Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Дніпродзержинський державний технічний університет

О.В. Клюєв

Конспект лекцій з дисципліни

НАДІЙНІСТЬ І ДІАГНОСТИКА ЕЛЕКТРООБЛАДНАННЯ

для студентів за напрямом
6.050702 «Електромеханіка»

Затверджено редакційно-видавницькою
секцією науково-методичною радою ДДТУ

____________2013 р., протокол № __

Дніпродзержинськ 2013

Конспект лекцій з дисципліни «Надійність і діагностика електрообладнання» для студентів за напрямом 6.050702 “ Електромеханіка”/ Укл.: к.т.н., доцент Клюєв О.В. - Дніпродзержинськ: ДДТУ,2013, 143 стор.

Укладач: к.т.н., доцент Клюєв О.В.

Рецензент к.т.н., доцент кафедри ЕТЕМ Количев С.В.

Відповідальний за випуск: зав.кафедрою ЕТЕМ
д.т.н., професор Садовой О.В.

Затверджено на засіданні кафедри ЕТЕМ
(протокол № 7 від 22.01.2013 р.)

Конспект лекцій призначений для студентів 4 курсу денної форми навчання за напрямом 6.050702 - Електромеханіка. У конспекті розглядаються розділи, які вивчаються, як на лекційних заняттях, так і призначені для самостійного вивчення і цілком відповідають робочій програмі курсу «Надійність і діагностика електрообладнання»

Коротка анотація видання.
Розглянуті питання визначення кількісних характеристик надійності невідновлюваних і відновлюваних виробів, а також складних систем з різними видами резервування. Використання методів розроблених у теорії імовірностей і математичній статистиці дозволяє підійти з єдиних позицій до опису випадкових подій і процесів виникнення відмов виробів і розраховувати імовірність їх безвідмовної роботи за час експлуатації.

Зміст

1. Вступ.

1.1. Загальні поняття і терміни теорії надійності.

Кожна наука спирається на основні поняття і визначення. У геометрії – це крапка і пряма, у механіці – маса, сила і швидкість, події і ймовірність у теорії ймовірностей. Теорія надійності також має свої основні поняття. До них у першу чергу відноситься поняття надійності.

Надійність - це властивість апаратури зберігати свої вихідні характеристики (параметри) у визначених межах при заданих умовах експлуатації.

Надійність є внутрішня властивість апаратури, об'єктивна реальність, властива кожному конкретному зразку апаратури.

З визначення надійності випливає, що надійною вважається не тільки та система, у якої виникає ушкодження, що приводить до непрацездатності апаратури, але також і та, у якої вихідні характеристики виходять за припустимі межі. Наведене поняття надійності відноситься до чисто технічних понять.

В міру розширення пізнань про цю властивість удосконалюються і кількісні характеристики – критерії, за допомогою яких можна найбільше точно охарактеризувати цю властивість. Однак, можна затверджувати, що жодна кількісна характеристика не може цілком охарактеризувати надійність. Надійність – більш глибоке поняття, чим будь-яка її характеристика (аналогія з рухом). Надійність, як властивість апаратури, виявляється в процесі експлуатації і залежить від її умов.

Поняття надійності є фундаментальним поняттям у теорії надійності і не випливає з якихось інших понять і визначень.

Вивченням надійності різноманітних технічних пристроїв займається наука, яку називають теорією надійності.

Теорія надійності – це наука, що вивчає процеси виникнення відмов технічних об'єктів і способи боротьби з відмовами.

Елемент розрахунку надійності – пристрій, що враховується при розрахунку надійності як окрема самостійна частина, що має свій загальний кількісний показник надійності.

Працездатність – стан виробу, при якому воно здатно виконувати задані функції з параметрами, установленими вимогами технічної документації.

Відмова – подія, після якої виріб перестає виконувати (цілком чи частково) свої функції, тобто порушується працездатність виробу. Відмовою вважають не тільки необоротне ушкодження виробу, але і відхід його параметрів за припустимі межі.

Несправність – стан виробу, при якому воно не відповідає хоча б одному з вимог технічної документації.

Наробіток – тривалість роботи виробу, вимірюваний в одиницях часу (у годинах).

Безвідмовність – властивість виробу зберігати працездатність протягом деякого наробітку без змушених перерв.

Довговічність – властивість виробу зберігати працездатність до граничного стану з необхідними перервами для технічного обслуговування і ремонтів.

Ремонтопридатність – властивість виробу, що полягає в його здатності до виявлення, усунення відмов і несправностей шляхом проведення технічного обслуговування і ремонтів.

Живучість – властивість об'єкта зберігати працездатність в умовах несприятливих впливів, не передбачених початковими умовами експлуатації.

Ресурс – наробіток виробу до граничного стану, обговореного в технічній документації.

Термін служби – календарна тривалість експлуатації виробу до моменту виникнення граничного стану обговореного в технічній документації.

Наведені вище визначення основних понять теорії надійності далі будуть описуватися у визначеному математичному трактуванні при кількісній оцінці надійності. Істина надійність будь-якого технічного пристрою точно не відома, тому що неможливо врахувати велику кількість різних випадкових факторів діючих на виріб у процесі його експлуатації, тому *всі кількісні характеристики надійності зв'язані з поняттям відмови як випадкової події.*

1.2. Класифікація відмов.

Раптові відмови – характерні різкими, практично миттєвою зміною характеристик об'єктів.

Відмови поступові - відбуваються за рахунок повільного погіршення якості об'єктів і в більшості випадків приводять лише до погіршення вихідних характеристик апаратури при збереженні її працездатності.

Раптові і поступові відмови в більшості випадків можна вважати подіями незалежними і розглядати дії цих відмов роздільно. Але буває таке, що поступові відмови впливають на раптові, і навпаки.

Це порозумівається тим, що вихід з ладу чи погіршення характеристик окремих елементів часто приводить до зміни режимів роботи інших елементів, а, отже, до зміни ймовірності їх відмов.

По характеру усунення розрізняють *остаточні і перемежовані відмови.* При остаточній відмові апаратура стає непрацездатною, її характеристики виходять за припустимі межі на весь час, поки не буде усунута відмова. Перемежовані відмови є наслідком оборотних випадкових змін режимів і параметрів об'єктів. При поверненні режиму роботи в припустимі межі об'єкт сам, без утручання людини, повертається в працездатний стан. Приклад, справний тригер може перестати реагувати на керуючий сигнал через випадкове різке зменшення напруги живлення. Коли напруга живлення знову стане рівною номінальному значенню, тригер буде продовжувати справно працювати.

По легкості виявлення відмови можуть бути очевидними (явними) і схованими (неявними). По зв'язку з іншими відмовами розрізняють відмови *первинні – виниклі з будь-яких причин, крім дії іншої відмови*, і *вторинні – виниклі в результаті іншої відмови*. Приклад, через пробій конденсатора може згоріти опір.

Відмови можуть бути *залежними, якщо з появою одної з них змінюється ймовірність появи іншої*, і *незалежними, якщо ймовірність появи одної з них не залежить від ймовірності появи інших відмов*.

При оцінці надійності необхідно заздалегідь обмовити який стан об'єкта (виробу) потрібно вважати відмовою.

Раптові відмови одержали свою назву через те, що звичайно відсутні видимі ознаки їхнього наближення, тобто перед відмовою звичайно не вдається знайти кількісні зміни характеристик об'єкта.

Поступові відмови (параметричні) зв'язані зі зносом деталей, старінням матеріалів і разрегулюванням пристроїв. Параметри об'єкта можуть досягти критичних значень, при яких його стан вважається незадовільним, тобто відбувається відмова.

Виникнення раптової відмови є наслідком випадкового процесу зміни якогось параметра об'єкта. Раптовою відмова здається лише тому, що не контролюється параметр, що змінюється, при критичному значенні якого настає відмова об'єкта. Таким чином, виникненню усякої відмови передує нагромадження тих чи інших змін усередині об'єкта.

Для об'єктів різного призначення і будови застосовують різні показники надійності. Виділяють дві основні групи об'єктів, що розрізняються показниками і методиками оцінки надійності.

1.3. Характеристики випадкових подій.

При вивченні виходу з ладу елементів апаратури приходиться мати справи з масовими випадковими явищами, тому доцільно використовувати для їх вивчення теорію ймовірностей.

Теорія ймовірностей вивчає:

- випадкові події;
- випадкові величини;
- випадкові процеси (випадкові функції).

У роботах по дослідженню і забезпеченню надійності велике місце займають статистичні методи дослідження та ймовірнісні оцінки надійності. Це викликано тим, що події і величини, використовувані в теорії надійності, носять випадковий характер. Відмови виробів викликаються великим числом різноманітних причин. Простежити зв'язок між кожною з можливих причин відмови і виникненням відмови не представляється можливим.

Відмови виробів належать до категорії випадкових подій. Час до виникнення відмови може приймати різні значення в межах деякої області і є випадковою величиною. Однак, не потрібно думати, що при дослідженнях питань надійності завжди і у всіх випадках повинні застосовуватися тільки статистичні методи і тільки ймовірнісні характеристики. Не викликає сумнівів доцільність постійного вивчення фізичних основ надійності, виявлення не тільки статистичних, але й інших закономірностей, що визначають зв'язок показників надійності з фізичними причинами, що обумовлюють їх.

Статистичні методи та ймовірнісні характеристики грають винятково важливе значення в теорії і практиці надійності.

1.4 Випадкові події.

Випадкова подія – це подія, що може з'явитися чи не з'явитися в результаті даного випробування.

Частота випадкової події – відношення числа появи даної події до числа всіх проведених випробувань.

Якщо загальна кількість випробувань – n, а кількість випробувань у яких наступила очікувана подія – m, то частота випадкової події дорівнює A=m/n.

Імовірністю випадкової події називається границя, до якої прямує величина A при необмеженому збільшені загальної кількості випробувань.

Події називають неспільними, якщо поява одної з них виключає появу інших подій у тому самому випробуванні.

Події утворюють повну групу, якщо в результаті випробування з'являється хоча б одна з них.

Імовірність суми неспільних подій, тобто імовірність того, що з усіх можливих подій з'явиться хоча б одна з них, дорівнює сумі імовірностей цих подій

$$P\ (A+B+...) = P(A) + P(B) +...$$

Дві події називають спільними, якщо поява одної з них не виключає появи іншої в тому самому випробуванні.

Імовірність суми двох спільних подій

$$P\ (A+У) = P(A) + P(У) – P(AB),$$

P(A), P(B) – імовірності подій A и B відповідно.

Добутком двох подій A и B називають подію AB, що складається в спільній появі цих подій.

Умовною імовірністю $P_A(B)$ називають імовірність події B в припущенні, що подія A вже наступила.

Імовірність спільної появи двох подій дорівнює добутку імовірності однієї події на умовну імовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша подія вже відбулася

$$P(AB) = P(A)\ P_A(B).$$

Подію B називають незалежною від події A, якщо поява події A не змінює імовірності події B, тобто

$$P_A(B) = P(B).$$

Імовірність добутку двох незалежних подій

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Для повної групи подій сума імовірностей їхньої появи дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(An) = 1.$$

Протилежними називають дві єдино можливі події, що утворять повну групу. Якщо одна подія позначена А, то протилежну їй подію прийнято позначати $\overline{A}$. Сума імовірностей протилежних подій дорівнює одиниці

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Наприклад: подія А – виріб знаходиться в працездатному стані і подія $\overline{A}$ – виріб знаходиться в непрацездатному стані, складають повну групу подій.

Нехай подія А може наступити за умови виконання одної з неспільних подій $B_1, B_2, \ldots B_n$, які утворять повну групу. Нехай відомі імовірності цих подій $P(B_1), P(B_2) \ldots P(B_n)$ і умовні імовірності $P_{B1}(A), P_{B2}(A) \ldots P_{B_n}(A)$ події А. Тоді імовірність самої події А можна знайти по формулі повної імовірності.

Імовірність події А, що може наступити лише за умови появи одної з неспільних подій $B_1, B_2, \ldots B_n$, утворюючих повну групу, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну імовірність події А.

$$P(A) = P(B_1)\,P_{B1}(A) + P(B_2)\,P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n)\,P_{B_n}(A).$$

Цю формулу називають «формулою повної імовірності».

1.5. Випадкові величини та їх характеристики.

Випадковою називають величину, що у результаті випробування приймає одне і тільки одне можливе значення, наперед невідоме і залежне від випадкових причин, що заздалегідь не можуть бути відомі.

Дискретною називають випадкову величину, що приймає окремі, ізольовані можливі значення з визначеними ймовірностями.

Наприклад: Число відмов за час t, число виробів, що відмовили при випробуваннях.

Безперервною називають випадкову величину, що може приймати будь-яке значення з деякого кінцевого чи нескінченного проміжку. Очевидно, число можливих значень безперервної випадкової величини нескінченно.

Наприклад: час роботи виробу до відмови, час відновлення працездатності.

Вичерпне представлення про випадкову величину дає закон розподілу випадкової величини – співвідношення між значеннями випадкової величини і їх ймовірностей.

Існують інтегральний і диференціальний закон розподілу. Інтегральний закон (функція розподілу) – ймовірність того, що випадкова величина h прийме значення менше деякого числа x.

$$F(x) = P(h<x); \qquad 0 \le F(x) \le 1.$$

Наприклад: якщо випадкова величина – наробіток до відмови t, то ймовірність того, що t менше заданого значення t_3 дорівнює ймовірності виникнення відмови на інтервалі від 0 до t_3,

$$F(t) = P(t < t_3).$$

Функція F(x) неубутна $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Диференціальний закон задає безперервну випадкову величину *функцією щільності розподілу ймовірності f(x).* Функція f(x) визначається як перша похідна від функції розподілу F(x).

$$f(x) = dF(x)/dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Властивості f(x):

$$1)\ f(x) \ge 0; \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Величини, що визначають характер розподілу випадкової величини, називаються параметрами закону розподілу. Параметрами закону розподілу, використовуваними в практиці розрахунків надійності, є: математичне чекання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

Математичним чеканням M(x) випадкової величини x, можливі значення якої належать відрізку [a,b], називають визначений інтеграл

$$M(x) = \int_{a}^{b} x\, f(x)dx\,.$$

Статистичне визначення математичного чекання має вид

$$M^{*}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i/n\,.$$

Середнє арифметичне значень, що спостерігаються, випадкової величини M*(x) у міру збільшення числа випробувань n наближається до математичного чекання M(x).

Дисперсією безперервної випадкової величини називають математичне чекання квадрата її відхилення від середнього значення.

Дисперсія визначається формулою

$$D(x) = \int_{a}^{b} \left(x - M(x)\right)^{2} a(x)dx$$

де [a,b] – відрізок, якому належать усі значення величини x; M(x) – математичне чекання значень випадкової величини x.

Статистичне визначення дисперсії

$$D^{*}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M^{*}(x)\right)^{2}}{n-1},$$

x_i - можливі значення прийняті випадковою величиною.

Дисперсія – кількісна характеристика розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її математичного чекання (середнього значення).

Дисперсія має розмірність, рівну квадрату розмірності випадкової величини. Коли бажано щоб оцінка розсіювання мала розмірність самої випадкової величини, обчислюють середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}\,.$$

2. Кількісні характеристики надійності.

Неремонтуємі (невідновлювані) – вироби застосовуються до першої відмови й у процесі виконання своїх функцій не допускають ремонту.

До них відносяться усі вироби однократної дії (як, наприклад, ракети, керовані снаряди й ін.).

Ремонтуємі (відновлювані) – вироби у процесі виконання своїх функцій допускають ремонт.

Якщо відбувається відмова такого виробу, то робота його припиняється тільки на період усунення відмови.

2.1. Показники надійності неремонтуємих об'єктів.

Об'єкти, показники надійності яких ми будемо тут розглядати, працюють до першої відмови. Для оцінки надійності таких об'єктів використовують ймовірнісні характеристики. Це пояснюється тим, що відмови мають випадковий характер, а тому описуються імовірносними залежностями.

Дослідження в області надійності стають на міцну основу тоді, коли маються методи виміру надійності, способи кількісної оцінки. Числові значення кількісних показників надійності виробів залежать від того, як часто у виробах виникають відмови і наскільки швидко вони усуваються.

Основними кількісними характеристиками неремонтуємих об'єктів є: P(t) – імовірність безвідмовної роботи, Q(t) – імовірність відмови, a(t) – частота відмов, $\lambda(t)$ – інтенсивність (небезпека) відмов, $T_{ср}$ – середній час безвідмовної роботи.

2.1.1. Імовірність безвідмовної роботи й імовірність відмови.

Імовірністю безвідмовної роботи називається імовірність того, що у визначених умовах експлуатації в межах заданої тривалості роботи відмови не виникне.

Імовірністю безвідмовної роботи P(t) називають функцію, що виражає імовірність того, що випадковий наробіток об'єкта до відмови (T) буде більше заданого наробітку (0,t), відлічуваного від початку експлуатації, тобто

$$P(t) = P(T \geq t).$$

Можна сказати, що імовірність безвідмовної роботи – це імовірність того, що час T від моменту вмикання апаратури до її відмови буде більше чи дорівнює часу t завдання наробітку.

Властивості функції P(t):

1) P(0) = 1, тобто можна розглядати безвідмовну роботу лише тих об'єктів, що були працездатні в момент включення;

2) P(t) є монотонно убутною функцією заданого наробітку t;

3) $P(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$*, тобто будь-який об'єкт згодом відмовить.*

Як наслідок з 1) і 3) $0 \leq P(t) \leq 1$.

Імовірність безвідмовної роботи визначається наступною статистичною оцінкою:

емпірична функція імовірності безвідмовної роботи

$$P^*(t)=\frac{N_0-n(t)}{N_0}=\frac{N(t)}{N_0},$$

де $N(t)$ *- число справних зразків до моменту часу t;* $N_0(t)$ *– число зразків апаратури на початку випробування*; $n(t)$ *– число зразків, що відмовили, за час t.*

$$P(t) = \lim P^*(t) = \lim \frac{N(t)}{N_0}.$$

При збільшенні числа зразків N_0 статистична оцінка $P^*(t)$ виявляє властивість стійкості, тобто $P^*(t)$ слабко відрізняється від імовірності безвідмовної роботи

$$P(t) \approx P^*(t) = \frac{N_0-n(t)}{N_0}.$$

На практиці іноді зручніше користатися величиною, що характеризує імовірність несправної роботи чи імовірність відмов. Варто врахувати, що справна робота і відмова є подіями неспільними і протилежними. Тому імовірність відмови Q(t) знаходиться за формулою:

$$Q(t) = 1 - P(t)$$

тобто,

$$Q(t) = P(T \le t).$$

Властивості функції Q(t): 1) Q(0) = 0; 2) Q (∞ *) = 1.*

З визначення видно, що Q(t) є інтегральною функцією розподілу часу роботи T до відмови. *Статистичне визначення імовірності відмови має вид*

$$Q^*(t) = \frac{n(t)}{N_0}; \quad Q^*(t) = Q(t).$$

2.1.2. Частота відмов.

Частотою відмов називається відношення числа зразків апаратури, що відмовили в одиницю часу, до числа зразків, спочатку встановлених на випробування за умови, що зразки, що відмовили, не відновлюються і не заміняються справними.

Число зразків, що відмовили в інтервалі часу Δt, залежить від розташування цього проміжку часу, тобто частота відмов є функцією часу і визначається формулою

$$a^*(t) = \frac{n(t)}{N_0 \cdot \Delta t},$$

де n(t) – число зразків, що відмовили в інтервалі часу від t до t+Δt*;* Δt *– інтервал часу;* N_0 *– число зразків апаратури спочатку встановленої на випробування.*

Формула для визначення $a^*(t)$ є статистичним визначенням частоти відмов. Число зразків, що відмовили в інтервалі Δt, буде дорівнювати

$$n(t) = N(t) – N(t+\Delta t) = –(N(t+\Delta t) – N(t)),$$

де N(t) – число зразків справно працюючих до моменту часу t; N(t+Δt) – число зразків справно працюючих до моменту часу t+Δt .
При досить великому числі зразків N_0 справедливі наступні співвідношення

$$N(t) = N_0P(t)$$

$$N(t+\Delta t) = N_0P(t+\Delta t)$$

$$a^*(t) = \frac{n(t)}{N_0 \cdot \Delta t} = -\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N_0 \cdot \Delta t} = -\frac{N_0P(t+\Delta t) - N_0P(t)}{N_0\,\Delta t} = -\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

Спрямовуючи $\Delta t \to 0$ і переходячи до межі одержимо:

$$a(t) = -\lim\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = -P'(t)$$

$$a(t) = -\frac{dP(t)}{d(t)} = \frac{dQ(t)}{d(t)}.$$

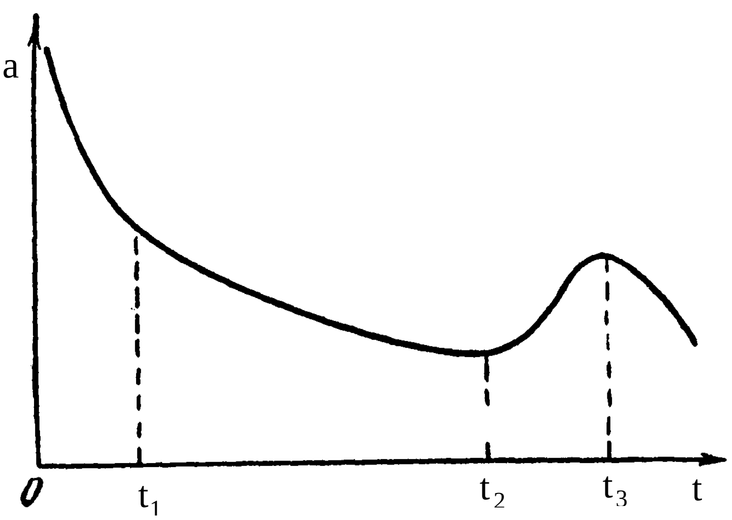
Даний вираз є імовірнісним визначенням частоти відмов. Звідси видно, що частота відмов є щільність розподілу часу роботи апаратури до її відмови, тобто a(t) = f(t).

Між частотою відмов, імовірністю безвідмовної роботи й імовірністю відмов (при будь-якому законі розподілу часу виникнення відмов) існують однозначні залежності

$$Q(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau\ ; \quad P(t) = 1 - \int_0^t a(\tau)d\tau.$$

Типова крива зміни частоти відмов апаратури в часі наведена на рис.1. Ця крива характерна для радіоелектронної апаратури й автоматичних систем. У роботі апаратури, як випливає з графіка, можна виділити три ділянки. На ділянці 0–t_1 частота відмов різко зменшується. Висока частота відмов пояснюється наявністю прироблених відмов через елементи, що мають внутрішні дефекти, помилки виробництва й обслуговуючого персоналу. *Ця ділянка називається періодом приробляння елементів.*

На ділянці від t_1 до t_2 частота відмов зменшується по експоненційному закону. Ця ділянка характеризує нормальну роботу апаратури і є незмірно більш довгою, чим ділянка приробляння.



Зменшення частоти відмов з часом зовсім не означає, що надійність апаратури зростає. На ділянці від 0 до t_2 число зразків, що відмовили, з часом на кожнім проміжку Δt убуває, тому що зменшується загальне число випробуваних зразків (n(t) зменшується). Надійність апаратури також убуває з часом.

Ділянка від t_2 до t_3 характеризується різким ростом частоти відмов, що пояснюється механічним і електричним зносом елементів.

Зменшення частоти відмов після часу t_3 пояснюється не підвищенням надійності апаратури, а незначною кількістю справно працюючих до цього часу зразків, у результаті чого число зразків, що відмовили n(t) за інтервал Δt, зменшується. Апаратуру не експлуатують до стану зносу, її ремонтують, після чого частота відмов знову відповідає інтервалу часу від t_1 до t_2. Тому вивчення кривої a(t) на ділянці $t>t_3$ не є предметом теорії надійності.

2.1.3. Інтенсивність відмов.

Інтенсивністю відмов називається відношення числа зразків апаратури, що відмовили в одиницю часу, до середнього числа зразків, що справно працюють у даний відрізок часу за умови, що зразки, що відмовили, не відновлюються і не замінюються справними.

Ця характеристика позначається $\lambda(t)$ й у ряді літературних джерел називається небезпекою відмов. *Відповідно до визначення*

$$\lambda(t)=\frac{n(t)}{N(t)\cdot\Delta t},$$

де $n(t)$ - число зразків, що відмовили на інтервалі часу від t до $t+\Delta t$; Δt - інтервал часу; $N(t)$ – число справно працюючих зразків на початку інтервалу Δt.

