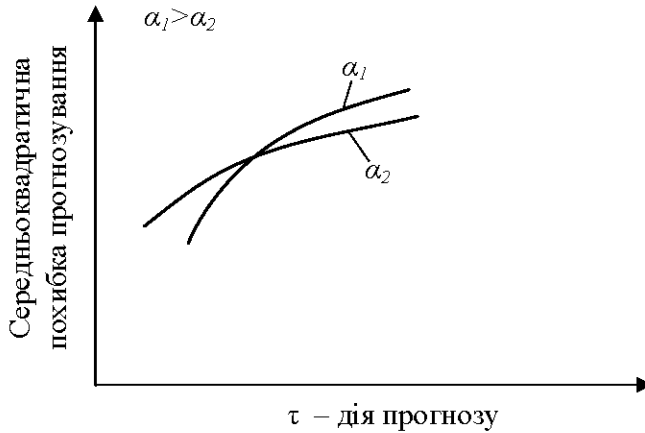


Рисунок 12.12 – Приблизна залежність середньоквадратичної похибки прогнозу від величини постійної згладжування α і періода випередження τ

Теоретичний аналіз проблеми вибору постійної згладжування при використанні найпростішої експоненційної моделі для прогнозування стаціонарного процесу з функцією вигляду $p_k = p_1^k$, де p_1 – коефіцієнт автокореляції при лагу $k = 1$, проведений Д. Р. Коксом і Дж. Д. Кохеном.

Показано, що мінімум середнього квадрата похибки при прогнозуванні такого ряду на 1 крок вперед ($\tau = 1$) буде при

$$\alpha_{opt} = \begin{cases} \frac{3p_1 - 1}{2p_1}, & \frac{1}{3} < p_1 \leq 1; \\ 0, & -1 \leq p_1 \leq \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (12.5)$$

Відповідна дисперсія похибки прогнозу при цьому:

$$D_e = \begin{cases} \frac{8p_1(1-p_1)}{(1+p_1)^2}, & \frac{1}{3} < p_1 \leq 1; \\ \sigma_x^2, & -1 \leq p_1 \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Табл. 12.4 показує співвідношення між p_1 , α_{opt} і точністю прогнозування на 1 крок вперед.

Таблиця 12.4 – Співвідношення між $p_1, \alpha_{opt}, D_e / \sigma_x^2$ при прогнозуванні стаціонарного процесу з $p_k = p_1^k$ по моделі експоненційного згладжування $\tau = 1$

p_1	α_{opt}	D_e / σ_x^2	p_1	α_{opt}	D_e / σ_x^2
$\leq 1/3$	0	1	0,7	0,786	0,581
0,4	0,250	0,980	0,8	0,875	0,395
0,5	0,500	0,889	0,9	0,944	0,199
0,6	0,667	0,750	0,95	0,974	0,100

Табл. 12.5 показує, що для даної p_1 величина D_e при $\tau = 1$ слабо залежить від α , так що точність прогнозу в певному околі α_{opt} нечутлива до вибору постійної згладжування.

Результат (12.5) означає, що якщо $p_1 > \frac{1}{3}$, то при відповідному виборі величини α експоненційне середнє у визначеній мірі відображає коливання, пов'язані з сильною автокореляцією.

Таблиця 12.5 – D_e / σ_x^2 як функція від α при $p_1 > \frac{1}{3}$

α	$p_1 = 0,4$	$p_1 = 0,7$	$p_1 = 0,9$	α	$p_1 = 0,4$	$p_1 = 0,7$	$p_1 = 0,9$
1	1,200	0,600	0,200	0,4	0,987	0,647	0,272
0,9	1,136	0,587	0,200	0,3	0,980	0,692	0,318
0,8	1,087	0,581	0,203	0,2	0,980	0,758	0,397
0,7	1,049	0,584	0,211	0,1	0,987	0,853	0,554
0,6	1,020	0,595	0,223	0	1,000	1,000	1,000
0,5	1,000	0,615	0,242	α_{opt}	0,980	0,581	0,200

Певним керівництвом при цьому може слугувати табл. 12.6, яка характеризує дисперсії похибок, отриманих при прогнозуванні стаціонарних процесів з $p_k = p_1^k$, де $p_1 \leq \frac{1}{3}$. З таблиці видно, що при $p_1 < 0$ можна отримати небагато, припускаючи b менше 0,1...0,2. В загальному, очевидно, що якщо $p_1 < 0$, то найпростіша модель експоненційного типу не є хорошим предиктором.

Якщо $\tau > 1$, то суттєво підвищується критична величина, $p_{1крит}$ нижче якої оптимальне значення α дорівнює 0. Цей факт ілюструє табл. 12.7.

Таблиця 12.6 – Дисперсія похибки прогнозу для стаціонарного процесу з $p_k = p_1^k$, де $p_1 \leq \frac{1}{3}, \tau = 1$

α	D_e / σ_x^2				
	$p_1 = 1/3$	$p_1 = 1/10$	$p_1 = 0$	$p_1 = -1/4$	$p_1 = -1/2$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,05	1,001	1,020	1,026	1,036	1,043
0,10	1,002	1,041	1,053	1,074	1,089
0,20	1,011	1,087	1,111	1,157	1,190
0,30	1,022	1,139	1,176	1,252	1,307
0,40	1,042	1,197	1,250	1,359	1,442
0,50	1,067	1,263	1,333	1,481	1,600

Таблиця 12.7 – Залежність $p_{1крит}$ від τ

τ	1	2	3
$p_{1крит}$	0,333	0,516	0,821

Рис. 12.13 показує стандартну похибку прогнозування для всіх значень постійної згладжування у випадку стаціонарного процесу з сильною автокореляцією $p_k = 0.9^{|k|}$, тобто автоковаріацією $R_{xx}(k) = \sigma_x^2 0.9^{|k|}$. При цьому пунктирна лінія виділяє геометричне місце точок розв'язку, які мінімізують похибку прогнозування. Звідси можна зробити висновок, що якщо дані сильно корельовані і період випередження τ малий, то згладжувати не варто, а доцільно в якості прогнозу використовувати найбільш пізні спостереження.

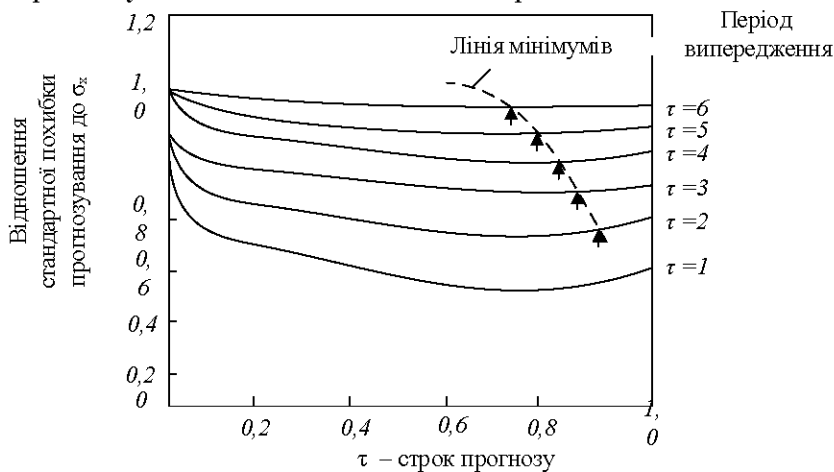


Рисунок 12.13 – Вплив α на точність прогнозування при однократному експоненційному згладжуванні даних з $p_k = 0.9^{|k|}$

12.2.2.5 Формування ансамблів моделей-предикторів

В наш час існує достатньо широкий спектр інструментів інтелектуального аналізу даних для вирішення задач прогнозування: від традиційних методів, подібних розглянутому вище методу експоненційного середнього (ковзного середнього за Р. Брауном), класичних методів статистичного аналізу, розглянутих в розділі 2, до сучасних інтелектуальних методів обробки даних, які використовують дерева рішень, нейро- і нейро-фазі мережі, логістичну регресію і т. д.

Разом з тим різноманітність алгоритмів вилучення знань (Data Mining) говорить про те, що не існує одного універсального методу для вирішення всіх задач. Крім того, використання різних інструментів аналізу й моделювання до одного і того ж набору даних може переслідувати різні цілі: або побудувати спрощену, прозору модель, яка легко інтерпретується, на шкоду точності, або побудувати більш точну, але і більш складну, а значить модель, яка менше інтерпретується.

Таким чином, однією з актуальних задач сучасного підходу до обробки даних, і в тому числі до прогнозування є знаходження компромісу між такими показниками, як точність, складність і здатність до інтерпретування.

Більшість дослідників надають перевагу отриманню більш точних результатів, так як для кінцевих користувачів поняття прозорості суб'єктивне. Точність результатів залежить від якості вихідних даних, предметної області й використовуваного методу аналізу даних.

Отримання більш точних результатів тим більш актуальне, оскільки за останні роки значно зріс інтерес до точності моделей Data Mining, оснований на інтелектуальних методах навчання, за рахунок поєднання зусиль декількох методів і створення ансамблів моделей-предикторів, що дозволяє підвищити якість вирішення аналітичних задач. Під навчанням ансамбля моделей розуміється процедура навчання кінцевого набору базових класифікаторів, результати прогнозування яких згодом об'єднуються і формується прогноз агрегованого класифікатора.

При формуванні ансамбля моделей необхідно вирішити три основні задачі:

- 1) обрати базову модель;
- 2) визначити підхід до використання навчальної множини;
- 3) вибрати метод комбінування результатів.

В силу того, що ансамбль – це агрегована модель, яка складається з окремих базових моделей, то при його формуванні можливі дві альтернативи:

- 1) ансамбль складається з базових моделей одного типу, наприклад, тільки з дерев рішень, тільки з нейронних мереж і т. д.;
- 2) ансамбль складається з моделей різного типу – дерев рішень, нейронних мереж, моделей регресії і т. д.

З іншого боку при побудові ансамбля використовується навчальна множина, для використання якої існує два підходи:

- перевибирання, тобто з вихідної навчальної множини витягується декілька підвбірок, кожна з яких використовується для навчання однієї з моделей ансамбля;
- використання однієї навчальної множини для навчання всіх моделей ансамбля.

В свою чергу, для комбінування результатів, виданих окремими моделями, використовують три основних способи:

- 1) голосування – вибирається той клас, який був виданий простою більшістю моделей ансамбля;
- 2) зважене голосування – для моделей ансамбля встановлюються ваги, з урахуванням яких виноситься результат;
- 3) усереднення (зважене або незважене) – вихід всього ансамбля визначається як просте середнє значення виходів всіх моделей, при зваженому усередненні виходи всіх моделей множаться на відповідні ваги.

Очевидно, що наведене вище ілюструє окремий випадок використання методів багатокритеріального аналізу, зокрема, методу аналізу ієрархій Т. Сааті.

Разом з тим, дослідження в сфері синтезу ансамблів моделей в ІАД (Data Mining) стали проводитись відносно недавно і мають свої особливості і свою термінологію. На даний момент в ІАД розроблено вже багато різних методів й алгоритмів формування ансамблів моделей, серед яких найбільшого поширення набули такі, як бегінг (bagging), бустинг (boosting) і стекінг (stacking).

Алгоритм бегінгу

Головна ідея бегінгу полягає в реалізації паралельного навчання на декількох різних вибірках однакового розміру, отриманих шляхом випадкового відбору прикладів з вихідного набору даних. Алгоритм бегінгу складається з таких кроків. Спочатку формується декілька вибірок шляхом випадкового відбору з вихідної множини даних. Потім на основі кожної вибірки будується класифікатор, і виходи всіх класифікаторів агрегуються з використанням голосування чи простого усереднення. Очевидно, що точність передбачення побудованих за допомогою бегінгу комбінованих предикторів значно вища, ніж точність окремих моделей.

Алгоритм бустингу

Основна ідея бустингу полягає в побудові ланцюжка моделей, при цьому кожна наступна навчається на прикладах, на яких попередня модель припустилась помилки. Порівняно з бегінгом *бустинг є більш складною процедурою* але у багатьох випадках працює ефективніше. Бустинг починає створення ансамблю на основі єдиної вихідної множини, але, на відміну від бегінгу, кожна нова модель будується на основі результатів попередньої, тобто моделі будуються послідовно. Бустинг створює нові моделі таким чином, щоб вони доповнювали раніше побудовані, виконували ту роботу, яку не змогли виконати інші моделі на попередніх кроках. І зрештою, остання відмінність бустингу від бегінгу полягає

в тому, що всім побудованим моделям залежно від їх точності, присвоюються ваги. Бустинг-алгоритм, насправді належить до ітераційних алгоритмів індуктивного моделювання. Він вчиться розпізнавати приклади на границях класів. Кожному запису даних на кожній ітерації алгоритму присвоюється вага. Перший класифікатор вчиться на всіх прикладах з рівними вагами. На кожній наступній ітерації ваги вибираються відповідно до класифікованих прикладів, тобто ваги правильно класифікованих прикладів зменшуються, а неправильно класифікованих – збільшуються. Відповідно, пріоритетними для наступного класифікатора стануть неправильно розпізнані приклади, навчаючись на яких новий класифікатор буде виправляти помилки класифікатора на попередній ітерації.

Алгоритм стекінгу

Стекінг – один із способів створення складових моделей. Даний метод був розроблений нещодавно, тому він менш відомий, ніж бегінг і бустинг. Частково це пов'язано зі складністю теоретичного аналізу, а частково з тим, що загальна концепція використання даного методу поки - що відсутня – основна ідея може бути використана у найрізноманітніших варіантах. На відміну від бегінгу і бустингу стекінг зазвичай застосовується до моделей, побудованих за допомогою різноманітних алгоритмів, що навчаються на однакових даних. Стекінг вводить концепцію метанавчання, тобто намагається навчити кожний класифікатор, використовуючи алгоритм метанавчання, який дозволяє виявити кращу комбінацію виходів базових моделей.

12.3. Модель як складова задачі оптимального оцінювання

Задачі оцінювання дозволяють використовувати інформацію про взаємозв'язки між параметрами моделі для зменшення похибок вимірювань і підвищення точності отриманої вимірювальної інформації. На основі співвідношень математичної моделі можна:

- а) розрахувати невиміряні параметри;
- б) виявити та усунути “трубі” помилки і знизити “нормальні” помилки вимірювань;
- в) визначити якість функціонування каналів збору даних.

Розглянемо постановку задачі оцінювання.

Нехай математична модель системи (об'єкта, процесу) описується системою n рівнянь вигляду:

$$N(\mathbf{Z}) = 0, \quad (12.5)$$

де \mathbf{Z} – повний вектор параметрів системи розмірності $r > n$.

Нехай деякі параметри системи *вимірюються*, позначимо їх через $\tilde{\mathbf{V}}$. В загальному випадку взаємозв'язок між параметрами моделі \mathbf{Z} і вектором виміряних даних $\tilde{\mathbf{V}}$ подають у вигляді:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \xi_{\tilde{\mathbf{V}}}, \quad (12.6)$$

де $\tilde{\mathbf{V}}$ – вектор виміряних параметрів розмірності l ; \mathbf{Z} – вектор дійсних значень параметрів розмірності r ; $\xi_{\tilde{\mathbf{V}}}$ – вектор похибок вимірювань розмірності l .

Досить часто вектор параметрів \mathbf{Z} вдається розбити на вектор незалежних параметрів X і вектор залежних параметрів Y таких, що вектор Y виражається в явному вигляді через X :

$$Y = N(X). \quad (12.7)$$

Рівняння (12.7) є моделлю системи.

З урахуванням (12.7) вектор виміряних даних $\tilde{\mathbf{V}}$ можна подати як функцію лише незалежних параметрів:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}(X) + \xi_{\tilde{\mathbf{V}}}. \quad (12.8)$$

Задача оцінювання полягає у пошуку таких значень параметрів вектора X , які задовольняють рівняння математичної моделі (12.5) і є найбільш близькими в розумінні деякого критерію до виміряних значень $\tilde{\mathbf{V}}$. Як критерій близькості найчастіше беруть квадратичний критерій, а задачу оцінювання зводять до мінімізації функції вигляду

$$\varphi = \sum_{i=1}^l \frac{[\tilde{v}_i - \mathbf{v}(X)]^2}{\sigma_{\tilde{v}_i}^2}, \quad (12.9)$$

або в матричному вигляді

$$\Phi(X) = [\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}(X)]^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} [\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}(X)], \quad (12.10)$$

де $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ – задана коваріаційна матриця, елементами головної діагоналі якої є дисперсії похибок вимірювань $\sigma_{\tilde{v}_i}^2$.

Якщо вектор параметрів \mathbf{Z} моделі (12.5) не вдається розбити на вектори \mathbf{X} і \mathbf{Y} такі, що $Y = N(X)$, або свідомо вимірюються додаткові параметри, то задачу оцінювання подають у вигляді такої *оптимізаційної задачі*:

знайти мінімум функції

$$\Phi(\mathbf{Z}) = [\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}(\mathbf{Z})]^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} [\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}(\mathbf{Z})]$$

при обмеженнях

$$\mathbf{U}(\mathbf{Z}) = 0.$$

Для пошуку мінімуму функції можна використати будь-які методи безумовної оптимізації, однак найчастіше використовують ітераційну формулу методу Ньютона, яка для функції (12.9) запишеться у вигляді

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{v}(X)}{\partial X} \right)^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}(X)}{\partial X} \right\}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{v}(X)}{\partial X} \right)^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}(X^{(k)})), \quad (12.11)$$

де k – індекс ітерації; $X^{(k)}$ – поточна оцінка рішення; $X^{(k+1)}$ – наступна оцінка рішення.

Після отримання оцінок вектора незалежних параметрів X оцінки вектора залежних параметрів Y можна отримати з рівнянь (12.7).

Крім оцінок параметрів, визначають також матриці:

$$\mathbf{R}_Y = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}(X)}{\partial X} \right)^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}(X)}{\partial X} \right]^{-1}, \quad (12.12)$$

$$\mathbf{R}_X = \frac{\partial Y(X)}{\partial X} \mathbf{R}_Y^{-1} \left(\frac{\partial Y(X)}{\partial X} \right)^T, \quad (12.13)$$

де похідні беруться на останній ітерації (12.11). Елементами головної діагоналі матриць \mathbf{R}_Y і \mathbf{R}_X є оцінки дисперсій σ_Y^2 і σ_X^2 , які характеризують *точність отриманих оцінок*.

12.4. Моделювання в задачах прийняття оптимальних рішень

Задача прийняття рішень є однією з найпоширеніших в багатьох галузях. Вона полягає у виборі одного розв'язку d_i з множини можливих розв'язків D на основі наявної інформації у вигляді вектора даних $\vec{x} \in X$. Розв'язок d_i в свою чергу характеризується вектором показників $d_i = [d_{i1}, \dots, d_{in}]$. Правило, яке встановлює відповідність $\vec{x} \rightarrow d_i$, називають *вирішальним правилом*. Якщо це правило формулюється у вигляді послідовності дій, які необхідні для встановлення відповідності, то його називають *вирішальним алгоритмом* $d = A(\vec{x})$. Якщо правило формалізоване у вигляді частково рекурсивної функції, то воно називається *вирішальною функцією* $d = F(\vec{x})$.

Якість розв'язання оцінюється за допомогою функціонала якості $R(X, D)$. Якщо

$$F^* : \forall X \rightarrow R^*(X, D) = \min_{F \in \Omega_F} R(X, F[X]), \quad (12.14)$$

або

$$R^*(X, D) = \max_{F \in \Omega_F} R(X, F[X]), \quad (12.15)$$

то F^* – оптимальна вирішальна функція в заданому класі.

Якість розв'язання визначається результатами функціонування об'єкта, керування яким здійснюється за допомогою цього розв'язку

$$R = M(X, D),$$

де M – модель об'єкта.

Залежно від особливостей і традицій конкретної галузі, в якій ставиться і розв'язується задача прийняття рішень, для основних понять теорії прийняття рішень використовується окрема специфічна термінологія:

- у теорії управління координати векторів множини X називають параметрами стану, рішення d_i називають управлінням, а вирішальне правило називають законом або алгоритмом управління;

- у теорії розпізнавання образів координати векторів множини X називають ознаками, рішення d_i називають образом, а вирішальне правило називають дискримінантною функцією або алгоритмом розпізнавання;

- у теорії контролю координати векторів множини X називають інформативними параметрами, рішення d_i називають зоною допуску, а вирішальне правило називають алгоритмом контролю;

- у теорії інтелектуальної поведінки координати векторів множини X називають ознаками ситуації, рішення d_i називають кроком, а вирішальне правило називають стратегією.

Прийняття рішення може здійснюватися в умовах повної або неповної визначеності вектора X .

Ситуація прийняття рішень на основі детермінованих даних характеризується повною визначеністю. На сьогоднішній день методи прийняття рішень в цих умовах розроблені досить детально і широко застосовуються на практиці. Серед них найчастіше використовуються методи оптимізації, дослідження операцій, графові моделі. Вибір методу залежить від вигляду цільової функції, кількості змінних, наявності обмежень.

В багатьох випадках процедура прийняття рішень здійснюється на основі не повністю визначених даних, причому ця невизначеність може мати різну природу. Одним з головних підходів до прийняття рішень в таких системах є системний аналіз.

Підсистема, яка реалізує вирішальний алгоритм, разом із засобами отримання необхідної інформації та налаштування (навчання) утворюють систему прийняття рішень (СПР).

Задачі прийняття рішень

Тип задачі прийняття рішення визначається залежно від факторів:

- мети прийняття рішень;
- складу СПР;
- структури СПР (сукупності інформаційних, управляючих, технологічних та інших зв'язків між підсистемами СПР);
- множини допустимих стратегій учасників СПР;
- цільових функцій підсистем СПР (критеріїв прийняття рішень);
- інформованості СПР на момент прийняття рішень;
- порядку функціонування: послідовності отримання інформації і вибору рішень підсистемами СПР.

Залежно від мети задачі прийняття рішень можна поділити на три групи:

1. Задачі впорядкування альтернатив;
2. Розподіл альтернатив за класами рішень;
3. Виділення найкращої альтернативи.

На практиці задачі останньої групи зустрічаються найчастіше, тому більшість методів прийняття рішень орієнтується на розв'язання саме цих задач. **Отже, фактично задачі прийняття рішень є задачами оптимізації, в яких модель системи є основою визначення критерію і обмежень.**

Наступною основою системи класифікацій є **метод прийняття рішень**, за яким можна виділити методи, які базуються на ситуаційних, оптимізаційних і теоретико-ігрових моделях.

Для аналізу ролі моделювання у прийнятті рішень подамо вирішальне правило у вигляді векторної вирішальної функції (у загальному випадку у неявному вигляді)

$$F(\vec{x}, \vec{d}) = 0, \quad (12.16)$$

яка може бути подана у вигляді системи рівнянь відносно параметрів рішення d

$$f_j(\vec{x}, \vec{d}) = d_j, \quad j=1, \dots, n. \quad (12.17)$$

Існуючі підходи до прийняття рішень відповідають основним методам знаходження розв'язків системи рівнянь (12.17). Ці методи можна розділити на дві великих групи:

- аналітичні або пошукові методи знаходження таких d_j , які перетворюють рівняння (12.17) на тотожність;
- знаходження таких d_j , які забезпечують екстремум функціоналу якості $R(\vec{x}, \vec{d})$ – методи оцінювання d_j .

Перша група методів відповідає ситуаційному, а друга група відповідає оптимізаційному підходу до прийняття рішень.

Різницю між ситуаційним і оптимізаційним підходами до прийняття рішень ілюструє рис. 12.14. На рисунку M – модель системи, яка дозволяє прогнозувати результат прийняття рішення – значення функціоналу якості, A – алгоритм корекції розв'язку в процесі оптимізації. При ситуаційному підході розв'язок d одразу отримується з вхідних даних X . При оптимізаційному підході розв'язок d уточнюється за допомогою алгоритму A .

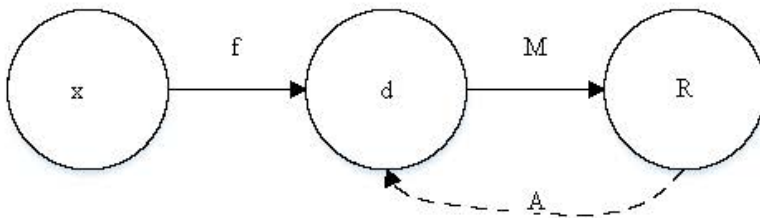


Рисунок 12.14 - Граф зв'язків основних понять теорії прийняття рішень

Методи, що базуються на теоретико-ігрових моделях, поділяються на такі, що використовують апарат: некооперативних ігор, кооперативних ігор, ігор, що повторюються, ієрархічних ігор і рефлексивних ігор.

Методи, що базуються на оптимізаційних моделях, в свою чергу, поділяються на такі, що використовують апарат: теорії ймовірностей (теорія надійності, теорія масового обслуговування, теорія статистичних рішень), теорії оптимізації – лінійне і нелінійне (а також стохастичне, цілочисельне, динамічне та ін.) програмування, оптимальне управління, дискретної математики – в основному, теорії графів (транспортна задача, задача про призначення, вибір найкоротшого шляху, календарно-мережеве планування і управління, задачі про розміщення, розподіл ресурсів на мережах та ін.).

В теорії прийняття рішень значна увага приділяється задачам прийняття рішень при багатьох критеріях, які ґрунтуються відповідно на комплексі моделей системи оскільки саме ці задачі досить часто доводиться вирішувати на

практиці. Для розв’язання цих задач успішно використовуються метод аналізу ієрархій, методи ранжування багатокритеріальних альтернатив (ELECTRE), аксіоматичні методи.

Прийняття рішень в умовах невизначеності

Найпоширенішими типами задач прийняття рішень є задачі з неповною інформацією – задачі прийняття рішень в умовах невизначеності. Відсутність конкретних даних про умови прийняття рішень може частково компенсуватися статистичними даними (наприклад, оцінкою математичного сподівання невідомого параметра) або експертною оцінкою.

Розширена класифікація методів прийняття рішень в умовах невизначеності показана на рис. 12.15.

Статистичні методи прийняття рішень

Класифікація статистичних методів прийняття рішень (ПР) показана на рис. 12.16.

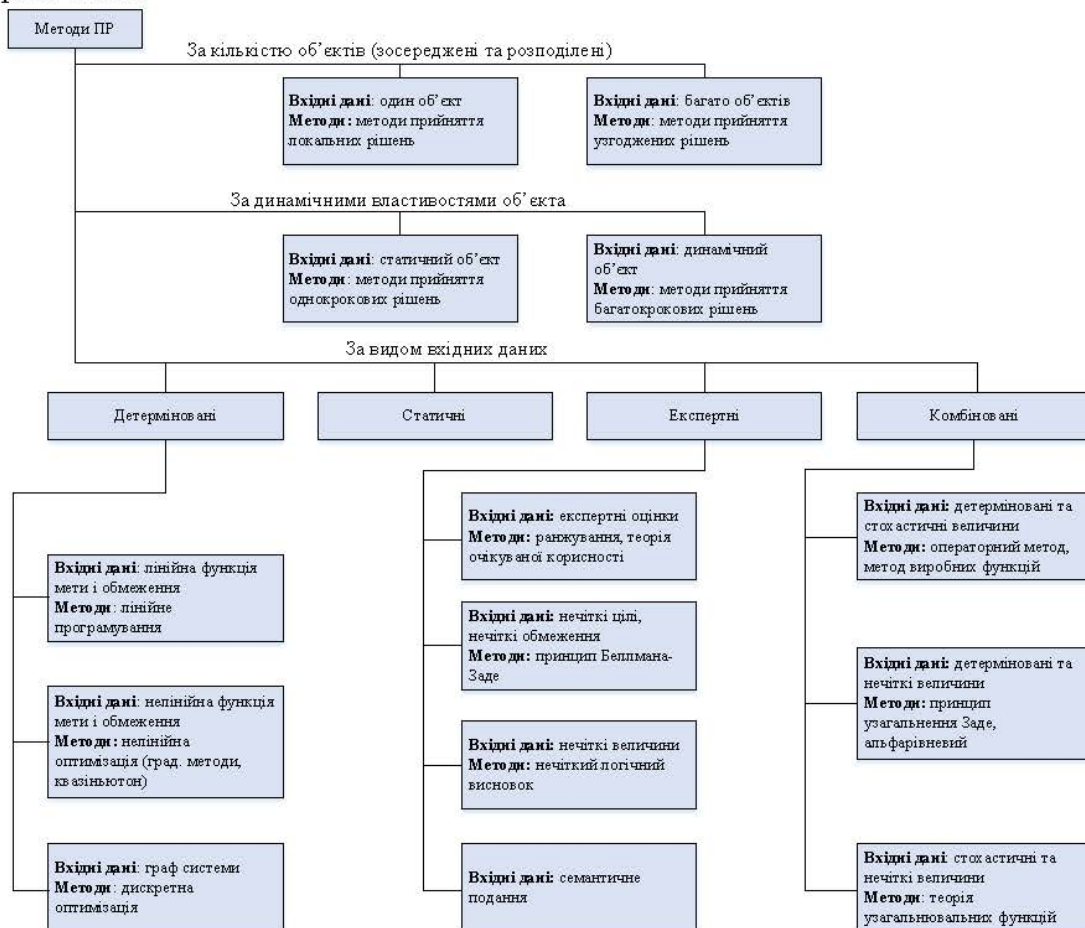


Рисунок 12.15 – Класифікація методів прийняття рішень

За характером інформації, на основі якої приймається рішення, задачі прийняття рішень на основі статистичних даних можна розділити на групи: Задачі прийняття рішень, в яких існує інформація про втрати від прийняття рішення на основі вхідних даних, але відсутні ймовірності появи цих даних;

1. Задачі прийняття рішень, в яких відомі як ймовірнісні характеристики факторів, так і втрати від прийняття рішень;

2. Задачі прийняття рішень, в яких задані ймовірності появи вхідних факторів, але відсутня інформація про втрати від прийняття рішення;

3. Задачі прийняття рішень, в яких використовуються дані про ймовірності появи альтернатив.

