

Похідні функцій, заданих неявно та параметрично.

Похідні вищих порядків. Диференціали.

Знайти похідну y'_x функцій, заданих у неявній формі.

1. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо рівність по змінній x , вважаючи $y=y(x)$.

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - 2x \cdot e^y - x^2 e^y \cdot y' = 0 .$$

$$3x^2 y + y' - 2xy \cdot e^y - x^2 e^y y \cdot y' = 0$$

Звідси знаходимо y' :

$$y'(1 - x^2 y e^y) = 2xy e^y - 3x^2 y .$$

$$y' = \frac{(2xy e^y - 3x^2 y)}{1 - x^2 y e^y} .$$

Отримали похідну $y' = y'_x = \frac{dy}{dx}$, виражену через змінні x та y .

2. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Розв'язання. $3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0$.

$$3(y^2 - x)y' = 3(y - x^2) .$$

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

$$3. \ x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0.$$

Розв'язання.

$$4x^3 - 12xy^2 - 12x^2y \cdot y' + 36y^3y' - 10x + 30y \cdot y' = 0.$$

$$4x^3 - 12xy^2 - 10x = (12x^2y - 36y^3 - 30y) \cdot y'.$$

$$y' = \frac{2x(2x^2 - 6y^2 - 5)}{6y(2x^2 - 6y^2 - 5)} = \frac{x}{3y}.$$

$$4. \ x^2 \sin y + y^2 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$$

Розв'язання.

$$2x \sin y + x^2 \cos y \cdot y' + 2y \cdot y' \cos x - \\ - y^2 \sin x - 2 - 3y' = 0.$$

$$(x^2 \cos y + 2y \cos x - 3)y' = 2 + y^2 \sin x - 2x \sin y.$$

$$y' = \frac{2 + y^2 \sin x - 2x \sin y}{x^2 \cos y + 2y \cos x - 3}.$$

5. Знайти значення y'_x у точці з координатами $x=y=1$, якщо $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо значення y'_x . Диференціюємо задану рівність по x :

$$3x^2 - 4xy^2 - 4x^2y \cdot y' + 5 + y' = 0.$$

$$3x^2 - 4xy^2 + 5 = (4x^2y - 1)y',$$

$$y' = \frac{3x^2 - 4xy^2 + 5}{4x^2y - 1}.$$

$$\text{При } x=y=1 \text{ отримуємо } y' = \frac{4}{3}.$$

Знайти похідну y'_x функцій, заданих у параметричній формі.

$$\text{Нехай } \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha; \beta]. \end{cases} \text{ — функція, задана у параметричній формі.}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$1. \begin{cases} x = e^{-t} \sin t, \\ y = e^t \cos t, \\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{Розв'язання. } x'_t = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t} (\cos t - \sin t),$$

$$y'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t).$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t (\cos t - \sin t)}{e^{-t} (\cos t - \sin t)} = e^{2t}.$$

$$2. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2), \\ t \in (-1; 1). \end{cases}$$

Розв'язання. $x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, y'_t = -\frac{2t}{1-t^2},$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{2t}{1-t^2} \cdot \sqrt{1-t^2} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$$3. \begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t, \\ t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Розв'язання. $x'_t = \left(\frac{1}{\cos t}\right)' = \frac{\sin t}{\cos^2 t}, y'_t = \frac{1}{\cos^2 t},$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t}.$$

4. Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}. \end{cases}$ у точці $t=1$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t}$. $x'_t = \ln t + 1$,

$$y'_t = \left(\frac{\ln t}{t} \right)' = \frac{1 - \ln t}{t^2}. \quad y'_x = \frac{1 - \ln t}{t^2} \cdot \frac{1}{\ln t + 1}. \text{ При } t=1 \text{ отримаємо:}$$
$$y'_t|_{t=1} = 1.$$

Знайти диференціали вказаних функцій.

1. $y = \operatorname{arctg}(e^{2x})$. $dy = y'(x)dx = \frac{2e^{2x}dx}{1 + e^{4x}}$.

2. $y = \frac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2}\arcsin \frac{x}{7}$.

$$\begin{aligned} dy &= y'(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{49 - x^2}} + \\ &+ \frac{49}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}} = \frac{1}{2}\sqrt{49 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{49 - x^2}} + \\ &+ \frac{49}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{49 - x^2}} = \frac{49 - x^2 - x^2 + 49}{2\sqrt{49 - x^2}} = \frac{2(49 - x^2)}{2\sqrt{49 - x^2}} = \\ &= \sqrt{49 - x^2}. \end{aligned}$$

3. Порівняти приріст та диференціал функції

$$y = 2x^3 + 5x^2.$$

Розв'язання. Знайдемо приріст Δy функції $y = y(x)$

при переході від точки x до точки $x + \Delta x$:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x).$$

$$\begin{aligned}
\Delta y &= 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 2x^3 - 5x^2 = \\
&= 2\left((x + \Delta x)^3 - x^3\right) + 5\left((x + \Delta x)^2 - x^2\right) = \\
&= 2\left(3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) + 5\left(2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = \\
&= (6x^2 + 10x)\Delta x + (6x + 5)(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3.
\end{aligned}$$

$$dy = y'(x)dx = (6x^2 + 10x)dx.$$

Різниця між Δy та dy є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx :

$$o(\Delta x) = (6x + 5)(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3.$$

4. Обчислити наближене значення $\arcsin 0,51$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \arcsin x$.

Маємо: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$. Нехай $x = 0,5$,

$\Delta x = 0,01$. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Отримуємо:

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{6} + 0,011 \approx 0,513.$$

Домашнє завдання:

Обчислити похідні y'_x .

1. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$. **Відповідь:** $y'_x = \frac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}$.

2. $y^2 \cos x = \sin 3x$. **Відповідь:** $y'_x = \frac{3 \cos 3x + y^2 \sin x}{2y \cos x}$.

3. $y^2 - 2xy + 4 = 0$. **Відповідь:** $y'_x = \frac{y}{y - x}$.

4. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$ **Відповідь:** $y'_x = \frac{3t^2 - 1}{2t}$.

5. $\begin{cases} x = \frac{1 + t^3}{t^2 - 1}, \\ y = \frac{1}{t^2 - 1}. \end{cases}$ **Відповідь:** $y'_x = \frac{t^2 + 1}{t(2 + 3t - t^3)}$.

6. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$ **Відповідь:** $y'_x = -\frac{3}{2} \operatorname{tg} t$.

7. Знайти y'_x у точці $t = 0$, якщо $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3. \end{cases}$

Відповідь: $y'_x = 0$.

Знайти диференціали вказаних функцій.

8. $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$. **Відповідь:** $dy = \frac{dx}{x^2 - 36}$.

9. $s = e^{t^2}$. **Відповідь:** $ds = 2te^{t^2} dt$.