Формула для знаходження $\lambda(t)$ є статистичним визначенням інтенсивності відмов. Для імовірносного визначення цієї характеристики установимо залежність між інтенсивністю відмов $\lambda(t)$ і імовірністю безвідмовної роботи $P(t)$.

$$\lambda(t)=\frac{-N_0\left[P(t+\Delta t)-P(t)\right]}{N(t)\cdot\Delta t}$$

З визначення $\lambda(t)$ видно, $\lambda(t)\geq a(t)$.

$$N(t) = N_0 - n(t)$$

З огляду на той факт, що $P(t)=\dfrac{N_0-n(t)}{N_0}$ одержимо:

$$N(t) = N_0P(t)$$

$$\lambda^*(t)=\frac{-\left[P(t+\Delta t)-P(t)\right]}{P(t)\cdot\Delta t}$$

$$\lambda(t)=\lim\lambda^*(t).$$

$$\lambda(t)=\lim\left(\frac{-\left[P(t+\Delta t)-P(t)\right]}{P(t)\cdot\Delta t}\right)=-\frac{P'(t)}{P(t)}.$$

Даний вираз є імовірносним визначенням інтенсивності відмов. Інтегруємо отримане рівняння при початковій умові P(0) = 1.

$$\int_0^t\lambda(t)dt=-\int_0^t\frac{dP(t)}{P(t)}\Rightarrow-\ln\left(P(t)\right)=\int_0^t\lambda(t)dt.$$

$$P(t)=e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}.$$

Імовірність безвідмовної роботи протягом наробітку (t_1,t_2), тобто в інтервалі часу $t_2 - t_1$ буде дорівнювати

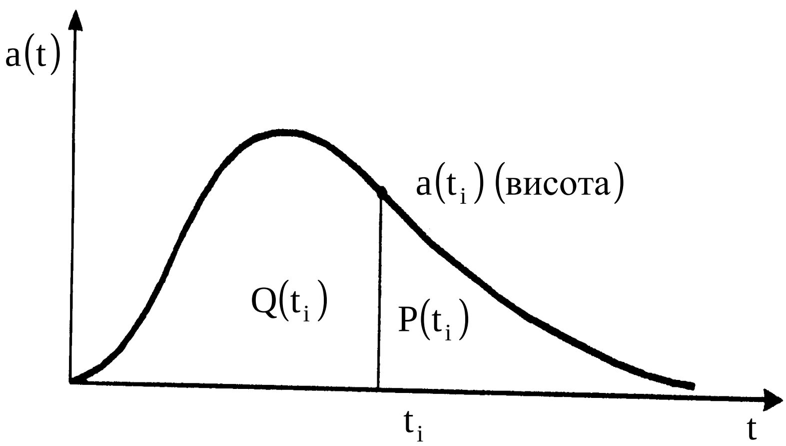
$$P(t_1,t_2)=\frac{\exp(-\int_0^{t_2}\lambda(t)dt)}{\exp(-\int_0^{t_1}\lambda(t)dt)}=\exp\left(-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(t)dt\right).$$

Покажемо взаємозв'язок між P(t), Q(t), a(t) і $\lambda(t)$ графічно, *a(t) – крива розподілу часу наробітку до відмови.*

Нехай графік a(t) має наступний вид

$$a(t)=\frac{dQ}{dt}\Rightarrow Q(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau.$$

Розглядаємо довільний момент часу t_i. Імовірність відмови при заданому часі безвідмовної роботи t_i буде дорівнювати



$$Q(t_i)=\int_0^{t_i}a(t)dt,$$

тобто це є площа ліворуч від моменту часу t_i.

$$P(t_i)=1-Q(t_i)=\int_0^{\infty}a(t)dt-\int_0^{t_i}a(t)dt$$

Імовірність безвідмовної роботи P(t) дорівнює площі під кривою a(t) праворуч від моменту часу t_i.

$$\lambda(t)=-\frac{P'(t)}{P(t)}=\frac{a(t)}{P(t)}.$$

З рисунка видно, що $\lambda(t)$ визначається як відношення функції a(t) (висоти) до площі, що знаходиться праворуч від крапки t_i.

2.1.4. Середній час безвідмовної роботи.

Середнім часом безвідмовної роботи називається математичне чекання часу безвідмовної роботи

$$T_{cp}=\int_0^{\infty}ta(t)dt=-\int_0^{\infty}tP'(t)dt=-tP(t)\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}P(t)dt=$$

$$-\lim tP(t)+\lim tP(t)+\int_0^{\infty}P(t)dt=\int_0^{\infty}P(t)dt.$$

$$T_{ср} = \int_0^\infty P(t)dt\,.$$

Якщо розглянути обидві межі, можна переконатися, що вони дорівнюють нулю: $\lim tP(t),\ \lim tP(t) = 0$.

Середній наробіток до відмови дорівнює площі під кривою P(t). Можна сказати і по-іншому: середній час безвідмовної роботи є площа під кривою імовірності безвідмовної роботи.

Зі статистичних даних середній час безвідмовної роботи визначається по формулі:

$$T^*_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} t_i}{N_0},$$

$$\lim_{N_0 \to \infty} T^*_{ср} = T_{ср}\ ,$$

де t_i *– час безвідмовної роботи i-того зразка;* N_0 *– число зразків, над якими проводиться випробування.*

Якщо відома кожна з чотирьох функцій – P(t), Q(t), a(t), $\lambda(t)$ – то три інші можна визначити.

Перший випадок: відомий a(t). Тоді:

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \frac{a(t)}{\int_t^\infty a(\tau)d\tau};\quad Q(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau;\quad P(t) = \int_t^\infty a(\tau)d\tau = 1 - Q(t)\,.$$

Другий випадок: відомий Q(t). Тоді:

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \frac{Q'(t)}{1-Q(t)};\quad P(t) = 1 - Q(t);$$

$$a(t) = \frac{dQ(t)}{d(t)}\,.$$

Третій випадок: відомий P(t). Тоді

$$Q(t) = 1 - P(t);\quad a(t) = -\frac{dP(t)}{d(t)};\quad \lambda(t) = -\frac{\frac{dP(t)}{dt}}{P(t)}\,.$$

Четвертий випадок: відомий $\lambda(t)$. При виводі формули для визначення $\lambda(t)$ ми одержуємо таку залежність:

$$\ln|P(t)| = -\int_0^t \lambda(t)dt = -\wedge(t) \quad \Rightarrow \quad \wedge(t) = \int_0^t \lambda(t)dt\,.$$

$\wedge(t)$ - сумарна (кумулятивна) функція інтенсивності відмов.

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right);\quad a(t) = \lambda(t)\cdot P(t);\quad Q(t) = 1 - P(t) = 1 - \exp(-\wedge(t))\,.$$

$$a(t) = \lambda(t) \cdot \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right).$$

2.2. Показники надійності ремонтуємих (відновлюваних) об'єктів.

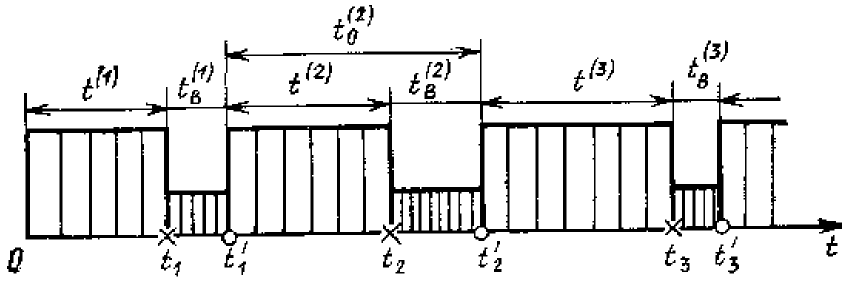
При експлуатації складних систем відмови виникають у випадкові моменти часу. Тому що вони усуваються, то протягом тривалого часу експлуатації спостерігається потік відмов.

2.2.1. Потік відмов і його властивості.

Під потоком відмов розуміється послідовність відмов, що відбуваються один за іншим у випадкові моменти часу за умови миттєвого відновлення.

Відновлення – виявлення чи ушкодження несправності і їхнє усунення.

Розглянемо об'єкти для яких протягом заданого часу роботи допускаються відмови з наступними перервами в роботі на відновлення. Розглянемо *процес експлуатації об'єктів з кінцевим часом відновлення. Тимчасова діаграма показана на наступному рисунку.*



$t_1, t_2,.. t_к$ – інтервали часу справної роботи апаратури; $t_{в1}, t_{в2},.. t_{вк}$ – значення часу відновлення; $t^{(1)}, t^{(2)},.. t^{(к)}$ – моменти часу появи відмов; $t_в^{(1)}, t_в^{(2)},.. t_в^{(к)}$ – моменти часу відновлення (позначені кружечками).

Після відмови об'єкт якийсь час знаходиться в непрацездатному стані, тобто ремонтується. У результаті ремонту об'єкт приводять у працездатний стан. Можливі періоди вимикання об'єкта, коли він не відмовляє і не відновлюється, виключають з розгляду. *У такий спосіб чергуються випадкові періоди часу безвідмовної роботи t_i і часу ремонту (відновлення) $t_{вi}$.* Випадковий час між черговими відновленнями дорівнює

$$T_i = t_i + t_{вi}.$$

Потік відмов породжує потік відновлень. Процес відновлення характеризується часом відновлення, що є випадковою величиною, тому що навіть при відомих відмовах час відновлення буде різним через неоднакові можливості обслуговуючих компонентів (людей, механізмів, складності відмов). Розглянемо характеристики, що описують процес відновлення.

1. Імовірність відновлення V(t) – імовірність того, що час відновлення виробу після відмовлення не перевищить заданої величини. Імовірність відновлення $V(t) = P(t_в < t_н)$,

де $t_в$ – випадковий час відновлення виробу після відмови; $t_н$ – заданий (нормований) час відновлення.

Статистичне визначення $V^*(t) = \dfrac{N(t_в)}{N_в}$,

де $N(t_в)$ - число відновлень за час, менший $t_н$; $N_в$ - загальне число відновлених виробів після відмови.

2. Імовірність невідновлення за час $t_н$

$$G(t)=1-V(t)=P(t_в \geq t_н).$$

3. Середній час відновлення. *Середній час відновлення показує середні витрати часу на виявлення і ліквідацію відмови.*

Середній час відновлення – математичне чекання тривалості відновлення виробу після відмови.

$$T_в = M[T_в] = \int_0^\infty G(t)dt.$$

4. Інтенсивність відновлення $\mu(t) = \dfrac{1}{T_в}$.

Найпростішим потоком відмов називається такий потік, при якому час виникнення відмов задовольняє одночасно умовам стаціонарності, відсутності післядії й ординарності.

Стаціонарність потоку відмов означає, що на будь-якому інтервалі часу Δt *імовірність виникнення відмов залежить тільки від величини проміжку* Δt *і не змінюється від зрушення* Δt *по осі часу.*

Параметр стаціонарного потоку є величина постійна.

Відсутність післядії означає, що імовірність відмов протягом проміжку часу Δt *не залежить від того скільки було відмов і як вони розподілялися до цього проміжку.*

Ординарність потоку відмов означає неможливість появи в той самий момент часу більш одної відмови.

Якщо обладнання складається з великого числа частин, кожна з яких може відмовити лише з малою імовірністю, і ці відмови для різних частин незалежні між собою, то сумарний потік відмов для всього об'єкта буде близький до найпростішого.

Вид потоку відмов визначає властивості апаратури, критерії надійності і методи її розрахунку. Найбільш важливою характеристикою потоку відмов є параметр потоку.

2.2.2. Параметр потоку відмов.

Параметром потоку відмов $W(t)$ *називається відношення числа зразків, що відмовили в одиницю часу, до числа випробовуваних зразків за умови, що всі зразки, що вийшли з ладу, заміняються справними*

$$W(t) = \frac{n(t)}{N_0 \cdot \Delta t}$$

$n(t)$ - *число зразків, що відмовили в інтервалі часу від* t *до* $t+\Delta t$;

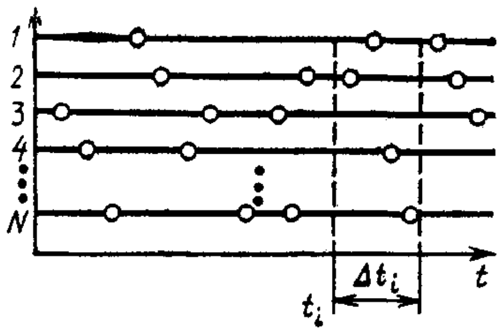
N_0 - *число випробовуваних зразків (залишається постійним тому що всі зразки, що відмовили, замінюються справними);* Δt - *інтервал часу.*

Параметром потоку відмов $W(t)$ *називається межа відношення імовірності появи одної відмови за проміжок часу* Δt *до даного проміжку часу при* $\Delta t \to 0$, *тобто*

$$W(t) = \lim \frac{P(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

Це є аналог інтенсивності відмов для неремонтуємих виробів.

Розглянемо випадок, коли для обчислення a(t) знаходять функцію W(t). *Часто не вдається зафіксувати наробіток до відмови кожного з об'єктів, що відмовили.* При цьому відомі лише моменти появи відмов об'єкта, але немає відомостей про те, коли ці об'єкти почали працювати. Таке положення складається тоді, коли при усуненні відмов замінені об'єкти не маркіруються. При цьому неможливо установити який об'єкт відмовив: установлений на початку експлуатації чи встановлений на місце раніше вибутого з ладу. *Вважається, що відновлення зразка, що відмовив, відбувається миттєво, що допустимо припустити якщо часом відновлення можливо знехтувати в порівнянні з часом роботи елемента. При використанні таких неповних статистичних даних спостерігачу відомо загальне незмінне число працюючих об'єктів і кількість відмов протягом заданих інтервалів часу.* Кількість відновлень не обмежено. Цей процес ілюструє рисунок.



(Тимчасова діаграма, що пояснює роботу відновлюваних виробів при їхньому миттєвому відновленні)

Кружечками позначені моменти появи відмов об'єктів: «відмова-відновлення». Відрізки прямих між кружечками – періоди наробітку між відмовами. N_0 *– число місць, куди можуть бути встановлені об'єкти для роботи, оскільки при відмові об'єкта на його місце стає новий об'єкт.*

Установимо залежність між параметром потоку відмов і частотою відмов a(t). Нехай у момент часу t = 0 на випробуванні знаходиться N_0 зразків апаратури. В міру виходу з ладу якого-небудь зразка він замінюється справним чи миттєво відновлюється. Тоді, середнє число зразків, що відмовили, у будь-якому проміжку часу $[t, t+\Delta t]$ буде

$$n(t) = W(t) \cdot N_0 \cdot \Delta t\ ,$$

причому $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$, де $n_1(t)$ - число зразків, що відмовили, з числа тих, котрі були поставлені на випробування у момент часу t = 0; $n_2(t)$ - число зразків, що відмовили з числа замінених у процесі випробування за час $[0, t]$.

Число $n_1(t)$ визначається через частоту відмов a(t) відповідно до вищенаведеної формули

$$n_1(t) = a(t) \cdot N_0 \cdot \Delta t\ .$$

Обчислимо $n_2(t)$. Нехай $[\tau, \tau+\Delta\tau\ ]$ – деякий проміжок часу, що передує проміжку $[t, t+\Delta t\ ]$. У цьому проміжку вийде з ладу $W(\tau) \cdot N_0 \cdot \Delta\tau$ зразків. Вони будуть замінені. У проміжку Δt з їхнього числа відмовить наступна кількість зразків $(W(\tau)\cdot N_0\cdot\Delta\tau)a(t-\tau)\Delta t$. Тоді для визначення $n_2(t)$ необхідно просумувати отриманий вираз по всіх проміжках $\Delta\tau$ попереднім t

$$n_2(t)=N_0\Delta t\cdot\int_0^t W(\tau)\cdot a(t-\tau)d\tau=\lim\sum_{i=0}^{\frac{t}{\Delta\tau}}N_0\Delta tW(i\Delta\tau)a(t-i\Delta\tau)\Delta\tau$$

Підставляємо вирази $n_1(t)$ й $n_2(t)$ у формулу для n(t)

$$W(t)\cdot N_0\cdot\Delta t=n_1(t)+n_2(t)=a(t)\cdot N_0\cdot\Delta t+N_0\Delta t\cdot\int_0^t W(\tau)\cdot a(t-\tau)d\tau.$$

Скоротимо на $N_0\cdot\Delta t$. Одержимо

$$W(t)=a(t)+\int_0^t W(\tau)\cdot a(t-\tau)d\tau\ .$$

Параметр потоку відмов зв'язаний з частотою відмов інтегральним рівнянням Вольтера' другого роду з різницевим ядром.

Однак, на практиці вирішити це інтегральне рівняння аналітично часто не вдається. Це пояснюється тим, що частота відмов може бути складною функцією часу.

W(t) має властивості:

1) $W(t)\geq a(t)$, що випливає зі статистичного визначення W(t);

2) Незалежно від виду функції a(t) при $t\to\infty$ параметр потоку відмов W(t) прагне до постійної величини;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}W(t)=\frac{1}{T_{ср}}$, тобто межа, до якої прямує параметр потоку відмов при $t\to\infty$, дорівнює величині зворотній середньому часу безвідмовної роботи;

4) У випадку законів розподілу, де $\lambda(t)$ - неубутна функція часу, справедлива нерівність $\lambda(t)\geq W(t)\geq a(t)$. Якщо $\lambda(t)$ - незростаюча функція, то справедлива нерівність $W(t)\geq\lambda(t)\geq a(t)$.

2.2.3. Коефіцієнти, що враховують змушені простої апаратури.

Коефіцієнтом готовності називається відношення часу безвідмовної роботи до суми часу безвідмовної роботи і відновлення апаратури.

Відповідно до даного визначення $K_г=\dfrac{t_р}{t_в+t_р}$,

де t_p - час безвідмовної роботи апаратури; $t_в$ - час відновлення, тобто час витрачений на профілактику і ремонт апаратури.

Виходячи з тимчасової діаграми, знаходимо

$$t_р=t_1+t_2+...+t_k=\sum_{i=1}^{k}t_k$$

$$t_в=t_{в1}+t_{в2}+...+t_{вk}=\sum_{i=1}^{k}t_{вk}$$

Коефіцієнт готовності дорівнює $K_г = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} t_k}{\sum\limits_{i=1}^{k} t_k + \sum\limits_{i=1}^{k} t_{вk}}$.

Рівні значення коефіцієнта готовності не означають рівнозначності апаратури в сенсі її надійності, зручності, вартості експлуатації.

Дві різні системи: одна високонадійна (t_k - велике, але незручна в експлуатації, $t_в$ теж велике), інша система малонадійна (t_k - невелика, але зручна в експлуатації, $t_в$ - мале).

Наприклад, для розв'язання деякої задачі потрібна тривала безупинна робота системи. Тоді перша система в стані вирішити задачу, тому що ця апаратура має тривалий час роботи без відмов. Система другого класу не зможе вирішити задачу, тому що вона має часті відмови. Ця апаратура вимагає великого числа запасних частин (деталей), але може обслуговуватися менш кваліфікованим персоналом і навпаки, апаратура першого роду вимагає більш кваліфікований обслуговуючий персонал, але маленьке число запасних деталей. Зазначена властивість не дозволяє вважати $K_г$ універсальною характеристикою апаратури.

Коефіцієнтом простою називають відношення часу відновлення до суми часу відновлення і безвідмовної роботи апаратури, узятих за той самий календарний термін

$$K_п = \frac{t_в}{t_в + t_р} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} t_{вk}}{\sum\limits_{i=1}^{k} t_k + \sum\limits_{i=1}^{k} t_{вk}}.$$

Інакше кажучи, це імовірність того, що система знаходиться в несправному стані в будь-який довільно обраний момент часу.

2.2.4. Коефіцієнти, що характеризують вплив елементів на надійність апаратури.

Коефіцієнтом відмов елементів називається відношення числа відмов апаратури через відмови елементів даного типу до загального числа відмов апаратури, узятих за визначений календарний термін.

$$k_0 = \frac{n_i}{n},$$

де n_i - число відмов апаратури через елементи і-того типу; n - загальне число відмов апаратури.

При випробуванні великого числа зразків апаратури

$$n_i = \sum_{j=1}^{N_0} n_{ij} \quad n = \sum_{j=1}^{N_0} n_j,$$

де n_{ij} - число відмов у j-тім зразку апаратури, викликаних відмовами елементів і-того типу; n_j - загальне число відмов j-того зразка апаратури; N_0 – випробуване число зразків. Тоді

$$k_o = \frac{\sum_{j=1}^{N_0} n_{ij}}{\sum_{j=1}^{N_0} n_j}.$$

Коефіцієнт відмов дозволяє виділити з загального числа відмови окремих типів елементів. Таким шляхом визначається, надійність яких елементів необхідно підвищити для поліпшення надійності апаратури. У цьому полягає основне достоїнство коефіцієнта відмов. Однак ця характеристика не враховує кількості елементів того чи іншого типу в апаратурі. Це означає, що по цьому коефіцієнті не можна судити про надійність елементів. Якщо коефіцієнт відмов елементів N_i *великий, то невідомо великий він через низьку надійність цих елементів, чи тому, що в даній апаратурі велике число елементів і-того типу.*

Відносним коефіцієнтом відмов елементів називається відношення відсотка відмов апаратури через відмови елементів даного типу до відсотка цих елементів в апаратурі.

$$k_{oo} = \frac{n_i / n}{N_i / N} = \frac{n_i \cdot N}{N_i \cdot n}$$

У випадку декількох зразків апаратури:

$$k_{oo} = \frac{N}{N_i} k_o = \frac{N \cdot \sum_{j=1}^{N_0} n_{ij}}{N_i \cdot \sum_{j=1}^{N_0} n_j},$$

де N_i - кількість елементів і-того типу; N - загальна кількість елементів у всіх зразках апаратури.

Коефіцієнт k_{oo} *у відмінності від* k_o *характеризує не тільки надійність елементів, але і дає представлення про елементну структуру апаратури* - k_{oo} *враховує кількість елементів в апаратурі і характеризує надійність елементів.*

3. Закони розподілу часу безвідмовної роботи.

У теорії надійності найбільш доцільно характеризувати час між сусідніми відмовами похідною від функції розподілу, тобто диференціальним законом розподілу. Це пояснюється тим, що частота відмов (одна з основних кількісних характеристик надійності) є диференціальним законом розподілу часу між сусідніми відмовами

$$a(t) = \frac{dQ(t)}{dt}; \qquad \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x).$$

При $x \to \infty$ $F(\infty) = 1$ оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) = 1.$$

Функція f(t) – аналог a(t) – у теорії імовірності називається щільністю розподілу імовірності випадкової величини. *Можна сказати, що залежність* $f(t)\ (a(t))$ *є математичною моделлю надійності окремого елемента чи системи в цілому.*

Зрозуміло, що спектр різних видів емпіричних функцій $a^*(t)$ дуже великий, оскільки вони (ці види функції a(t)) відбивають особливості фізичних процесів, властивих різним видам апаратури. Маючи частоту відмов визначають всі інші характеристики надійності. З урахуванням основних властивостей частоти $a(t) \geq 0$

$$Q(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau;\ Q(\infty) = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} a(\tau)d\tau = 1.$$

Законом розподілу випадкової величини називають функцію, що установлює відповідність між можливими значеннями випадкової величини й імовірністю її появи.

Можна затверджувати, що кривою розподілу може бути будь-яка лінія, площа під якою дорівнює одиниці. Незважаючи на велику безліч емпіричних кривих частоти відмов (знятих для конкретного пристрою у визначених умовах) переважна більшість з них може бути апроксимована з достатньою точністю обмеженим числом аналітичних залежностей. Такі залежності служать математичною моделлю надійності.

Час між відмовами, як складних систем, так і найпростіших елементів підпорядковується обмеженому числу законів розподілу. Розглянемо наступні закони розподілу:

- *експоненційний закон;*
- *закон Вейбула;*
- *закон Релея;*
- *нормальний закон;*
- *логарифмічний нормальний розподіл;*
- *гамма-розподіл;*
- *біноміальний закон;*
- *закон Пуассона.*

3.1. Експоненційний закон.

При експоненційному законі розподілу часу виникнення відмов інтенсивність відмов є величиною постійною, тобто справедлива умова $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$. Тоді залежності між основними кількісними характеристиками будуть виражені формулами

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} = e^{-\lambda t},\ Q(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ a(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}.$$

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty} = -\left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

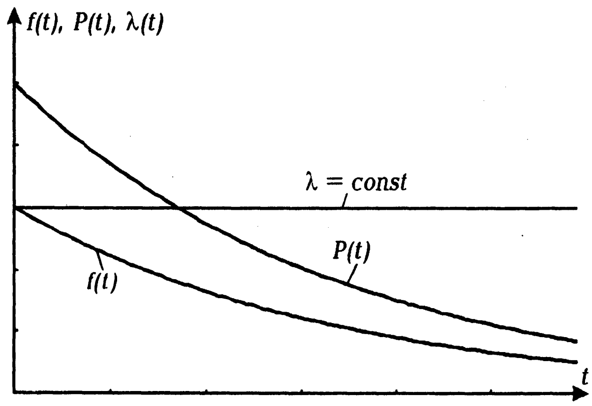
Обчислимо середній час безвідмовної роботи експоненційного закону розподілу.

$$T_{cp}=\int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^{\infty} te^{-\lambda t}dt=\lambda\left(\frac{-te^{-\lambda t}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}dt\right)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt=\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda},$$

тобто математичне чекання дорівнює середньому часу безвідмовної роботи

$$T_{cp}=M(t)=\frac{1}{\lambda}.$$

Статистичні матеріали о відмовах типових елементів радіоелектронної апаратури свідчать про те, що в основному час роботи цих елементів для нормального періоду експлуатації підлягає експоненційному закону. Властивістю цього закону є сталість інтенсивності відмов. *Експоненційний закон характерний для раптових відмов на інтервалі часу, коли період приробітки апаратури закінчився, а період зносу і старіння не почався.* Якщо кількість зразків, установлених на випробування, N_0 і з цього числа вибувають зразки, що відмовили, то число зразків, що беруть участь в випробуванні, зменшується. Якщо немає старіння і зносу, то пропорційно зменшенню числа ще справних зразків N зменшується також число зразків, що відмовили, n. Пропорційне зменшення чисельника і знаменника $\lambda(t)=\dfrac{n(t)}{N\cdot\Delta t}$ означає, що інтенсивність відмов не залежить від часу експлуатації.



Визначимо дисперсію

$$D(x)=\int_0^{\infty}\left(x-M(x)\right)^2 a(x)dx;$$

$$D(t)=\int_0^{\infty}\left(t-T_{cp}\right)^2\lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\left[\int_0^{\infty}t^2e^{-\lambda t}dt-2T_{cp}\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}dt+T_{cp}^2\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt\right].$$

Розглянемо перший інтеграл

$$\int_0^{\infty}t^2e^{-\lambda t}dt=\frac{-t^2e^{-\lambda t}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}t\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}dt=2T_{cp}\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}dt;$$

$$D(t)=\lambda\left[2T_{cp}\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}dt-2T_{cp}\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}dt+T_{cp}^2\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt\right]=\lambda T_{cp}^2\cdot\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty}=-T_{cp}^2(0-1)=T_{cp}^2;$$

$$D(t)=T_{cp}^2;$$

$$\sigma(t)=\sqrt{D(t)}=T_{cp}.$$

Звідси випливає важлива властивість експоненційного розподілу: середнеквадратичне відхилення часу виникнення відмов дорівнює середньому часу безвідмовної роботи $\sigma(t)=T_{cp}$.

Ця властивість може бути використана для перевірки істинності гіпотези про експоненційний закон розподілу.

Для цього зі статистичних даних про відмови апаратури визначається середній час безвідмовної роботи і середнєквадратичне відхилення. Якщо вони рівні, то це може бути доказом правильності прийнятої гіпотези. Експериментальні дані відбивають експоненційний закон часу виникнення відмов.

