Тема 2. Теореми множення та додавання ймовірностей і їх наслідки.

2.1. Ймовірність суми несумісних подій.

Аксіома 3 аксіоматичного означення ймовірності (п. 1.4) стверджує, що ймовірність суми скінченного числа несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) \qquad (2.1)$$

З формули (2.1) випливає, що сума ймовірностей попарно несумісних подій, що утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці, оскільки у результаті випробування обов’язково з’явиться хоча б одна з цих подій.

Протилежні події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу несумісних подій, тому $P(A)+P(\overline{A})=1$. Звідси отримуємо:

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (2.2)$$

Приклад 1. Мішень поділена на 3 сектори. Ймовірність влучення стрільцем у перший сектор мішені дорівнює 0,45, у другий сектор – 0,35, у третій – 0,15. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить: а) у перший або другий сектор; б) не влучить у мішень.

Розв’язання. Введемо позначення:

подія A_1 = {влучення у перший сектор};

подія A_2 = {влучення у другий сектор};

подія A_3 = {влучення у третій сектор};

подія A_4 = {невлучення у мішень}.

Тоді $P(A_1)=0,45$, $P(A_2)=0,35$, $P(A_3)=0,15$.

а) Влучення у перший або другий сектор відповідає сумі подій A_1 та A_2. При одному пострілі події A_1 та A_2 є несумісними, тому за формулою (2.1) $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0,45+0,35=0,8$.

б) Події A_1, A_2, A_3, A_4 попарно несумісні та утворюють повну групу випадкових подій. Тому $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=1$. Звідси знаходимо:

$$P(A_4)=1-P(A_1)-P(A_2)-P(A_3)=1-0,45-0,35-0,15=0,05.$$

Приклад 2. У ящику знаходяться 20 деталей, з яких 15 деталей є стандартними. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих деталей виявиться хоча б одна стандартна.

Розв'язання. Нехай подія A={серед взятих деталей виявиться хоча б одна стандартна деталь}. Тоді протилежна подія $\overline{A}=A$={серед взятих деталей всі нестандартні}. Спочатку знайдемо ймовірність протилежної події:

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$P(\overline{A})=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{1}{114}$. Звідси, за формулою (2.2) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{114}=\frac{113}{114}$.

2.2 Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей.

Умовною ймовірністю події A відносно події B називають ймовірність події A, обчислену за умови, що подія B відбулася. Для такої ймовірності використовують позначення $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Приклад. В урні знаходяться 3 білі та 3 чорні кулі. З неї двічі виймають по одній кулі, не повертаючи їх в урну. Знайти ймовірність того, що другою з'явиться біла куля, якщо першого разу вийняли білу кулю.

Розв'язання. Нехай подія A={першого разу з'явилась біла куля}, подія B={другою з'явилась біла куля}. Знайдемо умовну ймовірність $P(B/A)$, тобто ймовірність того, що другою з'явиться біла куля, якщо першого разу вийняли білу кулю. Після виймання першої кулі (білої) в урні залишилось 2 білі та 3 чорні кулі. Тому ймовірність $P(B/A)=\frac{3-1}{3+3-1}=\frac{2}{5}$.

Теорема 2.1 (Теорема множення ймовірностей). Ймовірність добутку подій A та B дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої події відносно першої:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B). \qquad (2.3)$$

<u>Доведення.</u> Доведемо цю теорему для класичної схеми визначення ймовірності, коли у результаті випробування може відбутися одна з скінченого числа n рівноможливих елементарних подій. Нехай з цих n подій сприяють події A m подій, з яких k подій сприяють також події B. Маємо $P(A) = \dfrac{m}{n}$, $P(B/A) = \dfrac{k}{m}$. Добутку подій AB сприяють лише такі випадки з сприятливих для події A, що є сприятливими і для події B. Отримуємо:

$$P(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n}\cdot\frac{k}{m} = P(A)\cdot P(B/A).$$

Аналогічним чином можна отримати формулу $P(AB) = P(B)\cdot P(A/B)$.

