

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5

Резервування заміщенням у режимі полегшеного резерву та у режимі ненавантаженого резерву.

Теоретичні відомості.

У цьому випадку резервні елементи перебувають у полегшеному режимі до моменту включення в роботу. Надійність резервного елемента в цьому випадку вище надійності основного елемента, оскільки резервні елементи знаходяться в режимі недовантаження до моменту їх включення в роботу.

Імовірність відмови резервованої системи із полегшеним резервуванням визначається співвідношенням

$$q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i \right], \quad (5.1)$$

где

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1} \left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right). \quad (5.2)$$

де λ_1 – інтенсивність відмови резервного елемента в режимі недовантаження до моменту включення його в роботу;

λ_0 – інтенсивність відмови резервного елемента у стані роботи;

m - кратність резервування чи кількість резервних елементів.

Імовірність безвідмовної роботи системи із полегшеним резервуванням визначається формулою

$$P_c(t) = 1 - q_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i \right]. \quad (5.3)$$

(ремарка – у формулі a_i та ступінь - i)

Середній час безвідмовної роботи системи із полегшеним резервуванням:

$$m_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^m \frac{1}{1 + ik}, \quad (5.4)$$

де

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \quad (5.5)$$

Частота відмов $f_c(t)$ системи із полегшеним резервуванням.

$$f_c(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_0 t})^i - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{-\lambda_1 t} \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(i-1)!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^{i-1} \right]. \quad (5.6)$$

Інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ системи із полегшеним резервуванням

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \lambda_0 \left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{-\lambda_1 t} \frac{\sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(i-1)!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^{i-1}}{1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i} \right]. \quad (5.7)$$

При $\lambda_1 = 0$ маємо режим ненавантаженого резерву.

Імовірність відмови резервованої системи з ненавантаженим резервуванням:

$$q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \quad (5.8)$$

Імовірність безвідмовної роботи системи з ненавантаженим резервом

$$p_c(t) = 1 - q_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \quad (5.9)$$

Середній час безвідмовної роботи системи з ненавантаженим резервом

$$m_{\text{вк}} = \int_0^{\infty} p_c(t) dt = \frac{m+1}{\lambda_0}. \quad (5.10)$$

Частоту відмов $f_c(t)$ системи з ненавантаженим резервом

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = \frac{\lambda_0^{m+1}}{m!} t^m e^{-\lambda_0 t} \quad (5.11)$$

Інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ системи з ненавантаженим резервом

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_0^{m+1} t^m}{m! \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}. \quad (5.12)$$

Розв'язання типових завдань.

Завдання 5.1. Система складається з 10 рівнонадійних елементів, середній час безвідмовної роботи елемента $m_t = 1000$ год. Передбачається, що справедливий експоненційний закон надійності для елементів системи та основна та резервна системи рівнонадійні. Необхідно знайти ймовірність безвідмовної роботи системи $P_c(t)$, середній час безвідмовної роботи системи m_{tc} , а також частоту відмов $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ у момент часу $t = 50$ год у наступних випадках:

- а) нерезервованої системи,
- б) дубльованої системи при включенні резерву за способом заміщення (ненавантажений резерв).

Рішення:

а) интенсивность отказов системы $\lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i$,

где λ_i – интенсивность отказов i -го элемента; $n = 10$,

$$\lambda_i = \frac{1}{m_u} = \frac{1}{1000} = 0,001; i = \overline{1, n}; \lambda = \lambda_i,$$

$$\lambda_c = \lambda n = 0,001 \cdot 10 = 0,01 \text{ 1/ч},$$

$$m_u = \frac{1}{\lambda_c} = 100 \text{ ч}; p_c(t) = e^{-\lambda_c t};$$

$$f_c(t) = \lambda_c(t) \cdot p_c(t); \lambda_c(50) = \lambda_c;$$

$$f_c(50) = \lambda_c e^{-\lambda_c t} = 0,01 \cdot e^{-0,01 \cdot 50} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч};$$

$$\lambda_c(50) = 0,01 \text{ 1/ч}.$$

б)

$$m_{tc} = \frac{m+1}{\lambda_c}; m=1;$$

$$m_{tc} = \frac{2}{0,01} = 200 \text{ ч}.$$

Визначимо імовірність безвідмовної роботи

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_c t)^i}{i!} = e^{-\lambda_c t} (1 + \lambda_c t).$$

Так как $\lambda_0 = \lambda_c$, то $P_c(t) = e^{-\lambda_c t} (1 + \lambda_c t)$.