Результатом розв'язання задач першої групи стало створення теорії ігор, яка дозволяє знайти оптимальний розв'язок на основі мінімізації можливих втрат. Для розв'язання задач другої групи зазвичай використовується небасівська теорія статистичних рішень. Метод розв'язання задач третьої групи базуються на використанні байєсівського підходу до прийняття рішень. Задачі четвертої групи можна розв'язати за допомогою аксіом очікуваної корисності.

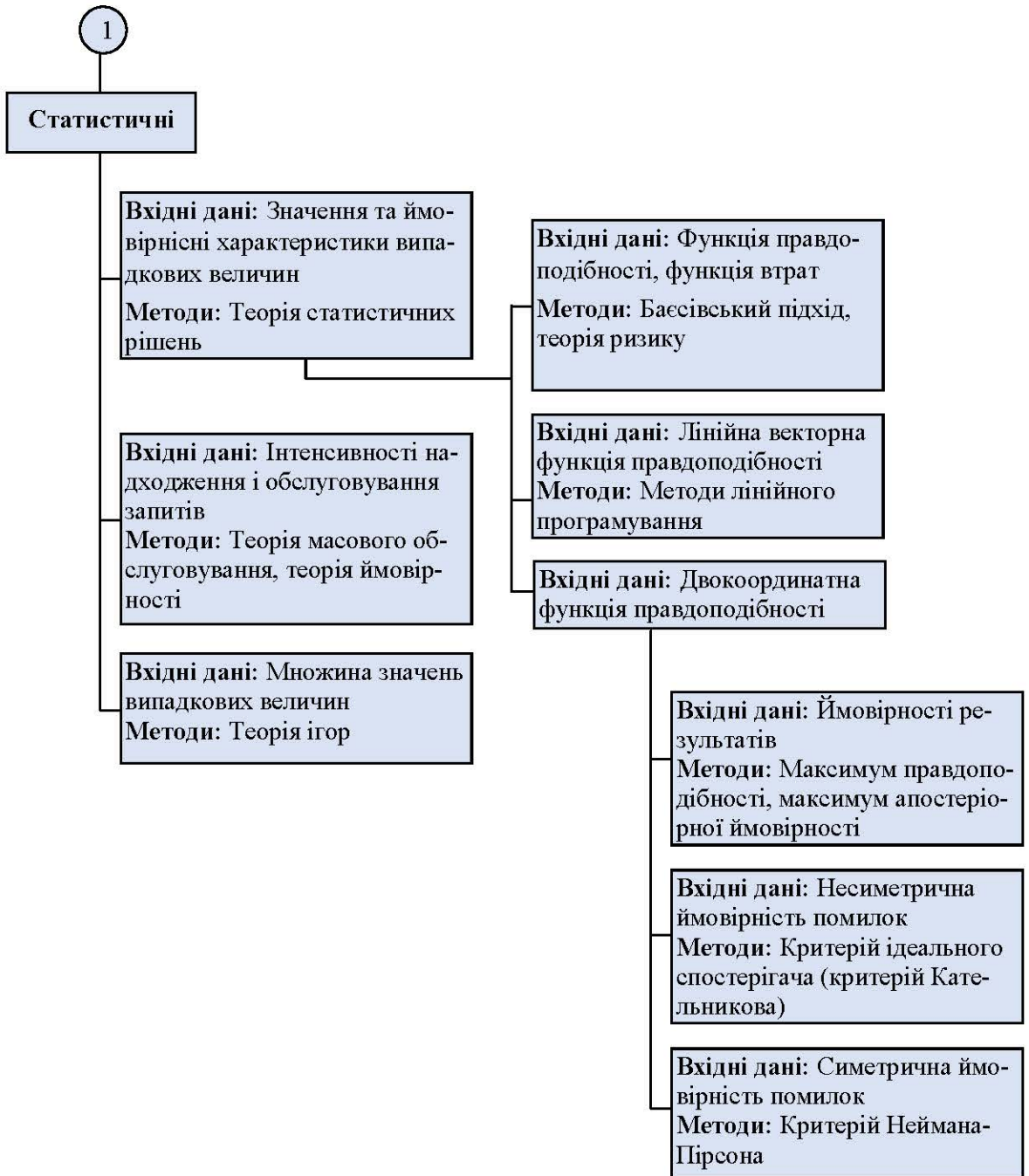


Рисунок 12.16 – Класифікація статистичних методів прийняття рішень

Експертні методи прийняття рішень

Переважає більшість методів прийняття рішень оснований на аксіомах раціональної поведінки, запропонованих Нейманом і Моргенштерном. Проте пода-

льші дослідження в цьому напрямку показали, що в ряді випадків особа, яка приймає рішення, може порушувати дані аксіоми. Найчастіше це проявляється у суб'єктивному визначенні ймовірностей появи альтернатив та бажанні усунути альтернативи, пов'язані з ризиком. Серед основних причини нераціональної поведінки було названо відсутність повної інформації про ситуацію прийняття рішення та можливе навчання людини в процесі прийняття рішення.

Одним із шляхів врахування нераціональності людини у процесі прийняття рішень є використання теорії проспектів. Дана теорія дозволяє врахувати такі аспекти поведінки особи, що приймає рішення:

1. Тенденцію присвоювати велику вагу детермінованим результатам;
2. Тенденцію зміни вподобань при переході від виграшу до втрат;
3. Тенденцію спрощення вибору шляхом вилучення спільних компонентів альтернатив.

Основна відмінність теорії проспектів від теорії раціональної поведінки полягає у використанні не ймовірності появи альтернативи, а деякої функції Π від цієї ймовірності. Дана функція має такі властивості:

1. $\Pi(0) = 0, \Pi(1) = 1$;
2. $\Pi(p) + \Pi(1 - p) < 1$;
3. При малих ймовірностях $\Pi(p) > p$;
4. $\frac{\Pi(p)}{\Pi(q)}$ ближче до одиниці при менших ймовірностях.

Використання теорії проспектів дозволяє усунути аномалії у відданні переваг людиною в процесі прийняття рішення. Дана теорія може бути використана в процесі формування бази знань для прийняття рішень в автоматизованих і автоматичних системах прийняття рішень.

В реальному світі ми неминуче зіштовхуємося з багатьма випадками, коли неможливо уникнути проблеми врахування незрозумілої або неточної інформації про відомості, явища чи події. У реальних ситуаціях прийняття рішень ця неясність досить часто пов'язана з неповною визначеністю мети, обмежень, критеріїв. В таких випадках доцільно застосовувати теорію нечітких множин.

Нечіткі дані подаються у вигляді функцій належності. Прийняття рішень на основі нечіткої інформації передбачає залучення експертів. Їх досвід застосовується при побудові систем, основаних на нечіткій логіці. Використання експертів лягло в основу методів експертного оцінювання альтернатив. За допомогою цих методів можна отримати якісні або кількісні оцінки рішень.

Задача прийняття рішень в нечітких умовах відрізняється від задачі прийняття рішень в загальному вигляді тим, що один або декілька елементів моделі прийняття рішень задаються нечіткою множиною. Необхідно вибрати рішення, яке б задовольняло нечіткі обмеження $\tilde{C} \subseteq D$, задані на множині рішень та максимізувало критерій ефективності, $\tilde{G} \subseteq Y$, заданий на множині станів системи.

Залежність стану системи від прийнятого рішення описується нечіткою моделлю $\tilde{\varphi} : D \rightarrow Y$.

Залежно від складових моделі прийняття рішення, які визначаються з певним ступенем невизначеності, можна виділити такі підходи прийняття рішень в нечітких умовах:

- прийняття рішень за принципом Белмана–Заде;
- прийняття рішень за допомогою нечіткої теорії очікуваної корисності;
- прийняття рішень за допомогою нечіткого логічного висновку (задачі ситуативного управління).

12.5. Моделювання в задачах управління проектами

12.5.1 Багатокритеріальна нечітка оцінка якості проектів

Задачу вибору проекту для фінансування в умовах обмеженості фінансових методів розглянемо як задачу багатокритеріального прийняття рішень (БКПР). Умовами рівноваги (рівноваги розподілу) ϵ , у даному випадку, вимоги до обмежень на існуючі ресурси (умови обмеженості бюджету), а також задоволення пріоритетів, які надаються окремим проектам. Під час постановки і вирішення задачі вводиться бюджетне обмеження (EC_0), чотири обмеження - відносно пріоритетності проекту (EC_1), типів проектів (EC_2), розмірів проектів (EC_3) і виконавців проектів (EC_4). Кожна із умов досягнення рівноваги між розподілом бюджетних засобів $\{EC_0, EC_1, EC_2, EC_3, EC_4\}$ призначена для врахування (збалансування) конкретних вимог і використовується для розподілення множини можливих об'єктів на декілька підмножин (підгруп). При цьому передбачається, що з кожної підгрупи буде відібрано для реалізації деяку фіксовану кількість проектів.

Процес вибору проектів ускладнюється також тим, що він має деякі нечіткі характеристики. Оскільки прийняття рішення відносно фінансування проектів, як правило, виконується членами комітетів чи рад, то для кожного з них характерна наявність суб'єктивності, неточності та невизначеності суджень, невизначеність та необґрунтованість у присвоєнні відносних вагових коефіцієнтів для критеріїв вибору. Дуже часто особа, що приймає рішення (ОПР), присвоює вагові коефіцієнти критеріям вибору у вигляді таких лінгвістичних змінних, таких як "хороший", "дуже низький", "слабкий" і т. д. У зв'язку з цим проблема вибору проектів для фінансування є складною і характеризується наявністю невизначеностей уже за своєю природою. Для вирішення цієї проблеми існують детерміновані підходи до вибору проектів на основі точних характеристик, проте вони мають занадто загальний характер і не враховують особливості ситуації та вибору в умовах значної обмеженості бюджетних ресурсів, а також тих невизначеностей, що зустрічаються при вирішенні реальних задач. Ці детерміновані підходи, які базуються на точних методах прийняття рішень та оптимізаційних процедурах, не можуть бути успішно використані в умовах наявності невизначеності та неточної інформації.

Протягом останніх років широкого застосування в методах багатокритеріального прийняття рішень отримала теорія нечітких множин (ТНМ). Існує значна кількість літератури з методів та алгоритмів розв'язання нечітких задач БКПР. Однак більшість існуючих нечітких моделей для прийняття рішень призначена лише для оцінювання та ранжування альтернативних рішень. Жодна з них не може бути використана для вирішення задачі вибору проектів в умовах наявності обмежень та пріоритетів (тобто ϵ задоволення умов рівноваги). Тому в подальшому буде запропоновано використання систематизованого підходу до

вибору проектів на основі теорії нечітких множин. Завдяки цьому можна буде більш адекватно виражати та використовувати суб'єктивну оцінку за допомогою лінгвістичних змінних, визначати більш реальні оцінки значимості того чи іншого проекту за допомогою вибраних критеріїв.

Для інтегрування в єдину систему нечітких множин та моделей буде запропоновано метод прийняття рішень на основі нечіткого багатокритеріального методу прийняття рішень, в якому використовується нечіткий індекс значимості проекту. Такий індекс дає можливість брати до уваги невизначеності, що є характерним для процесу прийняття рішень за наявності різноманітних суб'єктивних критеріїв вибору. Використавши нечіткий індекс значимості проекту, задачу багатокритеріального вибору проектів можна звести до однокритеріального вибору за допомогою однієї особи, що приймає рішення, із задоволенням умови досягнення рівноваги. Назвемо цей підхід однокритеріальним вибором з рівновагою (ОКВР). У результаті досягається задоволення бюджетних обмежень та умов рівноваги, а також максимізується корисність реалізації вибраного проекту. Ця задача буде сформульована як задача булевого програмування.

Багатокритеріальна нечітка оцінка якості проектів. Для того, щоб оцінити якість кожного проекту за допомогою обраних критеріїв вибору, розглянемо деякі аспекти, що пов'язані з вибором проекту:

- взаємозв'язки між різноманітними критеріями;
- ранжування проектів за різними критеріями вибору;
- вагові коефіцієнти для кожної альтернативи;
- агрегування рангів проектів з ваговими коефіцієнтами за всіма критеріями.

Використовуючи отриманий таким чином агрегований показник, надалі, для кожного проекту, можна вирахувати індекс значимості проекту (ІЗП), що показує, наскільки корисною є його реалізація, тобто він являє собою інтегральну оцінку проекту.

Взаємозв'язки між різноманітними критеріями вибору найкраще показати на прикладі ієрархічної структури. Для простоти наведемо приклад дворівневої ієрархічної структури. На першому рівні визначається нечітка оцінка важливості різноманітних суб'єктивних критеріїв (наприклад, необхідність та терміновість виконання проекту, принципова можливість реалізації проекту, корисність проекту та можливості отримання достатнього і реального фінансування). На другому рівні кожному проекту присвоюється рейтинг відповідно до кожного суб'єктивного критерію. Цей рейтинг проектів за кожним суб'єктивним критерієм вибору, як правило, присвоюється групою експертів, наприклад, за семизначною шкалою таких лінгвістичних змінних, як (надзвичайно хороший, дуже хороший, середній, нижче середнього, поганий, дуже поганий).

Для присвоєння значень ваговим коефіцієнтам можна застосувати метод попарного порівняння Т. Сааті, який є сумісним з аналітичним ієрархічним про-

цесом і достатньо широко використовується на практиці. Однак для визначення ступеня нечіткості індивідуальних суджень кожної особи, яка приймає рішення відносно важливості критеріїв, використаємо 5-значну шкалу лінгвістичної змінної "Важливість": Важливість = {дуже важливий, важливий, середньої важливості, не важливий, дуже низької важливості}. Використовуючи таку модель, можна взяти до уваги нечіткість ОІР під час визначення рейтингу проекту, а також визначити альтернативу між різними критеріями оцінювання у процесі агрегування. Все це допомагає структурувати процесу прийняття рішень та покращенню якості рішення, що приймається групою ОІР або окремим експертом.

Наприклад, характеристику 7 (якість) проекту можна визначити за допомогою змінної "Якість" та змінної "Важливість", які є лінгвістичними, а не числовими. Лінгвістичні змінні досить часто характеризують саме трикутними функціями належності. Якщо ввести позначення Якість = S, то відповідно до наведеного вище переліку значень змінної "Якість" можна записати, що $S = \{EG, VG, G, M, P, VP, EP\}$, де EG = надзвичайно хороший, VG = дуже хороший, G = хороший, M = середній, P = нижче середнього, VP = поганий, EP = дуже поганий. Якщо прийняти за основу десятибальну шкалу, то лінгвістичну змінну S можна характеризувати у діапазоні [0,10] нечіткими числами з трикутною функцією належності таким чином: EG = (9,5; 10; 10), KG = (7; 8,5; 10), G = (5,5; 7; 8,5), M = (3,5; 5; 6,5), P = (1,5; 3; 4,5), VP = (0; 1,5; 3), EP = (0; 0; 0,5). На даний час для оцінки якості проекту можна використовувати наведені лінгвістичні змінні, а не суб'єктивні оцінки ОІР. Функції належності (рис. 12.17) можна записати у вигляді:

$$EG = (9,5; 10; 10)$$

$$f_{EG}(x) = \begin{cases} 2x - 19, & 9,5 \leq x \leq 10, \\ 0, & 0 \leq x \leq 9,5; \end{cases}$$

$$VG = (7; 8,5; 10):$$

$$f_{VG}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2x - 14), & 7 \leq x \leq 8,5, \\ \frac{2}{3}(10 - x), & 8,5 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$G = (5,5; 7; 8,5)$$

$$f_G(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2x-11), & 5,5 \leq x \leq 7, \\ \frac{1}{3}(17-2x), & 7 \leq x \leq 8,5, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$G = (3,5;5;6,5).$$

$$P = (1,5;3;4,5):$$

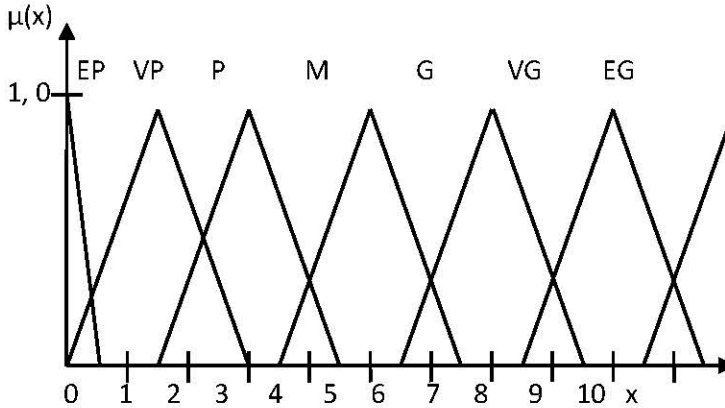
$$f_P(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2x-6), & 1,5 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{3}(9-2x), & 3 \leq x \leq 4,5, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$VP = (0;1,5;3):$$

$$f_{VP}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \leq x \leq 1,5, \\ \frac{1}{3}(6-2x), & 1,5 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

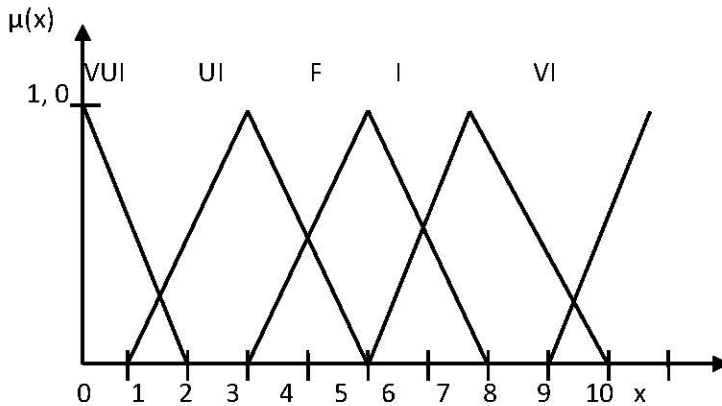
$$EP = (0;0;0,5):$$

$$f_{EP}(x) = \begin{cases} 1-20x, & 0 \leq x \leq 0,5, \\ 0, & 0 \leq x \leq 10, \end{cases}$$



Шкалу лінгвістичної змінної “Важливість проекту” розділимо на 5 значень: $W = \{VI, I, F, UI, VUI\}$, де VI = (дуже важливий), I = (важливий), F = (середньої важливості), UI = (не важливий), VUI = (дуже низької важливості). Значення лінгвістичної змінної W також будемо характеризувати функціями належності трикутного вигляду на інтервалі $[0, 10]$, тобто: $VI = (8; 10; 10)$, $I = (5; 7; 9)$, $F = (3; 5; 7)$, $UI = (1; 3; 5)$, $VUI = (0; 0; 2)$. Значення цієї змінної будуть використані для визначення величин вагових коефіцієнтів (якісних) суб’єктивних критеріїв вибору, які використовуються особами, що приймають рішення.

Форма функцій належності значень лінгвістичної змінної “Важливість” наведена на рис. 12.18, а самі функції визначаються як



$$VI = (8;10;10):$$

$$f_{VI}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-8), & 8 \leq x \leq 10, \\ 0, & 0 \leq x \leq 8, \end{cases}$$

$$I = (5;7;9):$$

$$f_I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-5), & 5 \leq x \leq 7, \\ \frac{1}{2}(9-x), & 7 \leq x \leq 9, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$F = (3;5;7):$$

$$f_F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-3), & 3 \leq x \leq 5, \\ \frac{1}{2}(7-x), & 5 \leq x \leq 7, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$UI = (1;3;5):$$

$$f_{UI}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1), & 1 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{2}(5-x), & 3 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$VUI = (0;0;2):$$

$$f_{VUI}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x), & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & 2 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Лінгвістичне значення вагового коефіцієнта можна отримати шляхом опитування ОПР із використанням шкали ранжування, що наведена на рис. 12.19, а. Оцінку якості кожного проекту відносно різних критеріїв можна отримати шляхом простого ранжування (рис. 12.19, б).

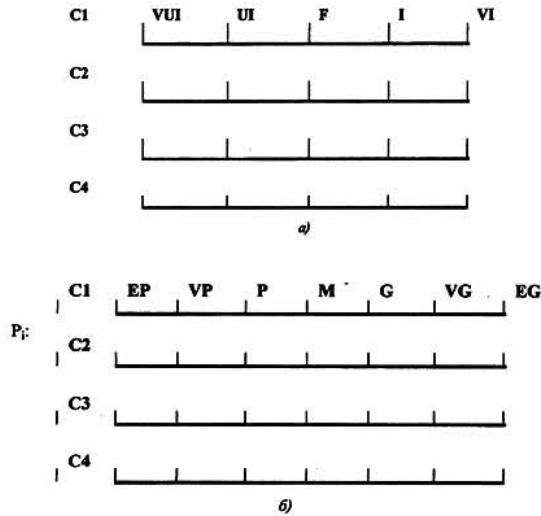


Рисунок 12.19 – Шкали для вагових коефіцієнтів та рейтингу:

а – Вагові коефіцієнти, що використовуються для визначення важливості критеріїв: VUI = дуже низької важливості, UI = неважливий, F = середньої важливості, I = важливий, VI = дуже важливий.

б – Шкали для визначення рейтингу якості кожного проекту відносно критеріїв: EP = надзвичайно низький, VP = дуже низький, P = низький, M = середній, G = хороший, VG = дуже хороший, EG - надзвичайно хороший.

Агрегування оцінок осіб, які приймають рішення

Припустимо, що уже є нечіткі оцінки від ОПР щодо якості та важливості проектів відносно обраних критеріїв, і ці оцінки необхідно об'єднати у спільний агрегований нечіткий індекс значимості проекту, що буде служити узагальненою мірою необхідності виконання і важливості кожного альтернативного проекту. У технічній літературі описано деякі підходи до вирішення цієї задачі. Одним із простих (проте виправданих) підходів до агрегування є усереднення набору оцінок. Для реалізації цього методу необхідно скористатися нечітким оператором отримання середнього.

Розглянемо задачу вибору проекту з n альтернативними варіантами, у вирішенні якої беруть участь k ОПР за допомогою m критеріїв. Нехай $S_{ijt} = (S_{ijt}^l, S_{ijt}, S_{ijt}^r) \in S, i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m; t=1,2,\dots,k$ – це лінгвістичний рейтинг, який був присвоєний особою, що приймає рішення, проекту P_i за критерієм C_j . Також припустимо, що $W_{jt} = (W_{jt}^{(l)}, W_{jt}, W_{jt}^{(r)}) \in W, i=1,2,\dots,n; t=1,2,\dots,k$ – це лінгвістичним ваговим коефіцієнтом, що був присвоєний ОПР D_t за критерієм C_j . Введемо також агреговані змінні

$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{k} \otimes (S_{ij1} \otimes S_{ij2} \otimes \dots \otimes S_{ijk}), \bar{W}_j = \frac{1}{k} \otimes (W_{j1} \otimes W_{j2} \otimes \dots \otimes W_{jk})$, де символами \otimes та \oplus позначено операції нечіткого множення на коефіцієнт (використання шкали)

та додавання, відповідно. При обраних позначеннях змінна \bar{S}_{ij} являє собою усереднений нечіткий рейтинг (оцінку) проекту P_i за суб'єктивним критерієм C_j , а \bar{W}_j – це усереднене значення нечіткого вагового коефіцієнта важливості суб'єктивного критерію C_j . Змінні \bar{S}_{ij} і \bar{W}_j також є нечіткими числами із трикутною функцією належності такого вигляду:

$$S_{ij} = (S_{ij}^l, S_{ij}, S_{ij}^r), W_j = (W_j^{(l)}, W_j, W_j^{(r)}),$$

$$\text{де } \bar{S}_{ij}^{(l)} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \bar{S}_{ijt}^{(r)}, \bar{W}_j^{(l)} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \bar{W}_{jt}^{(r)}.$$

В загальному випадку вагові коефіцієнти критеріїв повинні бути нормованими із використанням операцій нечіткого додавання та нечіткого ділення. Нормовані значення позначимо як

$$\bar{W}_{jN} = \bar{W}_j \otimes \left(\sum_{k=1}^m \bar{W}_k \right) \approx \left(\left(\frac{\bar{w}_j^{(l)}}{\sum_{k=1}^m \bar{W}_k^{(r)}} \right), \left(\frac{\bar{w}_j}{\sum_{k=1}^m \bar{W}_k} \right), \left(\frac{\bar{w}_j^{(r)}}{\sum_{k=1}^m \bar{W}_k^{(l)}} \right) \right) = \left(\bar{w}_j^{(l)}, \bar{w}_j, \bar{w}_j^{(r)} \right). \quad (12.18)$$

Нечіткий індекс значимості проекту $IЗП_i$ для проекту P_i можна отримати шляхом усереднення досягнень рангів критеріїв і відповідних вагових коефіцієнтів, тобто:

$$IЗП_i = \frac{1}{m} \otimes \left[\left(\bar{W}_1 \otimes \bar{S}_{i1} \right) \otimes \left(\bar{W}_2 \otimes \bar{S}_{i2} \right) \otimes \dots \otimes \left(\bar{W}_m \otimes \bar{S}_{im} \right) \right].$$

Відповідно до принципу розширення $IЗП_i$ не буде нечітким числом з трикутною функцією належності. Але для простоти на практиці $IЗП_i$ приблизно розглядають як нечітке число з трикутною функцією належності вигляду:

$$IЗП_i \approx \left(c_i^l, c_i, c_i^r \right) = \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{W}_j^{(l)} \bar{S}_{ij}^{(l)}, \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{W}_j \bar{S}_{ij}, \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{W}_j^{(r)} \bar{S}_{ij}^{(r)} \right).$$

12.5.2 Нечітке булеве програмування і рішення задачі вибору проекту

Наступним кроком після обчислення індексу значимості проекту є розробка процедури вибору проекту в умовах рівноваги (ВПУР). Як було сказано вище, умови рівноваги повинні складатися з одного бюджетного обмеження (EC_0) і ще чотирьох інших обмежень: тобто обмеження щодо пріоритетності проекту (EC_1), типів проектів (EC_2), розмірів проектів (EC_3) та виконавців проектів (EC_4). Сформулюємо цю задачу як задачу нечіткого нулевого програмування і розглянемо шляхи її вирішення за допомогою пакета прикладних програм.