Формула (2.3) розповсюджується також на випадки, коли класична схема обчислення ймовірностей є незастосовною, наприклад, у випадках, коли простір елементарних подій є нескінченним, або елементарні події не є рівноможливими.

З формули (2.3) знайдемо формулу для обчислення умовної ймовірності:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (2.4)$$

Формулу (2.4) часто використовують як означення умовної ймовірності події, альтернативне наведеному на початку п.2.2.

Приклад 1. Серед 25 електроламп 4 несправні. Знайти ймовірність того, що дві взяті навмання електролампи будуть несправними.

Розв'язання. Нехай подія A={перша взята лампа виявилася несправною}, подія B={друга взята електролампа – несправна}. Подія AB={обидві взяті електролампи є несправними}. Обчислимо ймовірність добутку подій AB за формулою (2.3):

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{4}{25}\cdot\frac{3}{24} = 0{,}02.$$

$n = C_{25}^2$; $m = C_4^2$ $\quad p = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4!}{2!\,2!}\cdot\dfrac{2!\cdot 23!}{25!} = \dfrac{24}{2\cdot 24\cdot 25} = 0{,}02$

Зауважимо, що цю задачу можна розв’язати також, використовуючи класичну схему обчислення ймовірності та формули комбінаторики.

Події A та B називають <u>незалежними</u>, якщо ймовірність однієї з них не залежить від настання іншої, інакше ці події є <u>залежними</u>.

Події A_1, A_2,…, A_n називають <u>попарно незалежними</u>, якщо незалежними між собою є будь-які дві з них. Події A_1, A_2,…, A_n називають <u>незалежними у сукупності</u>, якщо вони є попарно незалежними, а також незалежними є кожна подія та всі можливі добутки інших подій. Далі незалежними подіями будемо називати події, незалежні у сукупності.

Оскільки для незалежних подій A та B $P(B \setminus A) = P(B)$, то у цьому випадку формула (2.3) набуває вигляду:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) виражає теорему множення ймовірностей для незалежних подій:

<u>**Теорема 2.2 (Теорема множення ймовірностей для незалежних подій)**</u>. Ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей.

Приклад 2. Ймовірність влучення у ціль для першого стрільця становить 0,7, для другого ця ймовірність дорівнює 0,9. Вони одночасно стріляють по цілі. Знайти ймовірність того, що ціль буде вражена двічі.

Розв’язання. Нехай подія A={перший стрілець вразив ціль}, подія B={другий стрілець вразив ціль}. Тоді подія AB={обидва стрільці вразили ціль}. Оскільки події A та B є незалежними, то для знаходження ймовірності їх добутку використаємо формулу (2.5):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$$

Теорему множення ймовірностей можна узагальнити на випадок добутку довільної скінченої кількості подій.

<u>**Теорема 2.3.**</u> Ймовірність добутку скінченої кількості подій дорівнює добутку їх умовних ймовірностей відносно добутку попередніх по відношенню до кожної з них подій:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/(A_1A_2))\cdot...\cdot P(A_n/(A_1A_2...A_{n-1})). \quad (2.6)$$

Доведення. Здійснимо доведення методом математичної індукції. Теорема виконується для двох подій (теорема 2.1). Нехай вона виконується для $n-1$ подій, тобто

$$P(A_1A_2...A_{n-1})=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)...P(A_{n-1}/(A_1A_2...A_{n-2})). \quad (2.7)$$

Нехай подія $B=A_1A_2...A_{n-1}$. Згідно з теоремою множення ймовірностей для двох подій:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(BA_n)=P(B)\cdot P_B(A_n)=P(A_1A_2...A_{n-1})\cdot P_{A_1...A_{n-1}}(A_n). \quad (2.8)$$

З (2.8) та (2.7) випливає формула (2.6).