3.2. Закон Релея.

При розподілі часу виникнення відмов за законом Релея частота відмов визначається виразом

$$a(t)=\frac{t}{\sigma^2}e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}},$$

де σ - параметр розподілу релея.

Тоді імовірність безвідмовної роботи, інтенсивність відмов і середній час безвідмовної роботи будуть виражатися наступними формулами

$$P(t)=1-\int_0^t a(t)dt=1-\int_0^t \frac{\tau}{\sigma^2}e^{\frac{-\tau^2}{2\sigma^2}}d\tau=1+e^{\frac{-\tau^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^t=1+\left(e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}-1\right)=e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}=\exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)\Rightarrow P(t)=\exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\lambda(t)=\frac{a(t)}{P(t)}=\frac{t}{\sigma^2}.$$

$$T_{cp}=\int_0^t P(t)dt=\int_0^\infty e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\Rightarrow T_{cp}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

.

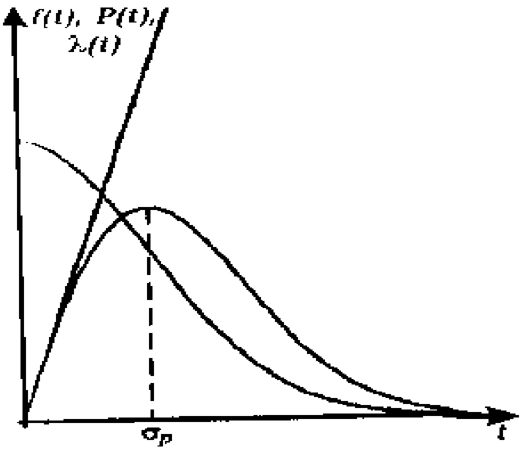
Параметр σ є модою розподілу, тобто таким значенням випадкової величини t при якій функція частоти відмов досягає екстремуму.

$$\frac{da(t)}{dt}=\frac{e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2}-\frac{t}{\sigma^2}\frac{t}{\sigma^2}e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}=0;$$

$$e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{t}{\sigma^2}\frac{t}{\sigma^2}\right)=0;$$

$$\frac{1}{\sigma^2}-\frac{t^2}{\sigma^4}=0\Rightarrow 1-\frac{t^2}{\sigma^2}=0\Rightarrow t^2=\sigma^2\Rightarrow t=\sigma$$

.



Графічні залежності розподілу Релея

Дисперсія $D[t]=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$.

Видно, що інтенсивність відмов росте лінійно з часом. Це говорить про те, що відмови не задовольняють умовам стаціонарного випадкового процесу. В області малих t, де інтенсивність відмов незначна, імовірність безвідмовної роботи системи зменшується з часом повільніше, чим при експоненційному законі. Це означає, що складні автоматичні системи, призначені для малого часу безупинної роботи, доцільно будувати на елементах, що мають релеєвский закон розподілу часу між відмовами. В області великих значень t імовірність безвідмовної роботи системи зменшується з часом значно швидше, ніж при експоненційному законі, тобто виражений ефект старіння апаратури.

3.3. Розподіл Вейбула.

Частота відмов технічного пристрою $a(t)$ *представлена рівнянням*

$$a(t) = \lambda_0 k t^{k-1} e^{-\lambda_0 t^k} \quad .$$

Величина λ_0 *визначає масштаб розподілу, вона звужує чи розтягує криву* $a(t)$*; параметр* k *визначає асиметрію й ексцес розподілу.*

Для розподілу Вейбула основні кількісні характеристики надійності виражаються наступними формулами

$$P(t) = 1 - \int_0^t a(t)dt = 1 - \int_0^t \lambda_0 k \tau^{k-1} e^{-\lambda_0 \tau^k} d\tau = 1 + e^{-\lambda_0 \tau^k} \Big|_0^t = 1 + \left(e^{-\lambda_0 t^k} - 1 \right) = e^{-\lambda_0 t^k} \Rightarrow P(t) = e^{-\lambda_0 t^k}$$

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \frac{\lambda_0 k t^{k-1} e^{-\lambda_0 t^k}}{e^{-\lambda_0 t^k}} = \lambda_0 k t^{k-1} \Rightarrow \lambda(t) = \lambda_0 k t^{k-1} .$$

Середній час безвідмовної роботи $T_{cp} = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t^k} dt = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{1}{k}+1\right)}{\lambda_0^{\frac{1}{k}}}$,

де $\Gamma\left(\dfrac{1}{k}+1\right)$ є гамма-функція, обумовлена по таблиці для значення аргументу $\left(\dfrac{1}{k}+1\right)$. Гамма-функція визначається так: $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$.

Основні рівняння (основні властивості) гамма-функції:

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ $\Gamma(1) = 1!$ $\Gamma(n+1) = n!$ при n=0,1,2...; $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$.

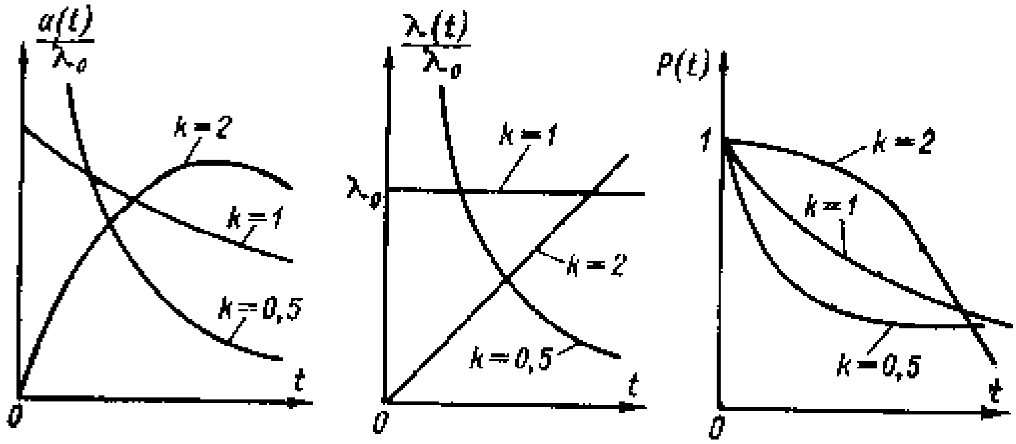
Асиметрією теоретичного розподілу називають відношення центрального моменту третього порядку до куба середнього квадратичного відхилення

$$A = \frac{m_3}{\sigma^3} .$$

На рисунку представлені кількісні характеристики надійності. *При значенні параметра k=1 розподіл Вейбула перетвориться в експоненційний розподіл; при k>1 інтенсивність відмов починається з нуля і зростає з часом; при k<1 інтенсивність відмов починається с* $+\infty$ *и с перебігом часу прагне до нуля:* $\lambda(t) \to \infty$ *при* $t \to 0$, $a(t) \to \infty$ *при* $t \to 0$.

До розподілу Вейбула можна віднести зміни в часі надійності шарикопідшипників. Розподіл Вейбула є математичною моделлю надійності підшипників.

Також цей закон застосовується для окремих типів електронних ламп (k=1,4...1,9). Оскільки при k<1 $\lambda(t) \to 0$ при $t \to \infty$, той цей розподіл може використовувати як характеристику надійності апаратури в інтервалі часу її приробітки.



Достоїнством розподілу Вейбула є велика кількість форм кривих, які можна одержати при різних k.

3.4. Нормальний розподіл (розподіл Гауса).

Нормальний закон являє собою розподіл випадкових величин, що групуються біля середнього значення з визначеними частотами. Такий розподіл виходить у тому випадку, коли на досліджувану величину впливає ряд випадкових факторів, кожний з який впливає на сумарне значення відхилення величини від середнього значення.

Частота відмов $a(t)$ визначається виразом

$$a(t)=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[-\frac{(t-T_{cp})^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma\left(1+\Phi\left(\frac{T_{cp}}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)},$$

де T_{cp} - середня довговічність, ресурс; σ - середнє квадратичне відхилення часу наробітку до відмови від його середнього значення T_{cp};

$\Phi\left(\frac{T_{cp}}{\sqrt{2}\sigma}\right)$ - інтеграл імовірності (функція Лапласа) виду: $\Phi(X)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^X e^{-z^2}dz$.

Ця функція таблична. Вона визначається по таблицях для значення аргументу $X=\frac{T_{cp}}{\sqrt{2}\sigma}$.

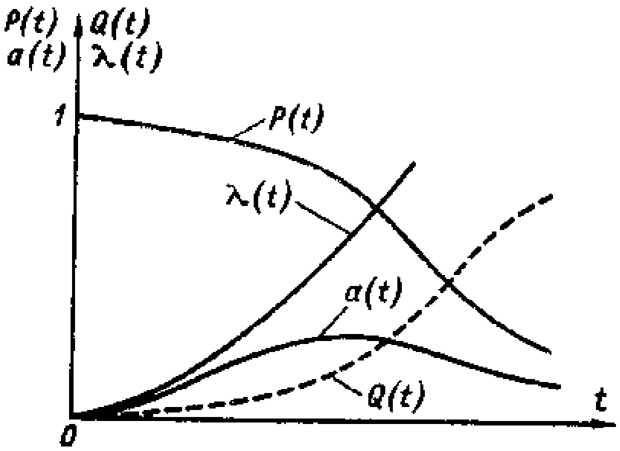
Частота відмов дозволяє знайти інші характеристики надійності: $\lambda(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $a(t)$:

$$P(t)=\frac{1-\Phi\left(\frac{t-T_{cp}}{\sigma\sqrt{2}}\right)}{1+\Phi\left(\frac{T_{cp}}{\sigma\sqrt{2}}\right)}\ ;\quad \lambda(t)=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[-\frac{(t-T_{cp})^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{t-T_{cp}}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]},$$

де $\Phi\left(\frac{t-T_{ср}}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ - інтеграл імовірності, що визначається по таблицях для значення $X=\frac{t-T_{ср}}{\sigma\sqrt{2}}$.

$$Q(t)=1-P(t), \qquad a(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-T_{ср})^2}{2\sigma^2}\right]$$ - спрощений варіант.

При $t=T_{ср}$ крива має екстремум (максимум) $a(T_{ср})_{max}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.



Інтенсивність відмов починається з нуля і з часом сильно зростає. Це означає, що в області малих значень t старіння елементів не спостерігається і тому імовірність безвідмовної роботи системи зменшується незначно. При збільшенні t $\lambda(t)$ починає швидко зростати і надійність швидко знижується, частота відмов зростає і $P(t)\to 0$.

3.5. Гамма-розподіл.

При цьому розподілі частота відмов виражається формулою

$$a(t)=\frac{\lambda_0(\lambda_0 t)^{k-1}e^{-\lambda_0 t}}{(k-1)!},$$

λ_0 - параметр γ-розподілу; k - ціле позитивне число.

$$P(t)=1-\int_0^t a(t)dt=1-\int_0^t\frac{\lambda_0^k t^{k-1}e^{-\lambda_0 t}}{(k-1)!}dt=1-\frac{\lambda_0^k}{(k-1)!}\int_0^t t^{k-1}e^{-\lambda_0 t}dt=$$

$$1-\frac{\lambda_0^k}{(k-1)!}\left[\frac{-e^{-\lambda_0 t}}{\lambda_0}t^{k-1}\Big|_0^t+\int_0^t\frac{e^{-\lambda_0 t}}{\lambda_0}(k-1)t^{k-2}dt\right]=$$

$$1-\frac{\lambda_0^k}{(k-1)!}\left[\frac{-e^{-\lambda_0 t}}{\lambda_0}t^{k-1}+\frac{k-1}{\lambda_0}\int_0^t e^{-\lambda_0 t}t^{k-2}dt\right]=1+\frac{\lambda_0^{k-1}t^{k-1}e^{-\lambda_0 t}}{(k-1)!}-\frac{\lambda_0^{k-1}}{(k-2)!}\int_0^t e^{-\lambda_0 t}t^{k-2}dt=.....$$

$$P(t)=e^{-\lambda_0 t}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}.$$

Інтенсивність відмов $\lambda(t)=\frac{a(t)}{P(t)}=\frac{\lambda_0(\lambda_0 t)^{k-1}}{(k-1)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}$.

$$T_{cp}=\int_0^\infty P(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}dt+\int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}\lambda_0 t dt+\ldots+\int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}\frac{(\lambda_0 t)^{k-1}}{(k-1)!}dt=$$

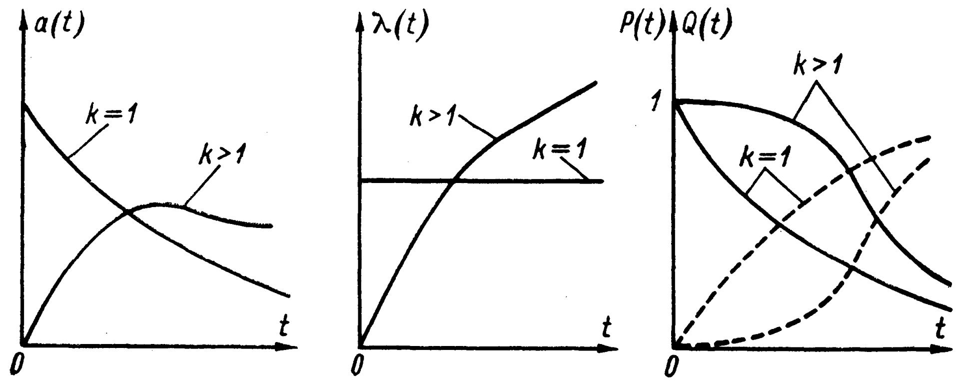
$$=\frac{-1}{\lambda_0}e^{-\lambda_0 t}\Big|_0^\infty+\frac{\lambda_0 t e^{-\lambda_0 t}}{-\lambda_0}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}dt+\ldots+\int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}\frac{(\lambda_0 t)^{k-1}}{(k-1)!}dt=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_0}+\ldots+\frac{1}{\lambda_0}=\frac{k}{\lambda_0}$$

$$T_{cp}=\frac{k}{\lambda_0},$$

причому k - цілі числа.

Кількісні характеристики γ-розподілу часу між сусідніми відмовами показані на рисунку нижче.

При k=1 γ-розподіл стає експоненційним; при k>1 цей розподіл може бути моделлю відмов складних електромеханічних систем, якщо мають місце миттєві відмови.



В основному, до γ-розподілу близько підходить характер зміни в часі відмов складних резервованих систем.

3.6. Закони розподілу дискретних випадкових величин.

Біноміальний розподіл. Вище розглядалися закони розподілу безупинних випадкових величин. Зараз розглянемо дискретні розподіли.

Дискретною називають випадкову величину, що приймає окремі, ізольовані можливі значення з визначеними імовірностями.

Безупинною називають випадкову величину, що може приймати всі значення з деякого кінцевого чи нескінченного проміжку.

Біноміальний розподіл описує появу подій, що мають два можливих результати, що взаємно виключають один одний.

Якщо мається партія однакових деталей з часткою p справних і часткою q несправних, то імовірність появу у вибірці з n деталей цієї партії k справних визначиться за формулою

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Закон встановлює імовірність числа k появи події A у n незалежних випробуваннях.

ПРИКЛАД: З великої партії сельсинів типу НС-404, що містить q = 5% несправних зразків, береться вибірка з чотирьох машин (n = 4). Визначити імовірність появи у вибірці 0,1,2,3,4 несправних сельсинів.

q = 5/100 = 0,05; p = 1- q = 0,95 – частка справних сельсинів у партії.

Імовірність появи 0,1,2,3,4 справних сельсинів дорівнює відповідно:

$$p_4(0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!}(0{,}95)^0 \cdot 0{,}05^4 = 0{,}05^4 = 6{,}25 \cdot 10^{-6}; \quad p_4(1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!}(0{,}95)^1 \cdot 0{,}05^3 = 0{,}000475;$$

$$p_4(2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!}(0{,}95)^2 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}0136; \quad p_4(3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!}(0{,}95)^3 \cdot 0{,}05^1 = 0{,}1745;$$

$$p_4(4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!}(0{,}95)^4 \cdot 0{,}05^0 = 0{,}95^4 = 0{,}8145.$$

Розподіл Пуасона. Біноміальний розподіл зручний, якщо береться вибірка малого обсягу. Якщо відбирається велика кількість виробів з вихідної партії, то тоді зручніше застосовувати розподіл Пуассона.

Імовірність того, що у вибірці з n деталей знаходиться k несправних визначається за формулою

$$P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!},$$

де a = nq; n – обсяг вибірки; q – імовірність появи події (інакше: частка несправних виробів у цілій партії).

ПРИКЛАД: З великої партії трифазних асинхронних двигунів малої потужності типу АОЛ-12-4, що містить q = 2% несправних машин, береться для контролю вибірка з п'яти двигунів (n = 5). Потрібно оцінити імовірність появи у вибірці 0,1,2,3,4,5 несправних машин.

a = nq = 5*0,02 = 0,1

Імовірність появи 0,1,2,3,4,5 несправних машин у вибірці дорівнює відповідно:

$$P_5(0) = \frac{0{,}1^0 e^{-0{,}1}}{0!} = 0{,}9074 \quad P_5(1) = \frac{0{,}1^1 e^{-0{,}1}}{1!} = 0{,}09074 \quad P_5(2) = \frac{0{,}1^2 e^{-0{,}1}}{2!} = 0{,}0045$$

$$P_5(3) = \frac{0{,}1^3 e^{-0{,}1}}{3!} = 0{,}001 \quad P_5(4) = \frac{0{,}1^4 e^{-0{,}1}}{4!} \approx 0 \quad P_5(5) = \frac{0{,}1^5 e^{-0{,}1}}{5!} \approx 0,$$

тобто імовірність появи у вибірці більш двох несправних двигунів практично дорівнює нулю.

3.7. Суперпозиція розподілів.

Розглянуті закони розподілу часу можуть у більшості випадків характеризувати надійність складної системи лише на обмежених ділянках часу її роботи. Так, наприклад, на ділянці припрацювання час виникнення відмов може підкорятися розподілу Вейбула. На ділянці нормальної роботи час виникнення відмов підкоряється експоненційному закону, а на ділянці старіння – нормальному. Для оцінки надійності на тривалій ділянці часу експлуатації доцільно використовувати суперпозицію розглянутих законів розподілу.

Розглянемо суперпозицію двох експоненційних законів. Нехай

$$a(t) = c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} ,$$

де $\lambda_1 < \lambda_2$, c_1, c_2 - вагові коефіцієнти, визначені з умови $c_1 + c_2 = 1$. Вони залежать від співвідношення між λ_1 і λ_2. Тоді кількісні характеристики надійності будуть мати вид

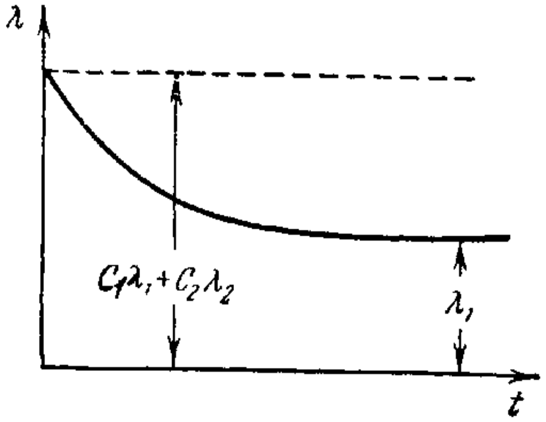
$$P(t) = 1 - \int_0^t a(\tau)d\tau = 1 - \int_0^t \left(c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2\tau}\right)d\tau =$$

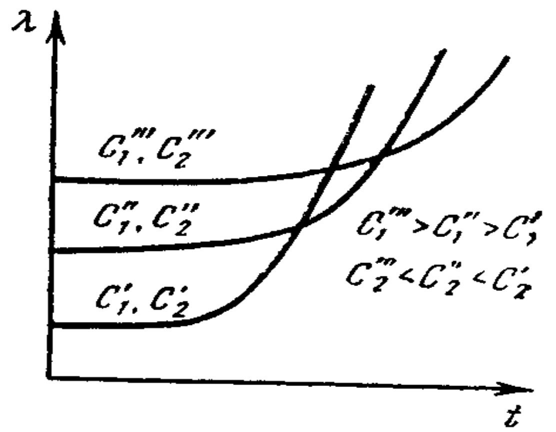
$$= 1 - \left(-c_1 e^{-\lambda_1\tau} - c_2 e^{-\lambda_2\tau}\right)\Big|_0^t = 1 + c_1 e^{-\lambda_1 t} - c_1 + c_2 e^{-\lambda_2 t} - c_2$$

$$P(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t};$$

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \frac{c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2\tau}}{c_1 e^{-\lambda_1\tau} + c_2 e^{-\lambda_2\tau}} .$$

$$T_{ср} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty c_1 e^{-\lambda_1 t}dt + \int_0^\infty c_2 e^{-\lambda_2 t}dt = \frac{-c_1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t}\Big|_0^\infty - \frac{c_2}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}\Big|_0^\infty = \frac{-c_1}{\lambda_1}(0-1) - \frac{c_2}{\lambda_2}(0-1) \cdot$$





$$T_{ср} = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} .$$

Якщо $\lambda_1 < \lambda_2$, то в області великих значень t множник $e^{-\lambda_2 t}$ близький до нуля, і тоді $\lambda(t) = \lambda_1$. При малих t $e^{-\lambda_1 t}$ і $e^{-\lambda_2 t}$ близькі до одиниці і $\lambda(t)$ буде дорівнювати $\lambda(t) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 > \lambda_1$.

Таким чином, інтенсивність відмов з часом зменшується від величини $\lambda(t) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$ при t = 0 до λ_1 при $t \to \infty$. Залежність $\lambda(t)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ показана на рисунку.

З рисунка видно, що цей закон розподілу може характеризувати надійність складної системи з урахуванням періоду приробітки. Вплив процесів ста-

ріння і зносу може бути врахований при суперпозиції експоненційного і нормального законів розподілу.

У цьому випадку частота відмов буде представлена в наступному виді

$$a(t) = c_1 \lambda e^{-\lambda t} + \frac{c_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{(t - T_{cp})^2}{2\sigma^2} \right)}{\sigma \left[1 + \Phi\left(\frac{T_{cp}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]},$$

де c_1, c_2 – коефіцієнти, що враховують ступінь впливу раптових і поступових відмов.

Тоді основні кількісні характеристики можна представити у виді наступних співвідношень:

$$P(t) = c_1 e^{-\lambda t} + c_2 \frac{1 - \Phi\left(\frac{t - T_{cp}}{\sqrt{2}\sigma} \right)}{1 + \Phi\left(\frac{T_{cp}}{\sqrt{2}\sigma} \right)}\ ;\ \ \lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)}.$$

(Рисунок «Залежність $\lambda(t)$ для суперпозиції експоненційного та усіченого нормального законів»)

В області малих t *інтенсивність відмов є величина постійна, а в області великих t вона зростає, що свідчить про появу старіння апаратури.*

3.8 Логарифмічний нормальний розподіл.

Цей розподіл має місце, коли логарифм випадкової величини розподілений по нормальному закону, тобто є безліч випадкових величин $t_в$ *і значення* $\ln t_в$ *мають нормальний розподіл.*

Частота відновлень:

$$a_в(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} \cdot t} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2} \right],$$

де μ - це середнє значення випадкової величини lnt; σ - середнє квадратичне відхилення величини lnt.

Досвід показує, що логарифмічний нормальний розподіл застосовний для опису випадкової величини часу відновлення, коли апаратуру ремонтують, заміняючи елементи, що відмовили, безпосередньо на позиції установки, наприклад, у польових умовах і т.д.

$$V(t) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right).$$

Розглянуті вище кількісні характеристики дозволяють оцінити надійність простих елементів і складних систем у процесі їхньої роботи. Але вони не враховують часу, витраченого на ремонт, зручності експлуатації, вплив елементів апаратури на її надійність. Тому необхідні додаткові кількісні характеристики надійності. Такими характеристиками служать коефіцієнти надійності.

Закони розподілу часу відновлення ремонтуємих об'єктів. У більшості об'єктів (систем керування електроприводами) відновлення працездатності в основному здійснюється обслуговуючим персоналом вручну. Характерно порівняно невелика кількість ремонтів за малі і великі інтервали часу і досить часте відновлення за час, близький до середнього часу відновлення. Зі статистичних даних середній час відновлення T_B визначається за формулою:

$$T_{Bi} = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} t_{Bi}}{N_0},$$

де t_{Bi} - час відновлення агрегату при і-тім ремонті; N_0 - кількість ремонтів.

Тому варто припустити, що частота відновлень $a_в(t_в)$ повинна починатися з нуля, мати максимум і прямувати до нуля при $t_B \to \infty$. Такі особливості мають логарифмічно-нормальний розподіл і γ-розподіл, що можуть використовуватися як моделі розподілу часу відновлення систем.

3.9 Розподіл Ерланга.

Досвід експлуатації свідчить, що закон розподілу часу відновлення з ручним способом пошуку несправності може мати вид функції Ерланга. Функція Ерланга виходить як окремий випадок γ-розподілу.