Нехай $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ – множина запропонованих проектів, вартість яких становить (b_1, b_2, \dots, b_n) , ІЗПі = (c_i^l, c_i, c_i^r) – нечіткий індекс значимості проекту $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$; b – загальний бюджет, запланований на виконання проектів. Присвоїмо кожному проекту змінну x_i , яка прийматиме значення 0 або 1 залежно від того, приймається проект чи ні, тобто

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо проект обирається для фінансування;} \\ 0, & \text{якщо проект не обирається.} \end{cases}$$

Таким чином, завданням ВПУР є вибір такого проекту, який максимізує загальний прибуток, тобто $\sum_{i=1}^n IZP_i x_i$. Очевидно, що умову рівноваги EC_0 (бю-

джетне обмеження) можна просто подати у вигляді $\sum_{i=1}^n e_i x_i \leq b$. Всі інші умови

рівноваги $\{EC_1, EC_2, EC_3, EC_4\}$ задовольняють інші конкретні вимоги при розподілі фінансових способів, і вони розділяють всю множину проектів, які виносяться на розгляд, на декілька підмножин з метою формування підгруп зі своїми пріоритетами. При цьому від кожної підмножини можна буде вибрати для реалізації тільки деяку обмежену кількість проектів, або тільки один проект. Наприклад, при розгляді пріоритетності проекту EC_1 загальну кількість варіантів можна розбити на декілька груп (взьмемо для прикладу 6). Таким чином, ця умова приводить до того, що всі проекти P діляться на шість груп $\{P_{11}, P_{12}, P_{13}, \dots, P_{16}\}$ відповідно за числом пріоритетів. При цьому до групи P_{1k} відносяться всі проекти k -го напрямку ($k = 1, 2, \dots, 6$). Тепер можна записати, що $P = \bigcup_{k=1}^6 P_{1k}$. Якщо для k -го напрямку було вибрано фіксоване число проектів P_{1k} , то можна записати обмеження у вигляді:

$$\sum_{j \in P_{1k}} x_j = b_{1k}, k = 1, 2, \dots, 6.$$

В загальному випадку умова рівноваги EC_t призводить до необхідності створення підгрупи $\{P_{t1}, P_{t2}, \dots, P_{tq_t}\}$, яка входить до P разом із заданим числом проектів $\{b_{t1}, b_{t2}, \dots, b_{tq_t}\}$, які будуть обрані з кожної підгрупи. Відповідно, для кожної умови можна записати обмеження

$$\sum_{j \in P_{tk}} x_j = b_{tk}, k = 1, 2, \dots, q_t, t = 1, 2, 3, 4.$$

Таким чином, завдання вибору проектів в умовах збереження рівноваги можна сформулювати так:

максимізувати $\sum_{i=1}^n I3\Pi_i x_i$ при обмеженнях вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i x_i &\leq b(EC_0), \\ \sum_{i \in P_{1k}} x_i &= b_{1k}, k = 1, 2, \dots, q_1, (EC_1), x_i \in \{0, 1\} = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i \in P_{2k}} x_i &= b_{2k}, k = 1, 2, \dots, q_2 (EC_2), \\ \sum_{i \in P_{3k}} x_i &= b_{3k}, k = 1, 2, \dots, q_3 (EC_3), \\ \sum_{i \in P_{4k}} x_i &= b_{4k}, k = 1, 2, \dots, q_4 (EC_4), \end{aligned} \quad (12.19)$$

Тобто, система (12.19) – це задача нечіткого булевого програмування, оскільки $I3\Pi_i$ – це нечіткі числа з трикутними функціями належності.

При вирішенні задачі нечіткого булевого програмування (12.19) важливу роль відіграє ранжування нечітких чисел. Для цього можна скористатися різними підходами. В даному випадку скористаємося методом ранжування нечітких чисел, який дозволяє ідентифікувати узагальнене очікуване значення. В порівнянні з іншими цей метод має перевагу, у тому, що він відносно простий з обчислювальної точки зору і дозволяє (в деякій мірі) особі, що приймає рішення, визначити свій власний рівень оптимізму стосовно можливості вирішення завдання.

Якщо \tilde{A} – це нечітке число з функцією належності $f_A(x)$, то узагальнене очікуване значення з індексом оптимізму μ визначається як:

$$E_\mu(\tilde{A}) = \mu E_R(\tilde{A}) + (1 - \mu) E_L(\tilde{A}),$$

де $E_R(\tilde{A})$ і $E_L(\tilde{A})$ – праві і ліві очікувані значення числа, \tilde{A} , відповідно; $\mu \in [0, 1]$, а $E_R(\tilde{A})$ і $E_L(\tilde{A})$:

$$E_R(\tilde{A}) = \int_\alpha^\beta x f_A^R(x) dx, E_L(\tilde{A}) = \int_\gamma^\delta x f_A^L(x) dx \quad (12.20)$$

Еквівалентним визначенням для $E_R(\tilde{A})$ і $E_L(\tilde{A})$ є:

$$E_R(\tilde{A}) = \int_\alpha^\beta g_A^R(y) dy, E_L(\tilde{A}) = \int_\gamma^\delta g_A^L(y) dy, \quad (12.21)$$

де $g_A^R(y)$ і $g_A^L(y)$ – це функції, $f_A^R(x)$ і $f_A^L(x)$, відповідно.

Параметр $\mu \in [0,1]$ характеризує ступінь оптимізму ОПР і приймає значення на інтервалі від нуля до одиниці. При цьому більше значення μ відповідає більшому значенню оптимізму. Так, при $\mu = 0$ маємо: $E_0(\tilde{A}) = E_L(\tilde{A})$, тобто ОПР має песимістичну точку зору. Для високого рівня оптимізму $\mu = 1$ маємо: $E_1(\tilde{A}) = E_R(\tilde{A})$. Для задовільного рівня оптимізму $\mu = 0,5$ і маємо:

$$E_{0,5}(\tilde{A}) = 0,5[E_L(\tilde{A}) + E_R(\tilde{A})]$$

Для нечіткого числа $\tilde{A} = (a_l, a, a_r)$ і рівня оптимізму $\mu \in [0,1]$ легко визначити, що

$$E_L(\tilde{A}) = 0,5(a_l + a), E_R(\tilde{A}) = 0,5(a + a_r), E_\mu(\tilde{A}) = \mu E_R(\tilde{A}) + (1 - \mu)E_L(\tilde{A})$$

Очікуване значення зліва $E_L(\tilde{A})$ і очікуване значення справа $E_R(\tilde{A})$ нечіткого числа \tilde{A} з трикутною функцією належності мають геометричну інтерпретацію, тобто вони чисельно прирівнюються площам трапецій OLPQ і ORPQ, відповідно (рис. 12.1).

При деякому рівні оптимізму μ нечіткі числа можна привести в порядок шляхом порівняння їх узагальнених очікуваних значень при конкретних величинах μ . Тобто, для двох нечітких чисел \tilde{A}, \tilde{B} відношення $E_\mu(\tilde{A}) < E_\mu(\tilde{B}), E_\mu(\tilde{A}) > E_\mu(\tilde{B}), E_\mu(\tilde{A}) = E_\mu(\tilde{B})$ означають, що $\tilde{A} \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle \tilde{B}, \tilde{A} = \tilde{B}$, відповідно.

Вживаючи узагальнені очікувані значення нечітких чисел, розглянемо методику вирішення задачі нечіткого булевого програмування (12.19). Нехай X – скінченна множина можливих розв'язків задачі (12.19), а $g : P \rightarrow \tau(R)$ – функція відображення множини проєктів в множині нечітких чисел, яка визначається як

$$g(x) = \sum_{i \in S} I3\Pi_i, S = \{i \in N : x_i = 1\}$$

Відповідно до принципу розширення маємо: якщо $I3\Pi_i = (c_1, c, c_r)$, ($i \in S$) – нечіткі числа з трикутними функціями належності, то $g(x) = (\sum_{i \in S} c_i^l, \sum_{i \in S} c_i, \sum_{i \in S} c_i^r)$ також є нечітким числом з трикутною функцією належності.

При заданому рівні оптимізму $\mu \in [0,1]$ рішення $x^* \in X$ називають оптимальним рішенням задачі (12.19), якщо

$$E_\mu(g(x^*)) \geq E_\mu(g(x)), \forall x \in X$$

Для заданого рівня оптимізму $\mu, x^* \in X$ є оптимальним рішенням задачі (12.19), якщо x^* є оптимальним рішенням наступної класичної задачі булевого програмування:

Максимізувати $\sum_{i=1}^n [c_i + \alpha c_r + (1 - \alpha)c_l] x_i$ при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^n e_i x_i \leq b, (EC_0)$$

$$\sum_{i \in P_{1k}} x_i = b_{1k}, k = 1, 2, \dots, q_1, (EC_1), x_i \in \{0, 1\} i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i \in P_{2k}} x_i = b_{2k}, k = 1, 2, \dots, q_2, (EC_2)$$

$$\sum_{i \in P_{3k}} x_i = b_{3k}, k = 1, 2, \dots, q_3, (EC_3)$$

$$\sum_{i \in P_{4k}} x_i = b_{4k}, k = 1, 2, \dots, q_4, (EC_4) \quad (12.22)$$

Модель (12.22) являє собою класичну задачу цілочисельного програмування. Якщо її розмірність не надто велика, то її можна вирішити за допомогою пакетів прикладних програм для вирішення завдань цілочисельного програмування або за допомогою оптимізаційного інструментарію системи MATLAB.

12.5.3 Модельний приклад

Розглянемо застосування запропонованого вище методу для розв'язання задачі вибору проекту. Для цього скористаємося модельними даними, але це не означає, що даний приклад є занадто спрощеним. В плануванні та прийнятті рішень щодо проектів беруть участь представники різних організацій, які ми розділимо на три групи і будемо розглядати як ОПР. Позначимо ці групи як D1, D2, D3. Проілюструємо застосування методу на основі даних, які становлять 52 пропозиції при загальному бюджеті 4000000 грн. З метою збалансування інтересів між учасниками групи планування запишемо чотири умови рівноваги:

EC₁: розділимо всі 52 проекти відносно пріоритетності (A) на шість груп {A1, A2, ..., A6}. Нехай з кожної групи A_t, t = 1, 2, ..., 6 необхідно вибрати по два проекти.

EC₂: за типами проектів (T) розділимо всі 52 проекти також на 6 груп {T1, T2, ..., T6}. При цьому з кожної групи T_t, t = 1, 2, ..., 6 необхідно вибрати по два проекти.

EC₃: за обсягами проектів (S) розділимо 52 проекти на три групи {S1, S2, S3}. При цьому з кожної групи S1, t = 1,2,3 виберемо по чотири проекти.

EC₄: за виконавцями проектів розділимо 52 проекти на 5 груп {M1, M2, ..., M5}. При цьому кожна група виконавців M1, M2, ..., M5 повинна виконати певну кількість проектів. Нехай це буде 6, 2, 2, 1, 1, відповідно.

Тепер можна скласти таблицю розподілу проектів відповідно до умов рівноваги EC₁,..., EC₄. Таке групування проектів наведено в таблиці 12.8.

Таблиця 12.8 – Умови рівноваги і групування проектів.

№ пр.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
EC1	A2	A2	A3	A6	A2	A5	A1	A5	A2	A3	A4
EC2	T5	T5	T5	T5	T5	T5	T5	T5	T5	T5	T5
EC3	S2	S2	S2	S2	S2	S2	S2	S2	S2	S1	S1
EC4	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1

№ пр.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
EC1	A2	A1	A4	A2	A5	A3	A4	A4	A4	A2	A2
EC2	T5	T5	T5	T5	T4	T4	T4	T4	T6	T6	T2
EC3	S1	S1	S1	S1	S2	S3	S2	S2	S2	S1	S2
EC4	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1	M1

№ пр.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
EC1	A5	AS	AS	A5	A5	A6	A6	A6	A2	A6	A6
EC2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2
EC3	S2	S3	S2	S2	S1	S1	S2	S3	S2	S1	S1
EC4	M1	M2	M2	M2	M2	M2	M3	M4	M1	M1	M1

№ пр	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
EC1	A2	A2	A2	A4	A3	A3	A4	A4	A3	A6	A4
EC2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2	T2
EC3	S3	S1	S3	S1	S1	S3	S3	S3	S3	S2	S3
EC4	M2	M3	M1	M1	M1	M1	M1	M2	M2	M2	M2

№ пр	45	46	47	48	49	50	51	52			
EC1	A1	A4	A4	A1	A3	A5	A3	A6			
EC2	T2	T2	T2	T1	T3	T5	T3	T6			
EC3	S3	S3	S2	S1	S2	S1	S3	S2			
EC4	M2	M2	M1	M3	M3	M3	M5	M4			

Особи, які приймають рішення, оцінюють (ваговий) коефіцієнт важливості для кожного критерію вибору, вживаючи при цьому лінгвістичні значення за шкалою: $W = \{VI, I, F, UI, VUI\}$. В таблиці 12.9 наведені лінгвістичні значення вагових коефіцієнтів важливості, а також нормовані середні значення вагових коефіцієнтів важливості (нечіткі числа для трикутних функцій належності).

Таблиця 12.9 – Вагові коефіцієнти важливості для обраних критеріїв

Критерій/ ОПР	C1	C2	C3	C4
D1	F	VI	I	UI
D2	I	I	VI	F
D3	F	I	VI	I
Нормовані вагові коефіцієнти	W_{H1}	W_{H2}	W_{H3}	W_{H4}

$$W_{H1} = (0,11; 0,20; 0,39); W_{H2} = (0,18; 0,29; 0,47);$$

$$W_{H3} = (0,21; 0,33; 0,49); W_{H4} = (0,02; 0,18; 0,356).$$

Особи, які приймають рішення, оцінюють якість кожного проекту в порівнянні з кожним критерієм вибору за допомогою лінгвістичних рейтингових змінних у відповідності з наступною шкалою: $S = \{EG, VG, G, M, P, VP, EP\}$. Остаточним обраним проектам присвоюється індекс 1, а відхиленням - 0. Характеристики розглянутого підходу до вибору проектів можна покращити за рахунок більш суворого підходу до вибору функцій приналежності, а також обліку інших факторів, які впливають на вибір, наприклад, соціально-політичних. Також доцільним буде ввести динамічну оптимізацію використання ресурсів у часі, тобто ввести в розгляд можливі варіанти реалізації проектів у часі.

Ключові слова

Постановка задачі оцінювання, вимірювання параметрів, дійсне значення, похибка вимірювань, незалежні параметри, залежні параметри, мінімізація функції, оптимізаційна задача, точність оцінок; проектування, задача оптимізації, критерій оптимальності, обмеження, одновимірні задача, лінійна залежність, нелінійна диференційовна залежність, необхідна умова екстремуму, достатня умова мінімуму, достатня умова максимуму, багатоекстремальна функція, глобальний екстремум, недиференційовна залежність, багатовимірні задачі, лінійне програмування, направлений пошук, випадковий пошук, метод Монте-Карло, генетичний алгоритм, мурашиний алгоритм, варіаційний метод, “принцип максимуму” Понтрягіна, динамічне програмування, задача дискретної оптимізації; прогнозування стану, інерційність процесу, детерміноване прогнозування, стохастичне прогнозування, методи апроксимації, екстраполяція, алгоритм екстраполяції, рішення, вирішальне правило, СППР, впорядкування альтернатив, теорія ігор, некооперативні ігри, кооперативні ігри, ієрархічні ігри, рефлексивні ігри, прийняття рішень в умовах невизначеності, статистичні методи прийняття рішень, аксіоми очікуваної корисності, експертні методи прийняття рішень, прийняття рішень за принципом Беллмана–Заде.

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. Сформулюйте класичну постановку задачі оптимізації?
2. В чому полягає задача оптимального проектування?
3. За якими ознаками класифікуються задачі оптимізації?
4. Яка задача дістала назву математичного програмування?
5. Які особливості мають задачі нелінійного, стохастичного, динамічного, квадратичного, сепарабельного, геометричного програмування?
6. Чим відрізняються задачі багатопараметричної і багатокритеріальної оптимізації?
7. Сформулюйте умови стаціонарності для задачі гладкої оптимізації?
8. Запишіть та поясніть умови Куна – Такера?
9. Дайте характеристики та порівняйте чисельні методи розв’язання задачі гладкої оптимізації?
10. Спробуйте розв’язати задачу оптимізації іншими методами, окрім методу градієнтного спуску?
11. Як звести загальну задачу оптимізації до задачі без обмежень?
12. Які існують методи опуклої оптимізації?
13. Зробіть постановку задачі лінійного програмування. В яких випадках вона не має розв’язку?
14. Дайте характеристику методу розгалужень і меж розв’язання задачі лінійної оптимізації?

15. В яких випадках і як застосовується теорія ігор для розв'язання задач дискретної оптимізації? Як вибирається стратегія гравця?
16. Сформулюйте принципи оптимізації Беллмана?
17. Яку задачу називають задачею комівояжера?
18. Складіть програми пошуку найкоротшого шляху в графах з ребрами одиничної та довільної довжини?
19. У чому сутність методу пошуку в ширину? Його геометрична інтерпретація?
20. Яка структура даних використовується у методі пошуку в ширину?
21. У чому сутність методу пошуку в глибину? Його геометрична інтерпретація?
22. Яка структура даних використовується у методі пошуку в глибину?
23. У чому відмінність пошуку з поверненням від пошуку в глибину?
24. Наведіть приклади потоків різної фізичної природи?
25. У чому ідея алгоритму отримання максимального потоку?
26. Оцініть кількість кроків випадкового пошуку при розв'язанні задачі оптимізації з 10 параметрами?
27. Чим відрізняється інтерполяція і апроксимація?
28. Чим відрізняється інтерполяція і екстраполяція?
29. Прогнозування – це екстраполяція процесу у часі. Наведіть приклади екстраполяції моделі в іншій системі координат?
30. При опосередкованих вимірюваннях необхідно, щоб кількість рівнянь моделі дорівнювала кількості невідомих величин. А як співвідносяться ці кількості при знаходженні невідомих величин шляхом оцінювання?
31. Назвіть декілька методів оптимізації, які могли б застосовуватися для розв'язання задачі оцінювання. Які з цих методів дозволяють визначити також і похибку оцінки?
32. Сформулюйте основні складові задачі оптимізації і визначте місце моделі системи у цих складових?
33. Які моделі використовуються в статистичних методах прийняття рішень?
34. Вказати властивості алгоритму експоненціального згладжування?
35. У чому полягає вибір експоненціальної середньої?
36. Вплив терміну прогнозування на похибку прогнозу?
37. Від чого залежить вибір величини сталої згладжування?
38. У чому полягає проблема вибору коефіцієнта адаптації α ?
39. Чи можна розглядати предиктор експоненціального згладжування як фільтр?
40. Як впливає на точність прогнозу персистентність чи сезонність процесу?
41. Що таке беггінг і особливості його алгоритмізації?
42. Що таке бустинг і особливості його алгоритмізації?
43. Що таке стекінг і особливості його алгоритмізації?
44. У чому сутність багатокритеріального прийняття рішень на основі теорії нечітких множин?

45. Що таке лінгвістична змінна і як визначаються її функції належності?
46. Як здійснюється агрегування оцінок осіб, що приймають рішення?
47. Як застосовується нечітке булеве програмування для рішення задачі вибору проекту? Описати сутність, послідовність дій та розв'язати модельний приклад?

Література

1. Алексеев В. М. Оптимальное управление / Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. – М. : Наука, 1979. – 430 с.
2. Бард И. Нелинейное оценивание параметров / Бард И. – М. : Статистика, 1979. – 349 с.
3. Батищев Д. И. Методы оптимального проектирования / Батищев Д. И. – М. : Радио и связь, 1984. – 248 с.
4. Бодянский Є. В. Методи обчислювального інтелекту в системах керування технологічними процесами феросплавного виробництва : монографія / Бодянский Є. В. Кучеренко Є. І., Михальов О. І., Філатов В. О., Гасик М. М., Куцин В. С. – Дніпропетровськ : Національна металургійна академія України, 2011. – 420 с.
5. Боровська Т. М. Основи кібернетики та дослідження операцій : навчальний посібник / Боровська Т. М., Колесник І. С. Северілов В. А. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 242 с.
6. Гибридные нейро-фаззи модели и мультиагентные технологии в сложных системах / Е. В. Бодянский, В. Е. Кучеренко, Е. И. Кучеренко, А. И. Михалев, В. А. Филатов // под ред. Е. В. Бодянского. – Днепропетровск : Системные технологии, 2008. – 403 с.
7. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы : учебное пособие. – 2-е изд. – М : Физматлит, 2006. – 320 с. – [ISBN 5-9221-0510-8](#).
8. Дубовой В. М. Програмування персональних комп'ютерів систем управління / Дубовой В. М., Кветний Р. Н. – Вінниця : ВДТУ, 1999. – 110 с.
9. Дубовой В. М. Контроль та керування в мережах теплопостачання : монографія / В. М. Дубовой, В. В. Кабачій, Ю. М. Паночишин – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 190 с.
10. Ефимов А. Н. Предсказание случайных процессов / Ефимов А. Н. – М. : Знание, 1976. – 64 с.
11. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния / Эйкхофф П. – М. : Мир, 1975. – 683 с.
12. Интеллектуальное управление технологическими процессами (ферросплавное производство) : монография (научное издание) / Бодянский Е. В., Кучеренко Е. И., Михалев А. И., Филатов В. А., Гасик М. М., Куцин В. С. //

- под. ред. А. И. Михалева. – Днепропетровск : Национальная металлургическая академия Украины, 2013. – 213 с.
13. Кветний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень. – Вінниця, ВДГУ, 2001. – 146 с.
 14. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / В. Е. Краскевич, К. Х. Зеленский, В. И. Гречко. – К. : Вища школа, 1986. – 263 с.
 15. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов / Ю. П. Лукашин. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 416 с.
 16. Льюис К. Д. Методы прогнозирования экономических показателей / Льюис К. Д. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 318 с.
 17. Михалев А. И. Цифровая обработка данных: от Фурье к Wavelets. – Днепропетровск : Системные технологии, 2007. – 200 с.
 18. Мышкис А. Д. Математика для вузов. Специальные курсы / Мышкис А. Д. – М. : Наука, 1971. – 632с.
 19. Рабочая книга по прогнозированию / [Редкол. : И.В.Бестужев-Лада (отв. ред.)] – М. : Мысль, 1982. – 430 с.
 20. Справочник по теории автоматического управления / [Под ред. А. А. Красовского] – М. : Наука, 1987. – 712с.
 21. Фінін Г. С. Методи розв'язання ігрових задач : підручник. –К : КНУБА, 2014. – 188 с.

13 МОДЕЛІ ОКРЕМИХ КЛАСІВ СИСТЕМ

Наразі математичне моделювання є невід'ємною частиною процесів проектування та дослідження різноманітних об'єктів і систем. Для кожного типу систем найхарактернішими є певні типи моделей.

13.1 Моделі фізичних процесів в технологічних об'єктах

Найскладнішою задачею у моделюванні систем є створення моделей об'єктів управління. Передусім це зумовлено їх розмаїттям, оскільки об'єктом управління може бути будь-який об'єкт навколишнього світу – від атома до планети, від хаотичної плазми до живої істоти. Але без моделі об'єкта управління неможливо здійснити аналіз і синтез системи управління, отже, хоча задача і важка, але розв'язувати її необхідно.

Об'єкти управління в цілому можна розділити на природні, технічні, біологічні, інтелектуальні, соціальні, виробничі та організаційні. Відповідно моделі об'єктів ґрунтуються на різних законах природи, техніки і суспільства.

13.1.1 Фізичні процеси в об'єктах керування

Більшість об'єктів управління відносять до класу природних та технічних. Їх моделі ґрунтуються, передусім, на відомих фізичних законах і явищах. Загалом, відповідно до прийнятої у фізиці класифікації, фізичні процеси можна розділити на типи:

- механічні;
- теплові;
- електричні;
- електромагнітні;
- оптичні;
- квантові.

Разом з тим слід відзначити, що усі ці типи процесів тісно пов'язані і, залежно від рівня розгляду (макрорівень або мікрорівень), моделі одних і тих самих процесів можуть бути віднесені до різних типів. Так наприклад, теплові макрпроцеси є механічним рухом часток на мікрорівні, макроскопічні електромагнітні хвилі викликаються нерівномірним рухом електронів на мікрорівні, оптичні явища можуть розглядатися і як електромагнітні процеси, і як квантові тощо.

13.1.2 Закони збереження як фундаментальні моделі фізичних процесів

Закони збереження в природі відіграють особливу роль. Вони є відправною точкою як для отримання моделей фізичних об'єктів і процесів, так і для

перевірки адекватності одержаних результатів моделювання. До законів збереження у фізиці відносять: закон збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу, заряду та деякі інші.

Закони збереження дозволяють скласти певну кількість рівнянь, які можуть використовуватися як фундаментальні моделі фізичних процесів у технологічних об'єктах. Загальна структура таких рівнянь має вигляд

$$\Theta_{\text{кін}} = \Theta_{\text{поч}} + \Theta_{\text{зовн}}, \quad (13.1)$$

де $\Theta_{\text{кін}}$ – характеристика, яка зберігається (наприклад, енергія або заряд), наприкінці процесу; $\Theta_{\text{поч}}$ – характеристика, яка зберігається, на початку процесу; $\Theta_{\text{зовн}}$ – зміна характеристики, зумовлена зовнішнім впливом, та ілюструється схемою рис. 13.1.



Рисунок 13.1 – Загальна схема збереження характеристик у фізичних процесах

Угорська вчена Е. Нетер довела, що за кожним із законів збереження стоїть *деяка симетрія*. У фізиці загальноприйнято виділяти дві форми симетрії: *геометричну* та *динамічну*. Симетрії, що виражають властивість простору і часу, відносять до геометричної форми симетрії, наприклад, однорідність простору і часу, ізотропність простору, просторова парність, еквівалентність інерціальних систем відліку. Простір має групу симетрії відносно довільних переносів за трьома взаємно перпендикулярними напрямками і відносно поворотів координатних систем. Симетрію щодо поворотів називають “ізоτροпія”, переносів – “однорідність”.

Час задається однією величиною, а не трьома. Симетрія часу полягає в його однорідності, тобто всі його моменти рівносильні, принаймні щодо суто механічних явищ. Закони механіки повністю симетричні щодо минулого і майбутнього.

Симетрії, що безпосередньо не пов'язані з властивостями простору і часу, а виражають властивості певних фізичних взаємодій, відносять до динамічної форми симетрії. Взагалі до динамічної симетрії відносять симетрії внутрішніх властивостей об'єктів і процесів. Прикладами динамічних симетрій є симетрія електричного заряду.

У спрощеному формулюванні теорема Е. Нетер свідчить, що якщо власти-

вості системи не змінюються від будь-якого перетворення змінних, то цьому відповідає деякий закон збереження. Так, наприклад, інваріантність щодо зсувів часу (що відповідає однорідності часу) тягне за собою, за теоремою Е. Нетер, закон збереження енергії. З однорідності простору (інваріантності відносно просторових зсувів) випливає закон збереження імпульсу. Подібним же чином з ізотропності простору (тобто рівноцінності всіх просторових напрямів і пов'язаної з цим інваріантності дії щодо обертання системи координат в просторі) випливає закон збереження моменту.

Таким чином, з фізичного уявлення про однорідність та ізотропність простору-часу випливає, що для будь-якої замкненої системи повинні існувати сім фундаментальних величин, що зберігаються: енергія, компоненти імпульсу (три величини) і моментів (три величини).

При наявності в системі симетрій іншого роду (не пов'язаних з простором-часом) теорема Е. Нетер дозволяє побудувати й інші закони збереження.

13.1.3 Рівняння Максвелла

Рівняння Максвелла – це основні рівняння класичної електродинаміки, що описують розповсюдження електромагнітного поля і його взаємодію з зарядами і струмами. Серед технологічних об'єктів, які використовують електромагнітні поля і відповідні процеси, виділимо термічну обробку матеріалів у НВЧ-печах, медичні установки для магнітно-резонансної томографії, системи радіолокації, процеси плазмової обробки матеріалів тощо.