Знайдемо частоту відмов

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = -[-\lambda_c e^{-\lambda_c t} (1 + \lambda_c t) + \lambda_c e^{-\lambda_c t}] = \lambda_c^2 t e^{-\lambda_c t}$$

Розрахуємо інтенсивність відмов

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_c^2 t e^{-\lambda_c t}}{e^{-\lambda_c t} (1 + \lambda_c t)} = \frac{\lambda_c^2 t}{1 + \lambda_c t}.$$

Отримаємо

$$P_c(50) = e^{-0,01 \cdot 50} (1 + 0,01 \cdot 50) = e^{-0,5} \cdot 1,5 = 0,6065 \cdot 1,5 \approx 0,91,$$

$$f_c(50) = 0,01^2 \cdot 50 \cdot e^{-0,01 \cdot 50} = 0,01 \cdot 0,5 \cdot e^{-0,5} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч},$$

$$\lambda_c(50) = \frac{f_c(50)}{P_c(50)} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{0,91} \approx 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч}.$$

Завдання 5.2. Радіопередавач має інтенсивність відмов $\lambda_0 = 0,4 \cdot 10^{-3}$ 1/год. Його дублює такий самий передавач, який перебуває до відмови основного передавача в режимі очікування (в режимі полегшеного резерву). У цьому режимі інтенсивність відмов передавача $\lambda_1 = 0,06 \cdot 10^{-3}$ 1/год. Потрібно обчислити ймовірність безвідмовної роботи передавальної системи протягом часу $t = 100$ год., а також середній час безвідмовної роботи m_{tc} , частоту відмов $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$.

Рішення. У цьому випадку кратність резервування $m = 1$. Використовуючи формулу (5.3), отримаємо

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \cdot \left[1 + \sum_{i=1}^1 \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_1 t})^i \right] = e^{-\lambda_0 t} [1 + a_1 (1 - e^{-\lambda_1 t})];$$

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1} \left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \quad a_1 = \prod_{j=0}^0 \left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Тогда

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right). \quad (5.13)$$

Из (5.13) имеем

$$P_c(100) = e^{-0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 100} \left(1 + \frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{0,06 \cdot 10^{-3}} - \frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{0,06 \cdot 10^{-3}} e^{-0,06 \cdot 10^{-3} \cdot 100} \right) =$$

$$e^{-0,04} \left(1 + \frac{40}{6} - \frac{40}{6} e^{-0,006} \right) \approx 0,96 [1 + 6,67 - 6,67(1 - 0,006)] \approx 0,998$$

Визначемо за формулою (5.4)

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^1 \frac{1}{1 + i \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} = \frac{1}{\lambda_0} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right) = \frac{1}{\lambda_0} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} \right) =$$

$$= \frac{1}{0,4 \cdot 10^{-3}} \left(1 + \frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{0,46 \cdot 10^{-3}} \right) = 4668 \text{ ч}$$

Знайдемо інтенсивність відмов

$$\begin{aligned} f_c(t) &= -\frac{dp_c(t)}{dt} = -\left[-\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right) + e^{-\lambda_0 t} \lambda_0 e^{-\lambda_1 t} \right] = \\ &= \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1 t} \right] = \lambda_0 \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_0 t} (1 - e^{-\lambda_1 t}). \end{aligned}$$

Перепишемо (5.13) у вигляді

$$P_c(t) = \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_0 t} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} e^{-\lambda_1 t} \right).$$

Визначемо інтенсивність відмов

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{\lambda_0 (1 - e^{-\lambda_1 t})}{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0} e^{-\lambda_1 t}}.$$

Завдання 5.3. Імовірність безвідмовної роботи перетворювача постійного струму змінний протягом часу $t = 1000$ год. дорівнює 0,95, тобто $P(1000) = 0,95$. Для підвищення надійності системи електропостачання на об'єкті є такий самий перетворювач, який включається в роботу при відмові першого (режим ненавантаженого резерву). Потрібно розрахувати ймовірність безвідмовної роботи та середній час безвідмовної роботи системи, що складається з двох перетворювачів, а також визначити частоту відмов $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ системи.

Рішення. У цьому випадку кратність резервування $m = 1$. Використовуючи формулу (5.9), отримаємо

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t} (1 + \lambda_0 t) \quad (5.14)$$

Оскільки для окремого перетворювача має місце експоненційний закон надійності, то

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t}, \quad (5.15)$$

де $P(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи перетворювача; λ_0 - інтенсивність відмов перетворювача у стані роботи.

З (5.15) маємо

$$P(1000) = e^{-\lambda_0 \cdot 1000} = 0,95.$$

$$\lambda_0 \cdot 1000 = 0,051,$$

звідки

$$\lambda_0 = 0,051 / 1000 \approx 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/год.}$$

Тоді з (5.14) маємо

$$P_c(1000) = 0,95 (1 + 0,05) = 0,9975.$$

Визначимо m_{tc} за формулою (5.10). Отримаємо

$$m_{tc} = (m+1) / \lambda_0 = 2 / \lambda_0 = 2 / (0,5 \cdot 10^{-4}) = 40000 \text{ год.}$$

Зазначимо, що середній час безвідмовної роботи нерезервованого перетворювача дорівнює

$$m_{tc} = 1 / \lambda_0 = 20000 \text{ год.}$$

Визначимо частоту відмов $f_c(t)$ за формулою (5.11). Маємо

$$f_c(t) = \frac{\lambda_0^2}{1!} t e^{-\lambda_0 t} = \lambda_0^2 t e^{-\lambda_0 t}$$