При параметрі γ-розподілу k=2 одержуємо розподіл Ерланга.

$$a_B(t) = \frac{\lambda_0 (\lambda_0 t)^{k-1} e^{-\lambda_0 t}}{(k-1)!} = \lambda_0^2 t e^{-\lambda_0 t}$$

Параметр масштабу $\lambda_0 = \frac{2}{T_B}$, де T_B - математичне чекання випадкової величини часу відновлення. Тоді остаточно частота відновлень буде:

$$a_B(t) = \frac{4}{T_B^2} t e^{-\frac{2t}{T_B}}.$$

Тоді імовірність відновлення за проміжок часу (0,t) визначається виразенням:

$$V(t) = \int_0^t \frac{4}{T_B^2} \tau \cdot e^{-\frac{2\tau}{T_B}} d\tau = \frac{4}{T_B^2} \int_0^t \tau \cdot e^{-\frac{2\tau}{T_B}} d\tau = \frac{4}{T_B^2} \left(\frac{-\tau \cdot T_B}{2} e^{-\frac{2\tau}{T_B}} \Big|_0^t + \frac{T_B}{2} \int_0^t e^{-\frac{2\tau}{T_B}} d\tau \right) = \frac{-4}{T_B^2} \left(\frac{t \cdot T_B}{2} e^{-\frac{2t}{T_B}} - 0 \right) +$$

$$\frac{2}{T_B} \int_0^t e^{-\frac{2\tau}{T_B}} d\tau = \frac{-2t}{T_B} e^{-\frac{2t}{T_B}} - \frac{2}{T_B} \frac{T_B}{2} e^{-\frac{2\tau}{T_B}} \Big|_0^t = \frac{-2t}{T_B} e^{-\frac{2t}{T_B}} - e^{-\frac{2t}{T_B}} + 1 = 1 - e^{-\frac{2t}{T_B}} \left(1 + \frac{2t}{T_B} \right) = V(t)$$

$$V(t) = 1 - e^{-\frac{2t}{T_B}} \left(1 + \frac{2t}{T_B} \right).$$

Імовірність невідновлення за час T_B буде дорівнювати:

$$G(t) = 1 - V(t) = e^{-\frac{2t}{T_B}}\left(1 + \frac{2t}{T_B}\right)$$

Тоді інтенсивність відновлення буде дорівнювати:

$$\mu(t) = \frac{a_B(t)}{G(t)} = \frac{\frac{4t}{T_B^2}}{1 + \frac{2t}{T_B}}$$

Гіпотеза про розподіл часу відновлення за законом Ерланга підтверджується для асинхронних, синхронних двигунів і для систем керування ЕП.

3.10. Лямбда-характеристика.

При розгляді працездатності якого-небудь технічного пристрою розрізняють три періоди його роботи: період приробітки, період нормальної експлуатації, період старіння і зносу.

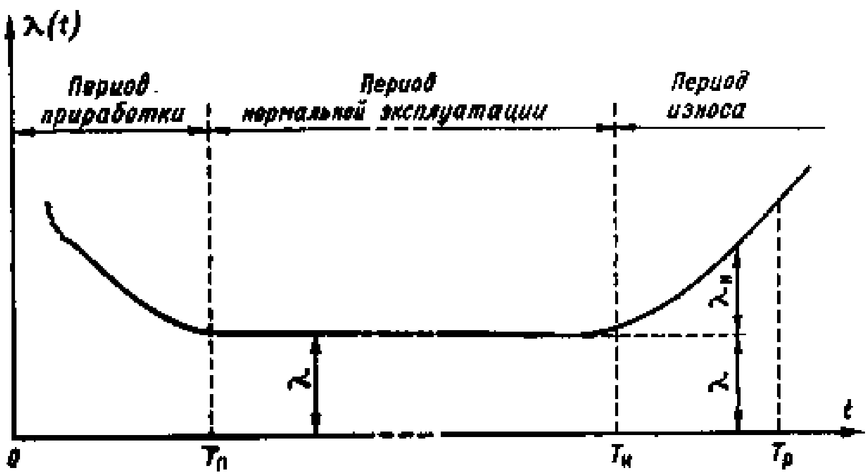
Крива інтенсивності відмов для трьох періодів роботи технічного пристрою називається Лямбда-характеристикою.

Виникнення відмов технічних пристроїв у період приробляння підкоряється розподілу Вейбула. Відмови приroблення усуваються протягом першого періоду роботи шляхом заміни дефектних деталей справними. Бажано, щоб тривалість часу приробітки деталі була якнайменша.

Період нормальної експлуатації відповідає роботі пристроїв як однократного, так і багаторазового використання.

У період нормальної експлуатації має місце найбільш низький рівень інтенсивності відмов приблизно постійної величини. У цьому випадку функція розподілу відмов підкоряється (описується) експоненційному закону.

Коли час експлуатації пристрою досягає значення $t = T_и$ починає позначатися знос деталей. З цього моменту інтенсивність відмов починає швидко зроста-



Лямбда-характеристика

ти. *Час T_P – технічний ресурс обладнання за умови відсутності ремонту.*

Час експлуатації пристрою при постійній інтенсивності відмов $T_и$ завжди менший ресурсу T_P. Щільність імовірності зносових відмов (частота зносових відмов) визначається так

$$f(t) = a(t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{(T-T_P)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma\left[1+\Phi\left(\frac{T}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]}$$

де T – загальний час експлуатації.

Період зносу відноситься тільки до ремонтуємих об'єктів багаторазового використання.

4. Оцінка параметрів теоретичних розподілів.

Розглянемо три методи:

а) метод моментів;

б) метод найбільшої правдоподібності;

в) метод довірчих інтервалів.

Для підбора виду теоретичного розподілу, що досить близько підходить до отриманого емпіричного розподілу, найчастіше застосовують два методи.

4.1. Метод моментів.

Початковим емпіричним моментом порядку k називають величину

$$M_k^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i^k}{N}.$$

Центральним емпіричним моментом порядку k називають величину

$$m_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(t_i - M^*(t)\right)^k}{N}.$$

де t_i – наробіток до відмови i-го об'єкта з загального числа N що знаходяться під спостереженням.

Початковий момент порядку k теоретичного розподілу визначається за формулою

$$M_k = \int_0^\infty t^k a(t)dt.$$

Центральний момент порядку k теоретичного розподілу визначається за формулою

$$m_k = \int_0^\infty \left(t - M(t)\right)^k a(t)dt.$$

З вищесказаного випливає, що математичне чекання є початковим моментом першого порядку, а дисперсія – є центральний момент другого порядку.

При використанні методу моментів параметри теоретичного розподілу знаходяться з умови рівності моментів теоретичного розподілу відповідним емпіричним моментам.

Наприклад, теоретичний нормальний розподіл залежить від двох параметрів M(t) і D(t). Для їхнього визначення необхідні два рівняння. Дорівнюємо початковий теоретичний момент 1-го порядку M(t) до початкового емпіричного моменту 1-го порядку $M^*(t)$ і центральний теоретичний момент 2-го порядку $m_2(t)$ до центрального емпіричного моменту 2-го порядку $m_2^*(t)$:

$$M(t) = M^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{N}; \quad m_2(t) = D(t) = m_2^*(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(t_i - M^*(t)\right)^2}{N},$$

тобто, M(t) і D(t) є функціями від значень випадкової величини t_i.

При обчисленні показників надійності метод моментів знаходить обмежене застосування, тому що дає значні погрішності при оцінці параметрів розподілу у випадку обмеженого числа випробувань.

4.2. Метод найбільшої (максимальної) правдоподібності.

Для крапкової оцінки параметрів розподілів наробітку до відмови найбільш часто застосовується один з найбільш сильних методів – метод найбільшої правдоподібності. Він запропонований Фішером у 1912 році.

Крапкова оцінка параметра полягає у визначенні такої функції вибіркових значень, що є найкращою в деякому сенсі оцінкою невідомого параметра теоретичного закону розподілу. *Оцінка параметра залежить від результатів випробувань і в цьому сенсі є випадковою величиною.* Однак, оцінка повинна бути состоятельною, тобто оцінка параметра при збільшенні числа спостережень до нескінченності сходиться до оцінюваного параметра.

Метод моментів і метод найбільшої правдоподібності дають состоятельні оцінки параметрів теоретичного розподілу.

Нехай $t_1, t_2,...,t_n$ – значення наробітку до відмови.

Передбачається, що вид розподілу наробітку до відмови відомий, невідомі лише параметри цього розподілу $\theta_1, \theta_2 ... \theta_n$.

Якщо вид закону розподілу заданий, то відома функція f(t) – щільність розподілу наробітку до відмови, тобто відома функція частоти відмов a(t). Далі складають функцію правдоподібності:

$$L(t_1, t_2, ...t_n, \theta_1, \theta_2, ...\theta_n) = a(t_1, \theta_1, \theta_2, ...\theta_n) \times a(t_2, \theta_1, \theta_2, ...\theta_n) \times ... \times a(t_n, \theta_1, \theta_2, ...\theta_n),$$

де $t_1, t_2,...,t_n$ - фіксовані числа.

Потім складають логарифмічну функцію правдоподібності

$$\ln L(t_1, t_2, ...t_n, \theta_1, \theta_2, ...\theta_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln a\left(t_i, \theta_1 ... \theta_n\right) .$$

Функції L і lnL досягають максимуму при тих самих значеннях θ_i, тому замість визначення максимуму функції L знаходять (що зручніше) максимум функції lnL.

Як крапкові оцінки параметрів $\theta_1, \theta_2 ... \theta_n$ приймають такі їхні значення $\theta_1^*, \theta_2^* ... \theta_n^*$, при яких функція правдоподібності досягає максимуму. Оцінки $\theta_1^*, \theta_2^* ... \theta_n^*$ знаходять з рівнянь правдоподібності

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\theta_1} = 0 \ ; \ \frac{\partial(\ln L)}{\partial\theta_2} = 0; \ \frac{\partial(\ln L)}{\partial\theta_3} = 0; \quad \text{k=1,2,3...}$$

Знаходимо другі похідні:

$$\frac{\partial^2(\ln L)}{\partial\theta_1^2} \ ; \ \frac{\partial^2(\ln L)}{\partial\theta_2^2}; \ \frac{\partial^2(\ln L)}{\partial\theta_3^2}.$$

Якщо другі похідні при $\theta_1^*, \theta_2^* ... \theta_n^*$ негативні, то точка з координатами $\theta_1^*, \theta_2^* ... \theta_n^*$ є точка максимуму.

Знайдені значення $\theta_1^*, \theta_2^* ... \theta_n^*$ приймають у якості шуканих величин параметрів теоретичного розподілу $\theta_1, \theta_2 ... \theta_n$.

ПРИКЛАД: Знайти методом найбільшої правдоподібності оцінку параметра λ показового розподілу $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ якщо в результаті експерименту отримано n значень t_1, t_2,... t_n наробітку до відмови.

Складаємо функцію правдоподібності:

$$L = a(t_1, \lambda) \times a(t_2, \lambda) \times ... \times a(t_n, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t_1} \cdot \lambda e^{-\lambda t_2} \cdot ... \cdot \lambda e^{-\lambda t_n}$$

$$L = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i} = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i\right).$$

Знаходимо логарифмічну функцію правдоподібності

$$\ln L = \ln\left[\lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i\right)\right] = n \cdot \ln\lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

Знайдемо похідну по λ:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{1}{M^*(t)}.$$

Знайдемо другу похідну по λ

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \ ,$$

тобто значення $\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$ є точкою максимуму функції L і lnL. Як оцінку параметра λ експоненційного розподілу потрібно прийняти величину, зворотну вибірковій середній: $\lambda = \frac{1}{M^*(t)}$.

4.3. Метод довірчих інтервалів.

Існує два види оцінок параметрів розподілу:

- крапкові оцінки;

- інтервальні оцінки.

Як оцінку параметра θ можна запропонувати велике число функцій $\varphi(t_1, t_2,... t_n)$. Тому, щоб уникнути сваволі у виборі оцінок, необхідно накласти на них деякі природні умови.

Крапковою називають оцінку, що визначається одним числом.

Критеріями якості крапкових оцінок служать незміщеність і спроможність.

Оцінка параметра називається незміщеною, якщо математичне чекання оцінки збігається з оцінюваним параметром

$$M(\theta^*) = \theta.$$

Оцінка параметра називається спроможною, якщо при збільшенні числа спостережень до нескінченності оцінка сходиться до оцінюваного параметра по імовірності

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty,$$

де $\varepsilon > 0$ *- будь-яке як завгодно мале число.*

Для крапкової оцінки параметрів розподілів наробітку до відмови широко застосовують методи найбільшої правдоподібності і моментів.

Інтервальною називають оцінку, що визначається двома числами, що називаються кінцями інтервалу.

За результатами випробувань можуть бути отримані крапкові оцінки параметрів розподілів.

Вибірковою сукупністю чи просто вибіркою називають сукупність випадково відібраних об'єктів.

Генеральною сукупністю називають сукупність об'єктів з якої виробляється вибірка.

Обсягом сукупності називають число об'єктів цієї сукупності.

Якщо відомий закон розподілу наробітку до відмови, то відразу виникає задача оцінки параметрів цього розподілу. Оцінка параметрів залежить від результатів випробувань і є випадковою величиною.

Нехай θ^* - статистична оцінка невідомого параметра θ деякого закону розподілу. Допустимо, що результатом випробувань t_1, t_2,... t_n знайдена оцінка $\theta_1^*(t_1, t_2,... t_n)$, що залежить від значень випадкової величини наробітку до відмови t_1, t_2,... t_n. У такому випадку оцінка θ^* сама є випадковою величиною, і тому буде змінюватися від однієї серії випробувань до іншої. Повторимо випробування і за результатами (новими значеннями t_1, t_2,... t_n) знайдемо оцінку $\theta_2^*(t_1, t_2,... t_n)$. Повторюючи опит багаторазово одержимо числа θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*,... $\theta_к^*$, що різні між собою. Таким чином, оцінку θ^* можна розглядати як випадкову величину, а числа θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*,... $\theta_к^*$ - як її можливі значення.

Однак крапкова оцінка θ^* при малих обсягах результатів спостережень може значно відрізнятися від оцінюваного параметра θ, що приводить до грубих помилок при користуванні теоретичними розподілами.

Наприклад, при випробуванні високонадійних об'єктів чи при обмеженому часі випробувань кількість відмов буде незначною. При цьому можуть спостерігатися істотні випадкові помилки в оцінці показників надійності. З зазначеної причини необхідно оцінювати помилку, що відбувається при заміні θ на θ^*.

Помилку визначення θ по величині крапкової оцінки θ^* дозволяє знайти інтервальна оцінка. Допустимо, що за результатами випробувань знайдена оцінка θ^* невідомого параметра θ. Ніж точніше θ^* визначає параметр θ, тим менше абсолютна величина різниці $\left|\theta-\theta^*\right|$. Якщо $\delta>0$ і $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$, то чим менше δ, тим точніше оцінка. Тому число δ характеризує точність оцінки. *З огляду на випадковий характер оцінки θ^* і те, що вона змінюється при переході від однієї вибірки до іншої, можна говорити тільки про імовірність γ, з якою виконується нерівність $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$, тобто $P\left[\left|\theta-\theta^*\right|<\delta\right]=\gamma$. Довірча імовірність γ залежить від вимог пропонованих до досліджень і визначається заздалегідь. Для інженерних розрахунків вона дорівнює 0,9 чи 0,95. У відповідальних випадках γ може бути підвищена до 0,99.*

Замінивши нерівність $P\left[\left|\theta-\theta^*\right|<\delta\right]=\gamma$ рівносильною подвійною нерівністю, одержимо

$$P\left[\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right]=\gamma .$$

Тоді, довірча імовірність γ є імовірність того, що оцінюваний параметр лежить у заданому довірчому інтервалі.

Це співвідношення варто розуміти так: імовірність того, що інтервал $\left(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta\right)$ укладає в собі незмінний оцінюваний параметр дорівнює γ.

Довірчим називають інтервал $\left(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta\right)$, що з імовірністю γ містить значення невідомого параметра θ, де θ^* - крапкова оцінка параметра θ, отримана одним з відомих методів.

Імовірність того, що значення шуканої величини вийде за границі інтервалу, називають рівнем значимості $\beta=1-\gamma$.

Рівні значимості β звичайно рівні 1-0,9=0,1; 1-0,95=0,05; 1-0,99=0,01.

Рівень значимості β являє собою імовірність, якою вирішено знехтувати у даній області наукового дослідження.

Кінці довірчого інтервалу $\theta^*-\delta$ і $\theta^*+\delta$ називають довірчими границями. Вони мають випадковий характер (представлені випадковими числами). Дійсно, у різних вибірках виходять різні значення θ^*. Слід, від вибірки до вибірки будуть змінюватися і кінці довірчого інтервалу, тобто довірчі границі самі будуть випадковими величинами – функціями t_1, t_2,... t_n. *Тому що випадковою величиною є не оцінюваний параметр θ, а довірчий інтервал, то більш правильно говорити не про імовірність влучення θ в довірчий інтервал, а про імовірність того, що довірчий інтервал покриє θ.*

5. Випробування на надійність.
5.1. Види випробувань.

Випробувати виріб на надійність значить установити яку надійність він має, на підставі безупинного спостереження за станом його працездатності в умовах, запропонованих методикою випробувань.

Випробування на надійність обов'язкові при виготовленні виробів і при прийманні їх від заводів-виготовлювачів. Методики проведення таких випробувань записані в державних стандартах.

Позитивна риса випробувань на надійність полягає в тому, що випробування можуть дати об'єктивну інформацію про надійність виробу з урахуванням спільного впливу всіх діючих при роботі виробу факторів. Разом з тим, випробування на надійність володіють і негативними сторонами. По-перше, вони вимагають великих витрат часу і коштів. Щоб оцінити показники надійності необхідно тривалий час (тисячі годин) вести безупинне спостереження за станом виробу. Тому в процесі випробувань на надійність витрачається значна частина ресурсу виробу. По-друге, результати випробування на надійність звернені в минуле. Про вироби, що успішно витримали випробування, можна сказати, що вони до випробувань мали якусь надійність і це підтверджено випробуваннями.

По цільовій спрямованості випробування на надійність бувають означальними, контрольними і спеціальними.

Означальні випробування на надійність – випробування, у результаті яких визначаються кількісні значення показників надійності, як крапкові, так і інтервальні.

Контрольні випробування на надійність – випробування, у результаті яких контрольовані вироби по деяких ознаках і з заданим ризиком відносяться або до категорії придатних, або до категорії негідних за рівнем своєї надійності.

Такими ознаками можуть бути наступні: відсутність відмов на заданому інтервалі часу, число відмов за визначений час, значення експлуатаційного параметра в даний момент часу.

Спеціальні випробування на надійність – випробування, призначені для дослідження деяких явищ, зв'язаних з оцінкою надійності (визначення довговічності, дослідження впливу окремих факторів на показники надійності).

Означальні випробування на надійність ставлять кінцевою метою визначення кількісних значень показників надійності випробуваних виробів. Ця мета може бути досягнута різними шляхами.

Сукупність правил, відповідно до яких проводяться випробування, називають планом випробувань. План випробувань записується як трибуквене сполучення, що пояснює наступне:

перша буква N означає число виробів установлених на випробування;

друга буква U чи R визначає відсутність чи наявність відновлення виробу після відмови;

третя буква N, r, T є умовною ознакою закінчення випробування: N – після відмови усіх виробів, r – після появи встановленої кількості відмов, T – після закінчення заданого часу випробувань.

Тоді можна виділити наступні плани випробувань:

1. На випробування стає N виробів. Вироби, що відмовили, не відновлюються. Випробування продовжуються до відмови усіх виробів (план NUN).

2. На випробування стає N виробів. Вироби, що відмовили, не відновлюються. Випробування продовжуються або до заданого часу T, або до одержання заданого числа відмов r (плани NUT і NUr).

3. На випробування стає N виробів. У процесі випробувань вироби, що відмовили, відновлюються. Випробування продовжуються або до заданого часу T, або до одержання заданого числа відмов r (плани NRT і NRr).

5.2. Оцінки параметра експоненційного закону розподілу.

Розглянемо крапкові та інтервальні параметри експоненційного закону розподілу при різних планах проведення випробувань на надійність.

Імовірність безвідмовної роботи технічного пристрою в період нормальної експлуатації має вид: $P(t) = e^{-\lambda t}$, де λ – інтенсивність раптових відмов, що може бути оцінена по статистичним даним випробувань на надійність.

Тому, як основний параметр, для якого знаходяться оцінки, вибирають значення λ. *Любий план випробувань дозволяє розрахувати основну величину – сумарний наробіток випробовуваних об'єктів.* Для скорочення запису розрахункові формули зводяться в таблицю 1.

Таблиця 1. **Оцінка параметра λ експоненційного закону розподілу при різних планах випробувань.**

План випробувань	Сумарний наробіток, t_Σ	Оцінка інтенсивності відмов, λ^*	Нижня границя параметра, $\lambda - \lambda_н$	Верхня границя параметра, $\lambda - \lambda_в$
NUN	$\sum_{i=1}^{n} t_i$	$\frac{N}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(1-\gamma_1)(2N)}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(\gamma_2)(2N)}{2t_\Sigma}$
NUT	$\sum_{i=1}^{d} t_i + (N-d)T$	$\frac{d}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(1-\gamma_1)(2d)}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(1-\gamma_1)(2d)}{2t_\Sigma}$
NUr	$\sum_{i=1}^{r} t_i + (N-r)t_r$	$\frac{r-1}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(1-\gamma_1)(2r)}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(\gamma_2)(2r)}{2t_\Sigma}$
NRT	NT	$\frac{d}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(1-\gamma_1)(2d)}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(\gamma_2)(2d+2)}{2t_\Sigma}$
NRr	NTr	$\frac{r-1}{t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(1-\gamma_1)(2r)}{2t_\Sigma}$	$\frac{\chi^2(\gamma_2)(2r)}{2t_\Sigma}$

d – кількість відмов, що відбулися за час T; χ^2 - розподіл випадкової величини, що визначається наступною функцією щільності:

$$f(t) = a(t) = \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-t}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, t \geq 0$$

Розподіл однопараметричний з параметром n, що зветься числом ступенів свободи. Вид кривих χ^2 - розподілу показаний на наступному рисунку.

(малюнок)

n – число ступенів свободи.

Чим менше n, тим більше χ^2- розподіл стає несиметричним і при малих n збігається з експоненційним. Чим більше n, тим точніше χ^2 - розподіл наближається до нормального розподілу. При n >30 його можна вважати практично співпадаючим з нормальним.

Якщо Q(t) є деякий розподіл, то корінь рівняння

$$Q(t)=\gamma, \quad (0<\gamma<1)$$

називають γ-квантилью розподілу Q(t). $\chi^2_{(\gamma)(n)}$ - квантиль χ^2- розподілу для довірчої імовірності γ і числа ступенів свободи n.

Квантиль $\chi^2_{(\gamma)(n)}$ є число, що служить коренем наступного рівняння

$$Q(t)=\gamma, \qquad \text{або} \qquad \int_0^t \frac{\tau^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-\tau}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} d\tau = \gamma .$$

Змінна верхня межа інтеграла являє собою корінь цього рівняння, тобто його значення, при якому рівняння перетворюється у вірну тотожність буде квантилью $\chi^2_{(\gamma)(n)}$.

Для визначення довірчих границь параметра λ експоненційного закону розподілу необхідно скористатися таблицею квантилей χ^2-розподілу. Параметрами таблиці є число ступенів свободи, рівне 2N, 2r, 2d чи 2d+2 у залежності від плану випробувань, і довірчі імовірності γ_1 і γ_2 для обох границь довірчого інтервалу.

γ_2 – імовірність того, що λ буде менше верхньої довірчої границі; γ_1 – імовірність того, що λ буде більше нижньої довірчої границі.

Тоді імовірність того, що λ буде менше нижньої границі довірчого інтервалу дорівнює $\beta_1=1-\gamma_1$ і являє собою значимість нижньої довірчої границі. *В окремому випадку може бути $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$.*

<u>ПРИКЛАД:</u> При випробуванні на надійність N=11 однотипних асинхронних двигунів до виходу їх з ладу отримані наступні наробітки в годинах: 300, 400, 600, 700, 1000, 1500, 2500, 3000, 3500, 4000.

Визначити: 1) оцінку інтенсивності відмов двигунів λ^*; 2) нижню і верхню довірчі границі $\lambda_н$ і $\lambda_в$ з довірчими імовірностями відповідно γ_1=0,95 і γ_2=0,9.

$$t_\Sigma = \sum_{i=1}^{11} t_i = 22000ч \quad \lambda^* = \frac{N}{t_\Sigma} = \frac{11}{22000} = 5 \cdot 10^{-4} ч \quad \lambda_н = \frac{\chi^2(0{,}05)(22)}{22000 \cdot 2} \quad \lambda_в = \frac{\chi^2(0{,}9)(22)}{22000 \cdot 2}$$

З таблиць знаходимо $\chi^2(0{,}05)(22)$ =12,3; $\chi^2(0{,}9)(22)$ =30,8

$$\lambda_н = \frac{12{,}3}{22000 \cdot 2} = 2{,}8 \cdot 10^{-4}\, ч^{-1} \quad \lambda_у = \frac{30{,}8}{22000 \cdot 2} = 7 \cdot 10^{-4}\, ч^{-1}$$

Оцінка середнього наробітку до відмови і його довірчих границь рівні

$$T_{ср}^* = \frac{1}{\lambda^*} = \frac{10^4}{5} = 2000ч \quad T_{ср.н} = \frac{1}{\lambda_в} = \frac{10^4}{7} = 1430ч \quad T_{ср.в} = \frac{1}{\lambda_н} = \frac{10^4}{2{,}8} = 3571ч$$

5.3. Оцінки параметрів нормального закону розподілу.

Розглянемо визначення крапкових та інтервальних оцінок параметрів нормального закону розподілу. Цей розподіл використовується для оцінки надійності виробів при наявності в них відмов зв'язаних зі зносом і старінням.

Нехай для випробувань на довговічність узято N виробів. *При зносових відмовах усіх виробів (план NUN) оцінка середнього часу наробітки буде дорівнювати*

$$T_{ср}^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}.$$

Відхилення часу наробітку до відмови від його середнього значення дорівнює

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(t_i - T_{ср}^*\right)^2},$$

де t_1, t_2,... t – наробіток виробів до відмови в годинах.