Базові рівняння Максвелла наведені у таблиці 13.1.

Таблиця 13.1 – Рівняння у загальному вигляді

Назва	Диференціальна форма	Інтегральна форма	Приблизне формулювання
Закон індукції Фарадея	$\text{rot } \mathbf{E} = -k_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -k_F \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$	Зміна магнітної індукції породжує вихрове електричне поле
Закон Ампера (з доданком Максвелла)	$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi k_B \mathbf{j} + \frac{k_B}{k_\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = 4\pi k_B \mathbf{I}_{encl} + \frac{k_B}{k_\varepsilon} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$	Електричний струм і зміна електричної індукції породжують вихрове магнітне поле
Теорема Гауса	$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi k_\varepsilon \rho$	$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi k_\varepsilon Q_{encl}$	Електричний заряд є джерелом електричної індукції
Теорема Гауса	$\text{div } \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$	Магнітна індукція не розходить (немає джерел).

Введені позначення:

- ρ – густина стороннього електричного заряду (в одиницях СІ – Кл/м³);
- \mathbf{j} – густина електричного струму (густина струму провідності) (в одиницях СІ – А/м²);
- \mathbf{E} – напруженість електричного поля (в одиницях СІ – В/м);
- \mathbf{H} – напруженість магнітного поля (в одиницях СІ – А/м);
- \mathbf{D} – електрична індукція (в одиницях СІ – Кл/м²);
- \mathbf{B} – магнітна індукція (в одиницях СІ – Тл = Вб/м² = кг • с⁻² • А⁻¹);
- Q_{encl} – електричний заряд всередині поверхні (в одиницях СІ – Кл);
- I_{encl} – електричний струм, що проходить через поверхню, викликаний рухом вільних зарядів (в одиницях СІ – А);
- k_ε, k_B, k_F – коефіцієнти, які залежать від системи одиниць;
- rot – диференціальний оператор ротора. Результатом є вектор

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix};$$

- div – диференціальний оператор дивергенції. Результатом є скаляр

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z};$$

- S – замкнена двовимірна поверхня;
- L – замкнений контур.

В системі СІ в рівняннях Максвелла коефіцієнти пропорційності перетворюються на одиниці:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (13.2)$$

Співвідношення, що зв'язують величини \mathbf{j} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , в яких враховуються індивідуальні властивості середовища, називаються матеріальними рівняннями.

На практиці найчастіше використовують спрощені рівняння, які враховують особливості конкретного об'єкта.

У разі слабких електромагнітних полів, які порівняно повільно змінюються в просторі і часі, а також для ізотропних, неферомагнітних і несегнетоелектричних середовищ матеріальні рівняння записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \quad (13.3)$$

де ε – діелектрична проникність (в одиницях СІ – Ф/м), μ – магнітна проникність (в одиницях СІ – Гн/м) і σ – електропровідність середовища (в одиницях СІ – 1/(Ом • м)).

У вакуумі електрична і магнітна постійні позначаються через ε_0 і μ_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (13.4)$$

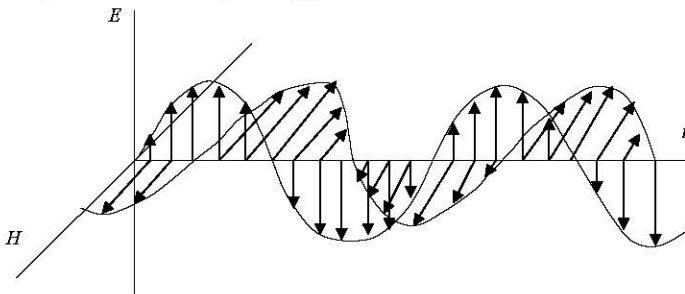
Рівняння Максвелла для вакууму без електричних зарядів і струмів:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (13.5)$$

Ця система диференціальних рівнянь має простий розв'язок у вигляді гармонічної, плоскої хвилі (рис. 13.2). Вектори електричного і магнітного полів перпендикулярні до напрямку розповсюдження хвилі й один до одного та знаходяться у одній фазі. Хвиля поширюється зі швидкістю:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (13.6)$$

Це швидкість світла у вакуумі.



13.1.4 Рівняння Шредінгера

Рівняння Шредінгера відіграє у квантовій механіці таку ж важливу роль, як рівняння другого закону Ньютона в класичній механіці. Його можна назвати рівнянням руху квантової частинки.

Серед технологічних об'єктів, які потребують використання рівняння Шредінгера для моделювання процесів і управління ними, виділимо технологічні процеси утворення напівпровідникових структур та інші нанотехнологічні об'єкти.

Рівняння Шредінгера визначає хвильову функцію – ймовірність знаходження частинки у певному місці.

Нехай хвильова функція задана в N-вимірному просторі, тоді в кожній точці з координатами $\vec{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в певний момент часу t вона буде мати вигляд $\Psi(\vec{r}, t)$. Відповідно рівняння Шредінгера має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}, t) + E_p(\vec{r})\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t), \quad (13.7)$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h – стала Планка; m – маса частинки; $E_p(\vec{r})$ – зовнішня, відносно частинки, потенційна енергія в точці $\vec{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$; Δ – оператор Лапласа (або лапсасіан)

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

У тривимірному випадку невідомі хвильові функції залежать від трьох координат, тоді рівняння Шредінгера прийме вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + E_p(x, y, z)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (13.8)$$

де $E_p(x, y, z)$ – потенційна енергія в точці (x, y, z) .

Форма рівняння Шредінгера показує, що щодо часу його розв'язок має бути простим, оскільки час входить в це рівняння лише через першу похідну в правій частині. Дійсно, окремий розв'язок для спеціального випадку, коли E_p не є функцією часу, можна записати у вигляді:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{2\pi i}{h}Et}, \quad (13.9)$$

де функція $\psi(\vec{r})$ повинна задовольняти рівняння:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) + E_p(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (13.10)$$

яке впливає з рівняння Шредінгера (13.7) при підстановці в нього виразу (13.9). Це рівняння взагалі не містить часу – у зв'язку з цим воно називається стаціонарним рівнянням Шредінгера.

Загальне рішення є лінійною комбінацією всіх окремих розв'язків вигляду (13.9). Залежність функції $\Psi(\vec{r}, t)$ від часу проста, але залежність її від координати не завжди має елементарний вигляд, вона знайдена аналітично лише для невеликої кількості окремих типів функції $E_p(\vec{r})$. Приклад розв'язання рівняння Шредінгера показаний на рис. 13.3.

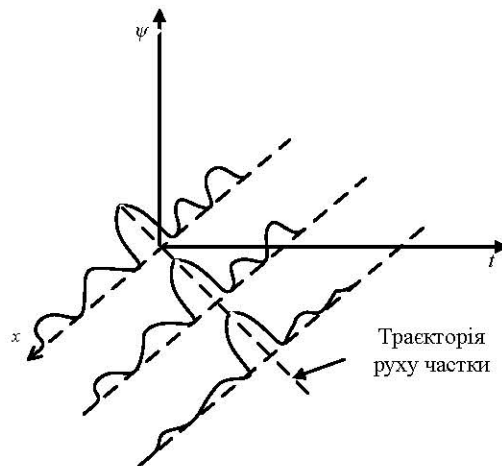


Рисунок 13.3 – Рух квантової частинки – приклад розв'язання рівняння Шредінгера

13.1.5 Рівняння дифузії і теплопровідності

Процеси дифузії і теплопровідності є основою дуже великої кількості технологічних об'єктів і процесів. Зокрема, усі процеси, що пов'язані з нагріванням (процеси зварювання, виробництво цегли, виплавлення металу тощо), описуються моделями теплопровідності. Усі хімічні процеси, а також процеси фільтрації, потребують розрахунків параметрів дифузії.

Математично рівняння дифузії і рівняння теплопровідності не розрізняються, і застосування тої чи іншої назви обмежене тільки метою.

Рівняння дифузії або рівняння теплопровідності є окремим видом диференціального рівняння в частинних похідних. Буває нестационарним і стаціонарним.

Найближчим аналогом рівняння дифузії є рівняння Шредінгера (13.8), яке відрізняється від рівняння дифузії відсутністю множника $i = \sqrt{-1}$ перед похідною за часом. В результаті розв'язок цього рівняння не має хвильового характеру.

Нестационарне рівняння дифузії (теплопровідності) класифікується як параболічне диференціальне рівняння. Воно описує поширення речовини внаслідок дифузії або перерозподіл температури тіла в результаті теплопровідності

$$q_x = \lambda(T_2^\circ - T_1^\circ).$$

У розділі 8 достатньо докладно викладено особливості отримання і розв'язання рівняння теплопровідності.

Рівняння дифузії є моделлю процесу, в якому потік речовини (або теплової енергії) пропорційний різниці концентрацій (температур) областей, розділених тонким шаром, як показано на рис. 13.4.

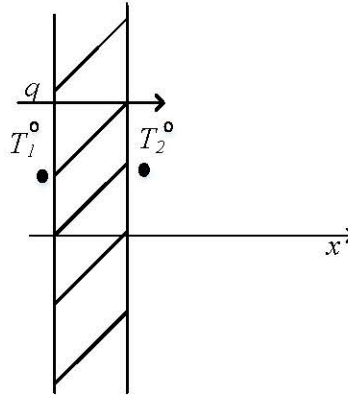


Рисунок 13.4 – Одновимірний випадок теплопровідності

У разі одновимірного дифузійного процесу з коефіцієнтом дифузії (теплопровідності) D рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial}{\partial x} c(x, t) \right] + f(x, t) \quad (13.11)$$

При постійному D рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, t) + f(x, t), \quad (13.12)$$

де $c(x, t)$ – концентрація речовин, які дифундують; $f(x, t)$ – функція, що описує джерела речовини (тепла).

У тривимірному випадку при постійному D рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) = D \Delta c(\vec{r}, t) + f(\vec{r}, t), \quad (13.13)$$

де Δ – оператор Лапласа.

У одновимірному випадку загальним розв'язком однорідного рівняння з постійним D (що не залежить від x і t) є

$$c_f(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad (13.14)$$

при початковій умові, що виражається дельта-функцією $c_f(x, 0) = \delta[x]$, і граничній умові $c_f(\infty, t) = 0$.

13.1.6 Рівняння Кірхгофа

Закони Кірхгофа (чи правила Кірхгофа як окремий випадок рівнянь Максвелла) – співвідношення, які виконуються між струмами і напругами на ділянках електричного кола. Вони також при певних обмеженнях можуть застосовуватися для моделювання гідравлічних систем.

Поширеність електричних засобів у технологічних об'єктах зумовлює масове застосування законів Кірхгофа. Гідравлічні системи не так поширені, але й вони вимагають відповідних моделей, зокрема, для проектування систем тепловодопостачання.

Для формулювання законів Кірхгофа в електричному колі виділяються вузли – точки з'єднання трьох і більше провідників – і контури – замкнені шляхи з провідників. При цьому кожен провідник може входити в кілька контурів.

У цьому випадку закони такі:

1. Закон струмів Кірхгофа – алгебраїчна сума струмів у будь-якому вузлі будь-якого кола дорівнює нулю (значення струмів, які витікають, беруться із протилежним знаком).

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0. \quad (13.15)$$

Якщо коло містить p вузлів, то воно описується $(p - 1)$ рівнянням струмів;

2. Закон напруг Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруг по будь-якому замкнутому контуру кола дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють уздовж цього ж контура.

$$\sum_{j=1}^m \Delta U_j = \sum_{k=0}^l E_k. \quad (13.16)$$

Якщо в контурі немає ЕРС, то сумарне падіння напруг дорівнює нулю.

Закони Кірхгофа справедливі для лінійних та нелінійних кіл при будь-якому характері зміни в часі струмів і напруг.

Наприклад, для наведеного на рис. 13.5 кола, відповідно до першого закону, виконуються співвідношення:

13.2 Моделі систем автоматки

Моделі систем управління відрізняються значною різноманітністю, проте усі вони кінець-кінцем відображають варіанти реалізації основних принципів і законів управління.

Характеристики і властивості систем управління визначаються, в першу чергу, особливостями об'єкта управління (ОУ). Отже, системи управління відповідно до типу об'єкта можна розділити на три основні категорії:

- технічні системи (ОУ є машини, апарати, технологічні лінії тощо);
- виробничі системи (ОУ є підприємство, підрозділ підприємства);
- організаційні системи (ОУ є установи, суспільні організації, військові підрозділи тощо).

Об'єкти управління існують у складному навколишньому середовищі і постійно взаємодіють з ним. Тому процеси у ОУ теж є досить складними і багатогранними. Керовані процеси в ОУ можна розділити на:

- матеріальні, енергетичні, інформаційні. Відповідно до цього визначається фізичний принцип дії виконавчої частини. Матеріальні процеси відбуваються переважно у верстатах, технологічних лініях, хімічних реакторах тощо. Енергетичні процеси пов'язані з отриманням, перетворенням, транспортуванням і використанням енергії, відбуваються, переважно, в енергосистемах, на транспорті тощо. Інформаційні процеси передбачають отримання, передавання, обробку, зберігання та використання інформації. Вони відбуваються переважно в організаційних системах. Найскладнішим, з точки зору керування процесів, є виробничі системи. В них найчастіше відбуваються і потребують управління всі три типи процесів;

- неперервної, дискретної, циклічної дії. Відповідно до цього визначається характер розвитку керуваного процесу у час, що безпосередньо впливає на закон управління.

Основні задачі, які вирішують системи управління:

- задача стабілізації, тобто забезпечення постійного стану об'єкта управління;
- задача стеження, тобто переведення об'єкта у стан, який відповідає змінам вхідного сигналу (завдання), які у загальному випадку можуть бути випадковими;
- задача термінального управління, переведення об'єкта з певного початкового у заданий кінцевий стан;
- задача програмного управління, тобто зміна стану об'єкта у певній послідовності;
- задача екстремального управління, тобто забезпечення максимального або мінімального значення певного параметра стану об'єкта управління.

Роль людини-оператора в розв'язанні цих задач залежить від характеру об'єкта управління. Переважно на нього покладається розв'язання задач, що

важко формалізуються, прийняття рішень в умовах невизначеності; стратегічне управління. Частина таких задач максимальна в організаційних системах і мінімальна в технічних системах.

Процеси в системах управління визначаються головними *принципами* їх функціонування. Ці принципи розроблялися протягом досить довгої історії розвитку науки про управління. Виділяють декілька фундаментальних принципів:

- принцип розімкненого управління;
- принцип управління за відхиленням (принцип зворотного зв'язку);
- принцип оптимального управління;
- принцип адаптації.

Основна мета принципів управління – визначення способу переведення об'єкта управління у заданий стан з максимальною точністю в умовах дії збурення f . Узагальнені структурні схеми систем, які відповідають цим принципам, наведені на рис. 13.6.

Традиційно відлік періоду активного розвитку систем управління починають з появи систем на основі принципу управління за відхиленням, який був використаний в регуляторі парової машини Уатта. Але слід відзначити, що і цей, і інші принципи управління, хоча й не формулювалися, але використовувалися задовго до Уатта, оскільки вони визначають процеси управління і саморегуляції не тільки у техніці, а й у живому світі і суспільстві.

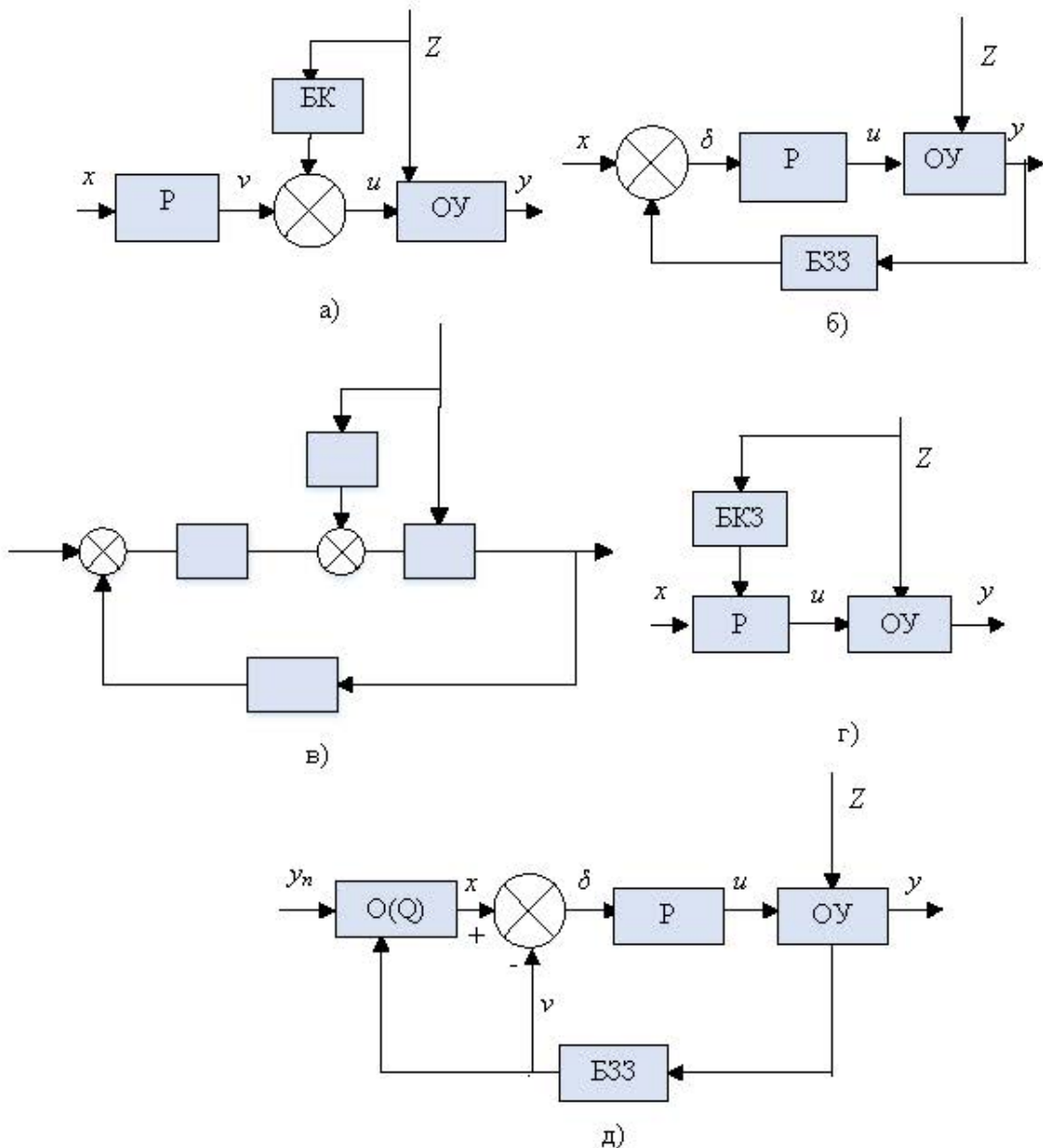


Рисунок 13.6 – Основні принципи керування:
 а) розімжене керування, б) замкнене керування, в) комбіноване керування, г) адаптивне керування, д) оптимальне керування

Принцип розімженого управління (рис. 13.6, а) є найпростішим. Суть розімженого управління полягає у вимірюванні збурення Z і компенсації його впливу на об'єкт управління OY через додавання відповідної корекції ($-v$), яка виробляється блоком корекції $БК$ до управління u , яке надходить з регулятора P .

Операторна модель такої системи має вигляд

$$\begin{cases} Y = F_0(U, Z) \\ U = F_P(X, Z) \end{cases} \quad (13.17)$$

Перевагою цього принципу є простота та швидка і адекватна реакція на значні контрольовані збурення. Недоліком є значні похибки, зумовлені похибками вимірювання збурення, обчислення необхідної корекції (для чого необхідно точно передбачати реакцію об'єкта на збурення та управління), наявність крім основного контрольованого збурення, ще й великої кількості менших, але неконтрольованих збурень.

Принцип управління за відхиленням (рис. 13.6, б) ще називають принципом замкненого управління або принципом від'ємного зворотного зв'язку (ЗЗ). Це найфундаментальніший принцип управління у природі та техніці. Управління за цим принципом передбачає вимірювання стану y об'єкта управління за допомогою блока зворотного зв'язку БЗЗ і знаходження його відхилення $\delta = x - y$ від завдання x , на основі чого регулятор виробляє керуючий вплив u .

Зворотний зв'язок – це зв'язок, при якому на вхід регулятора подається значення вихідної змінної. Він буває:

- жорсткий – такий ЗЗ, при якому на вхід регулятора надходить сигнал, пропорційний вихідному сигналу об'єкта в будь-який момент часу;
- гнучкий – такий ЗЗ, при якому на вхід регулятора надходить не тільки сигнал, пропорційний вихідному сигналу об'єкта, але і сигнал, пропорційний похідним вихідної змінної.

Операторна модель такої системи має вигляд

$$\begin{cases} Y = F_0(U, Z) \\ U = F_P(X - V) \\ V = F_{ЗЗ}(Y) \end{cases} \quad (13.18)$$

де F_0 – оператор об'єкта управління; F_P – оператор регулятора; $F_{ЗЗ}$ – оператор зворотного зв'язку; X, Y, Z, U, V – вектори сигналів і впливів.

Перевагою цього принципу є його універсальність, тобто функціонування незалежно від кількості та природи збурень. Недоліками є можливість появи нестійкості системи, складність одночасного забезпечення високої точності, стійкості та швидкодії, складності, для деяких об'єктів, вимірювання стану та забезпечення зворотного зв'язку.

Принцип комбінованого регулювання використовується одночасно з регулюванням за збуренням і за відхиленням (див. рис. 13.6, в), що забезпечує найбільш високу точність управління.

Принцип адаптації (див. рис. 13.6, г) полягає у пристосуванні параметрів, структури або алгоритму функціонування системи управління до зміни умов. Адаптація здійснюється за допомогою блока корекції закону управління БКЗ, який оцінює зміни умов (ідентифікує систему) і приймає рішення щодо необхід-

них змін у законі управління. В результаті чого змінюються параметри або взагалі вигляд оператора F_p .

Перевагою є можливість роботи в умовах невизначеності, недоліками – складність та, інколи, можливість втрати стійкості системи.

Принцип оптимального управління (див. рис. 13.6, д) полягає у знаходженні такого закону управління u , який забезпечив би переведення об'єкта управління з початкового стану y_0 у кінцевий стан y_n з додатковою умовою – забезпечити досягнення мінімуму або максимуму певного показника Q (наприклад, часу управління, витрат енергії тощо), який називається критерієм або цільовою функцією. Можуть також задаватися обмеження на певні параметри процесу управління. Задача розв'язується за допомогою блоку оптимізації O , який знаходить оптимальну траєкторію (бажану послідовність проміжних станів об'єкта), з якої регулятор формує управління u .

Оптимальне управління за своєю суттю має високі показники якості, але ускладнює систему і погано працює в умовах значних збурень та невизначеності характеристик об'єкта.

Закон управління – це правило обчислення керуючого сигналу u на основі вставки (вхідного сигналу) x і параметрів стану об'єкта y . При комп'ютерній реалізації закон управління називають алгоритмом. Фактично закон управління – це конкретний спосіб реалізації операторів моделей (13.17) і (13.18).

Головне призначення закону управління – переведення об'єкта управління з поточного стану y в заданий стан x за умови забезпечення необхідних показників якості.

Головне призначення закону управління – переведення об'єкта управління з поточного стану y в заданий стан x за умови забезпечення необхідних показників якості.

Закони управління розділяють на лінійні і нелінійні.

Лінійні закони використовуються в системах автоматичного управління технологічними процесами для управління лінійними об'єктами без обмежень. Вибір лінійного закону управління визначається необхідною точністю управління.

Розглянемо складові загальної похибки управління на основі найпростішої системи управління. На рис. 13.7, а наведена структурна схема системи, а на рис. 13.7, б – часові діаграми вхідного та вихідного сигналів (уставки та стану об'єкта).

Внаслідок інерційності системи при зміні уставки в момент $t = 0$ з $x = x_1$ на $x = x_2$ стан системи y поступово змінюється, наближаючись до заданого значення. В ході перехідного процесу ця інерційність приводить до наявності динамічної похибки ε_d . Але наявність в будь-якій системі управління певної нечутливості та втрат енергії (аналогічно механічному сухому тертю) приводить до того, що навіть в усталеному режимі існує певна похибка $\varepsilon_{ст}$, яку називають статичною. Загальна похибка

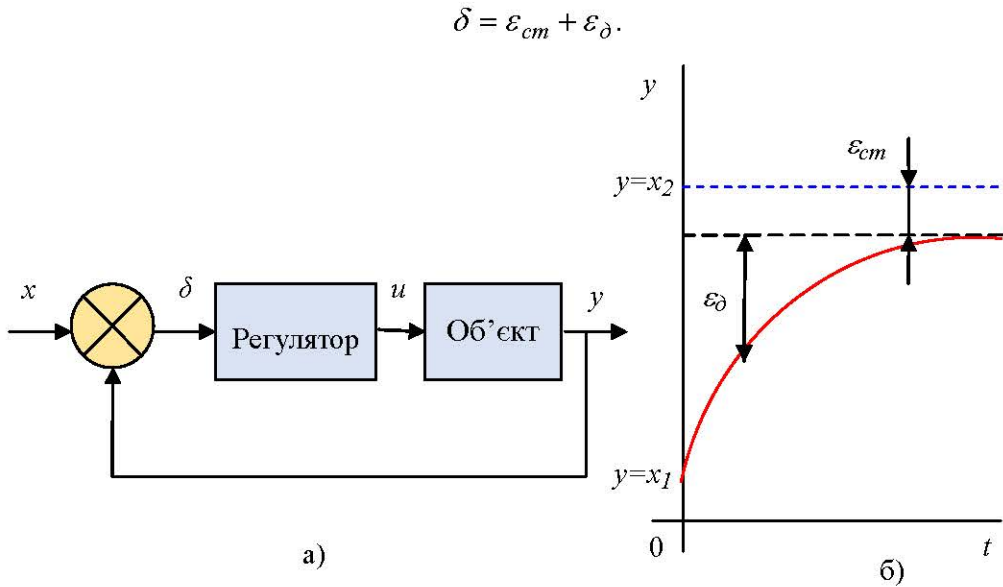


Рисунок 13.7 – Найпростіша лінійна САУ

Для зменшення тої чи іншої складової загальної похибки використовують різні лінійні закони управління. Найпоширенішими є типові закони управління:

- Пропорційний – **П**;
- Інтегральний – **І**;
- Диференціальний – **Д**;
- Пропорційно-інтегральний – **ПІ**;
- Пропорційно-диференціальний (форсуючий) – **ПД**;
- Пропорційно-інтегрально-диференціальний – **ПІД**.

Найпростішим є пропорційний закон

$$u = k(x - y), \quad (13.19)$$

тобто з передатною функцією регулятора

$$W_p = k. \quad (13.20)$$

Така система має значні похибки – як статичну, так і динамічну.

Для усунення статичної похибки використовується інтегральний закон управління

$$u = k \int_0^t (x - y) dt. \quad (13.21)$$

Передатна функція регулятора, що реалізує такий закон

$$W_p = \frac{k}{p}. \quad (13.22)$$

Усуваючи статичну похибку, інтегральний закон управління суттєво погіршує динамічні характеристики системи.

Для одночасного покращання як статичних, так і динамічних характеристик використовуються комбіновані закони управління.

Для зменшення динамічної похибки використовується пропорційно-диференціальний (форсуючий) закон

$$u = k_1(x - y) + k_2 \frac{d(x - y)}{dt}. \quad (13.23)$$

Передатна функція регулятора, що реалізує такий закон

$$W_p = k_1 + k_2 p. \quad (13.24)$$

Диференціальна складова зменшує динамічну та збільшує статичну похибку системи. Крім того, дещо погіршується завадостійкість.

Пропорційно-інтегральний закон

$$u = k_1(x - v) + k_2 \int_0^t (x - v) dt \quad (13.25)$$

зменшує статичну похибку, не погіршуючи динаміку системи.

Передатна функція регулятора, що реалізує такий закон

$$W_p = k_1 + \frac{k_2}{p}. \quad (13.26)$$

Пропорційно-інтегральний закон усуває статичну похибку, не збільшуючи динамічну похибку системи.