З даної теореми випливає, що для незалежних подій $A_1, A_2,..., A_n$ ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot...\cdot P(A_n). \quad (2.9)$$

Приклад 3. На 10 картках надруковані цифри від 0 до 9. Знайти ймовірність того, що навмання взяті і розміщені у ряд в послідовності виймання картки утворять число 125. $p=\frac{m}{n}$ $n=A_{10}^3$; $m=1$; $A=\frac{10!}{7!}=8\cdot 9\cdot 10=$ $=720$

Розв'язання. Нехай подія A={утворення числа 125},подія A_1={поява 1 при першому вийманні картки}, A_2={поява 2 при другому вийманні}, A_3={поява 5 при третьому вийманні}. Маємо $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$. Події A_1, A_2 та A_3 є залежними. Тому за формулою (2.6) $P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)$. $\frac{1}{720}=P$

Оскільки $P(A_1)=\frac{1}{10}$, $P_{A_1}(A_2)=\frac{1}{9}$, $P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{1}{8}$, то $P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{720}$.

Приклад 4. Робітник обслуговує три однотипні верстати. Ймовірність того, що на протязі зміни відбудеться аварійна зупинка будь-якого верстата, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни відбудеться аварійна зупинка: а) на всіх трьох верстатах; б) хоча б на одному верстаті.

Розв'язання. Нехай подія A_i={аварійна зупинка виникне на i-ому верстаті}, $i=1, 2, 3$. Події A_1, A_2 та A_3 є незалежними.

а) Подія $B=${аварійна зупинка відбудеться на всіх трьох верстатах} відповідає добутку подій $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. $= B$

$$P(B)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=(0,6)^3=0,216.$$

б) Нехай подія $C=${аварійна зупинка відбудеться хоча б на одному верстаті}. Тоді протилежна подія $\overline{C}=${аварійної зупинки не відбудеться на жодному верстаті}, $\overline{C}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$,

$$P\left(\overline{C}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)=(1-0,6)^3=0,064,$$

$$P(C)=1-P\left(\overline{C}\right)=1-0,064=0,936.$$

У цьому прикладі була знайдена ймовірність настання хоча б однієї події з кількох незалежних подій. Для цього було знайдено ймовірність протилежної події – {жодна з кількох незалежних подій не з’явилась}.

<u>Теорема 2.4.</u> Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2,...,A_n$, незалежних у сукупності:

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot ...\cdot q_n \quad , \qquad (2.10)$$

де $q_1=P\left(\overline{A_1}\right)$, $q_2=P\left(\overline{A_2}\right),\ldots,$ $q_n=P\left(\overline{A_n}\right)$.

<u>Доведення.</u> Нехай A – подія, що полягає у появі хоча б однієї з подій A_1, $A_2,\ldots,$ A_n, тобто $A=A_1+A_2+...+A_n$. Тоді $\overline{A}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n}$. Оскільки події A_i, і, відповідно, $\overline{A_i}$, $i=1,2,...,n$, є незалежними у сукупності, то за формулою (2.9) маємо: $P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot...\cdot P\left(\overline{A_n}\right)=q_1q_2...q_n$. Оскільки $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)$, тог отримуємо формулу (2.10).

Якщо події A_1, $A_2,\ldots,$ A_n є незалежними та їх ймовірності рівні між собою та дорівнюють p, то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій $P(A)=1-q^n$, де $q=1-p$.

Приклад 5. Ймовірність того, що стрілець при трьох пострілах влучить у ціль хоча б один раз, дорівнює 0,936. Знайти ймовірність влучення стрільцем у ціль у одному пострілі.

Розв'язання. Нехай подія $A=${стрілець влучив у ціль хоча б один раз}. За умовою $P(A)=0,936=1-q^3$, де $q=1-p$, p – ймовірність влучення у ціль при одному пострілі. $q^3=1-0,936=0,064$, $q=\sqrt[3]{0,064}=0,4$. Тоді $p=1-q=1-0,4=0,6$.