Оцінка середнього часу роботи до відмови $T_{ср}^*$ розподіляється щодо оцінюваного параметра $T_{ср}$ із середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma(T_{ср}) = \frac{\sigma^*}{\sqrt{N}}.$$

Тоді довірчі границі для середнього наробітку обчислюються по формулах

$$T_{ср.н} = T_{ср}^* - t_{\gamma(\upsilon)}\frac{\sigma^*}{\sqrt{N}}\ ;\ T_{ср.в} = T_{ср}^* + t_{\gamma(\upsilon)}\frac{\sigma^*}{\sqrt{N}},$$

де $t_{\gamma(\upsilon)}$ *- квантиль розподілу Стьюдента для довірчої імовірності γ і числа ступенів свободи υ=N–1.*

Квантилі розподілу Стьюдента знаходяться по таблицях. Розподіл Стьюдента має вид

$$f(t) = a(t) = \left[2^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}\right]^{-1}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Квантиль $t_{\gamma(\upsilon)}$ буде дорівнювати значенню змінної верхньої межі інтегрування t при якій виконується рівність

$$\int_0^t a(\tau)d\tau = \gamma.$$

Нижня $\sigma_н^2$ і верхня $\sigma_в^2$ довірчі границі дисперсії σ^2 випадкової величини часу визначаються за формулами:

$$D_н = \sigma_н^2 = \frac{(N-1)(\sigma^*)^2}{\chi^2\left(1-\frac{\beta}{2}\right)(\nu)}\ ;\ \ D_в = \sigma_в^2 = \frac{(N-1)(\sigma^*)^2}{\chi^2\left(\frac{\beta}{2}\right)(\nu)};\ \ \sigma_н^2 \le \sigma^2 \le \sigma_в^2\ .$$

Умова виконується з імовірністю $1-\frac{\beta}{2}$, де N – загальне число зразків, установлених на випробування; $\chi^2\left(\frac{\beta}{2}\right)(\nu)$ - квантиль χ^2- розподілу при імовірності $\frac{\beta}{2}$ і числі ступенів свободи υ=N–1; $\chi^2\left(1-\frac{\beta}{2}\right)(\nu)$ - квантиль χ^2- розподілу при імовірності $1-\frac{\beta}{2}$ і числі ступенів свободи υ=N–1.

При цьому β є рівень значимості, β=1-γ, де γ – довірча імовірність (таж сама, що використовується для визначення $T_{ср.н}$ і $T_{ср.в}$).

ПРИКЛАД: При випробуваннях на довговічність N=11 однотипних колекторних машин постійного струму, відмови яких у зносовий період роботи мають нормальний розподіл, отримані наступні значення часу безвідмовної роботи в годинах: 1500, 1200, 1800, 1600, 2000, 1400, 2200, 1700, 1900, 2100, 2300.

Потрібно оцінити середній наробіток до відмови (середню довговічність) $T_{ср}$ і середнє квадратичне відхилення часу σ, а також визначити для них нижню і верхню довірчі границі з довірчою імовірністю γ=0,95.

Оцінка середньої довговічності:

$$T_{ср}^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N} = \frac{20700}{11} = 1790ч$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(t_i - T_{ср}^*\right)^2} = 361г\ ;\quad \sigma(T_{ср}) = \frac{\sigma^*}{\sqrt{N}} = \frac{361}{\sqrt{11}} = 109\ г.$$

Для довірчої імовірності γ=0,95 і числа ступенів свободи υ=N–1=11-1=10 знаходимо квантиль розподілу Стьюдента $t_{\gamma(\upsilon)} = t_{0,95(10)} = 1{,}812$. У даному випадку квантиль одна. Тоді визначаємо нижню і верхню довірчі границі середньої довговічності машин

$$T_{ср.н} = T_{ср}^* - t_{\gamma(\upsilon)}\frac{\sigma^*}{\sqrt{N}} = 1790 - 109\cdot 1{,}812 = 1592\ г;$$

$$T_{ср.в} = T_{ср}^* + t_{\gamma(\upsilon)}\frac{\sigma^*}{\sqrt{N}} = 1790 + 109\cdot 1{,}812 = 1987\,г.$$

Можна затверджувати, що з імовірністю не нижче 0,95 інтервал часу 1592-1987 містить у собі середній наробіток до відмови $T_{ср}$. Для визначення універсального інтервалу дисперсії σ^2 знаходимо по таблицях квантилі χ^2- розподілу при імовірностях

$1-\frac{\beta}{2} = 1-\frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$ і $\frac{\beta}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$, де β=1-γ=0,05.

Число ступенів свободи υ=N–1=11-1=10.

$\chi^2{}_{(0,975)(10)} = 20,5$ $\chi^2{}_{(0,025)(10)} = 3,25$.

Тоді одержуємо:

$$\frac{10\cdot 361^2}{20,5} \le \sigma^2 \le \frac{10\cdot 361^2}{3,25}$$

$$6,33\cdot 10^4 \le \sigma^2 \le 40\cdot 10^4$$

$$252 \le \sigma \le 633\,.$$

5.4. Перевірка гіпотез о надійності (критерії згоди).

Для знаходження показників надійності технічних пристроїв приходиться визначати вид розподілу часу безвідмовної роботи зі статистичних даних випробувань. У випадку, якщо закон розподілу невідомий, але маються підстави припустити, що він має визначений вид, висувають гіпотезу: випадкова величина наробітку до відмови розподілена за законом А.

А – деякий тип закону розподілу.

Основною (нульовою) гіпотезою H_0 називають будь-яке твердження про вид закону розподілу.

Поряд з висунутою основною гіпотезою H_0 розглядають і суперечну їй гіпотезу. Якщо висунута гіпотеза буде відкинута, то має місце суперечна гіпотеза.

Конкуруючою (альтернативною) називають гіпотезу H_1 , що суперечить основній гіпотезі H_0.

Висунута гіпотеза про характер закону розподілу H_0 може бути правильною чи помилковою. Тому виникає необхідність її перевірки. *Для перевірки основної гіпотези H_0 використовують спеціально підібрану випадкову величину, розподіл якої відомий. Цю випадкову величину називають критерієм згоди.*

Критерієм згоди називають критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Існують кілька критеріїв згоди. *У теорії надійності для оцінки ступеня збігу теоретичної й емпіричної кривих розподілу найчастіше застосовують критерій χ^2 (критерій Пірсона) чи критерій Колмогорова.*

Оцінка справедливості висунутої основної гіпотези про вид закону розподілу за критерієм χ^2 виробляється в наступному порядку.

1. Вихідний статистичний ряд утворених даних розбивають на *l* інтервалів, у кожнім з яких не менш 4-5 елементів. Число інтервалів *l* бажано мати не менш 8-12. При цьому інтервали можуть бути і не рівні один одному.
2. Здійснюється розрахунок величин за формулою,

$$p_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(t)dt = Q(t)\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = Q(t_{i+1}) - Q(t_i)\,,$$

де $a(t)$ – теоретична функція частоти відмов;

$Q(t)$ - теоретична функція імовірності появи відмов;

t_i, t_{i+1} - границі і-го інтервалу; p_i - імовірність улучення випадкових величин з передбачуваним розподілом $a(t)$ в кожнім з інтервалів (t_i, t_{i+1}).

3. Здійснюється підрахунок числа елементів вихідного ряду утворених даних n_i приналежних і-му інтервалу.
4. Як критерій перевірки основної гіпотези приймають випадкову величину

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad ,$$

де n – загальне число відмов при випробуваннях пристроїв на надійність.

Величина χ_0^2 випадкова, тому що в різних серіях випробувань вона приймає випадкові значення. Чим менше розрізняються емпіричні і теоретичні частоти, тим менше величина критерію згоди χ_0^2 і, отже, вона певною мірою характеризує близькість емпіричного і теоретичного розподілів. Зведення різниці частоти в квадрат усуває можливість взаємного погашення позитивних і негативних різниць. Діленням на np_i досягають зменшення кожного з доданків. *Доведено, що при $n \to \infty$ закон розподілу випадкової величини χ_0^2 незалежно від того, якому закону розподілу підлеглі наробітки до відмов, прямує до закону розподілу χ^2 (χ^2 - розподілу). Тому випадкова величина позначена через χ_0^2, а сам критерій називають критерієм згоди хі-квадрат.*

5. Визначають число ступенів свободи k розподілу χ^2: k = *l* - 1;
6. Обчислюють коефіцієнт $H = \frac{\chi_0}{k}$. Якщо виконується умова 0< H <2, то відповідність можна вважати задовільною. Можна обчислити іншу величину

$$R = \frac{\left|\chi_0^2 - k\right|}{\sqrt{2k}} .$$

Якщо R<3, то відповідність теоретичного розподілу емпіричному вважається задовільною.

Критерій Колмогорова.

Визначивши параметри закону розподілу по статистичним даним і записавши функцію $Q(t)$, необхідно оцінити ступінь збігу емпіричної $Q^*(t)$ і теоретичної $Q(t)$ кривих розподілу. Оцінка за критерієм згоди О.Н. Колмогорова проводиться в наступному порядку.

1. Для j інтервалів, на які розбивається емпіричний розподіл, розраховується значення функції $Q^*(\Delta tj) = \frac{H_j}{\sum n_i}$.
2. Розраховується передбачувана теоретична функція розподілу для цих же моментів часу $Q(\Delta tj)$.
3. Знаходиться модуль різниці $Q(\Delta tj) - Q^*(\Delta tj)$ для кожного інтервалу j і визначається найбільше з всіх отриманих значень $D_{max} = \left|Q(\Delta tj) - Q^*(\Delta tj)\right|$.
4. Визначається число $\Lambda_a = D_{max}\sqrt{n}$. Для задовільної згоди емпіричного і теоретичного розподілу необхідно, щоб $\Lambda_a < [\Lambda_{max} = 1{,}5]$. Оптимальний інтервал значень $\Lambda_a \le 1$.

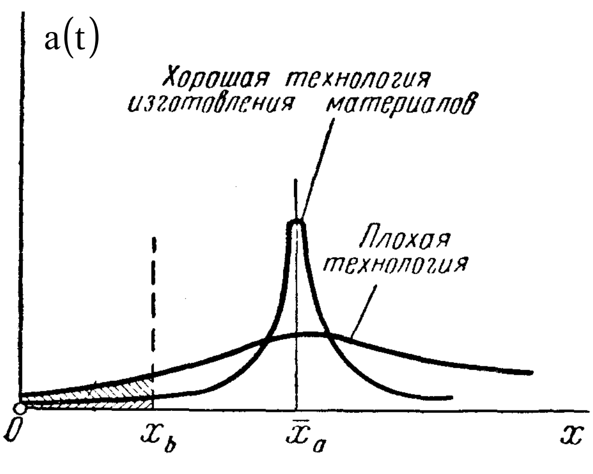
6. Фізика відмов елементів електрообладнання

Відмови виробу – явище вивчене, але причини, що обумовлюють появу відмови, пов'язані з визначеними фізичними і фізико-хімічними процесами, що відбуваються в матеріалах і конструкціях на різних етапах їх життя. Вплив цих процесів залежить як від режимів роботи (внутрішніх умов), так і від зовнішніх умов роботи елемента: температури, вологості, тиску, складу навколишнього середовища, вібрації, ударів.

Причиною виникнення катастрофічних (повних) відмов, є перевищення діючими навантаженнями критичних значень гранично припустимих для даного матеріалу чи елементу.

Критичне значення навантаження для даного матеріалу чи елементу не є строго постійною величиною, а має розкид біля деякого середнього значення, що звичайно підкоряється нормальному закону. Середнє значення і середнє квадратичне відхилення змінюються при впливі температури, вологості й інших факторів.

Типові криві (графіки) розподілу критичного значення напруги (чи навантаження) представлені на рисунку. Видно, що граничні значення напруги розподіляються по нормальному законі і мають середнє значення $\overline{X}_a$, якому відповідає найбільша щільність імовірностей відмов. Самі випадкові величини, що характеризують критичні значення навантаження для даного матеріалу чи елементу, безупинно змінюються під впливом різних фізико – хімічних процесів, що відбуваються на поверхні чи усередині матеріалу. Варто сказати, що діюча напруга (діюче навантаження) не залишається постійною, а змінюється біля деякого середнього значення $\overline{X}_b$. $\overline{X}_a$ – середня величина граничних значень напруги (навантаження), що викликають відмови обладнання.



X_b – діюче значення напруги (навантаження); $\overline{X}_b$ – середня величина діючої напруги (навантаження).

6.1 Надійність ізоляційних матеріалів

Матеріали, використовувані в елементах (обладнанні) можна розділити на ізоляційні, провідникові, контактні і конструкційні.

Надійність електричних машин, реле, контакторів у значній мірі визначається надійністю їхніх обмоток. Надійність обмотки залежить від стану її ізоляції.

Основною характеристикою ізоляції є її електрична міцність. Однак цю найважливішу властивість ізоляція може зберегти в процесі експлуатації лише при наявності інших якостей, зниження рівня яких приводить до зменшення електричної міцності.

Вимоги до ізоляції:

1. Ізоляція повинна зберігати високу теплопровідність. Інакше неминуче виникають підвищені місцеві перегріви, що приводить до прискореного руйнування ізоляції.

2. Ізоляція повинна мати достатню механічну міцність й еластичність, що виключає можливість утворення залишкової деформації, тріщин, розшарування її під впливом механічних зусиль.

3. Ізоляція повинна зберігати стабільний хімічний склад. Його зміна приводить до зниження електричної міцності ізоляції.

4. Однорідна і монолітна структура.

Тільки така ізоляція здатна мати теплопровідність, вологостійкість здатні довгостроково працювати в електричних полях високої напруженості.

Руйнування ізоляції відбувається в результаті нагрівання, механічних зусиль (тиск, вібрації, удари), впливу вологи й агресивних середовищ. У високовольтних машинах істотне значення має вплив електричного поля.

Необоротні зміни структури і хімічного складу ізоляції, що відбуваються під дією перерахованих факторів, називається старінням ізоляції. Процес погіршення властивостей ізоляції в результаті старіння називається зносом. «Старіння» відноситься до матеріалу; Термін « знос » відноситься до ізоляційної конструкції. Знос може і не бути наслідком старіння.

Так можливі ушкодження ізоляції не зв'язані зі старінням. Наприклад: продавлення, прорізання її гострими крайками металевих деталей, утворення тріщин унаслідок значних напруг при вигині. Такі місцеві дефекти швидко розвиваються і приводять до пробою ізоляції задовго до істотного погіршення її властивостей у всьому обсязі внаслідок старіння.

Серед різних факторів, що визначають термін служби ізоляції електричних машин, одним з основних є теплове старіння.

Особливого значення набувають методи розрахунку швидкості теплового старіння і на цій основі – терміну служби ізоляції.

Строгий підхід до дослідження явищ старіння ізоляції полягає в застосуванні до них загальних законів кінетики хімічних реакцій.

Для практичних розрахунків процесів в електричній ізоляції важливо знати час, протягом якого ізоляція внаслідок старіння досягає свого граничного стану. *Термін служби ізоляції в залежності від температури визначається по формулі Ареніуса*

$$\ln T = \frac{E_a}{R\,\theta} - G, \qquad \text{де} \qquad G = \ln A - \ln\ln\frac{C_0}{C}.$$

Під впливом взаємодій, що відбуваються, з навколишнім середовищем (окисні процеси, що відбуваються в ізоляції) міняється товщина шаруючи ізоляції і зменшується її електрична міцність.

C_0 – початкова концентрація непрореагувавших молекул; С – концентрація молекул у розглянутий момент часу; А – постійний коефіцієнт, $A = \ln pz$, де z – число зіткнень між реагуючими молекулами в одиницю часу; $p = e^{\Delta S/R}$ - фактор імовірності належної орієнтації молекул при зіткненні; ΔS – ентропія активації – величина, що характеризує частку загального числа зіткнень, при яких молекули орієнтовані належним образом; R = 8.317 Дж/м моль – універсальна газова постійна; E_a – енергія активації, тобто надлишкова (у порівнянні із середньою величиною) кількість енергії, якою повинна володіти молекула, щоб перебороти енергетичний бар'єр і виявитися здатною до даної хімічної взаємодії; θ – абсолютна температура.

Якщо відомий термін служби ізоляції T_1 при температурі θ_1, то термін служби її T_2 при температурі θ_2 можна визначити з рівняння

$$T_2 = T_1 \exp\left(\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right).$$

Даний вираз випливає з наступних перетворень

$$\ln T_1 = \frac{E_a}{R\theta_1} - G\,; \quad \ln T_2 = \frac{E_a}{R\theta_2} - G\,; \quad \ln T_2 - \ln T_1 = \frac{E_a}{R\theta_2} - \frac{E_a}{R\theta_1} = \frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right).$$

Значення постійних E_a і G для різних ізоляційних матеріалів визначаються експериментально.

Клас ізоляції	G	E_a , Дж/моль
A	15.3	7.9
E	15.1	8.19
B	15.5	8.48
F	19.7	10.55
H	24.2	12.89

У високовольтних машинах істотне значення має старіння ізоляції під дією електричного поля. Помітний вплив електричного поля на термін служби ізоляції починає виявлятися в машинах з номінальною напругою 6 кв і вище. У машинах на більш низькі напруги явищ електричного старіння не спостерігається.

Різні мікродефекти завжди маються й у новій ізоляції: пори, порожнечі, повітряні прошарки, тріщини, газові включення. У цих неоднорідностях розвиваються іонізаційні процеси, що супроводжуються прогресуючим руйнуванням ізоляції. Іони розганяються в електричному полі, бомбардують поверхню ізоляції (ізоляційних прошарків) і викликають поступове руйнування навіть таких стійких матеріалів як слюда.

У порожнечах ізоляції виникають часткові розряди, що супроводжуються утворенням озону. Озон взаємодіє з азотом повітря, що приводить до утворення оксидів азоту, що у присутності вологи утворять пари азотної кислоти, що руйнівно діє на ізоляцію.

Часткові розряди приводять до так називаних незавершених пробоїв, коли пробивається частина шарів ізоляції. Повному пробою передує велика кількість незавершених пробоїв. Після незавершеного пробою електрична міцність ізоляції здатна до деякої міри самовідновлюватися. Це створюється конденсацією пари компаунда в каналі розряду.

Крім розрядів у товщі ізоляції можуть виникати поверхневі розряди. Вони супроводжуються руйнуванням зовнішніх шарів ізоляції. Коронуючи розряди у високовольтних машинах викликають швидке старіння ізоляції.

Якщо не вжити заходів проти коронування ізоляції, то вона може вийти з ладу протягом декількох місяців. Для захисту застосовують спеціальні короностійкі ізоляційні матеріали.

Оцінити вплив електричного поля на термін служби ізоляції можна по рівнянню

$$\lg T = \lg A_e - m \lg E,$$

де E – напруженість електричного поля кВ/мм; m, A_e – коефіцієнти, що залежать від властивостей ізоляційного матеріалу; T – час до пробою зразка.

Одними з найважливіших факторів зносу і старіння ізоляції є механічні і термомеханічні навантаження. *До механічних навантажень відносять статичний тиск на ізоляцію, згинаючи і скручуючи зусилля, удари і вібрація. Термомеханічними називаються навантаження, що виникають у результаті періодичних нагрівов і охолоджень обмоток.* Джерелами механічних впливів є: електродинамічні сили, неврівноваженість обертових частин, відцентрові зусилля (в обмотках роторів), поштовхи й удари, передані машинам з боку приводних двигунів (генератори) чи з боку механізмів, що приводяться в обертання, (двигуни).

Також в обмотках виникають механічні напруги, обумовлені періодичними змінами температури. Ізоляція при наявності зазорів у пазу піддається ударам і стиранню об стінки паза. В ізоляції можливі деформації розтягання, стиску, а також деформації зрушення. При вигині лобових частин обмотки найбільші напруги виникають у місцях виходу котушок чи стрижнів з пазів, де ізоляція випробує напруги стиску і розтягання.

Механічні зусилля, перераховані вище, мають циклічний, знакозмінний характер, причому найбільш типовою є вібрація з частотою 100 Гц. Періодично при перехідних процесах (пуск, реверс і т.д.) амплітуди вібрацій збільшуються в десятки разів унаслідок збільшення струмів в обмотках і квадратичній залежності електродинамічних сил від струму.

Досвід показує, що навіть при порівняно невеликих деформаціях має місце істотне зниження пробивної напруги. Це свідчить про те, що значні деформації супроводжуються появою необоротних структурних змін у виді тріщин, розривів, розшарування. Механічні навантаження сприяють і прискорюють старіння ізоляції. Механічна напруга зменшує енергетичний бар'єр, необхідний молекулам для того, щоб вони виявилися здатними до даної хімічної взаємодії.

Хоча в середньому статичні навантаження ізоляційних матеріалів в електричних машинах звичайно невеликі, в окремих точках можуть мати місце значні концентрації механічних напруг, що відбиваються на швидкості старіння ізоляції.

Визначену роль у процесах руйнування ізоляції грають термомеханічні явища, зв'язані з розходженням коефіцієнтів теплового розширення ізоляції і провідникових матеріалів. Ці явища приводять до утворення в ізоляції тріщин, розбуханню ізоляції, відшаруванню її від поверхні провідника.

Важливим фактором старіння ізоляції є вплив вологи. Особливо інтенсивно процес проникнення вологи йде під час остигання машини після її роботи, тому що в цей період тиск у порах і капілярах ізоляції нижче атмосферного. *Під дією вологи відбувається гідролітичне руйнування ізоляційних матеріалів, що полягає в розщепленні полімерних ланцюгів.* Періодичне проникнення вологи і видалення її збільшує пористість ізоляції.

Пил, що міститься в охолодному повітрі, робить на ізоляцію абразивну дію, приводить до зменшення її опору.

6.2 Надійність і довговічність підшипників

Одним з відносно слабких місць електричної машини є підшипниковий вузол. Для більшості електричних машин підшипники являють собою друге за значенням (після обмотки) джерело відмов. У машинах малої потужності й у високошвидкісних машинах відмови через знос підшипникових вузлів часто стають переважними.

Ненормальна робота підшипників виявляється по надмірному підвищенню температури, шуму, витоку змащення, підвищеному опору при обертанні і збільшенню моменту зрушення. Більш 80% підшипників кочення виходять з ладу внаслідок руйнувань усталостного характеру.

Усталостне викрашування робочих поверхонь кілець і тіл кочення відбувається під дією значних місцевих змінних напруг, що виникають при роботі підшипника. Мастило в процесі руйнування відіграє двоїсту роль: воно зменшує тангенціальні зусилля, що діють на деталі підшипника і сприяє відводу тепла. Однак якщо тріщина вже утворилася, то мастило, проникаючи в неї, робить розклинюючу дію і сприяє її розвитку.

Істотною причиною відмов є абразивний знос. Проникнення в підшипники пилу, дрібних твердих часток, продуктів зносу щіток, а також продуктів корозії приводить до поступового стирання робочих поверхонь і сепараторів.

Підшипники кочення чуттєві до перевантажень. При збільшенні навантаження на підшипник удвічі його довговічність зменшується приблизно в десять разів. Навантаження на підшипники зростають при перекосах і неспіввісності підшипникових щитів і фланців, при осьовому зсуві підшипника, при вібрації ротора.

З урахуванням різних причин відмов імовірність безвідмовної роботи підшипника виражається за допомогою розподілу Вейбула

$$P(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-a}{b}\right)^k\right] \quad \text{при} \quad t > a; \quad P(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \le a,$$

де параметр зрушення *a* характеризує зону, у якій імовірність відмови практично дорівнює нулю. Параметри a, b, k можуть бути знайдені опитним шляхом. Запропоновано наступні оцінки для визначення цих величин по експериментальним даним

$$a^* = \frac{1}{n-1}\left(n\,T_{cp} - T_p\right); \quad b^* = \frac{n}{n-1}\left(T_p - T_{cp}\right),$$

n – обсяг вибірки; T_{cp} – наробіток до першої відмови; T_p - середній ресурс. Показник k знаходять зі співвідношення

$$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{T_p}{b}.$$

6.3 Статистика відмов і основні ушкодження асинхронних двигунів

Розподіл ушкоджень по окремих вузлах АД змінюється в залежності від умов їхнього застосування. У середньому через ушкодження обмоток двигунів відбувається 85-95% відмов, 3-8% відмов відбувається внаслідок ушкоджень підшипників.

Відмови обмоток розподіляються в такий спосіб: міжвиткові замикання - 93%, ушкодження міжфазової ізоляції - 5%, пазової ізоляції -2%. У більшому числі випадків причиною відмов є ушкодження міжвиткової ізоляції, типове для всипної обмотки.

Для АД загальнопромислового застосування зміна інтенсивності відмов у функції часу має типовий характер, виявляючи виразні періоди приробляння, нормальної експлуатації і зносу. Період приробленння 3-5 тис.ч. Період нормальної експлуатації 30-35 тис.ч.

Причини відмов АД.

1. *Дефекти проектування.* Ці дефекти зв'язані в основному з зайвим підвищенням використання активних і конструкційних матеріалів.

а. *Високий коефіцієнт заповнення пазів.* Надмірно високий коефіцієнт заповнення паза пов’язаний з можливістю помітного зниження надійності обмотки. *Зниження коефіцієнта заповнення лише на 4% (з 0,82 до 0,79) зменшує число пробоїв виткової ізоляції приблизно вдвічі.* Це говорить про те, що з підвищенням коефіцієнта заповнення понад визначеної припустимої межі надійність всипної обмотки падає дуже швидко.

б. *Малий запас теплостійкості ізоляції.* Старіння ізоляції швидко прискорюється з підвищенням температури. Тому періодичні перевантаження можуть привести до істотного зниження терміну служби ізоляції, якщо не вибирати ізоляцію обмотки з запасом по нагріванню. У першу чергу це необхідно тому, що невідомий точно розподіл температур по всьому обсязі всипної обмотки. У найбільш гарячих точках температура обмотки може значно перевищувати середні значення.

в. *Малий повітряний зазор.* Чим менше повітряний зазор, тим більше коефіцієнт потужності. Однак надмірне зменшення повітряного зазору супроводжується зниженням надійності АД. Навіть невелике вироблення підшипників, деформація посадкових поверхонь, вигин вала і т.п. приводять до появи значної нерівномірності повітряного зазору. Це приводить до появи вібрації, прискоренню зносу підшипників, до зачіпання ротора за статор.

2. *Низька якість матеріалів і комплектуючих виробів*. Причиною міжвиткових замикань в обмотках статорів АД нерідко є низька якість ізоляції обмотувальних проводів, а також зменшення товщини емалевої ізоляції. Значно знижує нагрівостойкість і термін служби обмоток просочення невідповідними для цієї мети лаками.

3. *Дефекти технології виробництва*. Близько 35% відмов асинхронних двигунів виникає внаслідок низької їхньої якості. Одним з основних джерел ушкоджень обмотки є процес укладання її в пази статора.

4. *Неправильне застосування двигунів*. Статистика виявляє різкі коливання в рівні аварійності і терміну служби двигунів у різних галузях промисловості. Це залежить у меншому ступені від умов роботи двигунів, чим від рівня загальної культури виробництва в експлуатуючої двигуни галузі. Так середньорічний вихід двигунів у капітальний ремонт складає в будівництві 54%, у гірничодобувній промисловості -29%, у харчовій промисловості -24%. У той же час у хімічній промисловості, де умови роботи двигунів так само досить несприятливі, середній вихід у капітальний ремонт у рік складає 9%, у чорній металургії - 13%.