Найкращим (але найскладнішим) є пропорційно-інтегрально-диференціальний закон

$$u = k_1(x - v) + k_2 \int_0^t (x - v) dt + k_3 \frac{d(x - v)}{dt}. \quad (13.27)$$

Передатна функція регулятора, що реалізує такий закон

$$W_p = k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3 p. \quad (13.28)$$

Пропорційно-інтегрально-диференціальний закон усуває статичну похибку і зменшує динамічну похибку системи.

Таким чином, загальна модель системи автоматичного управління отримується підстановкою у систему рівнянь (13.17), (13.18), або іншу, яка

відображає принцип управління у системі, що моделюється, моделі об'єкта управління, регулятора, який реалізує певний закон управління, і зворотного зв'язку.

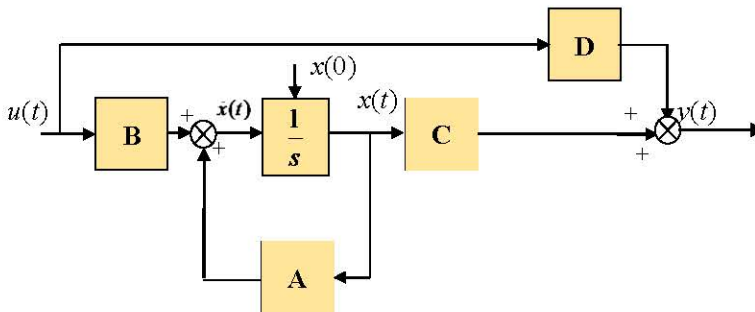
При моделюванні систем управління із складною структурою найчастіше використовують моделі у просторі станів і їх матричне подання (у випадку лінійних систем).

У просторі станів створюється модель динамічної системи, що містить набір змінних входу, виходу і стану, пов'язаних між собою диференціальними рівняннями першого порядку, які записуються в матричній формі. Для побудови такої моделі використовується базова структурна схема, показана на рис. 13.8.

Для випадку лінійної системи з входами, виходами і n змінними стану модель має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (13.29)$$

де $\mathbf{x}(t)$ – вектор стану, елементи якого називаються станами системи, $\mathbf{y}(t)$ – вектор виходу, $\mathbf{u}(t)$ – вектор управління, $\mathbf{A}[n \times n]$ – матриця системи, $\mathbf{B}[n \times p]$ – матриця управління, $\mathbf{C}[q \times n]$ – матриця виходу, $\mathbf{D}[q \times p]$ – матриця прямого зв'язку.



Перше рівняння – це рівняння стану, друге – рівняння виходу. Часто матриця D є нульовою – це означає, що в системі немає явного прямого зв'язку.

Для дискретних систем запис рівнянь в просторі станів ґрунтується не на диференціальних, а на кінцево-різницевих рівняннях:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(kT + 1) = \mathbf{A}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(kT)\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}(kT)\mathbf{u}(kT) \end{cases} \quad (13.30)$$

13.3 Моделювання процесів у металургії

Металургійне виробництво України, зокрема, феросплавне, характеризується досить високим технологічним рівнем. У той же час у зв'язку з підвищенням вимог до якості продукції, що випускається, інтенсифікації металургійного виробництва важливого значення набувають питання подальшого вдосконалення технологічних процесів, а також питання щодо розробки та впровадження інтелектуальних систем автоматичного управління окремими ланками і стадіями процесів управління. Створення таких систем важко здійснити без розробки математичних моделей технологічних процесів.

Процеси, що протікають в металургійних агрегатах, носять складний характер. Для них характерна наявність великої кількості вхідних впливів, вони носять нелінійний, недостатньо теоретично вивчений характер. Крім того для них характерна істотна зміна характеристик у часі, а також велика інерційність, що призводить до залежності вихідних змінних не тільки від поточного, але й від попередніх станів об'єкта і вхідних впливів. В свою чергу, обмежена кількість датчиків і вимірювальних пристроїв не дозволяє будувати досить повні математичні моделі процесів і тут використання таких інтелектуальних методів управління, як нечіткі, нейро-нечіткі та інші є майже єдиною можливістю отримати необхідні показники металургійного виробництва.

Сучасна металургія феросплавів спеціалізується на первинному вилученні металів з руд, концентратів і технічно чистих оксидів. Феросплави служать також вихідною сировиною при отриманні особливо чистих речовин (елементів і сполук.

Основні способи отримання феросплавів

Практично всі феросплавні елементи знаходяться у природі в вигляді різних сполук (оксиди, сульфідів і т. д.). Таким чином, завдання отримання того чи іншого феросплаву полягає у звільненні (відновленні) феросплавного елемента та переведенні в метал, а також у відділенні порожньої породи, яка містить сполуки інших металів.

Найбільше поширення як відновники при виробництві феросплавів отримали: вуглець (вуглецевотермічний або карботермічний процес), кремній (силікотермічний процес) і алюміній (металотермічний або алкомотермічний процес). Найбільш відомими прикладами відновлення оксидів вуглецем в металургії чорних металів та феросплавів є виробництво чавуну і вуглецевого феромарганцю.

У разі необхідності отримання за допомогою вуглецевотермічного процесу зниженого вмісту вуглецю в сплаві використовують взаємозв'язок між зниженням розчинності вуглецю в феросплавах і вмістом у них кремнію. При підвищенні концентрації кремнію в сплаві відбувається руйнування феросплавів, а звільнений вуглець виділяється у вигляді вільного графіту або зв'язується з кремнієм в карбід.

Друга особливість цих процесів полягає в тому, що реакції відновлення протікають з поглинанням великої кількості тепла (ендотермічні реакції). Тому вуглецевотермічні процеси можуть бути успішно реалізовані тільки за умови використання різних теплових агрегатів. Основну кількість феросплавів вуглецевотермічним процесом в даний час проводять в потужних руднотермічних електропечах.

До марганцевих феросплавів відносять феромарганець і силікомарганець (феросилікомарганець), металевий марганець і марганець азотований. Феромарганцем називається сплав, основою якого є залізо і марганець з масовою часткою останнього від 65 до 95% і обмеженими верхніми значеннями масових часток вуглецю, кремнію, фосфору, сірки.

У загальному вигляді процес отримання феросплавів зводиться до відновлення основних елементів (марганець, кремній, хром і т. д.) з їх кисневих сполук за допомогою відновлювача в феросплавній печі. Вихідні компоненти шихти (рудна частина, відновник, металодомішки і т. д.) беруться в певному, заздалегідь розрахованому співвідношенні, дозуються, завантажуються в піч і проплавляються з отриманням металу і шлаку.

Високовуглецевий феромарганець можна отримувати, залежно від якості марганцевмісної сировини за фосфором, за допомогою безфлюсового плавлення з нестачею вуглецевого відновлювача в шихті або за допомогою флюсових процесів. При флюсовому способі виплавлення за рахунок присадки флюсами домішок у шихту (вапняк, доломіт) створюються фізико-хімічні умови для більш повного переходу марганцю в метал, однак частина його (до 13%) переходить в відвальний шлак, тобто, для даного процесу частина марганцю втрачається безповоротно.

Якщо необхідно отримати феромарганець зі зниженим чи низьким вмістом вуглецю (середньо- і низьковуглецеві сплави), необхідно вибирати інший, ніж вуглець, відновлювач і відповідну технологічну схему виробництва. Таким чином, основними показниками виробництва феросплавів є:

- вилучення провідного елемента (або елементів) у сплав,
- питома витрата шихтових матеріалів,
- витрата електроенергії.

Досягнуте за останні роки підвищення рівня техніко-економічних показників виробництва марганцевих феросплавів стало можливим в результаті виконання цілого комплексу науково-дослідних робіт, спрямованих на досягнення оптимальних параметрів виробництва за умови того, що постійно погіршується якість марганцевої сировини. Протягом тривалого часу проводилися дослідження виробничих даних, що дозволило встановити кількісні залежності виробництва силікомарганцю і феромарганцю.

13.3.1 Прогнозування показників виробництва марганцевих феросплавів з використанням нечіткої експертної системи

Розглянемо побудову нечіткої моделі, що прогнозує залежності вмісту хімічних елементів у сплаві (рис. 13. 9). Рішення задачі полягає в пошуку системи логічних правил, які визначаються шляхом нечітких лінгвістичних оцінок експерта. Вхідними параметрами моделі є: вміст i -го хімічного елемента в компоненті шихти (E_i), вартість j -го компонента шихти (C_j), а також необхідний вміст i -го хімічного елемента \tilde{E}_i в сплаві, оптимальному за критерієм вартості складу шихти; вихідна змінна – вміст частки обраного компонента в шихті (\tilde{X}_j).

Для складання нечіткої моделі типу Мамдані вхідні і вихідні змінні виражаються в лінгвістичній формі. При складанні нечіткої моделі прогнозування оптимального складу шихти при виплавленні марганцевих феросплавів використовуємо три терми (лінгвістичні значення): “мала” (М), “середня” (С), “висока” (В). На основі експертних знань отримані функції належності, що встановлюють відповідність між числовими значеннями параметрів і термами. За функції належності вхідних змінних вибрані Гаусова (рис. 13.10) і трикутна (рис. 13.11) функції.

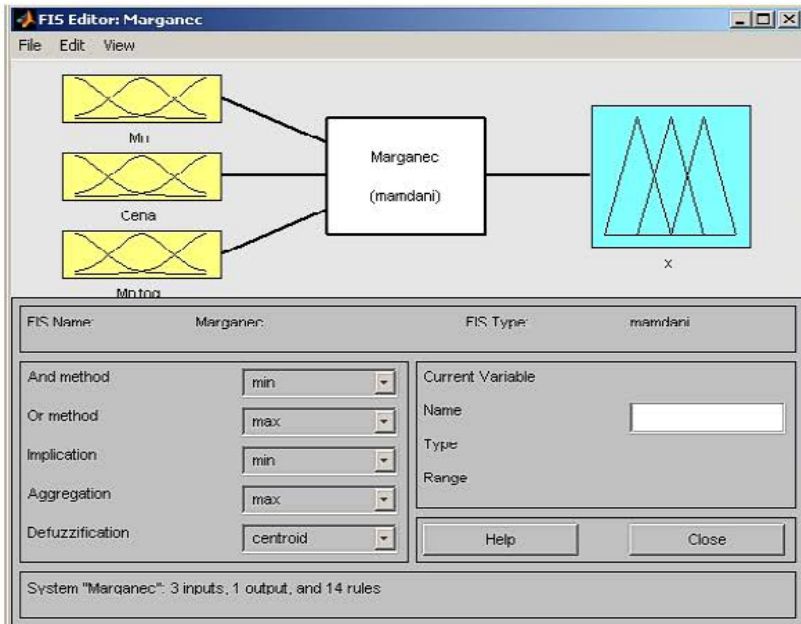


Рисунок 13.9 – Спроектована нечітка експертна система для прогнозування вмісту марганцю в силікомарганці

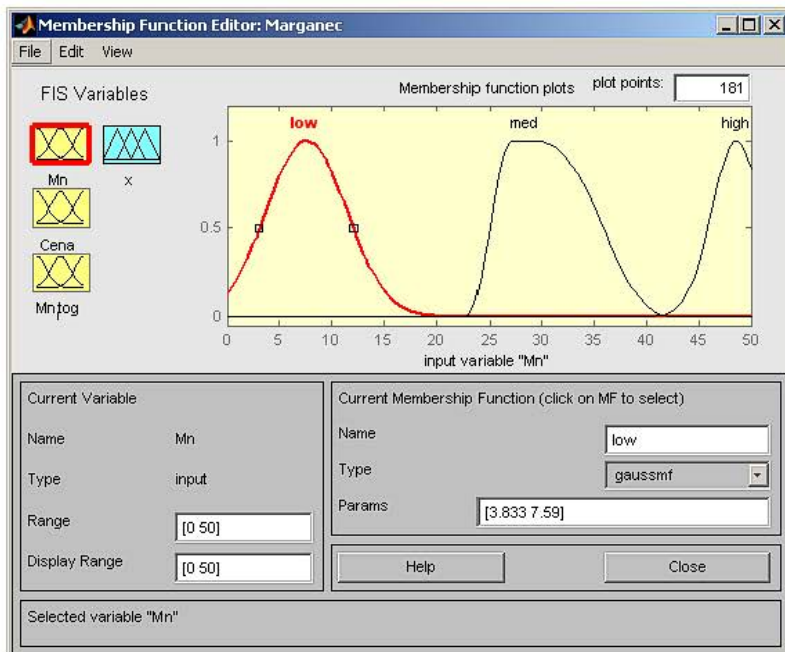


Рисунок 13.10 – Функції належності змінних входу і виходу

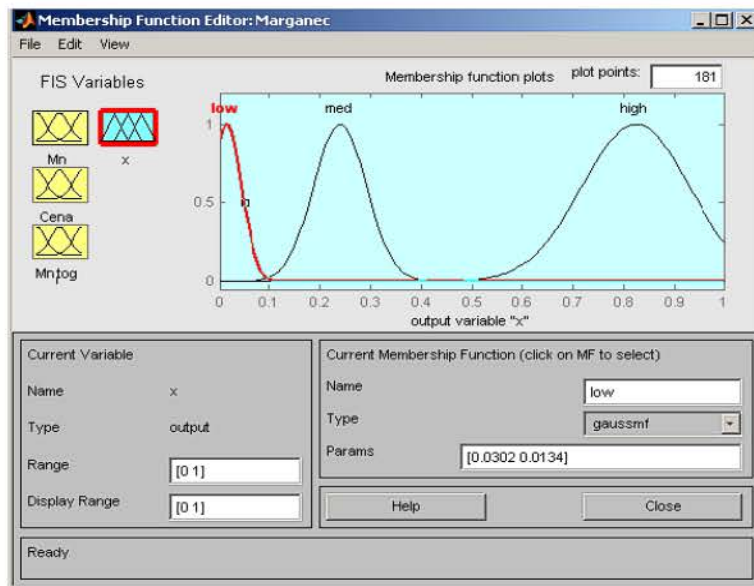


Рисунок 13.11 – Функції належності змінних входу і виходу

З використанням обраних значень лінгвістичних змінних складається матриця нечітких відношень (база знань – таблиця 13.3). Тут \tilde{X}_j – вміст частки обраного компонента в шихті.

Таблиця 13.3 – База знань

E_i	C_j	\tilde{E}_i	\tilde{X}_j
C	B	M	M
C	B	C	M
C	B	B	M
M	M	M	C
M	M	C	C
M	M	B	M
B	C	M	C
B	C	C	B
C	C	M	M
C	C	C	M
C	C	B	B

База знань записується у вигляді системи правил (рис. 13.12). Числове значення вихідного параметра знаходиться шляхом дефазифікації за допомогою методу “центра wag”.

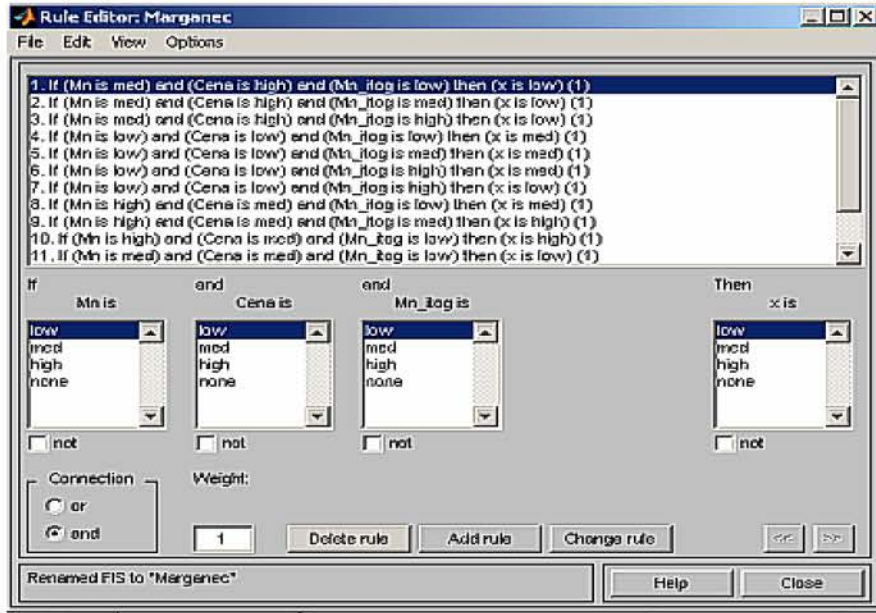


Рисунок 13.12 – База правил нечіткої експертної системи

Нечітка модель реалізована в середовищі MATLAB за допомогою пакета розширення Fuzzy Logic (рис. 13.13). Приклад функцій належності вихідних змінних – вміст часток компонентів шихти, показано на рис. 13.14.

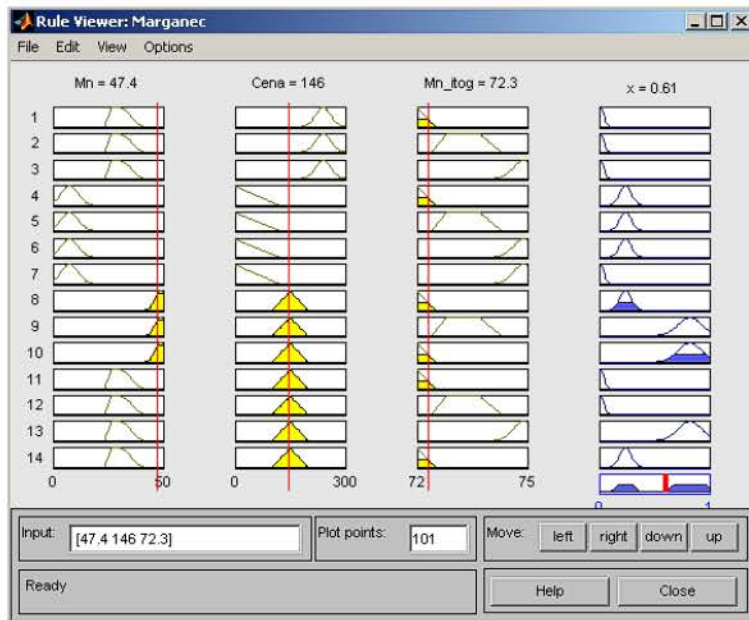


Рисунок 13.13 – Спроекована система нечіткого виведення в середовищі MATLAB

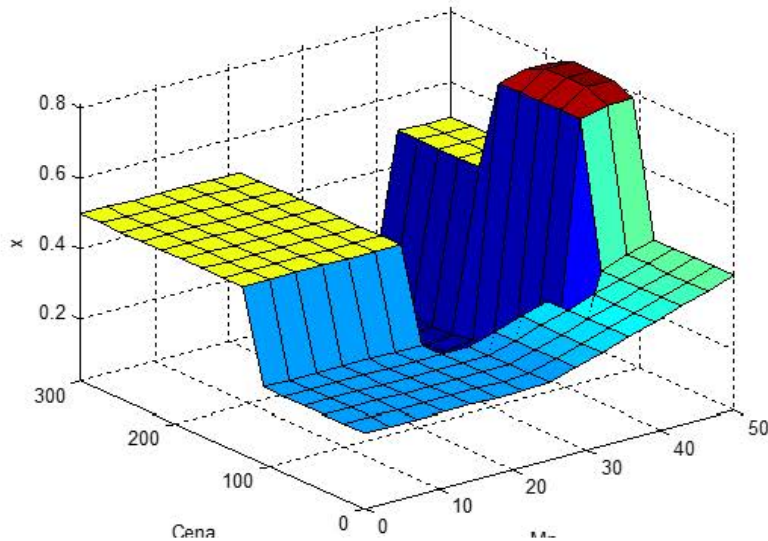


Рисунок 13.14 – Поверхня результатів побудованої нечіткої моделі

13.3.2 Ідентифікація технологічного процесу виплавлення феросиліцію

Динаміка процесів, що протікають у феросиліцієвій печі, охоплює широкий інтервал часу. Вона зумовлена як процесами утворення високочастотної дуги з постійними часу менше 1 мс, так і процеси типових хімічних реакцій з постійними часу порядку декількох днів. Крім того, циклічність роботи печі та організаційних принципів керування спричиняють час запізнювання, який дорівнює декільком годинам.

Складні типи реакцій, що протікають у печі, разом із широкодіапазонною динамікою процесу та значним часом запізнювання зумовлюють складне оцінювання її стану. Оцінки, засновані на поточних спостереженнях і вимірах, можуть не дати картини стану печі, оскільки тривалість технологічного процесу перевищує часові рамки спостережень і тривалість зміни. Внаслідок цього у оператора виникають труднощі в правильному оцінюванні роботи печі, оскільки те, що він спостерігає в печі в даний момент, не обов'язково є результатом його власних дій, але, ймовірно, дій попередньої зміни або навіть більш ранніх. Та ж проблема має місце при оцінюванні вуглецевого балансу печі. У випадку, якщо металург помічає зміну умов протікання реакцій у печі, завжди виникає питання: чи є те, що він спостерігає, відбиттям дійсної зміни у вуглецевому балансі печі, або це реакція на зміну складу сировини, з яким він мав справу кілька днів тому?

Для одержання точнішої та систематичної оцінки печі використовують інструменти, якими можуть користуватися оператори та металурги для визначен-

ня умов роботи печі та за допомогою яких можуть бути враховані особливості динаміки процесу. Прикладами таких інструментів, які використовують при моделюванні і аналізі динаміки, можуть бути фільтрація, кореляційний і спектральний аналізи, а також моделювання динаміки печі у вигляді часових рядів. Однак, такі методи вимагають великої кількості даних, в тому числі результатів лабораторних аналізів.

У сучасній теорії управління технологічними процесами металургійного виробництва все частіше використовуються підходи, що поєднують у собі можливості класичного управління у контурі з нечіткими ідентифікаторами динамічних нелінійних систем. Схема системи нечіткої ідентифікації показана на рис. 13.15.

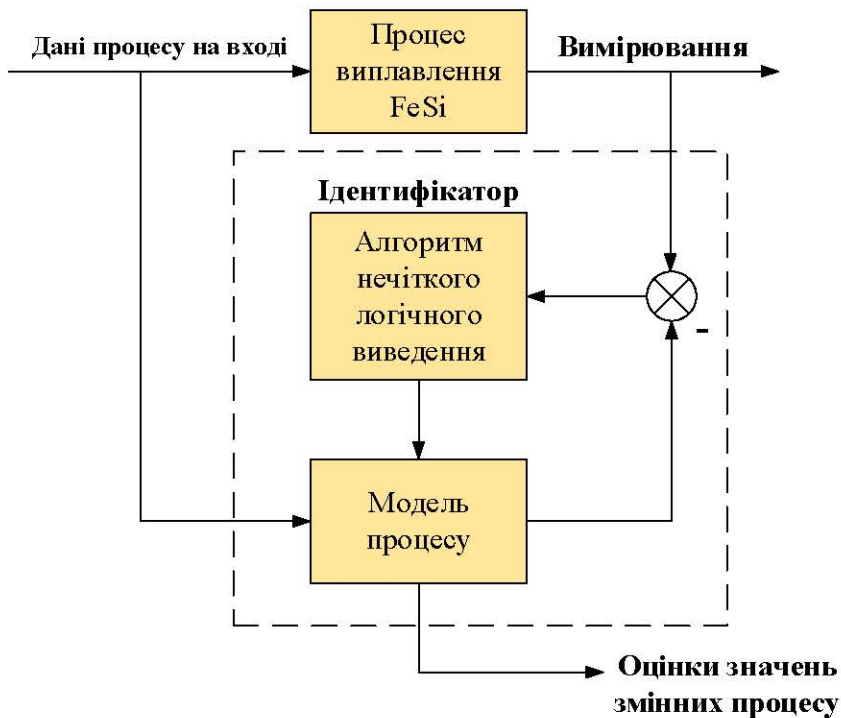


Рисунок 13.15 – Система нечіткої ідентифікації за паралельною моделлю

В ідентифікаторі використовується модель утворення колошникового газу з $SiO_{газ}$, що виділяється з печі, яка описана часовими рядами. При цьому вибір $SiO_{газ}$ як вихідної змінної процесу, що реєструється, пов'язаний з відносною простотою вимірювання його кількості і тісним зв'язком його кількості з процесами у печі

Моделювання часового ряду. АРКС – модель процесу виплавлення феросиліцію

На підставі апріорних відомостей можна припустити, що досліджуваний процес є лінійною системою із вхідним сигналом $u(t)$ та вихідним сигналом $y(t)$ і постійною частотою дискретизації. Тоді вхідне–вихідне співвідношення системи може бути описано узагальненою моделлю часового ряду (авторегресійна модель ковзного середнього – АРКС):

$$y(i) = - \sum_{k=1}^{ny} a_k y(i-k) + \sum_{k=1}^{mu} b_k u(i-d_u-k) + e(i). \quad (13.31)$$

де $e(t)$ – білий шум.

Коефіцієнти a_k та b_k – параметри моделі, i – змінний інтервал часу, $(i-k)$ позначає момент часу $(i-k \cdot T_s)$, де T_s – одиничний інтервал часу (крок дискретизації), ny та mu описують порядок моделі та показують число дискретних вимірів у моделі відповідно до вихідних і вхідних змінних. Часова затримка у вхідному i сигналі (чисте запізнювання) процесу описується як d_u одиниць часу, відповідно до формули $\tau_u = d_u \cdot T_s$.

Визначення параметрів моделі можна реалізувати за алгоритмом регресійної ідентифікації, в основі якого лежить метод найменших квадратів помилки між результатами вимірювань $y(t)$ і вихідними даними моделі $\tilde{y}(t)$. Модель може бути приведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\tilde{y}(i) = \varphi(i)^T \Theta, \quad (13.32)$$

у якій вектори параметрів регресії

$$\Theta = [a_1, \dots, a_{ny}, b_1, \dots, b_{mu}]^T, \quad (13.33)$$

$$\varphi(i)^T = [-y(i-1), \dots, -y(i-ny), u(i-d_u-1), \dots, u(i-d_u-mu)].$$

Задавши вектори:

$$Y = [y(1), \dots, y(N)]^T, \quad \Phi = [\varphi(1)^T, \dots, \varphi(N)^T]^T, \quad (13.34)$$

де N – довжина вихідного часового ряду, одержимо критерій найменших квадратів у вигляді:

$$V(\Theta, N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y(i) - \varphi(i)^T \Theta)^2 = \frac{1}{2} (Y - \Phi \Theta)^T (Y - \Phi \Theta). \quad (13.35)$$

Тоді оцінка вектора параметрів буде мати такий вигляд:

$$\Theta = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y \quad (13.36)$$

Таким чином рекурентна оцінка параметрів може бути отримана за допомогою рівнянь:

$$\Theta(i) = \Theta(i-1) + P(i)\varphi(i)(y(i) - \varphi^T(i)\Theta(i-1)), \quad (13.37)$$

$$P(i) = \frac{1}{\lambda} \left[P(i-1) - P(i-1)\varphi(i)(\varphi(i)^T P(i-1)\varphi(i) + \lambda)^{-1} \varphi(i)^T P(i-1) \right]$$

куди введений коефіцієнт забування λ ($0 < \lambda < 1$):

$$V(\Theta, N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda^{N-1} (y(i) - \varphi(i)^T \Theta)^2. \quad (13.38)$$

Це означає, що n попередніх вимірів будуть зважені коефіцієнтом λ і що оцінка буде мати “обрій пам'яті” $\frac{T_s}{(1-\lambda)}$.

Балансова модель утворення $SiO_{газ}$

Ідентифікатор параметрів вуглецевого балансу рис.13.15 містить модель утворення $SiO_{газ}$, що описана розглянутим вище часовим рядом (13.31).