2.3 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Теорема 2.5. Ймовірність настання хоча б однієї з двох сумісних подій, A чи B, дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (2.11)$$

Доведення. Нехай A та B – сумісні події. Їх суму можна записати у вигляді: $A+B=A\bar{B}+\bar{A}B+AB$. Оскільки події AB, $\bar{A}B$ та $A\bar{B}$ є несумісними, то за формулою (2.1) отримуємо:

$$P(A+B)=P\left(A\bar{B}\right)+P\left(\bar{A}B\right)+P(AB). \qquad (2.12)$$

Оскільки $A=AB+A\bar{B}$, то для ймовірності події A можна записати: $P(A)=P\left(AB+A\bar{B}\right)=P(AB)+P\left(A\bar{B}\right)$.

Звідси $P\left(A\bar{B}\right)=P(A)-P(AB)$. (2.13)

Аналогічно, з врахуванням несумісності подій BA та $B\bar{A}$ та комутативності множення подій, для ймовірності події B отримуємо: $P(B)=P\left(BA+B\bar{A}\right)=P(AB)+P\left(\bar{A}B\right)$. Звідси маємо:

$$P\left(\bar{A}B\right)=P(B)-P(AB). \qquad (2.14)$$

Підставивши (2.13) та (2.14) у (2.12), отримаємо:
$P(A+B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)+P(AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$, що й треба було довести.

Приклад. Для виконання завдання замовник звернувся до двох виконавців. Ймовірність виконання завдання першим виконавцем дорівнює 0,8, другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що завдання буде виконано.

Розв'язання. Нехай подія $A_1 =${завдання виконано першим виконавцем}, подія $A_2 =${завдання виконано другим виконавцем}. За умовою ймовірності цих подій $P(A_1)=0,8$, $P(A_2)=0,9$. Завдання буде виконано, якщо матиме місце сума сумісних подій A_1 та A_2. Використовуючи формулу (2.11), знаходимо: $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$. Події A_1 та A_2 є незалежними, тому $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$. Остаточно, підставляючи задані значення ймовірностей подій A_1 та A_2, отримуємо:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)=0,8+0,9-0,8\cdot 0,9=0,98.$$

Використавши метод математичної індукції, формулу (2.11) можна узагальнити на випадок знаходження ймовірності суми довільного скінченого числа сумісних подій A_1, $A_2,\ldots,$ A_n. У даному випадку формула (2.11) набуває вигляду:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-\ldots-$$
$$-P(A_{n-1}A_n)+P(A_1A_2A_3)+\ldots+P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)-\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

При великих значеннях n замість останньої формули доцільно знаходити спочатку ймовірність протилежної події $\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_n}$. Тоді

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_n}).$$

2.4 Формула повної ймовірності

Нехай деяка подія B може настати лише за умови настання однієї з попарно несумісних подій A_1, $A_2,\ldots,$ A_n, що утворюють повну групу. Ймовірності цих подій $P(A_1)$, $P(A_2),\ldots,$ $P(A_n)$ є відомими, відомі також умовні ймовірності $P(B/A_i)$ події B відносно подій A_i, $i=1,2,\ldots,n$. Потрібно знайти ймовірність події B.

<u>**Теорема 2.6.**</u> Ймовірність події B, поява якої можлива лише одночасно з однією з попарно несумісних подій A_1, $A_2,\ldots,$ A_n, що утворюють повну групу,

дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідні умовні ймовірності події B:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i). \qquad (2.15)$$

Формулу (2.15) називають формулою повної ймовірності.

Доведення. За умовою, подію B можна представити у вигляді:

$$B=A_1B+A_2B+...+A_nB,$$

при цьому події A_iB, $i=1$, 2, ..., n, є попарно несумісними. Тому, за формулою додавання ймовірностей несумісних подій (2.1), маємо:

$$P(B)=P\left(\sum_{i=1}^{n}A_iB\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i).$$

Таким чином, ми отримали формулу (2.15). При цьому була використана теорема 2.1 множення ймовірностей, згідно з якою ймовірність добутку подій A_iB $P(A_iB)=P(A_i)P(B/A_i)$. Теорему доведено.