Підвищення надійності асинхронних двигунів

1. *Поліпшення теплового стану машини*. Навіть незначна різниця в температурі окремих частин обмотки обумовлює істотне розходження у швидкості старіння ізоляції. Однак подовжні перепади температури в АД виміряються десятками градусів. Істотна також нерівномірність розподілу температури по перетині паза. Термін служби ізоляції залежить не тільки від температури, але і від швидкості її зміни. Він істотно скорочується при різких коливаннях температури – так званих теплових ударах.

Основні шляхи поліпшення теплового стану АД. Підвищення класу ізоляції і створення на цій основі запасу нагрівостійкості обмотки. Вирівнювання температури окремих частин двигуна шляхом зниження її в найбільш нагрітих точках за рахунок належного вибору навантажень активних матеріалів, підвищення теплопровідності ізоляції, поліпшення теплопровідності контакту між сердечником статора і корпусом.

2. *Підвищення якості матеріалів і комплектуючих виробів*. Заходи щодо підвищення якості матеріалів, застосовуваних у виробництві АД:

а. Підвищення електричної міцності ізоляції і зменшення розсіювання значень пробивної напруги. Дотримання гарантованої товщини й однорідності емалевих покрить.

б. Зниження твердості обмотувальних проводів.

в. Упровадження просочувальних лаків, нагрівостійких, водонепроникних, що володіють високою цементуючою здатністю.

6.4 Статистика відмов синхронних машин

Усі відомості приводяться для великих синхронних генераторів. Період приробляння 5-10 тис.ч. Період нормальної експлуатації 15-20 років. Більшість ушкоджень відноситься до ізоляції обмотки статора. Можливі ушкодження: пробій ізоляції, порушення пайок, випадання клинів, ослаблення пресовки пакета активної сталі. Ослаблення пакета активної сталі приводить до можливості виникнення контакту між сусідніми листами унаслідок вібрації листів, що розхиталися.

Механічні ушкодження ротора. Ушкодження роторів СМ відбуваються трохи рідше, ніж ушкодження нерухомих частин.

6.5 Ушкодження машин постійного струму

Відмови окремих частин прокатних двигунів стосовно загального числа відмов розподіляється в середньому в наступному порядку:

1. Колекторно – щітковий вузол - 44%;
2. Механічні ушкодження - 39% ;
3. Обмотка додаткових полюсів і компенсаційна – 11%;
4. Обмотка якоря - 6%.

Ушкодження колекторів машин. Ці ушкодження можуть виражатися у виді нерівномірного зносу поверхні колектора при терті щіток протягом тривалої роботи, порушення полірування поверхні колектора з виникненням на ній подряпин через нерівномірне натискання окремих щіток на колектор і різної їхньої твердості, оплавлення пластин при несприятливій комутації.

Створені дані показують, що при правильній експлуатації знос колектора при безупинній роботі машин знаходиться в межах від 0,1 до 2 мм у рік.

Важливим засобом зменшення зносу колектора є поліпшення умов комутації машин шляхом настроювання додаткових полюсів, підбора марки і розмірів щіток для даної потужності і напруги машини й окружної швидкості обертання колектора.

Знос електрощіток. Швидкість зносу щіток помітно залежить від величини окружної швидкості колектора, особливо в зоні швидкостей більш 30 м/сек. Розподіл швидкостей зносу щіток даної марки на визначеній електричній машині характеризується нормальним розподілом.

Ушкодження обмоток якорів. Ці ушкодження виражаються у виді пробою корпусної ізоляції між обмоткою і пакетом стали якоря, міжвиткових замиканнях у якорях із багатовитковими секціями, розпаювання сполучних петушків колекторних пластин з обмоткою, руйнування дротових бандажів, що утримують обмотку якоря – у високошвидкісних машинах.

Ушкодження обмоток збудження головних полюсів. Зустрічаються досить рідко. Ці ушкодження відбуваються чи у виді пробою корпусної ізоляції між обмоткою збудження і магнітною системою машини, чи у межвиткових замикань.

Механічні ушкодження машин. З механічних частин машин постійного струму найбільш піддані зносу і виходу з ладу є підшипники і щіткотримачі.

6.6 Надійність елементів

Найбільш вдалою (повною) характеристикою надійності елементів є інтенсивність відмов. Це пояснюється наступними причинами:

1. Інтенсивність відмов багатьох елементів автоматичних систем (особливо елементів радіоелектроніки) на ділянці часу нормальної роботи є величиною постійною. Це дозволяє оцінити надійність таких елементів числом, на противагу імовірності безвідмовної роботи і частоті, що завжди є складними функціями часу.

2. Інтенсивність відмов дозволяє найбільше просто обчислити інші кількісні характеристики надійності.

3. Інтенсивність відмов найбільше просто одержати експериментально.

Інтенсивність відмов елементів залежить від їхнього типу, режимів роботи, навколишнього середовища і ряду інших факторів. Тому навіть для однотипних елементів вона може коливатися в дуже широких межах.

Зараз у літературних джерелах опубліковані дані про інтенсивності відмов елементів. Величини середніх інтенсивностей відмов отримані в результаті обробки статистичних даних про відмови елементів при їхній експлуатації.

Надійність опорів. Найбільш численні елементи. Обсяг їхнього світового виробництва 4-5 млрд. штук у рік. Найбільш частим видом відмов є обрив. Статистичні дані показують, що понад 55% відмов опорів відбувається через обриви і 35-40% - через перегорання провідного елемента, тобто понад 90-95% відмов приводять до розриву електричного ланцюга. Тільки 5% відмов приходиться на відмови, що приводять до різкого зменшення опору.

Режим роботи будь-якого елемента радіоелектронних схем істотно впливає на його інтенсивність відмов.

Електричний режим роботи елементів характеризує коефіцієнт навантаження $K_н$. *Для різних елементів коефіцієнт навантаження визначається по-різному, однак суть його полягає в тому, що це є відношення фактичного значення визначального параметра елемента до його номінального значення.*

Для резисторів коефіцієнт навантаження визначається за формулою

$$K_н = \frac{P_{факт}}{P_н},$$

де $P_{факт}$, $P_н$ - фактична і номінальна потужність розсіювання.

Визначити інтенсивність відмов λ опорів при температурі навколишнього середовища і навантаженні, відмінних від номінальних, можна по наступній емпіричній формулі

$$\frac{\lambda}{\lambda_н} = \exp\left[\frac{B\left(t_x^0 + t_н + R_t P_н\left(\frac{P_x}{P_н} - 1\right)\right)}{\left(273^o + t_x^{'}\right)\left(273^o + t_н + R_t P_н\right)}\right],$$

де $\lambda_н$ – інтенсивність відмов опору при номінальних значеннях навантаження і температури навколишнього середовища; t_x^o – температура навколишнього середовища; $t_н$ – максимально припустима температура навколишнього середовища; P_x, $P_н$ – дійсне і номінальне значення навантаження; R_t – тепловий опір для відводу тепла в навколишнє середовище; $t_x^{'} = t_x^o + R_t P_x$ – температура нагрівання елемента; B – коефіцієнт, що залежить від типу опору і визначається з опиту.

Опори в електричних схемах доцільно використовувати в полегшених режимах. У такий спосіб здійснюється внутріелементна надмірність як спосіб підвищення надійності. Не слід допускати роботу елементів у номінальних режимах, $K_н \le 1$.

Значення $K_н$, *що рекомендуються, приводяться в спеціальних таблицях у залежності від режиму роботи і температури навколишнього середовища.*

Не рекомендується розташовувати потужні опори у вертикальному положенні, тому що при цьому погіршуються умови їхнього охолодження.

Конденсатори, як і опори, є надійними елементами й у цьому відношенні не уступають опорам.

Найбільш частим видом відмов є пробій діелектрика і перекриття ізоляції між обкладинками (поверхневий розряд). Ці відмови складають близько 80% усіх відмов і виникають через наявність слабких місць у діелектрику. Відмови через обриви складають близько 15% усіх відмов. Термін служби конденсаторів істотно залежить від коефіцієнта навантаження, температури навколишнього середовища, вологості і частоти живильної напруги. Коефіцієнт навантаження звичайно визначається співвідношенням

$$K_н = \frac{U_{факт}}{U_н},$$

$U_{факт}$ – напруга на конденсаторі; $U_н$ – номінальна напруга.

Систематичне перевищення температури діелектрика конденсатора на 10-15 гр. понад припустиму знижує термін їхньої служби в 8 – 10 разів. Термін служби конденсаторів при різних $K_н$ і t^o можна визначити за допомогою емпіричної формули

$$t_x = \frac{t_н}{K_н^{(4 \div 6)}} \exp\left[-0.0693\left(t_x^o - t_0^o\right)\right],$$

де $t_н$ – термін служби при номінальних умовах; t_x – термін служби при напрузі $U_{факт}$; t_0^o – номінальна температура навколишнього середовища, $t_0^o = 70^o C$ для конденсаторів загального застосування; t_x^o – температура навколишнього середовища, при якій визначається термін служби.

З формули видно, що надійність конденсаторів різко підвищується при зменшенні $K_н$. Тому $K_н \le 0.5$.

Напівпровідникові елементи. Характерною відмовою є пробій p-n – переходів (тепловий і електричний) при впливі підвищених напруг. Коефіцієнт електричного навантаження діодів, стабілітронів, тиристорів визначається відношенням фактичних значень струмів і напруг на елементах до припустимих

$$K_{нI} = \frac{I_{факт}}{I_{доп}}; \qquad K_{нU} = \frac{U_{обр.факт}}{U_{доп}},$$

$I_{факт}$, $U_{обр.факт}$ - фактичне значення випрямленого струму і зворотної напруги; $I_{доп}$, $U_{доп}$ - припустимі значення струму і зворотної напруги.

Для транзисторів коефіцієнт електричного навантаження визначається відношенням фактичної сумарної потужності, що розсіюється на переходах у безперервному чи імпульсному режимі до припустимої потужності

$$K_{н} = \frac{P_{факт}}{P_{доп}}.$$

Принциповою особливістю напівпровідникових елементів є значна залежність їхніх параметрів від температури, що обумовлено фізичними властивостями напівпровідникових матеріалів. Зворотний струм германієвого p-n переходу збільшується приблизно в два рази при підвищенні температури на кожні 10 гр. При цьому також змінюється коефіцієнт підсилення по струму і ряд інших параметрів. Не слід використовувати напівпровідникові елементи в гранично припустимих електричних режимах, $K_{н} = 0.3 \div 0.5$.

Завдяки сучасній технології виготовлення надійність твердих інтегральних схем дуже висока і приблизно дорівнює надійності одного кремнієвого транзистора.

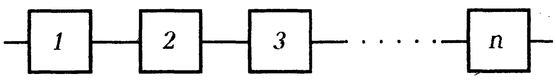
7. Розрахунок надійності нерезервованих систем.

Раніше в основному розглядалися теоретичні характеристики надійності окремих елементів, з яких формуються системи, чи розглядали кількісні характеристики надійності нерезервованих систем, тобто відмова одного елемента приводить до відмови всієї системи в цілому. Тепер розглянемо розрахунок багатокомпонентних систем, елементи яких знаходяться між собою в різних логічних зв'язках.

Розглянемо типи логічних зв'язків, що можуть існувати між окремими елементами в системі.

7.1. Логічне послідовне і паралельне з'єднання.

Послідовне *(основне) з'єднання відповідає випадку, коли при відмові хоча б одного елемента відмовляє вся система в цілому.* Логічна схема такого з'єднання показана на рисунку.



Якщо позначити імовірність безвідмовної роботи i-го елемента $0 \le P_i(t) \le 1$, то імовірність P(t) безвідмовної роботи декількох логічно послідовно зібраних елементів відповідно до теорії множення імовірностей незалежних подій дорівнює добутку імовірностей безвідмовної роботи кожного елемента.

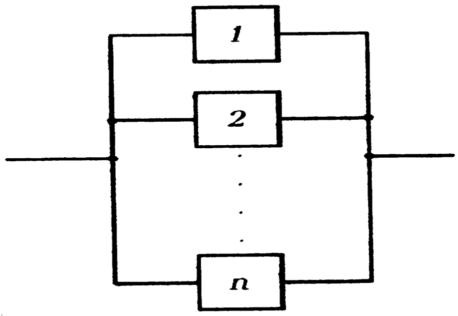
$$P(t) = P_1(t)\,P_2(t)\ldots P_n(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\,.$$

Чим більше послідовно з'єднаних елементів, тим імовірність безвідмовної роботи системи буде менше.

Наробіток до відмови системи дорівнює наробітку до відмови того елемента, у якого він виявився найменшим

$$T_c=\min(T_j),\quad j=1, 2, 3\ldots n,$$

де n – число елементів системи.



Рівнобіжне з'єднання відповідає випадку, коли система зберігає працездатність, поки працездатний хоча б один з n включених у роботу елементів.

Імовірність безвідмовної роботи при логічному рівнобіжному з'єднанні будемо визначати виходячи з імовірності відмови одного елемента

$$Q_i(t) = 1 - P_i(t)\ ,$$

де $Q_i(t)$ - імовірність відмови i-го елементу; $P_i(t)$ - імовірність безвідмовної роботи i-го елементу.

Тоді імовірність відмови n паралельно з'єднаних елементів $Q(t)$ дорівнює добутку імовірностей відмов кожного елемента:

$$Q(t) = Q_1(t)Q_2(t)\ldots Q_n(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t)\ .$$

Імовірність безвідмовної роботи системи буде дорівнювати

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} Q_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - P_i(t)\right]$$

Наробіток до відмови системи дорівнює максимальному зі значень наробітку до відмови елементів

$$T_c=\max(T_j),\ j=1, 2, 3\ldots n,$$

де n – число елементів системи.

У більш складних випадках можуть мати місце паралельно-послідовні з'єднання частин, що входять у структурну схему. На мал. показані два найбільш розповсюджені випадки паралельно-послідовного з'єднання.

(малюнок)

У випадку а) мається m рівнобіжних ланцюжків по n однакових по надійності елементів у кожній ланці.

Надійність, тобто імовірність безвідмовної роботи кожної ланки дорівнює p^n. Отже, імовірність відмови кожного ланцюга дорівнює $q' = 1 - p^n$. Тоді надійність усієї схеми а) буде $p = 1 - (1 - p^n)^m$.

Збільшуючи число рівнобіжних з'єднань (число ланок) одержимо $p \to 1$ при $m \to \infty$, тобто рівнобіжне з'єднання елементів збільшує надійність схеми. Якщо збільшувати n, то $p \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо $n \to \infty$ і $m \to \infty$, то $p \to 0$.

У випадку б) послідовно з'єднане n груп з m паралельно з'єднаних елементів. Елементи однакові по надійності. Надійність даної групи буде $p' = 1-(1-p)^m$. Тоді надійність усієї схеми буде дорівнювати $p = \left[1-(1-p)^m\right]^n$. При $m \to \infty$, $p \to 1$. Якщо $n \to \infty$, то $p \to 0$. Якщо $n \to \infty$ і $m \to \infty$, то $p \to 1$.

7.2. Логічне з'єднання зіркою і трикутником.

Основною перешкодою при перетворенні логічної схеми до логічного послідовного і рівнобіжного з'єднання є логічні з'єднання «зірка» і «трикутник».

Розглянемо еквівалентну заміну «трикутника» на «зірку» і навпаки. За допомогою таких замін з'являється можливість приведення логічних схем до логічного послідовного і рівнобіжного з'єднань. Розглянемо «зірку» і «трикутник», що показані на рисунку.

Позначимо елементи так, як вони показані на рисунку. Варіанти «трикутника» і «зірки» залишаються без змін. *Еквівалентність заміни означає, що імовірність безвідмовної роботи системи з логічним з'єднанням «трикутник» така ж, як і у випадку системи з логічним з'єднанням «зірка».*

Розглянемо три випадки:

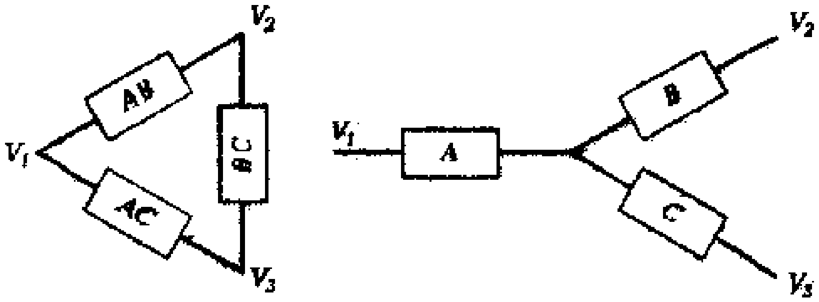
а) входом системи є вершина V1, а виходом V3;

б) входом системи є вершина V1, а виходом V2;

в) входом системи є вершина V2, а виходом V3.

Імовірність безвідмовної роботи у випадку а) для «зірки» визначимо так:

$$P_A(t)P_C(t).$$



Для з'єднання «трикутником» імовірність безвідмовної роботи визначимо в такий спосіб:

$$1-(1-P_{AC})(1-P_{AB}P_{BC}) = 1-1+P_{AB}P_{BC}+P_{AC}-P_{AB}P_{BC}P_{AC} = P_{AC}+P_{AB}P_{BC}-P_{AB}P_{BC}P_{AC}$$

З умови еквівалентності імовірності безвідмовної роботи в обох випадках повинні бути рівні. Тому запишемо:

$$P_A\, P_C = P_{AC}+P_{AB}P_{BC}-P_{AB}P_{BC}P_{AC}$$

Аналогічно запишемо рівності для випадків б) і в).

б) $P_AP_B = 1-(1-P_{AB})(1-P_{AC}P_{BC}) = 1-1+ P_{AC}P_{BC}+P_{AB}-P_{AB}P_{AC}P_{BC} = P_{AC}P_{BC}+P_{AB}-P_{AB}P_{AC}P_{BC}$

в) $P_BP_C = 1-(1-P_{BC})(1-P_{AB}P_{AC}) = 1-1+ P_{AB}P_{AC}+P_{BC}-P_{BC}P_{AB}P_{AC} = P_{AB}P_{AC}+P_{BC}-P_{BC}P_{AB}P_{AC}$.

Уведемо позначення: $P_{BC}=X_1$, $P_{AC}=X_2$, $P_{AB}=X_3$, $P_A=a$, $P_B=b$, $P_C=c$. Тоді рівняння запишемо так

$$bc = X_1+X_2X_3 - X_1X_2X_3 = E_1$$
$$ac = X_2+X_1X_3 - X_1X_2X_3 = E_2$$
$$ab = X_3+X_1X_2 - X_1X_2X_3 = E_3$$

Якщо перемножимо, то одержимо

$$\sqrt{E_1E_2E_3} = E_4 = abc\,.$$

Розділимо отримане рівняння по черзі на кожне з вищенаведених рівнянь і одержимо:

$$a = \frac{E_4}{E_1} \quad b = \frac{E_4}{E_2} \quad c = \frac{E_4}{E_3}$$

Таким чином, вивели формули визначення імовірностей «зірки» по імовірностям вихідного «трикутника».

Для здійснення зворотного переходу від «зірки» до «трикутника» знову необхідно скористатися вихідною системою. У даному випадку відомі a, b, c і потрібно знайти X_1, X_2, X_3. Аналітичний вираз з системи рівнянь одержати неможливо. Тому таку систему рівнянь необхідно вирішувати чисельними ітераційними методами. Для цього виразимо X_1 з першого, X_2 - із другого, X_3 - із третього рівняння

$$X_1 = \frac{bc - X_2X_3}{1 - X_2X_3}\ ; \quad X_2 = \frac{ac - X_1X_3}{1 - X_1X_3}; \quad X_3 = \frac{ab - X_1X_2}{1 - X_1X_2}\,.$$

Нульове наближення X_2^0, X_3^0 служить для визначення першого наближення X_1^1 по формулі для X_1. X_1^1 разом з X_3^0 використовується для визначення X_2^1 по формулі для X_2, а X_1^1 і X_2^1 дають можливість розрахувати X_3^1 по формулі для X_3. Ітераційний процес продовжується поки X_1, X_2, X_3 не вийдуть на сталі значення.

7.3. Розрахунок надійності виробів при основному з'єднанні елементів.

Якщо відмови технічного пристрою настають при відмові одного з його елементів, то говорять, що такий пристрій має основне з'єднання елементів.

Розрахувати надійність апаратури значить визначити її кількісні характеристики надійності по відомих характеристиках елементів, з яких вона складається.

Метод розрахунку багато в чому визначається видом закону розподілу часу виникнення відмов. Усі методи розрахунку поділяються на дві великі групи – методи розрахунку надійності апаратури з основним з'єднанням елементів і методи придатні для розрахунку надійності апаратури з резервними з'єднаннями елементів.

Основою застосовуваних на практиці інженерних методів визначення надійності систем є використання експоненційного розподілу як моделі відмов елементів і систем.

Відомі два основні методи розрахунку надійності систем на стадії проектування, основою яких є положення про постійність інтенсивностей відмов елементів. Інтенсивності виражаються числами, а не функціями часу, що дає можливість успішно використовувати ці методи в інженерній практиці. Це:

а) метод розрахунку по середньогруповим значенням інтенсивностей відмов;

б) коефіцієнтний метод розрахунку надійності.

Застосування обох методів припускає логічно послідовне з'єднання елементів у системі.

7.3.1 Метод розрахунку по середньогруповим значенням інтенсивностей відмов

Робиться припущення: всі однотипні елементи рівнонадійні, тобто всі елементи одного типу мають однакову інтенсивність відмов. При урахуванні, що всі елементи мають логічно послідовне з'єднання, імовірність безвідмовної роботи системи P_c буде дорівнювати:

$$P_C = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n = \prod_{i=1}^{N} P_i$$

При експоненційному законі розподілу відмов $P_i(t) = e^{-\lambda i t}$, де λ_i – інтенсивність відмов і-го елемента, N - загальне число елементів системи, P_i- імовірність безвідмовної роботи і-го елемента.

Тоді імовірність безвідмовної роботи всієї системи буде знаходитися за формулою

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda i t} = \exp\left(-t\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right).$$

Однак при прийнятому допущенні, що всі елементи одного типу мають однакову інтенсивність відмов формулу для $P_C(t)$ *можна записати по іншому*

$$P_C(t) = \exp\left(-t\sum_{i=1}^{r} N_i\lambda_i\right) ,$$

де N_i, λ_i *- число й інтенсивність відмов елементів і-го типу; r - число типів елементів.*

Приведена формула для $P_C(t)$ справедлива при наступних допущеннях:

1) всі елементи виробу працюють одночасно;
2) відмови елементів виробу є подіями випадковими і незалежними;
3) λ_i - постійна величина, тобто протягом терміну експлуатації відсутні старіння і знос.

Однак варто сказати, що інтенсивність відмов елементів залежить від багатьох факторів. Інтенсивність відмов λ_i залежить від: електричного режиму роботи даного елемента, температури, що оточує, вібрацій, тиску, вологості. Для кожного елемента інтенсивність відмов коректують за допомогою коефіцієнта $a(K_H, T^oC)$, що враховує K_H і температуру, при якій працює елемент. Значення $a(K_H, T^oC)$ для різних елементів приводяться в довідниках. Вібрація апаратури, якщо вона неамортизована, враховується коригувальним коефіцієнтом K_1, ударні навантаження – коефіцієнтом K_2, вологість – коефіцієнтом K_3, атмосферний тиск – коефіцієнтом K_4. Застосовується також корекція за допомогою коефіцієнта $l_{исп.}$

Коефіцієнт використання $l_{исп}$ дорівнює відношенню часу роботи елемента до часу роботи системи.

Тоді визначають фактичну інтенсивність відмов елемента з урахуванням основних факторів впливу:

$$\lambda_i = \lambda_{0i} \cdot a(K_H, T^oC) \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot l_{исп.} ,$$

де λ_{0i} - паспортне (табличне) значення інтенсивності відмов і-го елемента.

Якщо всі елементи визначеного типу працюють в однакових умовах, то інтенсивність відмов групи елементів визначиться за формулою:

$$\lambda_{гр.} = \lambda_i \cdot N_i, \qquad i = 1,2,3...r$$

Інтенсивність відмов системи і її час безвідмовної роботи визначаються за формулами:

$$\lambda_C = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot N_i \ ; \ T_{CP} = \frac{1}{\lambda_C} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot N_i} .$$

Частота відмов знаходиться за формулою

$$a_C(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i N_i \cdot \exp\left(-t \sum_{i=1}^{r} N_i \lambda_i\right).$$

Електричний режим роботи елементів характеризується коефіцієнтом навантаження K_H. K_H визначається по різному для різних типів елементів, однак суть його полягає в тому, що це є відношення фактичного значення визначального параметра елемента до його номінального значення.

7.3.2 Коефіцієнтний метод розрахунку надійності.

Допущення при використанні коефіцієнтного методу розрахунку:

1) Відмови елементів підкоряються експоненційному закону розподілу;
2) *Інтенсивності відмов елементів усіх типів змінюються при зміні умов експлуатації в однаковому ступені.*

Друге допущення означає, що відношення $k_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_б} \approx \text{const}$ *практично те саме в різних експлуатаційних умовах.*

$\lambda_б$ - інтенсивність відмов базового елемента, кількісні характеристики надійності якого відомі вірогідно;

λ_i - інтенсивність відмов і-го елемента;

k_i - коефіцієнт надійності і-го елемента.

Кількісне урахування впливу режимів роботи й умов навколишнього середовища на показники надійності елементів може бути зроблено за допомогою поправочних коефіцієнтів аналогічно методу середньогрупових інтенсивностей відмов. Ці безрозмірні коефіцієнти в загальному випадку є функціями сукупності великого числа *l* факторів, що впливають. Однак думають, що результати дії різних факторів незалежні і вплив кожного з них враховується окремо відповідним коефіцієнтом. Тоді

$$\lambda_i = \lambda_{0i} \cdot \mathrm{a_i}(\mathrm{K_H}, \mathrm{T^oC}) \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot l_{исп.} = k_i \lambda_б \mathrm{a_i}(\mathrm{K_H}, \mathrm{T^oC}) \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot l_{исп.} ,$$

де k_i *- табличне значення коефіцієнта надійності елемента;* $\lambda_б$ - інтенсивність відмов базового елемента в номінальних лабораторних умовах.