Визначимо інтенсивність відмов

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{\lambda_0^2 t \cdot e^{-\lambda_0 t}}{e^{-\lambda_0 t} (1 + \lambda_0 t)} = \frac{\lambda_0^2 t}{1 + \lambda_0 t}.$$

Завдання 5.4. Система складається із двох однакових елементів. Для підвищення її надійності конструктор запропонував дублювання системи способом заміщення з ненавантаженим станом резерву (рис.5.1). Інтенсивність відмов елемента дорівнює λ . Потрібно визначити можливість безвідмовної роботи системи $P_c(t)$, середній час безвідмовної роботи m_{tc} , частоту відмов $f_c(t)$, інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$.

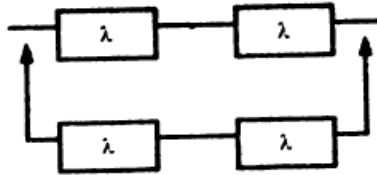


Рисунок 5.1

Завдання 5.5. Схема розрахунку надійності виробу наведено на рис.5.2. Необхідно визначити можливість безвідмовної роботи $P_c(t)$, частоту відмов $f_c(t)$, інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ виробу. Знайти $\lambda_c(t)$ за $t = 0$.

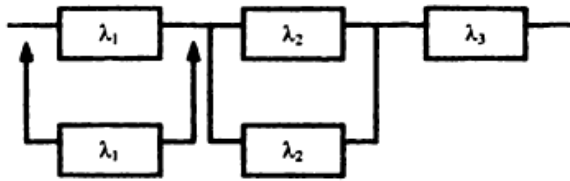


Рисунок 5.2

Завдання 5.6. Схема розрахунку надійності системи наведена на рис.5.3, де А, Б, В, Р – блоки системи. Визначити можливість безвідмовної роботи $P_c(t)$ системи.

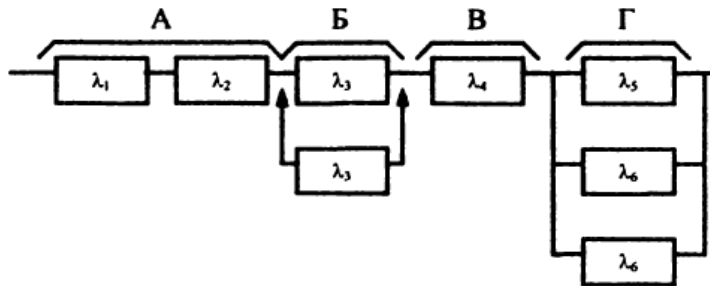


Рисунок 5.3

Завдання 5.7. Схема розрахунку надійності системи наведено на рис.5.4. Визначити можливість безвідмовної роботи $P_c(t)$ системи.

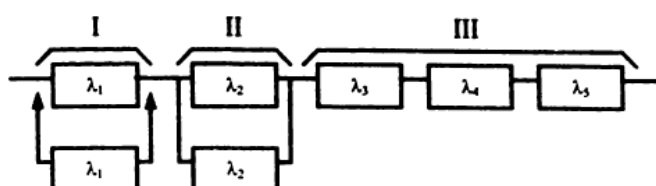


Рисунок 5.4

Завдання 5.8. Передавальний пристрій складається з одного працюючого передавача ($\lambda=8 \cdot 10^{-3}$ 1/год) та одного передавача в полегшеному резерві ($\lambda_0 = 8 \cdot 10^{-4}$ 1/год). Потрібно визначити можливість безвідмовної роботи пристрою $P_c(t)$, середній час безвідмовної роботи пристрою m_{tc} . Визначити $P_c(t)$ при $t = 20$ год.

Завдання 5.9. У радіопередавальному каналі зв'язкової системи використовується основний передавач П1, два передавачі П2 і П3, що знаходяться в ненавантаженому резерві. Інтенсивність відмов основного працюючого передавача дорівнює $\lambda_0=10^{-3}$ 1/год. З моменту відмови передавача П1 у роботу включається П2, після відмови передавача П2 включається П3. При включенні резервного передавача у роботу його інтенсивність відмов стає рівною λ_0 . Вважаючи перемикач абсолютно надійним, визначити можливість безвідмовної роботи $P_c(t)$ радіопередаючого каналу, середній час безвідмовної роботи каналу m_{tc} . Визначити також $P_c(t)$ при $t=100$ год.

Завдання 5.10. Пристрій автоматичного пошуку несправностей і двох логічних блоків. Середнє час безвідмовної роботи цих блоків однаково й у кожного їх дорівнює $m_t = 200$ год. Потрібно визначити середній час безвідмовної роботи пристрою m_{tc} для двох випадків:

- а) є ненавантажений резерв всього пристрою;
- б) є ненавантажений резерв кожного блоку.