Приймається, що утворення $SiO_{газ} - y_{SiO}(i)$ може бути виражене через кількість зв'язаного в шихті вуглецю $u_{FixC}(i)$, положення електрода печі $u_{HP}(i)$ і амплітуду середньої гармоніки в електричній напрузі нагрівання печі $u_{OH}(i)$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{SiO}(i) = & - \sum_{k=1}^{n_{SiO}} a_k y_{SiO}(i-k) + \sum_{k=1}^{n_{FixC}} b_{FixC,k} u_{FixC}(i-d_{FixC}-k) \\ & + \sum_{k=1}^{n_{HP}} b_{HP,k} u_{HP}(i-d_{HP}-k) + \sum_{k=1}^{n_{OH}} b_{OH,k} u_{OH}(i-d_{OH}-k). \end{aligned} \quad (13.39)$$

Властивості моделі характеризуються порядками моделі n_{SiO} , n_{FixC} , n_{HP} і n_{OH} , часовими затримками d_{FixC} , d_{HP} і d_{OH} , коефіцієнтом забування та часом дискретизації T_s .

Крім того, важливе значення має коректна фільтрація змінних, які входять в оцінку (13.39). Модель, що описана рівнянням (13.10), реалізовувалася за схемою, яка зображена на рис. 13.16. При цьому ваговий коефіцієнт $b_{FixC,1}$ зв'язаного вуглецю характеризує вуглецеву рівновагу в печі, тобто дає інформацію про надмірність або недостатність вмісту коксу в печі.

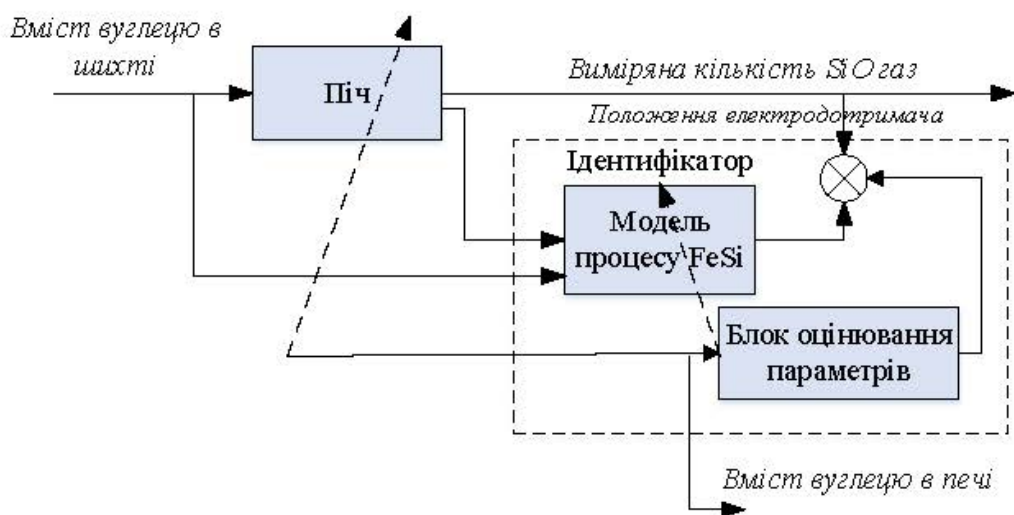


Рисунок 13.16 – Система ідентифікації параметрів вуглецевого балансу

Нечіткий метод контролю нормального ходу печі при виплавці феросиліцію

Розглянемо нечітку модель контролю печі при виплавленні $FeSi$. Налаштування нечіткої моделі будемо робити за допомогою алгоритму нечіткого виведення Мамдані.

За входні лінгвістичні змінні використовуються:

- “Глибина занурення електрода”. Це є фактор робочої печі, що постійно (повільно) змінюється – електрод, занурений у шихту, розпадається. Тому електроди один раз у зміну “перепускають” на величину 100-120 мм.

- “Вуглецева рівновага C/SiO_2 ”. Відношення C/SiO_2 при виплавленні феросиліцію кожної марки теоретично становить $C/SiO_2 = 0.4$. Однак за даними промислової практики цей показник має значення $C/SiO_2 > 0.4$ та $C/SiO_2 < 0.4$ залежно від конкретних умов протікання процесів у печі. Функції належності входніх змінних для нечіткої системи показані на рис. 13.17.

Як вихідну змінну будемо використовувати “Вміст коксу печі”. Розглядаються три основних стани ходу печі:

1. Умовно нормальний, коли всі параметри постійні й довжина електрода відповідає заданим параметрам печі й процесу;
2. Через надлишок вуглецю ($C/SiO_2 > 0.4$) опір ванни підвищується й електрод змінної довжини “виходить” із шихти так, що гріється верхня частина печі (колошник) і втрачається $SiO_{газ}$;
3. Через нестачу вуглецю ($C/SiO_2 < 0.4$) електроопір ванни знижується й електроди занурюються, перегрівається нижня частина (“под” печі).

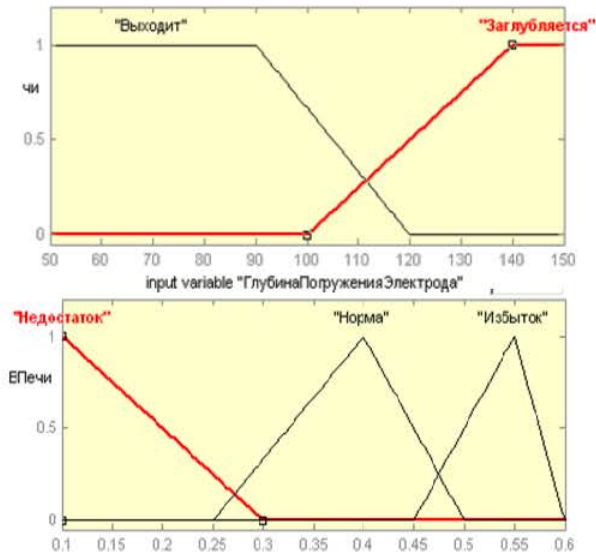


Рисунок 13.17 – Функції належності вхідних змінних

Функція належності вихідної змінної для нечіткої системи показана на рис. 13.18.

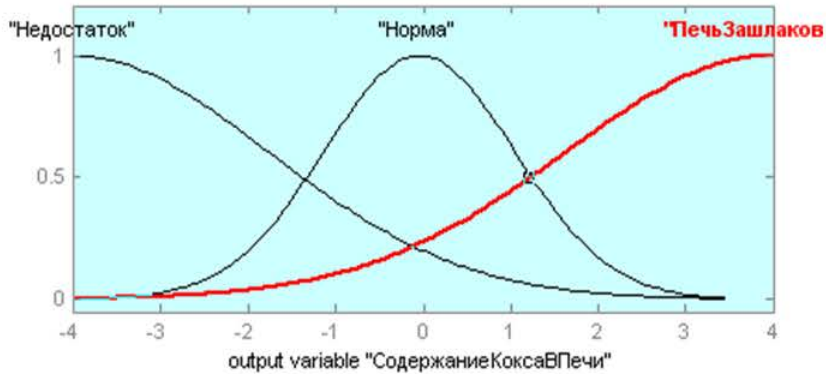


Рисунок 13.18 – Функція належності вихідної змінної

База правил для нечіткого логічного контролера наведена (у форматі нечіткого виведення Мамдані) у табл. 13.4.

Таблиця 13.4 – База знань

Глибина занурення електрода	Вуглецева рівновага	Вміст коксу в печі
Виходить	Норма	Норма
Виходить	Надлишок	Нестача
Занурюється	Нестача	Піч Зашлакована

Результат програми перегляду правил нечіткого виведення показаний на рис. 13.19. З цього рисунка можна зробити висновок, що результати нечіткого моделювання такі: при глибині занурення електрода на 100 мм і вуглецевій рівновазі 0,35 вважати зміст коксу в печі як “умовно нормальний”.

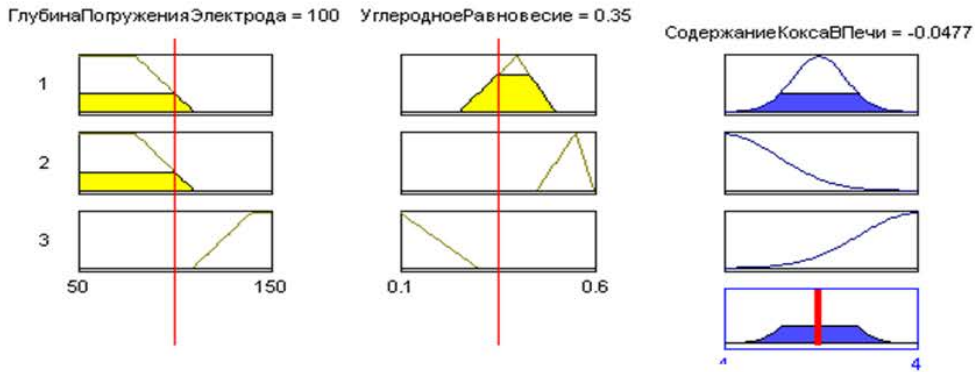


Рисунок 13.19 – Перегляд правил нечіткого висновку

Для остаточного аналізу розробленої нечіткої моделі можна переглянути поверхню нечіткого виведення, що зображена на рис. 13.20.

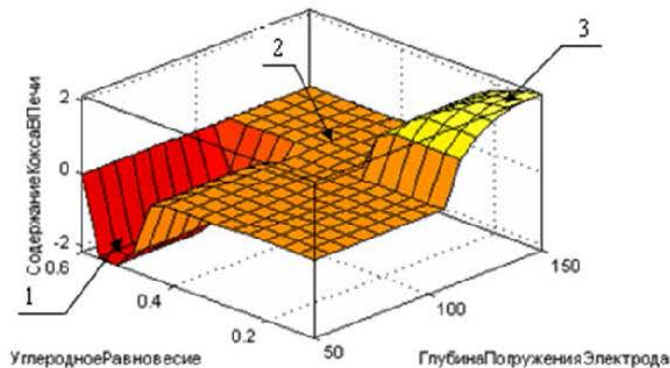


Рисунок 13.20 – Вигляд поверхні нечіткого виведення

З погляду практичного результату розроблена нечітка модель дозволяє дати рекомендації щодо управління процесом виплавлення феросиліцію, не вимагає значних витрат часу та ресурсів, має гнучкість і прозорість інтерпретації. Математична модель, розроблена з використанням методів нечіткого виведення, при достатньому рівні експертної інформації має більшу гнучкість, масштабованість, характеризується меншою обчислювальною складністю, краще інтерпретується, ніж регресійна.

13.3.3 Ідентифікація вихідних характеристик сталі з використанням нейронних мереж

Технологічний режим киснево-конвертерного виплавлення сталі засновано на перетворенні чавуну в сталь у так званих кисневих конвертерах. Кисневий конвертер являє собою глечикоподібну посудину, викладену зсередини вогнетривкою цеглою, обшиту зовні сталевим листом і здатну нахилитися за допомогою поворотного механізму.

Схематично процес конвертерного плавлення сталі наведено на рис. 13.21.

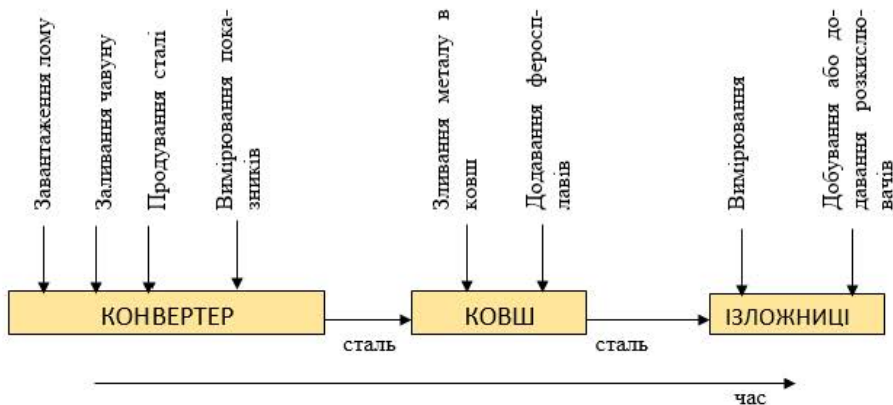


Рисунок 13.21 – Схема процесу конвертерного плавлення

Розглядається задача ідентифікації вихідних хімічних характеристик сталі на основі нейронних мереж. Для цього, перш за все, необхідно побудувати нелінійну математичну модель киснево-конвертерного процесу, яка повинна містити лише найбільш значущі характеристики технологічного процесу, ядром якої є нейромережа, що безпосередньо забезпечує ідентифікацію вихідних параметрів моделі.

Входами нейромоделі є параметри киснево-конвертерного процесу виплавлення сталі, а виходами – хімічні характеристики одержуваної сталі. Після цього необхідно налаштувати синаптичні ваги нейронної мережі, подавши на входи і виходи нейромоделі навчальну вибірку і використовуючи ту чи іншу процедуру навчання.

Параметрами, що мають найбільший вплив на кінцевий склад сталі, є:

- 1) вага чавуну, що заливається в кисневий конвертер;
- 2) хімічний склад чавуну, а саме:
 - вміст кремнію (Si);
 - вміст марганцю (Mn);
 - вміст сірки (S);
- 3) маса металобрухту, що завантажується у кисневий конвертер;
- 4) тривалість продування сталі;
- 5) хімічний склад сталі на першому етапі, а саме такі складові:

- вміст кремнію (Si);
 - вміст марганцю (Mn);
 - вміст сірки (S);
- б) кількість розкислювачів, що додаються:
- феромарганець (FeMn);
 - феросиліцій (FeSi);
 - силікомарганець (SiMn);
 - алюміній (Al).

За вхідними даними необхідно провести ідентифікацію вихідних хімічних характеристик готової сталі:

- вміст вуглецю;
- вміст марганцю;
- вміст кремнію;
- вміст сірки;
- вміст фосфору.

Розшифрування позначень у моделі, наведеній на рисунку 13.22, дано в таблиці 13.4.

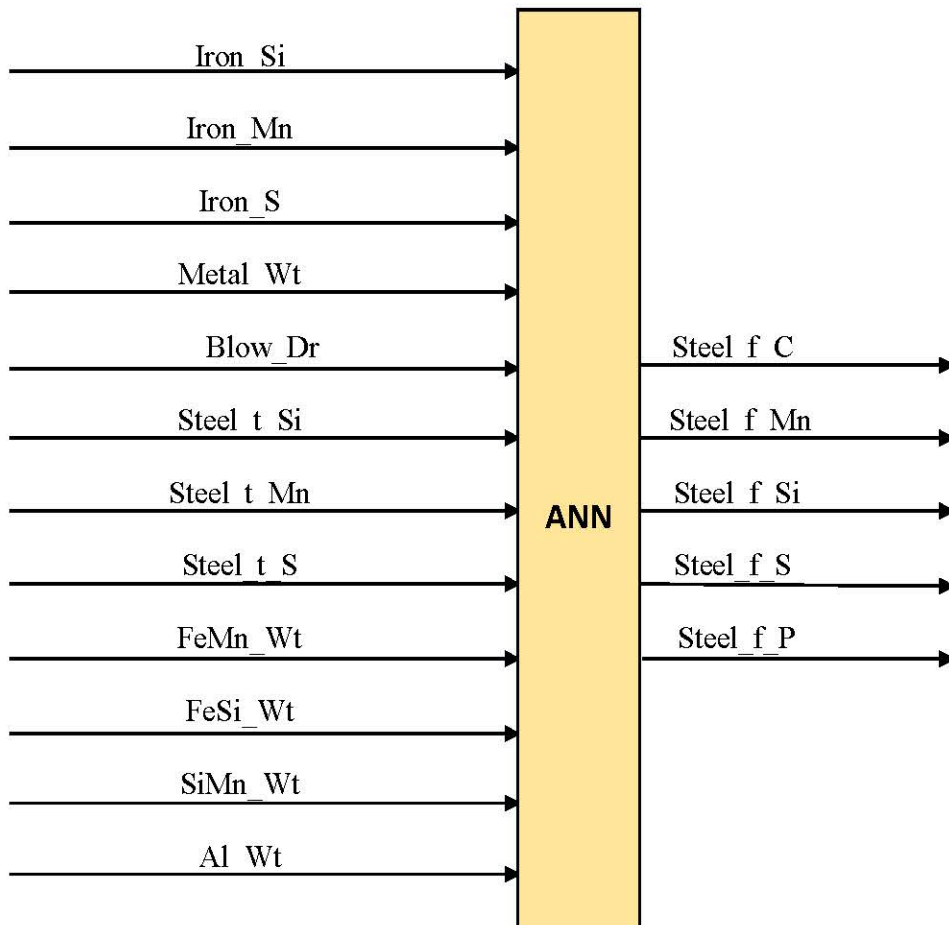
Таблиця 13.4 – Розшифрування позначень в моделі киснево-конвертерного процесу

Позначення	Значення
Iron_Wt	Вага чавуну, що заливається в кисневий конвертер
Iron_Si	Вміст кремнію в рідкому чавуні
Iron_Mn	Вміст марганцю в рідкому чавуні
Iron_S	Вміст сірки в рідкому чавуні
Metal_Wt	Вага металобрухту, що завантажується в конвертер
Blow_Dr	Тривалість продування
Steel_t_Si	Вміст кремнію в сталі на першому етапі
Steel_t_Mn	Вміст марганцю в сталі на першому етапі
Steel_t_S	Вміст сірки в сталі на першому етапі
FeMn_Wt	Кількість феромарганцю, який додається на етапі розкислення
FeSi_Wt	Кількість феросиліцію, який додається на етапі розкислення
SiMn_Wt	Кількість силікомарганцю, який додається на етапі розкислення
Al_Wt	Кількість алюмінію, який додається на етапі розкислення
Steel_f_C	Вміст вуглецю у готовій сталі
Steel_f_Mn	Вміст марганцю у готовій сталі
Steel_f_Si	Вміст кремнію у готовій сталі
Steel_f_S	Вміст сірки у готовій сталі
Steel_f_P	Вміст фосфору у готовій сталі
ANN	Штучна нейронна мережа

Входи і виходи були нормалізовані на інтервалі [0; 1], після чого вся вибірка розділена на навчальну (2000 елементів) і тестову (1273 елемента). Для розрахунку якості ідентифікації використовується критерій середнього модуля помилки:

$$|\bar{e}_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_{ij} - \hat{y}_{ij}|, \quad (13.40)$$

де n – обсяг навчальної вибірки, j – порядковий номер вихідного параметра каскадної нейромережі.



Отримані результати наведені в таблиці 13.5.

Таблиця 13.5 – Результати ідентифікації хімічного складу сталі

Вибірка	Помилка ідентифікації хімічного складу сталі				
	Вуглець, С	Марганець, Mn	Кремній, Si	Сірка, S	Фосфор, P
Навчальна	0,023	0,030	0,008	0,002	0,002
Тестова	0,024	0,036	0,012	0,002	0,002

Як видно, використання нейронної мережі для вирішення задачі ідентифікації хімічного складу сталі дозволяє забезпечити високу якість вихідних характеристик.

13.4 Моделі обчислювальних систем

Проектування і використання різноманітних обчислювальних систем ґрунтується на аналізі і синтезі їх моделей.

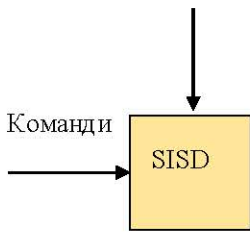
13.4.1 Види обчислювальних систем

Існують різні архітектури обчислювальних систем, і однією зі схем їх класифікації є таксономія Флінна, заснована на описі роботи системи з потоками команд і даних (рис. 13.23).

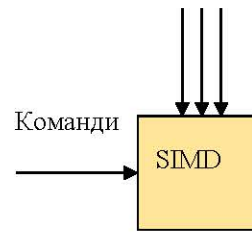
Взаємодія даних і команд може бути зображена інформаційним графом. Інформаційний граф описує послідовність виконання операцій і взаємну залежність між різними макроопераціями чи блоками операцій. Вузлами інформаційного графу є макрооперації, а односпрямованими дугами – канали обміну даними (рис. 13.24)

Кожен вузол можна охарактеризувати парою (n, s) , де n – ім'я вузла, s – його розмір. Розмір вузла визначається кількістю елементарних операцій, що входять до його складу. Дуга характеризується парою (v, d) , де v – дані, що пересилаються, а d – час, що витрачається на їх пересилання. Інформаційний граф містить лінійні ділянки, розгалуження і цикли.

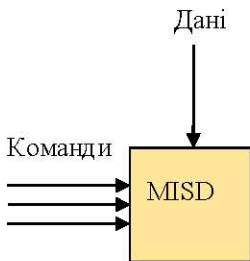
Архітектура фон Неймана – широко відома модель обчислювальної системи зі спільним зберіганням програм і даних у пам'яті комп'ютера. Обчислювальні системи такого роду часто позначають терміном “машина фон Неймана”, а основні принципи її побудови – “принципами фон Неймана”.



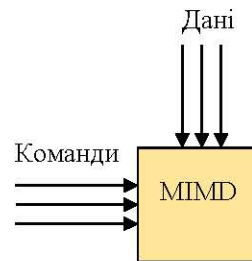
а) Архітектура SISD(Single Instruction Stream - Single Data Stream) – один потік команд і один потік даних



б) Архітектура SIMD(Single Instruction Stream - Multiple Data Stream) – один потік команд і декілька потоків даних

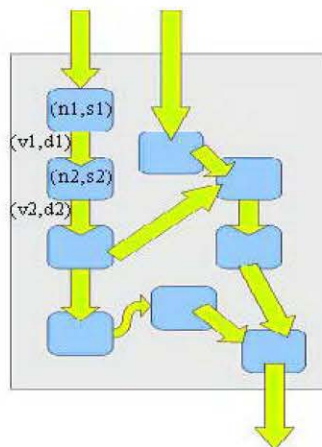


в) Архітектура MISD(Multiple Instruction Stream - Single Data Stream) – декілька потоків команд і один потік даних



г) Архітектура MIMD(Instruction Stream - Multiple Data Stream) – декілька потоків команд і декілька потоків даних

Рисунок 13.23 – Архітектура обчислювальних систем



Принципи фон Неймана

1. *Принцип двійстості.* Для запису даних і команд використовується двійкова система числення.

2. *Принцип програмного управління.* Програма складається з набору команд, які виконуються процесором одна за одною у певній послідовності.

3. *Принцип однорідності пам'яті.* Як програми (команди), так і дані зберігаються в одній і тій же пам'яті (і кодуються в одній і тій же системі числення). Над командами можна виконувати такі ж дії, як і над даними.

4. *Принцип адресації пам'яті.* Структурно основна пам'ять складається з пронумерованих комірок; процесору в довільний момент часу доступна будь-яка комірка.

5. *Принцип послідовного програмного управління.* Всі команди розташовуються в пам'яті і виконуються послідовно, одна після завершення іншої.

6. *Принцип умовного переходу.* Команди програми не завжди виконуються одна за одною. Можлива присутність у програмі команд умовного переходу, які змінюють послідовність виконання команд залежно від значень даних.

На відміну від архітектури фон Неймана, у рамках паралельної моделі існують різні підходи, орієнтовані на різні архітектури високопродуктивних обчислювальних систем і різні інструментальні засоби:

- модель передачі повідомлень;
- модель паралелізму даних;
- модель загальної пам'яті.

У комп'ютерній архітектурі *систолічна модель* розглядає масив процесорних елементів (рис. 13.25), які називаються комірками. Це спеціалізована форма паралельних обчислень, де комірки (тобто процесори), здійснюють обчислення і зберігання даних незалежно один від одного.

Систолічний масив складається з рядків елементарних комірок, подібно до матриць. Комірка DPU аналогічна процесору (CPU). Кожна комірка обмінюється інформацією зі своїми сусідами відразу ж після обробки. Систолічні масиви звичайно прямокутні, потоки даних через масив між сусідніми DPU взаємодіють з іншими даними, що рухаються у різних напрямках.

13.4.2 Математичні моделі обчислень

Системи виконання обчислень можуть розглядатися на мікрорівні (рівні процесора і його регістрів) і на макрорівні (рівні комп'ютера і обчислювальної системи).

На мікрорівні базовою моделлю обчислень є абстрактний автомат. Абстрактний автомат – модель дискретного пристрою, що має один вхід, один вихід і в кожний момент часу знаходиться в одному стані з множини можливих. На вхід

цього пристрою надходять символи однієї мови (множини), на виході він видає символи в загальному випадку іншої мови.

Формально абстрактний автомат визначається як п'ятірка

$$A = (S, X, Y, \delta, \lambda), \quad (13.41)$$

де S – множина станів автомата, X, Y – вхідний і вихідний алфавіти відповідно, $\{\delta : S \times X \rightarrow S\}$ – функція переходів, $\{\lambda : S \times X \rightarrow Y\}$ – функція виходів.

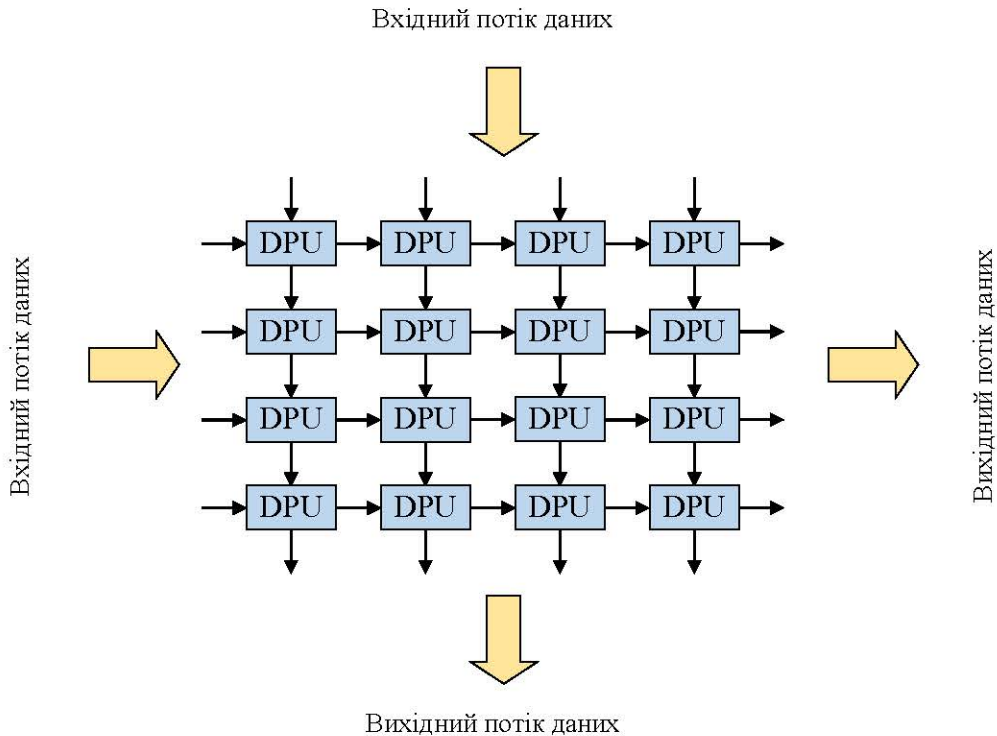


Рисунок 13.25 – Систолічний масив процесорних елементів

Якщо функції переходів і виходів однозначно визначені для кожної пари (s, x) , то автомат називають детермінованим. В іншому випадку автомат називають недетермінованим або частково визначеним. Якщо функція переходів або функція виходів є випадковою, то автомат називають ймовірнісним.

Функціонування автомата полягає в породженні двох послідовностей: послідовності станів автомата $\{s_1, s_2, s_3 \dots\}$ і послідовності вихідних символів $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$, які для послідовності символів $\{x_1, x_2, x_3 \dots\}$ розгортаються в моменти дискретного часу $\{t = 1, 2, 3, \dots\}$. Моменти дискретного часу отримали назву тактів.

Функціонування автомата в дискретні моменти часу t може бути описано системою рекурентних співвідношень, яка є аналогом моделі дискретної системи управління у просторі станів (13.30):

$$\begin{cases} s(t+1) = \delta[s(t), x(t)] \\ y(t) = \lambda[s(t), x(t)] \end{cases} \quad (13.42)$$

Кінцевий автомат – модель автомата, за умови, що загальна можлива кількість станів обмежена. Якщо кількість можливих станів невелика (наприклад, кінцевий автомат “магнітний замок” може знаходитися у трьох станах: вимкнений, увімкнений і закритий, увімкнений і відкритий), то кінцевий автомат може задаватися формальним описом усіх його станів.