Приклад. На першому заводі на кожні сто електролампочок виробляється у середньому 90 стандартних, на другому – 95, на третьому – 85 стандартних лампочок. Продукція цих заводів складає відповідно 50 %, 30 % та 20 % всіх лампочок, що надходять у місто. Знайти ймовірність придбання у цьому місті стандартної електролампочки.

Розв'язання. Нехай подія $B=${придбано стандартну електролампочку}, події $A_i=${лампочку виготовлено на i-му заводі}, $i=1,2,3$. Події A_i є несумісними та утворюють повну групу подій. $P(A_1)=0{,}5$, $P(A_2)=0{,}3$, $P(A_3)=0{,}2$. Умовні ймовірності події B відносно подій A_i відповідно дорівнюють: $P(B/A_1)=0{,}9$, $P(B/A_2)=0{,}95$, $P(B/A_3)=0{,}85$. Для знаходження ймовірності події B використаємо формулу повної ймовірності (2.15), згідно з якою отримуємо:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)=0{,}5\cdot0{,}9+0{,}3\cdot0{,}95+$$
$$+\ 0{,}2\cdot0{,}85=0{,}905.$$

2.5 Формула Байєса

Нехай подія B може відбутися лише за умови настання однієї з подій A_1, $A_2,\ldots,$ A_n, що є попарно несумісними та утворюють повну групу подій. Оскільки невідомо, яка з подій A_i, $i=1,$ 2, ..., n відбудеться, ці події називають гіпотезами. Нехай у результаті випробування з'явилася подія B. Визначимо нові значення ймовірностей гіпотез A_i, $i=1,$ 2, ..., n, з врахуванням появи події B, тобто знайдемо умовні ймовірності $P\left(A_i/B\right)$, $i=1,$ 2, ..., n.

Знайдемо умовну ймовірність $P\left(A_1/B\right)$. За теоремою множення ймовірностей $P\left(BA_1\right)=P\left(A_1B\right)=P\left(B\right)P\left(A_1/B\right)=P\left(A_1\right)P\left(B/A_1\right)$. Звідси знаходимо: $P\left(A_1/B\right)=\dfrac{P\left(A_1\right)P\left(B/A_1\right)}{P\left(B\right)}$. Замінивши $P\left(B\right)$ за формулою повної ймовірності (2.15), остаточно отримуємо формулу для знаходження $P\left(A_1/B\right)$:

$$P\left(A_1/B\right)=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B/A_1\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P\left(A_k\right)P\left(B/A_k\right)}.$$

Аналогічно можна знайти формули, що визначають ймовірність решти гіпотез A_i за умови настання події B:

$$P\left(A_i/B\right)=\frac{P\left(A_i\right)P\left(B/A_i\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P\left(A_k\right)P\left(B/A_k\right)}. \qquad (2.16)$$

Формулу (2.16) називають формулою Байєса, за прізвищем англійського математика, який вперше отримав її. Ця формула дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як став відомим наслідок випробування – настання події B.

Приклад. Виготовлені у цеху деталі для перевірки їх якості потрапляють до одного з двох контролерів. Ймовірність потрапляння деталі до першого контролера дорівнює 0,6, до другого – 0,4. Ймовірність того, що якісна деталь буде визнана якісною, для першого контролера дорівнює 0,94, для другого –

0,98. При перевірці якісна деталь була визнана якісною. Знайти ймовірність того, що її перевірив другий контролер.

Розв'язання. Нехай подія $B=\{$якісну деталь було визнано якісною$\}$, події $A_i=\{$деталь перевірена i-м контролером$\}$, $i=1,\ 2$. Маємо ймовірності $P(A_1)=0,6$, $P(A_2)=0,4$, $P(B/A_1)=0,94$, $P(B/A_2)=0,98$. За формулою Байєса (2.16) отримуємо ймовірність $P(A_2/B)$:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)}=\frac{0,4\cdot 0,98}{0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98}\approx 0,41.$$