Найбільше істотно впливають на надійність електричні навантаження елементів і температура навколишнього середовища, тобто коефіцієнт a.

Вираз для λ_i можна переписати так:

$$\lambda_i = \lambda_б^{'} \cdot \mathrm{a_i}(\mathrm{K_H}, \mathrm{T^oC}) \cdot k_i ,$$

де $\lambda_б^{'} = \lambda_б \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot l_{исп.}$.

Видно, що спільне урахування впливу на надійність елементів інших, що більш слабко діють дестабілізуючих факторів – вологості, тиску, вібрацій – може бути зроблено введенням у розрахунок значення інтенсивності відмов базового елемента $\lambda_б^{'}$ відповідного встановленим експлуатаційним умовам. Таке наближене урахування впливу комплексу дестабілізуючих факторів зовнішнього середовища на надійність дуже зручно.

Значення відношення інтенсивності відмов базового елемента при різних умовах експлуатації до інтенсивності відмов цього ж базового елемента при номінальних умовах наведені нижче.

1. Лабораторні умови експлуатації (номінальні умови) - $\dfrac{\lambda_б^{'}}{\lambda_б} = 1$.

- температура +20±5 С;
- відносна вологість 65±15%;
- атмосферний тиск 750±20 мм.рт.ст.
- номінальне електричне навантаження.

2. Експлуатація в закритому приміщенні з підвищеною запиленостью і вологістю (заводські цехи, приміщення підстанцій) - $\dfrac{\lambda_б^{'}}{\lambda_б} = 2{,}5$.

3. Тяжкі умови експлуатації (робота на відкритих місцях, у польових умовах, у шахтах, на бурових установках) - $\dfrac{\lambda_б^{'}}{\lambda_б} = 10$.

Ці відношення отримані при обробці великої кількості статистичних даних і можуть бути використані при розрахунках надійності систем керування промисловими електроприводами.

Імовірність безвідмовної роботи системи визначається формулою

$$\mathrm{P_C(t)} = \exp\left(- \mathrm{t}\lambda_б^{'} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{a_i k_i N_i} \right).$$

Інші кількісні характеристики надійності будуть визначені за формулою:

$$\lambda_C = \lambda_б^{'} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{a_i k_i N_i} \;; \quad \mathrm{T_{CP}} = \frac{1}{\lambda_б^{'} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{a_i k_i N_i}} = \frac{\mathrm{T_б}}{\sum_{i=1}^{r} \mathrm{a_i k_i N_i}} ;$$

$$a_C(t) = \lambda'_б \sum_{i=1}^{r} a_i k_i N_i \cdot \exp\left(-t\lambda'_б \sum_{i=1}^{r} a_i k_i N_i\right).$$

де $T_б$ - середній час безвідмовної роботи елементів базового типу; k_i - коефіцієнт надійності елементів і-го типу.

З виразу для λ_C видно, що розрахунок сумарного коефіцієнта надійності є основою коефіцієнтного методу розрахунку. Тоді $k_\Sigma = \sum_{i=1}^{r} a_i k_i N_i$.

При цьому методі розрахунку немає необхідності знати інтенсивності відмов всіх елементів системи. Досить знати коефіцієнт надійності елементів k_i, число елементів кожного типу N_i й інтенсивність відмов основного (базового) елемента $\lambda_б$. Тоді можна одержати відношення

$$\frac{T_{CP2}}{T_{CP1}} = \frac{\sum_{i=1}^{r_1} a_i k_i N_{i1}}{\sum_{i=1}^{r_2} a_i k_i N_{i2}},$$

тобто необхідно знати елементний склад систем і коефіцієнти надійності елементів.

7.3.3 Порівняльна оцінка методів визначення надійності.

Метод розрахунку по середньогруповим значенням інтенсивностей відмов досить простий, однак, при розрахунку повинні використовуватися усереднені значення інтенсивностей відмов елементів, що для ряду елементів можуть значно відрізнятися від дійсних.

Коефіцієнтний метод розрахунку надійності дуже простий для користування і не вимагає знання значень інтенсивностей відмов елементів, що входять у систему. Досить мати дані про коефіцієнти надійності елементів і знати абсолютне значення інтенсивності відмов лише одного базового елемента. Коефіцієнтний метод дозволяє робити розрахунок при основному з'єднанні елементів. При остаточному розрахунку коефіцієнт надійності й інтенсивність відмов базового елемента $\lambda_б$ уточнюються за даними випробування опитних зразків.

Коефіцієнтний метод у порівнянні з методом середньогрупових інтенсивностей відмов має наступні переваги

1) дозволяє з хорошою точністю порівняти надійність систем чи їхніх окремих частин при обмежених даних по надійності елементів, що дає можливість з різних схемних варіантів вибрати найкращий;
2) дає можливість досить просто перерахувати кількісні характеристики надійності при зміні режимів роботи апаратури;
3) дозволяє спростити розрахунки на початковому етапі проектування.

Значення λ інтенсивностей відмов тих самих елементів можуть відрізнятися на один-два порядка у різних літературних джерелах. Розрахунок надійності при використанні значень інтенсивностей відмов λ з різних джерел може привести до абсурдних результатів, оскільки λ сильно відрізняється для тих самих елементів у різних літературних джерелах. *Відзначений недолік виключається* *при розрахунку надійності коефіцієнтним методом, коли використовуються коефіцієнти надійності елементів, значення яких не залежать від властивостей середовища і визначаються тільки властивостями самих елементів.*

Перевірка показала, що коефіцієнти надійності елементів, визначені за даними різних літературних джерел, практично ті самі за умови, що в якості базового використовується той самий елемент. Тому коефіцієнтний метод дозволяє розрахувати надійність системи з порівняно великим ступенем вірогідності.

8. Розрахунок надійності резервованих систем.
8.1. Основні поняття і визначення.

Надмірність – додаткові засоби чи можливості понад необхідні для виконання об'єктом заданих функцій.

Резервування – метод підвищення надійності об'єкта введенням надмірності, тобто, інакше кажучи, резервуванням називається введення (використання) надмірної кількості елементів для підвищення надійності роботи системи.

Структурне резервування – метод підвищення надійності об'єкта, що передбачає використання надлишкових структурних елементів.

Резервування дозволяє створювати надійні технічні пристрої з недостатньо надійних елементів. Тому цей метод підвищення надійності знаходить ши-

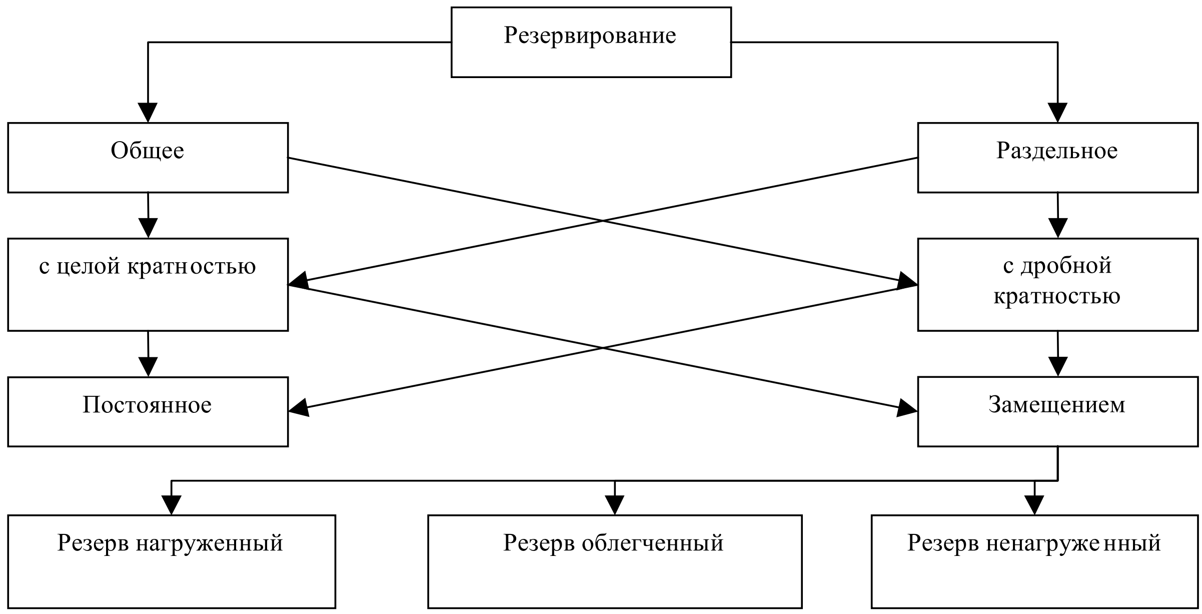


Рисунок - Классификация способов резервирования

роке застосування в системах керування ЕП. Однак, резервування погіршує ряд інших показників системи. Наявність надлишкових елементів ускладнює схему, збільшує масу, габарити, вартість, час відшукання ушкодження, утрудняє експлуатаційне обслуговування. Тому, до резервування прибігають у випадках, коли забезпечити необхідний рівень надійності іншими методами не вдається.

Резервованим з'єднанням виробів називають таке з'єднання, при якому відмови настають тільки після відмови основного і всіх резервних виробів.

Основний елемент – елемент структури об'єкта, мінімально необхідний для забезпечення його працездатності.

Резервний елемент – елемент, призначений для забезпечення працездатності об'єкта у випадку відмови основного елемента.

На практиці застосовують способи резервування, приведені на рисунку.

Розрізняють два основних види резервування: загальне і роздільне.

Загальне резервування – резервування, при якому резерв передбачається на випадок відмови об'єкта в цілому.

Роздільне резервування – резервування, при якому резерв передбачається на випадок відмови окремих елементів об'єкта чи їхніх груп.

Сполучення обох видів резервування називається системним резервуванням.

За способом включення надлишкових елементів, як загальне, так і роздільне резервування розділяють на постійне і заміщенням.

Постійне *резервування – резервування, при якому надлишкові (резервні) елементи (вузли, блоки) приєднуються до основного (робочого) протягом усього часу роботи системи і знаходяться в однакових з ним умовах.*

Резервування заміщенням – резервування, при якому резервні елементи включаються в роботу тільки після відмови основних. До цього резервні елементи знаходяться в одному з трьох станів: навантаженому, полегшеному і ненавантаженому.

При навантаженому резерві зовнішні умови і режими роботи основних і резервних елементів однакові (наприклад, останні знаходяться під тими ж напругами і струмами). Для полегшеного резерву характерне зниження рівня навантажень на резервні елементи в порівнянні з основними. При ненавантаженому резерві резервні елементи відключені від джерел енергії до початку їхньої роботи. Це дає можливість зберегти ресурс резервних елементів і зменшити експлуатаційні витрати за рахунок економії енергії. Найбільше застосування в СУЕП знаходить постійне резервування і резервування заміщенням з ненавантаженим станом резервних елементів.

Навантажений резерв – резервний елемент знаходиться в тім же режимі, що й основний елемент.

Полегшений резерв – резервний елемент знаходиться в менш навантаженому робочому режимі, чим основний елемент.

Ненавантажений резерв – резервний елемент практично не несущий навантажень.

Основним параметрам, що характеризує резервування, є його кратність.

Кратність резервування – відношення числа резервних елементів (блоків, систем) до числа тих, що резервуються.

Кратність резервування визначається співвідношенням:

$$m = \frac{l-h}{h},$$

де, l – загальне число елементів резервованого з'єднання;

h – число елементів, необхідне для справної роботи з'єднання;

(l – h) – число резервних елементів; m – кратність резервування.

Резервування може бути з цілою чи дробовою кратністю.

Дублювання – резервування, кратність якого дорівнює одиниці.

Багаторазове резервування – резервування, кратність якого виражається числом, більшим одиниці.

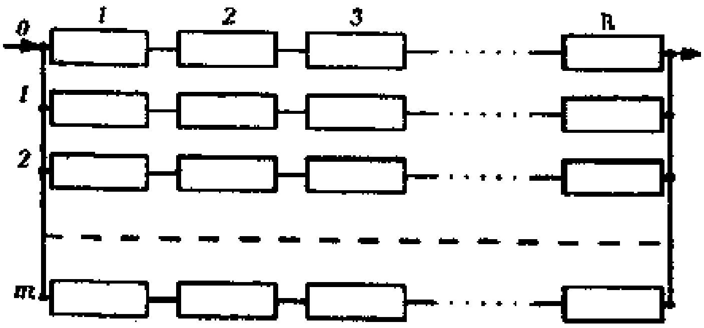
При резервуванні з цілою кратністю величина m є ціле число, при резервуванні з дробовою кратністю величина m є дробове число, що нескорочується.

Якщо резервується один працюючий елемент, то буде мати місце резервування з цілою кратністю. Дробова кратність резервування має місце тоді, коли резервуються декілька одночасно працюючих елементів.

Практична реалізація резервування для більшості систем керування не викликає труднощів. Найбільшу складність представляє вибір способів резервування блоків і елементів замкнутих систем, оскільки можлива зміна параметрів системи може привести до втрати стійкості.

8.2. Загальне постійне резервування з цілою кратністю.

При загальному постійному резервуванні з цілою кратністю резервується вся система (виріб). Структурна схема загального постійного резервування показана нижче.



Аналіз надійності системи при загальному резервуванні проводиться при наступних обмежуючих допущеннях:

1. Відмови елементів резервованої системи являються найпростішим потоком випадкових подій, тобто відмови підлеглі експоненційному закону розподілу.

2. Ремонт резервованої апаратури в процесі її роботи неможливий.

3. Основна і резервна системи рівнонадійні.

Перше допущення означає, що інтенсивність відмов елементів є величиною постійною і для них справедливий експоненційний закон надійності. Третє допущення не завжди справедливе. При загальному резервуванні з постійно включеним резервом усі m+1 систем одночасно працюють на одне навантаження. При відмові якої-небудь однієї системи навантаження перерозподіляється на m систем, що залишилися. Це може понизити надійність резервних систем тому що збільшилося навантаження на кожну систему. Тому, перше допущення справедливе лише в тому випадку, коли навантаження не впливає на надійність системи. Друге допущення означає, що відновлення чи заміна елементів системи, що відмовили, неможливо в процесі роботи резервованої системи. Це допущення є сильно спрощуючим.

Припустимо, що відмови є подіями випадковими і незалежними, імовірність безвідмовної роботи P(t) кожної з (m+1) систем можна вважати рівною добутку імовірностей безвідмовної роботи елементів, тобто

$$P(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot P_3(t) \cdot ... \cdot P_n(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)$$

де $P_i(t)$ *– імовірність безвідмовної роботи i-го елемента протягом часу t;*

n – число елементів кожної з (m+1) систем.

Імовірність відмови резервованої системи $Q_C(t)$ в силу першого допущення буде дорівнювати

$$Q_C(t) = Q_1(t) \cdot Q_2(t) \cdot Q_3(t) \cdot ... \cdot Q_{m+1}(t) = [Q(t)]^{m+1}.$$

$Q_i(t) = 1 - P_i(t)$ - імовірність відмови кожної з (m+1) систем.

$$P_C(t) = 1 - Q_C(t) = 1 - [1 - P(t)]^{m+1} = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\right]^{m+1}.$$

$$Q_C(t) = \left[1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\right]^{m+1}.$$

На підставі першого допущення $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$.

$$\prod_{i=1}^{n} P_i(t) = e^{-\lambda_0 t}, \quad \text{де} \quad \lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

$$P_C(t) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda_0 t}\right]^{m+1}; \; Q_C(t) = \left[1 - e^{-\lambda_0 t}\right]^{m+1}.$$

Знайдемо вираз середнього часу безвідмовної роботи резервованої системи. Очевидно, що

$$T_C = \int_0^{\infty} P_C(t)dt = \int_0^{\infty} \left[1 - \left[1 - e^{-\lambda_0 t}\right]^{m+1}\right] dt .$$

Обчислимо інтеграл: $\left[1 - e^{-\lambda_0 t}\right] = z$, $dz = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} dt \Rightarrow dt = \dfrac{dz}{(1-z)\lambda_0}$.

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^1 \left(\frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}\right) dz = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^1 \left(1 + z + z^2 + z^m\right) dz = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^1 \sum_{i=0}^{m} z^i dz = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\int_0^1 z^i dz = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{z^{i+1}}{i+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}$$

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1} .$$

Тоді середній час безвідмовної роботи резервованої системи буде

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{m}\right) = T_0 \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i+1} .$$

T_0 *- середній час безвідмовної роботи основної системи.*

Дисперсія часу виникнення відмов системи може бути розрахована за формулою

$$D_C = T_0^2 \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{(i+1)^2};$$

$$a_C(t) = \frac{dQ_C(t)}{dt} = \lambda_0 (m+1) e^{-\lambda_0 t}\left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^m;$$

$$\lambda_C(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \frac{\lambda_0 (m+1) e^{-\lambda_0 t}\left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^m}{1 - \left[1 - e^{-\lambda_0 t}\right]^{m+1}}.$$

(малюнок. Залежності імовірності безвідмовної роботи системи від часу при різних кратностях резервування).

(мал. Залежність середнього часу безвідмовної роботи системи від кратності загального резервування)

(мал. Залежності інтенсивності відмов системи від часу при різних кратностях загального резервування)

З графіків можна зробити наступні висновки:

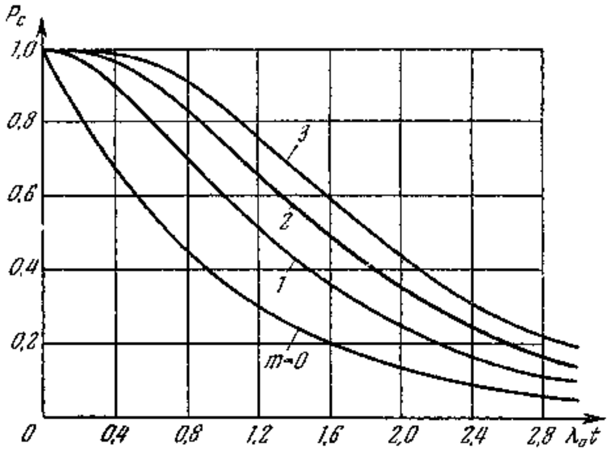
1. *Імовірність безвідмовної роботи резервованої системи завжди більше P(t) нерезервованої системи, причому, чим вище кратність резервування, тим більше імовірність безвідмовної роботи.* Залежності $P_C(\lambda_0 t)$ в області великих значень $\lambda_0 t$ близькі до експоненти і наближаються до функції P(t) нерезервованої системи.

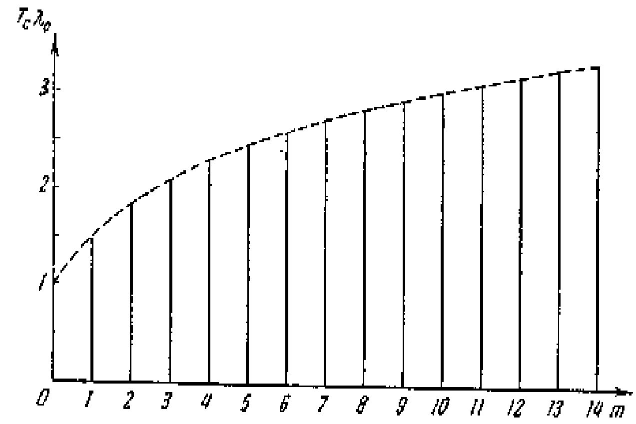
2. *Середній час безвідмовної роботи системи зі збільшенням кратності резервування росте винятково повільно.*

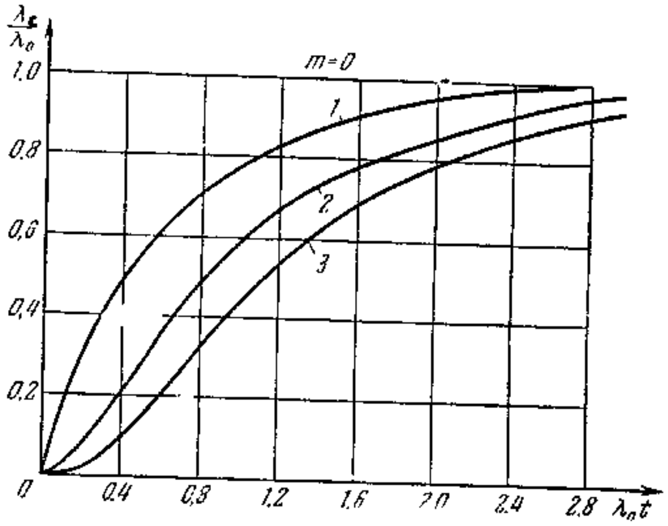
3. *Інтенсивність відмов резервованої системи починається з нуля і наближається в області великих значень $\lambda_0 t$ до інтенсивності відмов нерезервованої системи.*

4. *Ефективність резервування полягає в тому, що воно значно поліпшує кількісні характеристики надійності в області малих значень $\lambda_0 t$.*

З приведених графіків стає очевидним, що часи виникнення відмов резер-







вованої системи не задовольняють умовам стаціонарності, хоча часи відмов елементів резервованої системи є найпростішим потоком випадкових подій.

Виграш надійності – відношення відповідних характеристик надійності резервованої і нерезервованої систем.

Виграш надійності можна оцінити по всім її кількісним характеристикам. Оцінимо виграш надійності по наступним формулам

$$G_P(t)=\frac{1-\left(1-e^{-\lambda_0 t}\right)^m+1}{e^{-\lambda_0 t}};\quad G_Q(t)=\left(1-e^{-\lambda_0 t}\right)^m;\quad G_T=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}=\frac{T_C}{T_0}.$$

$$G_a(t)=\frac{a_C(t)}{a_0(t)}=\frac{\lambda_0(m+1)e^{-\lambda_0 t}\left(1-e^{-\lambda_0 t}\right)^m}{\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}};\quad G_a(t)=(m+1)\left(1-e^{-\lambda_0 t}\right)^m;$$

$$G_\lambda(t)=\frac{\lambda_C(t)}{\lambda_0(t)}=\frac{(m+1)e^{-\lambda_0 t}\left(1-e^{-\lambda_0 t}\right)^m}{1-\left(1-e^{-\lambda_0 t}\right)^{m+1}}.$$

Розглянемо виграш надійності за середнім часом безвідмовної роботи. Швидкість росту невелика. При m = 1 T_C збільшується в півтора разу, при m = 10 – тільки в три рази (інші величини збільшуються в багато разів, а T_C збільшується незначно). *Звідси можна зробити висновок. Багаторазове загальне резервування з постійно включеним резервом недоцільно, тому що воно не дозволяє при припустимому збільшенні ваги істотно підвищити надійність системи.*

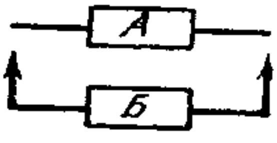
Основним достоїнством постійного резервування є простота і відсутність перемикаючих пристроїв.

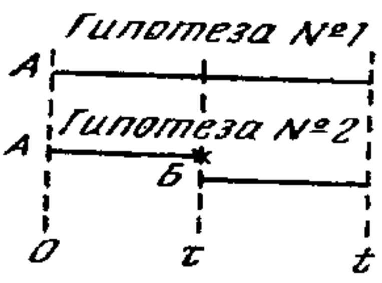
Недоліком постійного резервування варто вважати змушену витрату надійності (ресурсу) резервних елементів.

Загальне постійне резервування доцільне застосовувати для систем (вузлів), у яких мала інтенсивність відмов, або невеликий час роботи, для якого розраховується надійність. У цих випадках виграш надійності тим вище, ніж більш надійна система резервується. Це знижує ефективність застосування загального постійного резервування, тому що надійну систему немає необхідності резервувати взагалі.

8.3. Загальне резервування заміщенням.

Структурна схема системи резервованої по способу заміщення показана на рисунку.





Обчислимо імовірність безвідмовної роботи при наступних допущеннях.

1. Усі резервні системи до моменту заміщення основної рівнонадійні.

2. Перемикаючі пристрої в сенсі надійності ідеальні, тобто P(t) = 1.

3. Ремонт резервованої системи в процесі її роботи неможливий.

Нехай спочатку резервована система складається з однієї робочої й однієї резервної систем: основною системою буде А, а резервною – Б.

При прийнятих допущеннях відмови системи будуть відсутні при наступних можливих подіях:

1. Система А протягом часу t не відмовила.

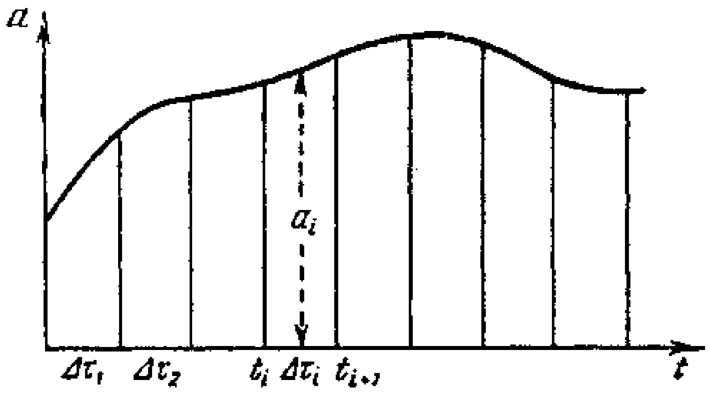
2. Система А відмовила в момент часу τ, а система Б, будучи справною до моменту заміщення τ, залишалася також справною протягом часу (t – τ).

Тоді на підставі формули повної імовірності імовірність безвідмовної роботи резервованої системи протягом часу t буде

$$P_C(t) = P_A(t) + P_{Б/А}(t,\tau),$$

де $P_A(t)$ – імовірність безвідмовної роботи системи А протягом часу t;

$P_{Б/А}(t,\tau)$ – імовірність безвідмовної роботи системи Б протягом часу (t – τ) за умови, що відмова системи А відбулася в момент часу τ.