Діаграма станів (або іноді *граф переходів*) – графічне зображення множини станів і функції переходів, є зваженим орієнтованим графом, вершини якого – стани автомата, ребра – переходи з одного стану в інший, а ваги – символи, при яких здійснюється даний перехід.

Таблиця переходів – табличне подання функції переходів δ . Зазвичай у такій таблиці кожному рядку відповідає один стан, а стовпцю – один допустимий вхідний символ. У комірці на перетині рядка і стовпця записується дія, яку повинен виконати автомат, якщо в ситуації, коли він знаходився в даному стані, на вході він отримав цей знак.

Детермінованим кінцевим автоматом (ДКА) називається такий автомат, в якому для кожної послідовності вхідних символів існує лише один стан, до якого автомат може перейти з поточного.

Недетермінований кінцевий автомат (НКА) є узагальненням детермінованого. Недетермінованість автоматів досягається двома способами:

- існують переходи, помічені порожнім ланцюжком ε ;
- з одного стану виходить кілька переходів, помічених одним і тим же символом.

Кінцевий автомат з пам'яттю – математична модель пристрою, поведінка якого залежить як від вхідних умов, так і від попереднього стану.

Для опису кінцевого автомата з пам'яттю використовуються мови операторних схем, регулярних виразів алгебри подій, а також матриці і графи переходів.

Секвенціальна логіка – це логіка пам'яті цифрових пристроїв. Секвенціальна логіка відрізняється від комбінаційної логіки тим, що моделює цифрові пристрої з урахуванням передісторії їхнього функціонування.

Залежно від способу функціонування цифрові пристрої підрозділяються на синхронні та асинхронні. Відповідно, їхня поведінка підкоряється або синхронній, або асинхронній логіці.

Синхронна секвенціальна логіка. При логічному моделюванні пристроїв з пам'яттю особлива роль приділяється фактору часу, який у синхронних схемах враховується тактами кінцевого автомата. Такти визначають моменти зміни ста-

нів автомата, тобто, синхронізують відповідну функцію. Математичний апарат синхронної логіки задають автоматні моделі Мілі та Мура.

Асинхронна секвенціальна логіка для вираження ефекту запам'ятовування використовує моменти зміни станів, які задаються не в явному вигляді, а виходячи із зіставлення логічних величин за принципом «раніше-пізніше». Для асинхронної логіки достатньо встановити черговість зміни станів безвідносно будь-яких прив'язок до реального або віртуального часу.

Теоретичний апарат секвенціальної логіки складають математичні інструменти секвенції і вен'юнкції, а також логіко-алгебраїчні рівняння на їх основі.

Секвенція – це послідовність елементів, яка надається впорядкованою множиною, наприклад, $\langle x \rangle = \langle x_1 x_2 \dots x_n \rangle$, де $x_i \in \{0,1\}$.

За допомогою секвенції реалізується двійкова функція $z = \varphi(\langle x \rangle)$, така, що має місце тільки у разі $\forall x_i = 1$, причому $(x_i = 1) \prec (x_j = 1)$ для всіх $i < j$. Символ \prec задає відношення випередження. Таким чином, *секвенціальна функція дорівнює одиниці при одиничних значеннях аргументів, встановлення яких здійснюється по чергово, починаючи з x_1 і закінчуючи x_n . В усіх інших випадках $z=0$.*

Вен'юнкція – це асиметрична логіко-динамічна операція \angle , згідно з якою зв'язка $x \angle y$ приймає одиничне значення тільки у випадку $x \wedge y = 1$ за умови, що в момент встановлення $x = 1$ рівність $y = 1$ вже мала місце.

Вен'юнкція і мінімальна (двоелементна) секвенція функціонально ідентичні: $x \angle y = \langle ux \rangle$.

Вен'юнктор є основним операційним елементом пам'яті секвенціальної логіки. Секвентор будується на основі композиції вен'юнкторів.

13.4.3 Моделі промислових комп'ютерних мереж

З масовим поширенням дешевих контролерів і «інтелектуальних» елементів (з вбудованими програмованими блоками обробки даних) основним принципом організації систем управління є інтеграція елементів системи за допомогою промислових мереж.

Промислова мережа – мережа передачі даних, що зв'язує сенсори, виконавчі механізми, промислові контролери. Термін описується стандартом ІЕС 61158.

Основні функції промислових мереж:

- передавання даних між сенсорами, контролерами і виконавчими механізмами;
- діагностика та дистанційне конфігурування сенсорів і виконавчих механізмів;
- калібрування сенсорів;
- живлення сенсорів і виконавчих механізмів;
- зв'язки між контролерами та системами людино-машинного інтерфейсу (SCADA).

Промислові мережі можуть взаємодіяти зі звичайними комп'ютерними мережами, зокрема використовувати глобальну мережу Internet.

У порівнянні з підключенням периферійного обладнання до контролера окремими проводами промислова мережа має такі переваги:

- у кілька разів знижуються витрати на кабель і його прокладання;
- збільшується допустима відстань до сенсорів і виконавчих пристроїв;
- спрощується управління мережею комплексом обладнання АСУ ТП;
- спрощується модифікація системи при заміні обладнання і програмного забезпечення.

Наразі поширення набули декілька стандартів промислових мереж:

– Modbus/RS-485 – найпростіша, найдешевша і широко розповсюджена промислова мережа, заснована на стандарті RS-485, що використовує захищену виту пару;

– Промислові модифікації Ethernet: Profinet; FOUNDATION Fieldbus HSE (High Speed Ethernet, FF H2); EtherCAT; Ethernet Powerlink; Ether /IP; SERCOS III;

– ProfiBus – міжнародний стандарт, створений за активної участі фірми Siemens AG: ProfiBus DP, ProfiBus FMS, ProfiBus PA; FF H1 – польовий протокол, аналог ProfiBus PA;

– HART – мережа для аналогових сенсорів;

– AS-Interface – дешева і заводостійка мережа для дискретних приладів малої продуктивності;

– CAN – промислова мережа для автоматизації транспорту та машинобудування: CANbus, CANopen, DeviceNet, SDS, J1939

– Промислові мережі для автоматизації будівель: LonWorks; BACnet; EIB; MBus

– Промислові мережі автомобілів: LIN; FlexRay.

Усі правила організації комп'ютерних мереж називають протоколами.

Опис системи таких протоколів є моделлю мережі.

Модель OSI (базова еталонна модель взаємодії відкритих систем, англ. Open Systems Interconnection Basic Reference Model, 1978 р.) – модель для комунікацій і розробки мережних протоколів. Пропонує багаторівневу модель комп'ютерної мережі. Кожен рівень моделює свою частину процесу взаємодії.

В даний час основною використовуваною системою протоколів є TCP/IP, розробка яких була здійснена до прийняття моделі OSI, проте вони частково відповідають цій моделі.

Модель OSI складається з семи рівнів. Рівні взаємодіють один з одним (по «вертикалі») за допомогою інтерфейсів і можуть взаємодіяти з паралельним рівнем іншої системи (по «горизонталі») за допомогою протоколів. Кожен рівень може взаємодіяти тільки зі своїми сусідами й виконувати відведені тільки йому функції, як показано на рис. 13.26.

Модель OSI		
Тип даних	Рівень	Функції
Дані	7. Прикладний рівень	Доступ до мережевих служб
	6. Рівень подання	Подання і кодування даних
	5. Сеансовий рівень	Управління сеансом зв'язку
Сегменти	4. Транспортний	Прямий зв'язок між кінцевими пунктами і надійність
Пакети	3. Мережевий	Маршрутизація і логічна адресація
Кадри	2. Канальний	Фізична адресація
Біти	1. Фізичний рівень	Робота з середовищем передавання, сигналами і фізичним поданням бітів

Рисунок 13.26 – Рівні протоколів у моделі OSI

Сімейство TCP / IP розвивалося паралельно з протоколами OSI, тому не зовсім відповідає цій моделі. Сімейство TCP / IP має три транспортних протоколи: TCP, повністю відповідний OSI, що забезпечує перевірку отримання даних; UDP, що відповідає транспортному рівню тільки наявністю порту, що забезпечує обмін датаграмами між додатками, але не гарантує отримання даних; SCTP, розроблений для усунення деяких недоліків TCP, в який додані деякі нововведення. У сімействі TCP / IP є ще близько двохсот протоколів.

У сімействі *IPX/SPX* порти (так звані “сокети” або “гнізда”) з'являються в протоколі мережевого рівня IPX, забезпечуючи обмін датаграмами між додатками (операційна система резервує частину сокетів для себе). Протокол SPX, у свою чергу, доповнює IPX всіма іншими можливостями транспортного рівня в повній відповідності з OSI. Як адресу хоста IPX використовує ідентифікатор, утворений з чотирибайтових номерів мережі (що призначаються маршрутизаторами) і MAC-адреси мережевого адаптера.

Взаємодія елементів мережі на основі системи протоколів є дуже складною, і в процесі такої взаємодії можуть виникати різноманітні колізії. **NS-2 (Network Simulator)** – система моделювання дискретних подій в мережі. NS-2 широко використовуються в моделюванні маршрутизації та протоколи передачі даних. NS-2 підтримує цілий ряд популярних мережевих протоколів.

13.5 Моделі розподілених систем

З розвитком мікропроцесорних технологій, здешевленням елементної бази усе більшого поширення набувають розподілені системи управління для управління розосередженими у просторі об'єктами.

13.5.1 Види розподілених систем

Розподілені системи поділяються на системи з розподіленими і з зосередженими параметрами. Систему з розподіленими параметрами можна розділити на частини (агрегати), які характеризуються тими ж параметрами, що і система в цілому; кожен агрегат можна знов розділити на ще менші агрегати і т. д., наприклад, внутрішній простір печі як об'єкта регулювання температури. Система із зосередженими параметрами складається з агрегатів, які або є неподільними, або характеризуються іншими параметрами і функціонують інакше, ніж система в цілому, наприклад, хмарна обчислювальна система. Зустрічаються також комбіновані системи, в яких частина агрегатів може розглядатися як підсистеми з розподіленими параметрами, а частина – як із зосередженими, наприклад, гідравлічна система, у якій трубопроводи мають розподілений гідравлічний опір, а різноманітні крани, розгалуження, повороти – зосереджений.

Перехід при моделюванні систем з розподіленими параметрами до границі їх подрібнення на найменші агрегати приводить до моделей у вигляді диференціальних рівнянь. Моделі розподілених систем також повинні враховувати *затримки при передаванні впливів* від одного агрегата до іншого. В системах з розподіленими параметрами це забезпечується використанням *диференціальних рівнянь у частинних похідних*. Найвідомішими моделями такого типу є система рівнянь Максвелла, хвильове рівняння Шредінгера тощо.

Моделі розподілених систем широко використовуються у різних галузях математичної фізики. Найвідомішими прикладами таких моделей є модель статичної механічної системи при просторово розподіленому навантаженні, модель розповсюдження тепла у просторі, модель дифузії, моделі геофізичних процесів тощо.

13.5.2 Динамічні процеси в розподілених системах

Природними моделями динаміки розподілених систем є системи матричних рівнянь у просторі станів (13.29). Такі моделі допускають розмірності і розповсюдження на велику кількість елементів розподіленої системи шляхом збільшення розмірності відповідних матриць і векторів.

Застосування диференціальних рівнянь для систем із запізненнями при розповсюдження сигналів і впливів між елементами розподіленої системи має

певні труднощі, особливо у випадку дискретних або змінних запізнень, як це спостерігається у комп'ютерних системах.

В системах із зосередженими параметрами затримки описуються передатними функціями

$$W_3(p) = e^{-p\tau},$$

де τ – часова затримка. При змінній затримці така передатна функція є невизначеною. Найчастіше вона задається своїми статистичними характеристиками – математичним сподіванням і дисперсією.

В дискретних системах одним з найсуттєвіших є питання синхронізації процесів в агрегатах, що взаємодіють. В синхронних системах для цього в моделі відображають кількість тактів, що витрачається на функціонування агрегатів. Найчастіше такі моделі зображуються часовими діаграмами.

13.5.3 Задача спостережності і керованості розподіленої системи

Однією з найважливіших при побудові моделей розподілених систем є проблема спостережності і керованості.

Спостережність є властивістю системи, що показує, чи можна за заданим набором контрольованих параметрів повністю відновити інформацію про стани системи.

Визначення стану системи в процесі моделювання здійснюється за допомогою системи сенсорів. При дослідженні спостережності визначається принципова можливість визначення усіх її параметрів стану за допомогою сенсорів. На жаль, не завжди існує такий набір параметрів, для якого система контролю може бути технічно реалізована. На практиці визначається мінімальна кількість та розташування точок контролю, які забезпечують можливість визначення стану системи з необхідною точністю. У такому випадку модель розподіленої системи будується з використанням певних припущень і матиме відповідну невизначеність.

Для лінійних систем, які описуються системою рівнянь (13.30), існує критерій спостережності у просторі станів. Для них можна скласти матрицю спостережності:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (13.43)$$

Якщо ранг матриці спостережності дорівнює n , то система є спостережною.

Керованість – одна з найважливіших властивостей системи управління, описує можливість перевести систему з одного стану в інший. Дослідження системи управління на керованість є одним з важливих кроків її синтезу.

Система називається повністю керованою, якщо всі компоненти її вектора станів керовані.

Для лінійних систем існує критерій керованості в просторі станів. Для них можна скласти матрицю керованості

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (13.44)$$

Якщо ранг матриці керованості дорівнює n , то система є повністю керованою.

13.5.4 Синергетика і теорія катастроф

Синергетика – міждисциплінарна наука, яка займається вивченням процесів самоорганізації розподілених систем і виникнення, підтримки стійкості та розпаду структур різної природи. Синергетика має справу з явищами та процесами, в результаті поєднання яких в системі можуть з'явитися властивості, яких не має жодна з її частин.

Синергетика народилася з вивчення нелінійних відкритих дисипативних систем, зокрема, з вивчення процесів займання і розповсюдження пожеж. Такі системи перебувають далеко від термодинамічної рівноваги і обмінюються енергією чи речовиною з навколишнім середовищем. Для перехідних процесів, що відбуваються в таких системах, не виконується закон неспадання ентропії, що призводить до утворення різноманітних дисипативних структур: автоколивань, автохвиль, може виникнути детермінований хаос.

Основні принципи синергетичного підходу:

- синергетичні процеси спостерігаються в нелінійних системах з різними видами організації: динамічно стабільних, адаптивних, еволюціонуючих;
- нерівноважності є необхідною умовою появи нової організації;
- коли нелінійні динамічні системи об'єднуються, нове утворення не дорівнює сумі частин, а утворює систему іншої організації;
- загальними для всіх еволюціонуючих систем є спонтанне утворення нових локально стабільних станів – атракторів;
- системи, що розвиваються, завжди відкриті (обмінюються енергією, інформацією та речовиною із зовнішнім середовищем), за рахунок чого і відбуваються процеси локальної впорядкованості і самоорганізації. Закрита система відповідно до законів термодинаміки повинна в кінцевому результаті прийти до стану з максимальною ентропією і припинити будь-яку еволюцію;

– фундаментальним принципом самоорганізації є виникнення нового порядку і ускладнення систем через флуктуації (випадкові відхилення) станів їх елементів і підсистем. У складних відкритих системах, завдяки притоку енергії ззовні і посилення нерівноважності, відхилення з часом зростають, накопичуються, викликають ефект колективної поведінки елементів і підсистем;

– у сильно нерівноважних станах системи є чутливими до тих зовнішніх факторів впливу, які вони б не сприйняли в більш рівноважному стані;

– у нерівноважних умовах відносна незалежність елементів системи поступається місцем корпоративній поведінці елементів: поблизу стану рівноваги елемент взаємодіє тільки з сусідніми, далеко від рівноваги – “бачить” всю систему повністю і узгодженість поведінки елементів зростає.

Синергетичний підхід також застосовується при вивченні таких складних і неструктурованих систем, як мережевий інформаційний простір, соціальні системи, екологічні системи, великі підприємства тощо.

Теорія катастроф – розділ прикладної математики, галузь теорії біфуркацій, яка тісно пов'язана з синергетикою.

Створення і розвиток цієї частини математичного аналізу були пов'язані з необхідністю аналізу деяких складних явищ, особливо тих, які пов'язані з різкою зміною напрямку і динаміки розвитку (стійкість складних систем, коливання і руйнування в будівельній механіці, екологічні процеси тощо).

Теорія катастроф аналізує критичні точки потенціальної функції, тобто точки, де не тільки перша похідна функції дорівнює нулю, але й дорівнюють нулю і похідні більш високого порядку.

Якщо потенціальна функція залежить від трьох або меншого числа активних змінних і п'яти або менше активних параметрів, то в цьому випадку існує всього сім потенціальних функцій, які задовольняють умови виникнення катастроф. Ці сім фундаментальних типів відомі під іменами, які їм дав один з засновників теорії катастроф Рене Том

Функції з однією змінною:

– Катастрофа типу Складка (рис. 13.27) $V = x^3 + ax$.

– Катастрофа типу Збірка $V = x^4 + ax^2 + bx$.

– Катастрофа типу Хвіст ластівки $V = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$.

– Катастрофа типу Метелик $V = x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$.

Потенціальні функції з двома змінними:

– Гіперболічна омбіліка $V = x^3 + y^3 + axy + bx + cy$.

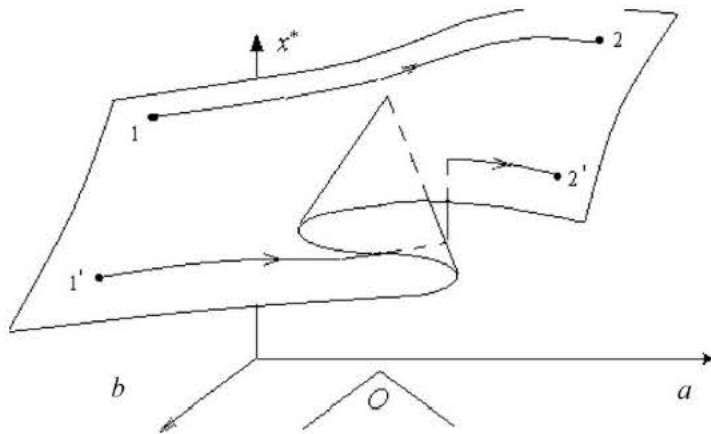


Рисунок 13.27 – Графічна інтерпретація катастрофи типу «складка»

- Еліптична омбіліка $V = x^3 / 3 - xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy$.
- Параболічна омбіліка $V = yx^2 + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$

13.6. Моделі АСУ

Автоматизована система управління або АСУ – комплекс апаратних і програмних засобів, призначений для управління технологічними процесами, виробництвами, підприємствами. АСУ застосовуються в різних галузях промисловості, в енергетиці, на транспорті тощо.

Термін “автоматизована”, на відміну від терміну “автоматична”, підкреслює збереження за людиною-оператором деяких функцій. Причому на людину покладаються переважно функції прийняття інтелектуальних рішень (розпізнавання виробничих ситуацій, прийняття рішень в умовах недостатньої інформації, керування іншими людьми з урахуванням психо-фізіологічних аспектів тощо).

Моделі АСУ є комплексними, вони містять моделі динаміки САУ, які є елементами АСУ ТП, моделі прийняття рішень, інформаційні моделі керованого процесу, моделі мереж, які інтегрують елементи АСУ у єдиний комплекс тощо. “Питома вага” тої чи іншої моделі у загальному описі АСУ залежить від виду АСУ.

– Автоматизована система управління технологічним процесом (АСУ ТП) – вирішує завдання оперативного управління та контролю технічними об'єктами. Під АСУ ТП зазвичай розуміється комплексне рішення, що забезпечує автоматизацію основних технологічних операцій на виробництві в цілому або на якійсь його ділянці, що випускає завершений продукт. Складовими частинами АСУ ТП можуть бути окремі системи автоматичного управління (САУ) та автоматизовані пристрої, зв'язані в єдиний комплекс. Як правило, АСУ ТП має єдину систему операторського управління технологічним процесом у вигляді одного або декількох пультів управління (комп'ютерів), засоби обробки і архівації інформації про хід процесу, типові елементи автоматизації: датчики, контролери, виконавчі пристрої. Для інформаційного зв'язку всіх підсистем використовуються промислові мережі;

– Автоматизована система управління виробництвом (АСУВ) – вирішує завдання організації виробництва, охоплюючи основні виробничі процеси, вхідну і вихідну логістику. Здійснює короткострокове планування випуску з урахуванням виробничих потужностей, аналіз якості продукції, моделювання виробничого процесу. Для вирішення цих завдань застосовуються MIS і MES-системи;

– Автоматизована система управління підприємством (АСУП). АСУП виробничого підприємства, як правило, містить в собі підсистеми управління складами, поставками, персоналом, фінансами, конструкторською та технологічною підготовкою виробництва, номенклатурою виробництва, обладнанням, оперативним плануванням потреб виробництва. Для вирішення цих завдань застосовуються MRP, MRP II та ERP-системи.

13.7. Моделі інтелектуальних процесів

Інтелектуальні технології останнім часом набули дуже активного розвитку. Цьому сприяли як розвиток комп'ютерної техніки, яка за своєю потужністю вже стала здатною реалізувати деякі “інтелектуальні” процеси, так і усвідомлення того, що в деяких випадках інтелектуальні можливості людини значно перевищують можливості сучасної техніки і завжди будуть тим орієнтиром, якого прагнутимуть досягти конструктори.

Основою розвитку інтелектуальних технологій є моделювання інтелектуальних процесів у мозку. Воно охоплює: моделювання сприйняття, пам'яті, психічних функцій, емоцій, прийняття рішення, підсвідомої і свідомої переробки інформації та інше.

Моделювання сприйняття пов'язано з вивченням роботи рецепторного відділу аналізаторних систем і побудова моделей блоків первинної переробки інформації при моделюванні сенсорних систем. Найбільш розвинуто моделювання фізичних рецепторних відділів аналізаторних систем, які являють собою перетворювачі різних фізично-хімічних параметрів в стандартний для нервової системи частотно-модульований код.

Моделювання психічних функцій, пов'язаних з вичленовуванням з цілісного уявлення про особистість окремих її складових – моделей окремих психічних функцій, відображає роботу підкоркових структур мозку на рівні безумовних рефлексів, інстинктів, інших дій. Цей напрямок особливо розвинутий в галузі *розпізнавання образів*: розпізнавання природної мови, текстів, облич тощо.

Моделювання пам'яті пов'язане з дослідженням способів введення моделі зовнішнього образу в пам'ять, зберігання його і вилучення з пам'яті. Моделі пам'яті стали основою *асоціативних запам'ятовувальних пристроїв* і побудованих на їх основі процесорів.

Побудова *моделей свідомості* пов'язана з відображенням складної діяльності коркових структур мозку на рівні умовних рефлексів, взаємодії аналізаторів, прийняття рішень і таке інше. Останнім часом цей напрямок дуже активно розвивається і реалізується у вигляді *експертних систем*.

Принциповою особливістю моделювання інтелектуальних процесів є неможливість – на сучасному рівні розуміння цих процесів – перевірки адекватності моделей. Як правило, єдиним критерієм адекватності таких моделей є близькість результатів діяльності людини і штучної системи, яка ґрунтується на відповідній моделі. Проте умови інтелектуальної діяльності настільки різноманітні, що повноцінно перевірити збіг результатів практично неможливо.

Проблема перевірки адекватності моделей інтелектуальних процесів турбувала вчених з часів появи обчислювальної техніки. Питання ставилося так: “Чи може машина мислити?”. Для цього був запропонований тест Тьюрінга – емпіричний тест, ідея якого була запропонована Аланом Тьюрінгом у статті “Обчислювальні машини і розум” (англ. Computing Machinery and Intelligence),

опублікованій ще у 1950 році в філософському журналі “Mind”. Стандартна інтерпретація цього тесту звучить так: “Людина взаємодіє з одним комп'ютером і однією людиною. На підставі відповідей на питання вона повинна визначити, з ким говорить: з людиною або комп'ютерною програмою. Завдання комп'ютерної програми – ввести людину в оману, змусивши зробити хибний вибір”.

Поки що жодна з існуючих комп'ютерних систем і відповідних моделей не наблизилася до проходження тесту.

Суттєвим поштовхом у моделюванні інтелектуальних процесів стали дослідження в області військових програм розробки складних тренажерів, які привели до розробки стандартів моделювання DIS (Discrete Interactive Simulation), стандарт (IEEE Std 1278.1-1995 1995). У 90-х роках 20-го століття з'явився стандарт Aggregative Level Simulation Protocol (ALSP).

Обидва стандарти (DIS і ALSP) були замінені технологією HLA (High Level Architecture). Спочатку передбачалося застосовувати HLA для реалізації систем моделювання в військових задачах, проте наразі він набув значно більшого поширення.

Ключовими поняттями HLA є федерація (Federation) і RTI (Run Time Infrastructure).

Федерація - це об'єднання компонентів імітаційного моделювання, які називаються федератами (federates). Як федератов можуть розглядатися:

- імітаційні моделі та системи імітації (за термінологією стандарту HLA – “створені” (constructive) учасники);
- тренажери і моделі, інтерактивно керовані людьми – по термінології стандарту HLA – “віртуальні” (virtual) учасники;
- реальні зразки техніки або системи зв'язку і управління (за термінологією стандарту HLA – “живі” (live) учасники);
- спеціалізоване програмне забезпечення, призначене, наприклад, для візуалізації або для збору і обробки інформації.

13.8 Моделі соціально-економічних процесів

Соціально-економічні процеси – це такі, в яких беруть участь великі групи людей, або навіть усе населення держави. Відповідно, моделі таких процесів суттєво залежать від національних і соціально-культурних особливостей, економічного і політичного устрою держави, рівня розвитку.

Важливість розробки правильного застосування та інтерпретації моделей соціально-економічних процесів важко переоцінити. Недостатня адекватність моделей і, відповідно, неправильність керівних рішень, які ґрунтуються на цих моделях, впливає на цілі народи, що неодноразово приводило до трагедій і катастроф в історії людства.

13.8.1 Модель валового національного продукту

Валовий національний продукт (ВНП) – сукупність усіх вироблених у країні товарів та наданих послуг за рік. Він характеризує кінцеве споживання матеріальних благ і послуг, кінцеві результати економічної діяльності у сфері матеріального і нематеріального виробництва.

ВНП складається з двох частин:

$$\text{ВНП} = \text{ВВП} + \text{С}, \quad (13.45)$$

де ВВП – валовий внутрішній продукт; С – сальдо первинних доходів, отриманих з-за кордону або переданих за кордон.

Існують 3 способи вимірювання ВНП (ВВП):

1. За витратами (метод кінцевого використання);
2. За доданою вартістю (виробничий метод);
3. За доходами (розподільчий метод).

При розрахунку ВНП за витратами підсумовуються витрати всіх економічних агентів, що використовують ВНП (домогосподарств, фірм, держави та іноземців). Фактично мова йде про сукупний попит на вироблений ВНП.

Сумарні витрати можна розкласти на декілька компонентів:

$$\text{ВНП} = \text{С} + \text{I} + \text{G} + \text{NX}, \quad (13.46)$$

де С – особисті споживчі витрати, які охоплюють витрати домогосподарств на товари тривалого користування і поточного споживання, на послуги (крім витрат на покупку житла); I – валові приватні внутрішні інвестиції. Містять виробничі капіталовкладення (інвестиції в основні виробничі фонди), інвестиції в житлове будівництво та інвестиції в запаси (ТМЦ); G – державні закупівлі товарів і послуг (будівництво та утримання шкіл, доріг, армії, витрати на національну оборону, зарплату державних службовців і т. д.); NX – чистий експорт. Він дорівнює різниці вартісних обсягів експорту та імпорту.

Рівняння (13.46) називають основною макроекономічною тотожністю або тотожністю національних рахунків.

При підрахунку ВВП виробничим методом підсумовується вартість, додана на кожній стадії виробництва кінцевого продукту. Додана вартість (ДВ) – це різниця між вартістю виробленої продукції і вартістю придбаних сировини і проміжних продуктів.

Величина ВВП у цьому випадку являє собою суму доданої вартості всіх виробників

$$\text{ВВП} = \Sigma \text{ДВ} + \text{НП} - \text{ДС}, \quad (13.47)$$

де ДВ – додана вартість; НП – непрямі податки; ДС – державні субсидії.

При розрахунку ВВП за доходами підсумовуються всі види доходів (зарплата, рента, відсотки), а також 2 компоненти, що не є доходами: амортизаційні відрахування і чисті непрямі податки на бізнес (податки мінус субсидії).

За способом отримання доходу в складі ВВП виділяють такі види доходів:

- компенсації за працю за наймом (зарплата, премії);
- доходи власників;
- рентні доходи;
- прибуток корпорацій (що залишається після оплати праці та відсотків за кредит);
- чистий відсоток (різниця між процентними платежами фірм іншим секторам економіки та процентними платежами, отриманими фірмами від інших секторів - домогосподарств та держави).

13.8.2 Класична модель економіки

Класична модель макрорівноваги ґрунтується на гіпотезах:

1. рівновага встановлюється в результаті взаємодії ринків ресурсів, товарів, грошей та заощаджень (інвестицій);
2. вихідним у встановленні рівноваги є ринок ресурсів, зокрема, праці;
3. на ринках ресурсів і товарів існує рівень цін, який врівноважує попит і пропозицію, і завдяки цінам відбувається автоматичне очищення ринків як від зайвого попиту, так і від зайвої пропозиції.

Перераховані гіпотези характеризують те, що ринкова економіка урівноважує сукупний попит та сукупну пропозицію. Така гіпотеза ґрунтується на законі Ж. Б. Сея

$$\text{Обсяг виробництва} = \text{Доходи в суспільстві}$$

Під доходом, наприклад, від ресурсу “праця” розуміють реальну заробітну плату, виражену в одиницях створеного продукту.

Якщо ж частина доходу не витрачається на купівлю виробленого продукту, то на заощадженні кошти підприємці виробляють інвестиційні товари.

На ринку робочої сили (головного ресурсу у класичній моделі) взаємодіють попит на працю та її пропозиція. Останні є функціями середньої реальної заробітної плати. Попит на робочу силу L_d знаходиться в оберненій залежності

від середньої заробітної плати, тобто функція попиту робочої сили є спадною. Пропозиція робочої сили L_s знаходиться в прямій залежності від заробітної плати (функція пропозиції на ринку праці є зростаючою). Повна зайнятість на ринку праці встановлюється в точці перетину кривих, тобто в точці рівноваги, де обсяг попиту на робочу силу L_d дорівнює обсягу пропозиції робочої сили L_s .

У 2010 році Нобелівська премія з економіки присуджена за теорію, яка враховує безробіття і процеси пошуку роботи.

Паралельно з ринком ресурсів існує ринок грошей. Грошова маса впливає на рівень цін, розмір середньої номінальної заробітної плати в економіці, але не визначає обсягів реального продукту, зайнятості та реальної заробітної плати. Попит на гроші M_d знаходиться в прямій залежності від обсягу номінального продукту Y_n , а пропозиція M_s є сталою, наперед визначеною величиною.

На товарному ринку за класичною моделлю величина попиту на реальний продукт знаходиться в оберненій залежності від рівня цін, а пропозиція – ні. Тобто, крива попиту має від'ємний нахил, а крива пропозиції – вертикальна пряма. Перетин вказаних кривих визначає рівноваговий рівень цін.

Пристаосування попиту до пропозиції на товарному ринку здійснюється завдяки ринку заощаджень (інвестицій). Сукупний попит у замкнутій економіці складається зі споживання C та інвестицій I

$$Y = C + I. \quad (13.48)$$

Інвестиції створюються завдяки заощадженням S . Відповідність заощаджень інвестиціям $I=S$ забезпечується на ринку заощаджень (інвестицій).

Вирішальну роль у встановленні цієї відповідності (рівноваги) відіграє банківська процентна ставка за депозитами $i\%$. У класичній моделі величина заощаджень знаходиться у прямій залежності від процентної ставки, а величина інвестицій обернена до процентної ставки проценту - зростання процента зменшує попит на інвестиції. Точка перетину кривих $S(i\%)$ та $I(i\%)$ відповідає рівноважному рівню ставки.

13.8.3 Кейнсіанська модель

Кейнсіанська модель є найбільш поширеним напрямком сучасної макроекономіки. Вона, на противагу класичній, заперечує саморегулювання економіки на макrorівні, для неї характерним є погляд, що рівновага при повній зайнятості ресурсів є не закономірним, а лише випадковим явищем. Навпаки, економіці, яка розвивається без втручання держави, характерні відхилення від рівноваги, безробіття та інфляція. Послаблення негативного впливу останніх здійснюється завдяки державі. Саме кейнсіанська модель лежить в основі теоретичного обґрунтування сучасної економічної політики держави.

Кейнсіанська модель заперечує гнучкість заробітної плати і цін. Окрім того, вважають, що заощадження населення не завжди відповідають інвестиціям підприємців. Рішення про заощадження мотивуються різними чинниками: купі-

вля дорогих речей, оплата житла, забезпечення в старості, бажання дати освіту дітям, на випадок хвороби і не залежить від процентної ставки. Рішення про інвестиції також пов'язані не лише з процентною ставкою. Отже, плани заощаджень і плани інвестицій не збігаються і тому можуть відбуватись коливання загального обсягу виробництва, доходу, зайнятості і рівня цін. Тому ринковий механізм сам без втручання держави не в змозі збалансувати економіку, одночасно забезпечуючи повну зайнятість і повне використання засобів виробництва.

13.8.4 Модель демографічних процесів та розвитку популяцій

В сучасній статистиці демографічні моделі використовуються для:

1. отримання кількісних характеристик демографічних процесів та явищ. Особливе значення ці моделі мають при визначенні узагальнювальних характеристик інтенсивності демографічних процесів (середня тривалість життя, коефіцієнт відтворення населення тощо);
2. для вивчення закономірностей та чинників демографічних процесів при виявленні зв'язку між складовими моделями;
3. для демографічного прогнозу.

Найпростіша модель зростання $\dot{x} = kx$ запропонована Мальтусом (для зростання населення Землі). Вона веде, як добре відомо, до експоненціального (тобто дуже швидкого) зростання населення з плином часу. Ця жорстка модель застосовна (зрозуміло, із застереженнями), наприклад, до розвитку науки в 1700-1950 роках (вимірюємо, скажімо, число наукових статей) (рис. 13.28). Продовження експоненціального зростання науки призвело б до того, що число вчених повинно було б досягти половини населення земної кулі. Зрозуміло, що суспільство не може цього допустити.

Явища насичення відбуваються в будь-якій популяції (і, ймовірно, незабаром відбудуться з людством в цілому): коли населення стає занадто великим, жорстка модель з постійним коефіцієнтом зростання k перестає бути придатною. Природно, при занадто великих x конкуренція за ресурси (їжу, гранти і т. д.) призводить до зменшення k , і жорстка модель Мальтуса повинна бути замінена м'якою моделлю $\dot{x} = k(x)x$ із залежним від населення коефіцієнтом розмноження. Найпростішим прикладом є залежність $k(x) = a - bx$, що веде до так званої логістичної моделі (рис. 13.29): $\dot{x} = ax - bx^2$.

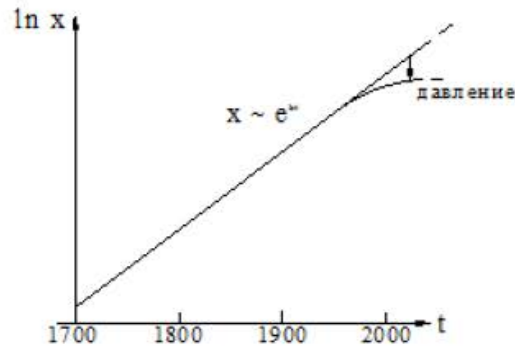
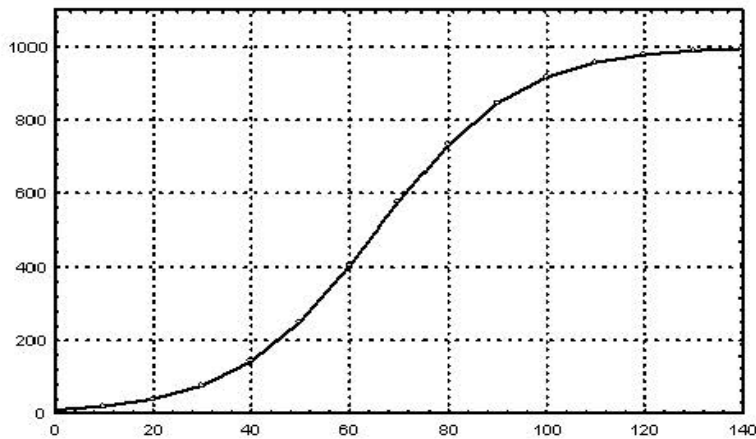


Рисунок 13.28 – Зростання науки



Вибором системи одиниць x і t можна перетворити коефіцієнти a і b в 1, наприклад, $\dot{x} = x - x^2$. Висновки, які будуть зроблені нижче, залишаються (з точністю до числових значень констант) справедливими і при будь-яких значеннях коефіцієнтів a і b і навіть для широкого класу моделей з різними спадними функціями $k(x)$. Іншими словами, подальші висновки стосуються всієї м'якої моделі, а не лише спеціальної жорсткої логістичної моделі.

Модель передбачає, що з плином часу встановлюється стаціонарний (стійкий) режим B : більше населення – воно зменшується (швидкість від'ємна), менше – збільшується.

Логістична модель задовільно описує численні явища насичення. Коли населення мало, вона дуже близька до мальтузіанської моделі. Але при досить ве-

ликих x (порядку $1/2$) спостерігається різка відмінність від мальтузіанського зростання: замість зростання x до нескінченності населення наближається до стаціонарного значення. Населення Землі зараз наближається до 8 мільярдів. Стаціонарне значення (за різними оцінками) 16–20 мільярдів людей.

Логістична модель є звичною в екології. Можна собі уявити, наприклад, що x – це кількість риб в озері або в океані. Якщо здійснюється рибальство з інтенсивністю $\dot{x} = x - x^2 - c$, то обчислення показують, що результат різко змінюється при деякому критичному значенні квоти вилову c . Для жорсткої моделі це критичне значення $c = 1/4$, але аналогічні явища мають місце і для м'якої моделі $\dot{x} = x - k(x)x - c$ (критичне значення c в цьому випадку – максимум функції $k(x)x$). Хід еволюції числа риб x з плином часу t зображено на рис. 13.30.

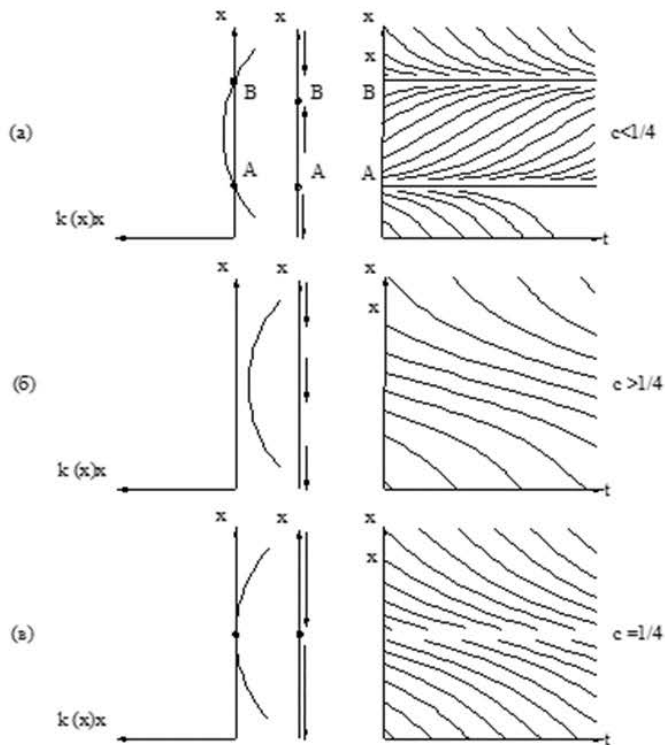


Рисунок 13.30 – Недолов (а), перелов (б), і оптимізація (в) рибальства

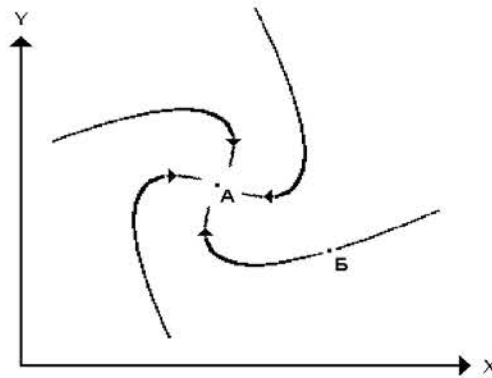
Якщо квота замала, то система має два рівноважних стани. Стійкий: популяція в цьому випадку трохи менша, ніж без вилову, але вона відновлюється при малих відхиленнях x від рівноважного значення. Нестійкий: якщо внаслідок яких-небудь причин розмір популяції впаде хоч трохи нижче рівня рівноваги, то надалі популяція, хоча і повільно, буде знищена повністю за кінцевий час. При

більших за критичну квоту вилову c популяція x знищується за кінцевий час, як би велика вона не була в початковий момент.

Із сказаного видно, що вибір значення параметра c є надзвичайно важливим моментом управління експлуатацією популяції x .

Ще однією моделлю розвитку популяції є модель “боротьби за існування” Лотка-Вольтерра (рис. 13.31, яка має вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - cxy, \\ \dot{y} &= -by + dxy.\end{aligned}$$



У цій моделі x – кількість карасів, y – кількість шук, коефіцієнт a описує швидкість природного приросту числа карасів за відсутності шук, b – природне вимирання шук, позбавлених карасів. Імовірність взаємодії карася і шуки вважається пропорційною як кількості карасів, так і кількості шук (x, y). Кожен акт взаємодії зменшує популяцію карасів, але сприяє збільшенню популяції шук (члени $-cxy$ і dxy в правій частині рівняння). Аналіз цієї жорсткої моделі показує, що є стаціонарний стан (A на рис. 13.32). Будь-який інший початковий стан (B) призводить до періодичного коливання чисельності як карасів, так і шук, так що після деякого часу система повертається в стан B .

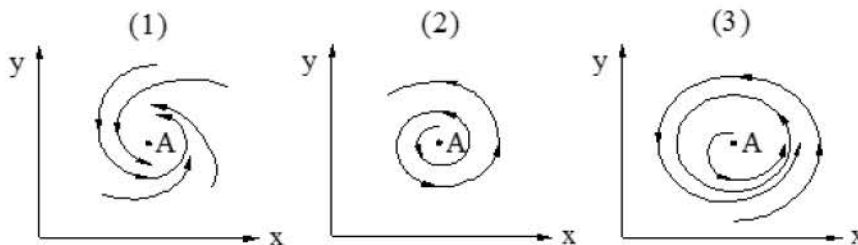


Рисунок 13.32 – М'яка структурно стійка модель боротьби за існування

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - cxy + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} &= -by + dxy + \varepsilon g(x, y), \quad \varepsilon \ll 1,\end{aligned}$$

до правих частин додаються малі члени (враховують, наприклад, конкуренцію карасів за їжу і щук за карасів). В результаті висновок про періодичність повернення системи в початковий стан В, справедливий для жорсткої системи Лотка-Вольтерра, втрачає силу. Залежно від вигляду малих поправок f і g можливі, наприклад, сценарії 1–3 (рис. 13.31), які вже структурно стійкі.

У випадку 1 рівноважний стан А стійкий. При будь-яких інших початкових умовах через великий час встановлюється саме цей стан.

У випадку 2 система “йде в рознос”. Стаціонарний стан нестійкий. Еволюція призводить то до різкого збільшення числа щук та до їх майже повного вимирання внаслідок того, що вони з’їли усіх карасів і їсти вже нічого. Така система зрештою потрапляє на ділянку таких великих або настільки малих значень x і y , що модель перестає бути застосовною: відбувається зміна законів еволюції, тобто революція.

У випадку 3 у системі з нестійким стаціонарним станом А встановлюється з плином часу періодичний режим С. На відміну від вихідної жорсткої моделі Лотка-Вольтерра, у цій моделі встановлений періодичний режим не залежить від початкових умов. Спочатку незначне відхилення від стаціонарного стану А веде не до малих коливань близько А, як в моделі Лотка-Вольтерра, а до коливань з цілком визначеною амплітудою. Можливі й інші структурно стійкі сценарії (наприклад, з декількома періодичними режимами).

У випадку моделі Лотка-Вольтерра для висновку про те, який же з сценаріїв 1–3 реалізується в даній системі, абсолютною необхідною додатковою інформацією про систему (про вигляд малих поправок у формулі).

Ключові слова

Моделі об'єктів управління, фізичні процеси, закони збереження, рівняння Максвелла, рівняння Шредінгера, рівняння дифузії і теплопровідності, рівняння Кірхгофа; принципи управління, алгоритми управління, закони управління, аналіз і синтез систем управління; обчислювальні системи, нейманівська модель, систолічна модель, моделі комп'ютерних мереж, моделі обчислень; розподілена система, система з розподіленими параметрами, система із зосередженими параметрами, затримки при передаванні впливів, диференціальні рівняння у частинних похідних, спостережність, керованість; менеджмент, прийняття рішення, оптимальне рішення, автоматизовані системи управління, АСУ, автоматизовані системи управління підприємством, автоматизовані системи управління технологічними процесами, АСУТП, людино-машинні системи; інтелектуальні технології, моделювання сприйняття, моделювання психічних функцій, моделювання пам'яті, асоціативний запам'ятовувальний пристрій, моделі свідомості, розпізнавання образів, експертна система; модель валового національного продукту, класична модель економіки, кейнсіанська модель, модель демографічних процесів; феросплав, вуглецевий баланс, нечітка модель Мамдані, лінгвістична змінна, база правил, ідентифікація технологічного процесу, АРКС, ковзне середнє, нейронна мережа, логістична модель, модель розвитку популяцій, модель боротьби за існування Лотка-Вольтерра, жорстка модель, м'яка модель.

Контрольні питання і завдання для самостійної роботи

1. На які типи розділяють фізичні процеси у об'єктах управління?
2. Яку форму мають моделі, які основані на фундаментальних законах збереження?
3. Для яких процесів застосовуються моделі, що ґрунтуються на рівняннях Максвелла?
4. Наведіть приклади об'єктів, в яких керованими є хвильові процеси.
5. Для яких процесів застосовуються моделі, що ґрунтуються на рівняннях Шредінгера?
6. Наведіть приклади технологічних об'єктів, в яких використовуються процеси дифузії.
7. Поясніть на основі моделі теплопровідності, чому вода у чайнику швидко нагрівається і повільно охолоджується.
8. Нарисуйте структурну модель системи опалення 4-поверхового будинку (1 стояк, 4 радіатори) і складіть її функціональну модель на основі законів Кірхгофа.
9. Назвіть основні принципи управління. Складіть узагальнені операторні рівняння, які відповідають структурним схемам, зображеним на рис.13.6.
10. Конкретизуйте узагальнені рівняння, складені у попередньому завданні, шляхом підстановки в них типових законів управління.

11. Назвіть основні типи обчислювальних систем. Які моделі використовуються для опису процесів у таких системах?
12. До якого класу моделей відносять опис параметрів фізичного рівня моделі OSI? А опис послідовності встановлення з'єднання на канальному рівні?
13. Наведіть приклади розподілених систем з розподіленими параметрами.
14. Наведіть приклади розподілених систем із зосередженими параметрами.
15. Сформулюйте умови спостережності і керованості на основі функціональної моделі системи у просторі станів.
16. Як Ви вважаєте, моделі синергетичних і катастрофічних процесів належать до моделей статистики чи динаміки? Чому?
17. Які види моделей Ви вважатимете доцільним використовувати при проектуванні АСУ? Чи залежить цей вибір від типу АСУ?
18. Розгляньте АСУ технологічним процесом випікання хлібу. Як, на Ваш погляд, слід розділити функції між людиною і технічними засобами управління? На основі яких моделей функціонуватимуть технічні засоби?
19. Побудуйте функцію належності для лінгвістичної змінної “Смак хлібу” для нечіткої множини “Якість хлібу”.
20. У чому переваги інтелектуальних технологій?
21. До якого напрямку моделювання інтелектуальних процесів слід віднести нейронні мережі?
22. До якого напрямку моделювання інтелектуальних процесів слід віднести нечітку логіку?
23. Які моделі використовуються для оцінювання ефективності капітальних вкладень?
24. Які моделі використовуються для прогнозування процесів на фінансовому ринку?
25. Сформулюйте модель балансу „попит-пропозиція”.
26. Які зміни Ви б внесли до моделей демографічних процесів для урахування катастрофічних явищ (війна, природне лихо, економічна криза, епідемія)?

Література

1. Ажогин В. В. Машинное проектирование оптимальных систем управления пространственно-распределенными динамическими объектами / Ажогин В. В., Згуровский М. З. – К. : Вища шк, 1985. – 170 с.
2. Дубовой В. М. Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами : монографія / В. М. Дубовой, О. О. Ковалюк – Вінниця : УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2008. – 185 с.
3. Дубовой В. М. Контроль та керування в мережах теплопостачання : монографія / В. М. Дубовой, В. В. Кабачій, Ю. М. Паночишин – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 190 с.

4. Мокін В. Б. Математичні моделі та програми для оцінювання якості річкових вод / Мокін В. Б., Мокін Б. І. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2000. – 152 с.
5. Кветний Р. Н. Математичні моделі розповсюдження хвиль у волоконних світловодах : монографія / Кветний Р. Н., Коцюбинський В. Ю. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 140 с.
6. Трояновский В. М. Математическое моделирование в менеджменте / Трояновский В. М. – М. : Изд-во РДЛ, 2002. – 256 с.
7. Мороз О. В. Оптимальне управління економічними системами в умовах невизначеності та ризику : монографія / Мороз О. В., Матвійчук А. В. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 177 с.
8. Юхимчук С. В. Математичні моделі ризику для систем підтримки прийняття рішень / Юхимчук С. В., Азарова А. О. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 188 с.
9. Машина Н. І. Математичні методи в економіці / Машина Н. І. – К. : Центр навчальної літератури, 2003. – 148 с.
10. Кігель В. Р. Математичні методи ринкової економіки / Кігель В. Р. – К. : Кондор, 2003. – 158 с.
11. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология / Вентцель Е. С. – М. : Наука, 1988. – 206 с.
12. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений / О. И. Ларичев. – М. : Логос, 2006. – 296 с.
13. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Таха Хэмди А. – М. : Вильямс, 2001. – 912 с.
14. Мушик Э. Методы принятия технических решений (Пер. с нем.) / Мушик Э., Мюллер П. – М. : Мир, 1990. – 208 с.
15. Кини Р. Л. Принятие решений при многих критериях предпочтения и замещения / Кини Р. Л., Райфа Х. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.
16. Борисов А. Н. Принятие решений на основе нечётких моделей. Примеры использования / Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П. – Рига : Зинатне, 1990. – 184 с.
17. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Саати Т. – М. : Сов. Радио, 1993. – 278 с.
18. Андреев В. Н. Принятие оптимальных решений: Теория и применение в лесном деле / Андреев В. Н., Герасимов Ю. Ю. – Йоэнсуу : Из-во ун-та Йоэнсуу, 1999. – 200 с.
19. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии в идентификации: нечёткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети / Ротштейн А. П. – Вінниця : Континент-ПРИМ, 1999. – 300 с.
20. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине / Винер Н. – М. : Наука, 1983. – 341 с.

21. Ивахненко А. Г. Самообучающиеся системы с положительными обратными связями / Ивахненко А. Г. – К. : АН УССР, 1963. – 328 с.
22. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики / Блохинцев Д. И. – М. : Наука, 1976. – 664 с.
23. Эллиот Дж. Симметрия в физике (Пер. с англ.) / Дж. Эллиот, П. Добер. – М. : Мир, 1983. Т.1 – 364 с. – Т.2 – 414 с.
24. Фейнман Р. Характер физических законов (Пер. с англ.) / Фейнман Р. – М. : Мир, 1968. – 232 с.
25. Ландау Л. Д. Теория поля / Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. – М. : Наука, 1988. – 512 с. – («Теоретическая физика», том II).
26. Фушич В. И. Симметрия уравнений Максвелла / Фушич В. И., Никитин А. Г. – К.: Наук. думка, 1983. – 200 с.
27. Шредингер Э. Избранные труды по квантовой механике / Шредингер Э. – М. : Наука, 1976. – 422 с.
28. Березин Ф. А. Уравнение Шредингера / Березин Ф. А., Шубин М. А. – М. : Изд-во МГУ, 1983. – 392 с.
29. Калашников С. Г. Электричество : учебное пособие / Калашников С. Г. – М. : Физматлит, 2003. – 625 с.
30. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. / Бессонов Л. А. – М. : Гардарики, 2007. – 701 с.
31. Красовский А.А. // Наблюдаемость [Электронный ресурс] // Википедия. - Режим доступа : <http://ru.wikipedia.org/наблюдаемость>
32. Лоскутов А. Ю. Введение в синергетику : учеб. руководство. – М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990, 272 с. // Синергетика [Электронный ресурс] // Википедия. – Режим доступа : <http://uk.wikipedia.org/wiki/синергетика> .
33. Михалев А. И. Синергетический синтез многомодельного алгоритма обучения нечётких нейросетей / Михалев А. И., Лысая Н. В., Лысый Д. А. // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3(56). – Том 2. – Дніпропетровськ, 2008. – С.179-185.
34. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения – М. : Мир, 1980. – 623 с. // Теорія катастроф [Електронний ресурс] // Википедия. – Режим доступа : http://uk.wikipedia.org/wiki/теорія_катастроф
35. Классична модель макрорівноваги [Електронний ресурс] – Режим доступу : <http://revolution.allbest.ru/economy/c00053424.html>
36. Михалев А. И. Цифровая обработка данных: от Фурье к Wavelets. / Михалев А. И. – Днепропетровск : Системные технологии, 2007. – 200 с.
37. Михалев А. И. Компьютерные методы интеллектуальной обработки данных : учебное пособие / Михалев А. И., Винокурова Е. А., Сотник С. Л. – Днепропетровск : НМетАУ, ИК “Системные технологии”, 2014. – 210 с.
38. Гаврилов В. А. Оптимизация режимов работы ферросилициевых печей / Гаврилов В. А., Поляков И. И., Поляков О. И. – М. : Metallurgia, 1996. –176 с.

39. Гасик М. И. Физикохимия и технология электроферросплавов / Гасик М. И., Лякишев Н. П. – Днепропетровск : Системные технологии, 2005. – 488 с.

40. Интеллектуальное управление технологическими процессами (ферросплавное производство) : монография (научное издание) / Бодянский Е. В., Кучеренко Е. И., Михалев А. И., Филатов В. А., Гасик М. М., Куцин В. С. // под ред. А. И. Михалева. – Днепропетровск : Национальная металлургическая академия Украины, 2013. – 213 с.

41. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Льюнг Л – М. : Наука, 1991. – 432 с.

42. Михалев А. И. Адаптивно-поисковые методы и алгоритмы оптимизации и идентификации динамических систем / Михалев А. И. – Киев : УМК ВО, 1992. – 68 с.

43. Оборский Г. А. Моделирование систем : монография / Г. А. Оборский, А. Ф. Дашенко, А. В. Усов, Д. В. Дмитришин. – Одесса : Астопринт, 2013. – 664 с.

44. Якимов А. В. Теплофизика механической обработки : учебник / Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. – К. : “Наукова думка”, 1991. – 270 с.

45. Третьяк А. И., Вероятностно-аналитическое моделирование технико-экономических систем : монография в 2-х частях / Третьяк А. И., Коновалов А. Л., Дубров К. А. – Одесса : Астропринт, 2003. – 224 с., 440 с.

46. Оборский Г.А. Введение в методы оптимизации и теорию технических систем : учебное пособие / Оборский Г. А., Морозов Ю. А., Дубров К. А. – Одесса : Астропринт, 2005 – 496 с.