Визначимо $P_{Б/А}(t,\tau)$. Момент часу τ є величиною випадковою. Нехай функція щільності розподілу імовірності часу ушкодження системи А (частота відмов системи А) буде мати вид, показаний на рисунку

Розіб'ємо проміжок часу t на інтервали тривалістю $\Delta\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Тоді імовірність виникнення відмов системи А в довільно узятому проміжку часу $t_{i+1} - t_i$ буде

$$Q_A(t_{i+1} - t_i) = \int_0^{t_{i+1}} a(t)dt - \int_0^{t_i} a(t)dt .$$

При малому значенні інтервалу Δτ ця імовірність буде пропорційна довжині інтервалу, тобто

$$Q_A(t_{i+1} - t_i) = a(t_i)\Delta\tau_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(t)dt .$$

Імовірність безвідмовної роботи резервованої системи за умови відмови системи А в момент часу t_i запишеться у виді

$$P_{Б/А}(t, t_i) = a(t_i)\Delta\tau_i P_Б(t, t_i)$$

де $P_Б(t, t_i)$ – імовірність безвідмовної роботи системи Б за проміжок часу (t- t_i) за умови, що до моменту t_i система Б була справна.

Імовірність виникнення відмови в проміжках часу $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$,..., $\Delta\tau_n$ буде відповідати величинам $a(t_1)\Delta\tau_1$, $a(t_2)\Delta\tau_2$,... $a(t_n)\Delta\tau_n$. Тоді, на підставі теореми про додавання імовірностей неспільних подій одержуємо імовірність безвідмовної роботи резервованої системи за умови відмови системи А протягом проміжку часу (0, t)

$$P_{Б/А}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta\tau_i}} a(t_i)\Delta\tau_i P_Б(t, t_i) .$$

Зменшуючи ділянки і переходячи до межі $\Delta\tau_i \to 0$ одержимо інтеграл

$$P_{Б/А}(t,\tau) = \int_0^t P_Б(t,\tau)a(\tau)d\tau .$$

Підставляючи отриманий вираз у вихідну формулу приходимо до остаточного виразу імовірності безвідмовної роботи резервованої системи у виді

$$P_C(t) = P_A(t) + \int_0^t P_Б(t,\tau)a(\tau)d\tau .$$

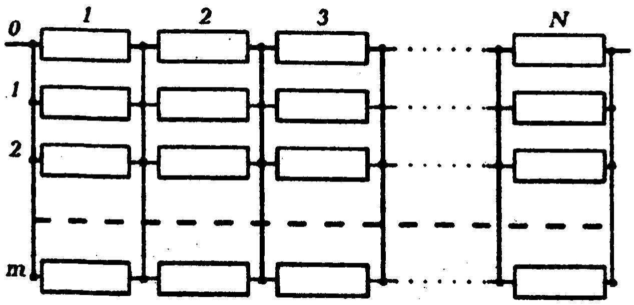
Дане співвідношення дозволяє одержати загальну формулу імовірності безвідмовної роботи системи з будь-якою кратністю резервування m.

8.4. Роздільне резервування з постійно включеним резервом і цілою кратністю.

Аналіз надійності при роздільному (поелементному) резервуванні і постійно включеному резерві проведемо при наступних допущеннях:

1. Відмови елементів резервованої системи є найпростішим потоком випадкових подій.
2. Перемикаючі пристрої ідеальні.
3. Основний елемент і всі що його резервують є рівнонадійними.
4. Ремонт резервованої системи в процесі її роботи неможливий.

При прийнятих допущеннях схема розрахунку надійності буде мати наступний вид.



Імовірність того, що відбудеться відмова системи через відмову елементів i-го типу, дорівнює добутку імовірностей відмов цих елементів, тобто:

$$Q_i(t) = \prod_{i=0}^{m} q_i(t) = \prod_{i=0}^{m} (1 - p_i(t)).$$

Тоді імовірність безвідмовної роботи системи через елементи i-го типу буде

$$P_i(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} (1 - p_i(t)).$$

Елементи основної системи і всіх систем, що її резервують, мають основне з'єднання. Тому імовірність безвідмовної роботи резервованої системи $P_C(t)$ дорівнює добутку імовірностей безвідмовної роботи елементів, з'єднаних у резервні групи, тобто

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^{N} P_i(t) = \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \prod_{i=0}^{m} (1 - p_i(t)) \right).$$

Тому що звичайно основний елемент і всі елементи, що його резервують, рівнонадійні, то

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^{N}\left(1 - [1 - p_i(t)]^{m+1}\right).$$

Знайдемо середній час безвідмовної роботи за умови існування експоненційного закону надійності для окремих елементів системи

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t}.$$

При рівнонадійності всіх елементів системи, тобто $p_i(t) = p_{i+1}(t)$ для i=1,2,... N-1 вираз для імовірності безвідмовної роботи всієї резервованої системи прийме вид

$$P_C(t) = \left[1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right]^N.$$

Знайдемо T_C обчисливши інтеграл при $P_C(t)$ у межах від 0 до ∞. Позначимо $1 - e^{-\lambda t} = x$; $\lambda e^{-\lambda t} dt = dx$ $dt = \dfrac{dx}{\lambda(1-x)}$.

Тоді: t=0, x=0; t=∞, x=1.

$$T_C = \int_0^\infty P_C(t)dt = \int_0^\infty \left[1 - \left[1 - e^{-\lambda t}\right]^{m+1}\right]^N dt = \int_0^1 \frac{\left(1 - x^{m+1}\right)^N}{\lambda(1-x)} dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^m\right)\left(1 - x^{m+1}\right)^{N-1} dx$$

При N=1маємо

$$T_{N=1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}.$$

Для будь-якого N – кількості елементів у системі – формула для знаходження середнього часу безвідмовної роботи буде мати вид

$$T_N = T_{N=1} + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i C_{N-1}^i T^{(i)}, \quad T^{(i)} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{im + j + 1},$$

чи у виді подвійної суми: $T_N = T_{N=1} + \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{N-1}(-1)^i C_{N-1}^i \sum\limits_{j=1}^{m+1}\dfrac{1}{im + j + 1}$, (1)

де C_{N-1}^i *- сполучення з (N-1) елементів по i*

$$C_{N-1}^i = \frac{(N-1)!}{i!(N-1-i)!}.$$

Сполученнями з n *елементів по* m *називаються підмножини, що відрізняються друг від друга тільки елементами* $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Формула дозволяє обчислити середній час безвідмовної роботи при будь-яких m і N. Однак, на практиці користатися цією формулою зручно лише в тому випадку, коли число елементів N не дуже велике. Це буває при резервуванні великих блоків і вузлів. Часто зустрічаються випадки, коли кратність резервування m невелика, але число елементів N, що резервуються, є великим. Це має місце в особливо надійних системах, коли резервуються всі чи велика частина елементів. Тому формулу (1) можна перетворити до більш зручної для зазначеного випадку при великих N

$$T_N = T_C = \frac{(N-1)!}{\lambda(m+1)}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\nu_i(\nu_i + 1)(\nu_i + 2)\ldots(\nu_i + N - 1)}, \quad \nu_i = \frac{i+1}{m+1}.$$

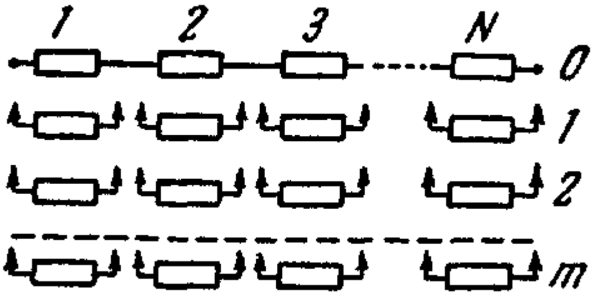
Дану формулу зручно застосовувати при малій кратності резервування і великому числі елементів у системі.

У системах керування використання поелементного резервування необхідно для підвищення надійності дрібних вузлів і елементів (резисторів, тиристорів, конденсаторів). При цьому кратність резервування не повинна перевищувати двох.

8.5. Кількісні характеристики надійності при роздільному резервуванні заміщенням.

З рисунка видно, що при відомих допущеннях імовірність безвідмовної роботи системи може бути обчислена за формулою

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^{N} P_i(t),$$



де $P_i(t)$ – імовірність безвідмовної роботи елемента і-го типу, резервованого за способом заміщення;

N – число елементів системи.

При рівнонадійності всіх елементів

$$P_C(t) = [P_i(t)]^N.$$

Для $P_i(t)$ справедливі формули імовірності безвідмовної роботи при загальному резервуванні з включенням резервних систем по способу заміщення.

При «холодному» стані резерву

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_i t)^i}{i!}.$$

При «теплому» стані резерву

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t} \cdot \left[1 + \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda 1}\right)^i\right], \text{ де } a_i = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right),$$

λ_i - інтенсивність відмови елемента і-го типу; λ_1 - інтенсивність відмови елемента і-го типу до моменту заміщення.

Тоді при рівній надійності елементів імовірність безвідмовної роботи резервної системи буде при «холодному» стані резерву

$$P_C(t) = e^{-N\lambda_i t}\left[\sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_i t)^i}{i!}\right]^N,$$

при «теплому» стані резерву

$$P_C(t) = e^{-N\lambda_i t} \cdot \left[1 + \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right]^N,$$

$\lambda_0 = N\lambda_i$ - інтенсивність відмови нерезервованої системи.

Одержимо формули для основних кількісних характеристик надійності. Одержати зручну формулу для середнього часу безвідмовної роботи в самому загальному виді не удасться. Це пов'язано з труднощями при обчисленні інтеграла від $P_C(t)$. Тому обмежимося випадками, коли кратність резервування дорівнює одиниці і двом. При m=1:

$$P_C(t) = e^{-\lambda_0 t}(1+\lambda t)^N \ ;$$

$$T_C = \int_0^\infty P_C(t)dt \Rightarrow T_C = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{N} C_N^i \frac{i!}{N^i}.$$

При m=2:

$$P_C(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2}\right)^N \ ;$$

$$T_C = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{N}\frac{C_N^i}{2^i}\sum_{j=0}^{N-1} C_{N-i}^j \frac{2(i+j)!}{N^{2i+j}}.$$

Подібним же чином можна одержати формули для T_C і при більш високих значеннях кратностей резервування m. Для складних систем, що мають велику кількість елементів N, обчислення настільки складні, що вимагають застосування обчислювальних машин.

Одержимо вирази частоти й інтенсивності відмов резервованої системи

$$a_C(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right]^{N-1},$$

де $\lambda_0 = N\lambda_i$ - інтенсивність відмов нерезервованої системи.

$$\lambda_C(t) = \frac{a_C(t)}{P_C(t)} = \frac{\lambda_0(\lambda t)^m}{m!\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}.$$

Оцінимо ефективність роздільного резервування заміщенням по виграшу надійності, що має місце в порівнянні з нерезервованою системою і системою з роздільним резервуванням з постійно включеним резервом.

Розглянемо виграш надійності по імовірності відмов. Тому що при поелементному резервуванні $\lambda << \lambda_0$, то найбільший інтерес представляє виграш надійності при малих значеннях λt. Якщо λt мало, то

$$G_Q(t) = \frac{(\lambda t)^m}{(m+1)!}; \ \ G_Q^n(t) = \frac{1}{(m+1)!}.$$

З даних формул видно, що для малих значень λt виграш надійності по імовірності відмов не залежить від складності основної системи і визначається тільки кратністю резервування, а в порівнянні з нерезервованою системою ще також добутком λt. Як звичайно, виграш надійності по імовірності відмов тим вище, ніж більш надійна система резервується (менше λ) і чим менше час роботи системи. Для того самого часу роботи t поелементне резервування в порівнянні з загальним дає при великих N величезний виграш надійності. На підставі викладеного можуть бути зроблені наступні висновки - *резервування заміщенням (загальне і роздільне) у порівнянні з постійним резервуванням за інших рівних умов є більш ефективним, тобто дає більший виграш у надійності.*

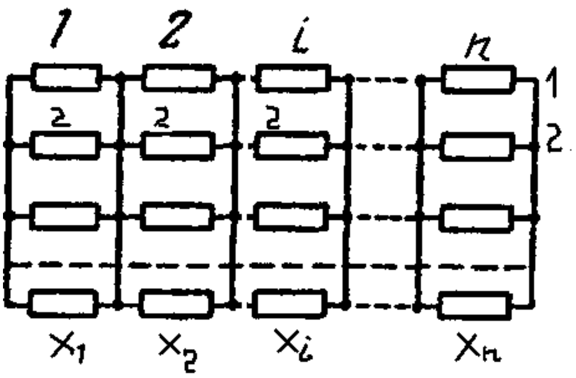
9. Оптимальне резервування.

9.1. Формулювання стандартних задач оптимального резервування.

При використанні резервування для підвищення надійності різних систем виникає задача не тільки забезпечити задані показники надійності, але і зробити це як можна більш економічно, з найменшими сумарними витратами на резервні елементи.

Задачі оптимального резервування виникають тоді, коли існують певні обмеження на затрачувані кошти для підвищення надійності.

На практиці як витрати, що йдуть на підвищення надійності можуть бути розглянуті різні характеристики системи, такі як її вартість, маса чи габарити. *Звичайно вдається виділити одну найбільш важливу характеристику, що називають «вагою» чи «вартістю» системи поза залежністю від фізичної сутності даної характеристики резервованої системи, тобто «вартість» розуміється широко, тому одиницею виміру в даному випадку може бути і вага, і габарити. Як основний показник надійності системи, що потрібно поліпшити шляхом резервування, узята імовірність безвідмовної роботи резервованої системи.*



Розглянемо систему, що представляє собою послідовне з'єднання взаємонезалежних ділянок. Ділянкою системи в даному випадку будемо називати таку частину основної системи, для резервування якої можуть бути використані однотипні компоненти.

Розглянемо основну систему, що складається з n послідовно з'єднаних незалежних підсистем.

Підсистемою називають звичайно таку частину системи, що має свої, незалежні від інших підсистем, резервні елементи.

Часто підсистема – це група однотипних елементів, незалежно від того, де вони розташовані.

Кожна підсистема характеризується своїм значенням імовірності безвідмовної роботи.

Зрозуміло, що чисельне значення цього показника надійності, тобто $P_i(t)$ залежить від того, яка кількість елементів у даній підсистемі, тобто $P_i(t)$ є функція числа елементів кожного типу.

Імовірність безвідмовної роботи для і-тої підсистеми за умови, що вона має X_i елементів, будемо позначати $P_i(X_i)$, де X_i - кількість елементів і-тої підсистеми.

Імовірність безвідмовної роботи всієї системи в цілому є функція, що залежить від усього набору елементів кожної з підсистем $X_1, X_2, .. X_n$.

$$P(X_1, X_2, .. X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot ... \cdot P(X_n) = \prod_{i=1}^{n} P_i(X_i).$$

Набір чисел $X_1, X_2,..X_n$*, що характеризують склад елементів у системі, називають вектором складу системи і позначають* $X = (X_1, X_2,..X_n)$.

Як уже говорилося, задачі оптимального резервування виникають тоді, коли існують обмеження на затрачувані для підвищення надійності ресурси (кошти). Тому потрібно визначити характер функцій витрат. *Витрати того чи іншого виду ресурсів визначаються кількістю резервних елементів. Найбільш простим є припущення про те, що «вартість» системи лінійно зростає зі збільшенням кількості резервних елементів, тобто*

$$C(X) = C(X_1, X_2,..X_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i ,$$

де C_i *- вартість одного елемента і-того типу;* $C(X_1, X_2,..X_n)$ *- функція витрат.*

Задачі оптимального резервування для випадку одного фактора, що лімітує, можуть бути сформульовані в такий спосіб.

Пряма задача.

Потрібно знайти таку кількість резервних елементів для кожної підсистеми, щоб імовірність безвідмовної роботи системи в цілому була не менш заданої P_0 *при мінімальних сумарних витратах на всі резервні елементи.*

У формальному записі ця задача виглядає в такий спосіб:
знайти такий вектор складу системи X_0 *при якому виконується рівність* $C(X_0) = \min\limits_{X_0 \in X} C(X)$. *При цьому виконується нерівність* $P(X_0) \geq P_0$.

Зворотна задача.

Потрібно знайти таку кількість резервних елементів для кожної підсистеми, щоб вартість усієї системи не перевищувала заданого значення C_0 *при забезпеченні максимально можливої імовірності безвідмовної роботи.*

У формальному записі ця задача може виглядати в такий спосіб:
знайти такий вектор складу системи X_0 *при якому виконується рівність* $P(X_0) = \max\limits_{X_0 \in X} P(X)$. *При цьому виконується нерівність* $C(X_0) \leq C_0$. X – безліч усіх можливих розв’язань.

Існує, принаймні, чотири методи розв’язання поставлених вище задач оптимального резервування:
- метод перебору;
- метод множників Лагранжа;
- градієнтний метод (метод найшвидшого спуску);
- метод динамічного програмування.

9.2. Метод множників Лагранжа.

Метод прямого перебору не дозволяє вирішувати задачу оптимального резервування через неозоро велике число можливостей при ще порівняно малому числі ділянок резервування.

Метод множників Лагранжа являє собою класичний метод відшукання умовного максимуму функції. Суть методу множників Лагранжа полягає в *тому, що розширюється область визначення координат вектора складу системи* X *введенням невизначеного множника Лагранжа і задача відшукання умовного максимуму зводиться до задачі знаходження абсолютного максимуму. Ця задача розв'язується методом класичного аналізу, що в загальному випадку дозволяє знайти вектор складу системи* X *з нецілими координатами. На заключному етапі проводиться перехід до вектора, координати якого будуть цілими числами.*

Розглянемо функцію надійності для системи з постійним роздільним резервуванням.

Імовірність безвідмовної роботи i-ої групи елементів

$$P(X_1, X_2, ..X_n) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - q_i^{X_i}\right), \qquad (1)$$

де q_i *- імовірність відмови елементів кожного типу;* n *- кількість різних елементів;* X_i *– кількість елементів кожної підсистеми.*

Метод дозволяє вирішити зворотну задачу оптимального резервування. Необхідно забезпечити найбільше значення імовірності безвідмовної роботи за умови

$$C(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i = C_0 . \qquad (2)$$

Розширюємо область визначення функцій $P(X_1, X_2, ..X_n)$ і $C(X_1, X_2, ..X_n)$, вважаючи, що компоненти вектора безперервні.

Даний метод вимагає побудови нової функції, що називається функцією Лагранжа. Уводимо зазначену функцію

$$\Phi(X, \lambda) = P(X) - \lambda[C(X) - C_0].$$

Необхідна умова існування екстремуму наступна

$$\frac{\partial \Phi(X, \lambda)}{\partial X_i} = 0, \quad i=1,2\ldots n, \quad \frac{\partial \Phi(X, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 .$$

Ці n+1 рівнянь дають можливість визначити оптимальний набір складових вектора X.

$$\Phi(X, \lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - q_i^{X_i}\right) - \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} C_i X_i - C_0\right],$$

де λ – додатковий параметр, що називається множником Лагранжа.

$$\frac{\partial \Phi(X, \lambda)}{\partial X_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - q_i^{X_i}\right)}{\left(1 - q_i^{X_i}\right)}\left(q_i^{X_i}\right)\ln\left(\frac{1}{q_i}\right) - \lambda C_i = 0 .$$

Перетворимо даний вираз

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - q_i^{X_i}\right)\ln\left(\frac{1}{q_i}\right)}{\lambda C_i} = \frac{1 - q_i^{X_i}}{q_i^{X_i}} . \qquad (3)$$

Уведемо нові позначення

$$y=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1-q_i^{X_i}\right)}{\lambda}\ ; \qquad a_i=\frac{C_i}{\ln\left(\frac{1}{q_i}\right)}.$$

Тоді рівність (3) перепишеться в такий спосіб

$$\frac{y}{a_i}=\frac{1-q_i^{X_i}}{q_i^{X_i}}\ ,$$

відкіля знаходимо $q_i^{X_i}$

$$y\cdot q_i^{X_i}=a_i-a_iq_i^{X_i}\Rightarrow q_i^{X_i}=\frac{a_i}{y+a_i}.$$

Після логарифмування

$$X_i=\frac{\ln\left(\frac{a_i}{y+a_i}\right)}{\ln q_i}=\frac{\ln\left(\frac{y+a_i}{a_i}\right)}{\ln\left(\frac{1}{q_i}\right)}.$$

Підставляємо це значення в (2) і одержимо

$$C(X)=\sum_{i=1}^{n}C_i\frac{\ln\left(\frac{y+a_i}{a_i}\right)}{\ln\left(\frac{1}{q_i}\right)}=C_0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i\ln\left(\frac{y+a_i}{a_i}\right)=C_0.$$

Після відповідних перетворень

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\ln(y+a_i)=C_o+\sum_{i=1}^{n}a_i\ln a_i\ . \qquad (4)$$

При зростанні *y* від 0 до ∞ значення лівої частини рівняння зростає від $\sum_{i=1}^{n}a_i\ln a_i$ до ∞. Отже, існує єдиний корінь рівняння (4) y_0. Тоді розв’язання задачі здійснюється в такий спосіб:

1. Для кожного блоку обчислюють коефіцієнти $a_i=\frac{C_i}{\ln\left(\frac{1}{q_i}\right)}$;

2. Знаходять корінь рівняння (4) y_0;

3. Визначають $X_i^0=\frac{\ln\left(\frac{y_0+a_i}{a_i}\right)}{\ln\left(\frac{1}{q_i}\right)}$.

Величини можуть мати будь-які значення, однак становлять інтерес лише такі цілі значення X_i^*, що дають максимум функції $P(X_1,X_2,..X_n)$ і задовольняють умові

$$\sum_{i=1}^{n}X_i^*C_i\le C_0\ .$$

4. Серед цілих чисел, що відрізняються від X_i^0 не більше ніж на одиницю, знаходять такі X_i^*, котрі в порівнянні з іншими можливими системами цілих чисел відповідають наступним умовам:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\left(X_i^0 - X_i^*\right) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} C_i\left(X_i^0 - X_i^*\right) = \min .$$

Якщо кілька наборів $\left\{X_i^*\right\}$ забезпечують однаковий мінімум $\sum_{i=1}^{n} C_i\left(X_i^0 - X_i^*\right)$, то необхідно вибрати такий вектор складу системи X*, що мінімізує суму $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^0 - X_i^*\right)^2$.

5. Після того, як знайдений оптимальний вектор складу системи X*, знаходять імовірність безвідмовної роботи резервованої системи

$$P = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - q_i^{X_i^*}\right).$$

9.3. Градієнтний метод.

Рух до екстремуму здійснюється по напрямках максимальній частинній похідній (чи її аналога – відносного збільшення функції). Цей спосіб руху до екстремуму особливо зручний у випадках, коли аргументи Xi функції P(X) є дискретними.

Алгоритм пошуку оптимальної кількості резервних систем наступний.

Представимо процес створення оптимальної резервованої системи у виді наступного багатокрокового процесу. Розглядається система, що складається з n підсистем. На початковому етапі (споконвічно) передбачається, що не в однієї з підсистем немає резервних елементів, тобто $X_1^0 = X_2^0 = ... X_n^0 = 0$. На першому етапі розраховується питомий приріст імовірності безвідмовної роботи для кожної підсистеми, тобто найбільший приріст на одну одиницю вартості.

1. Обчислюються значення питомого приросту γ_i для кожної підсистеми, i=1,2,…,n.

$$\gamma_i^{(0)}\left(X_i^{(0)}\right) = \frac{P_i\left(X_i^{(0)} + 1\right) - P_i\left(X_i^{(0)}\right)}{c_i \cdot P_i\left(X_i^{(0)}\right)}; \; X_i^{(0)} = 0 .$$

2. Вибирається найбільша з величин $\gamma_i^{(0)}$

$$\gamma_k^{(1)} = \gamma_k^{(0)}\left(X_k^{(0)}\right) = \max_{1 \leq i \leq n} \gamma_i^{(0)}\left(X_i^{(0)}\right),$$

де k – номер підсистеми з найбільшим питомим збільшенням функції $P_i(X)$.

3. Знаходимо значення X_k на наступному кроці

$$X_k^{(1)} = X_k^{(0)} + 1.$$

4. Інші $X_i^{(1)}$ для всіх i крім i=k залишаються незмінними, тобто

$$X_i^1 = X_i^0 = 0 \text{ для } i \neq k.$$

5. Будується в підсумку новий вектор складу системи

$$X^{(1)} = \left(X_i^{(1)}, X_k^{(1)}\right).$$

6. Обчислюються нові значення $\gamma_i^{(1)}\left(X_i^{(1)}\right)$. При цьому $\gamma_k^{(1)}\left(X_k^{(1)}\right)$ буде відмінним від того значення, що воно мало на попередньому кроці, оскільки в цієї

комірці на попередньому кроці число резервних елементів збільшилося на одиницю. Інші збільшення $\gamma_i^{(1)}\left(X_i^{(1)}\right)$ не змінюються в порівнянні з їхніми значеннями на попередньому кроці, оскільки в цих підсистемах кількість резервних елементів не змінилося

$$\gamma_k^{(1)}\left(X_k^{(1)}\right)=\frac{P_k\left(X_k^{(1)}+1\right)-P_k\left(X_k^{(1)}\right)}{c_k\cdot P_k\left(X_k^{(1)}\right)}.$$

7. Інші $\gamma_i^{(1)}\left(X_i^{(1)}\right)$ для $i\neq k$ не міняються, тобто

$$\gamma_i^{(1)}\left(X_i^{(1)}\right)=\gamma_i^{(0)}\left(X_i^{(0)}\right).$$

З цих даних відшукується знову найбільше значення, точніше знаходиться номер підсистеми, для якої $\gamma_i^{(1)}$ найбільше. Знайшовши необхідний номер комірки (підсистеми) збільшуємо кількість її резервних елементів на одиницю.

Процес повторюється починаючи з пункту 1. При розв'язанні прямої задачі необхідно вести контроль значення $P\left(X^{(k)}\right)$, що виходить на кожнім кроці.

Дане значення $P\left(X^{(k)}\right)$ порівнюється на кожнім кроці з заданим значенням P_0. Процес розв'язання припиняється на такому кроці N, коли виконується умова

$$P\left(X^{(N-1)}\right)<P_0\leq P\left(X^{(N)}\right).$$

За шукане розв'язання приймається вектор складу системи $X^{(N)}$.

При розв'язанні зворотної задачі оптимального резервування необхідно вести контроль значення $C\left(X^{(k)}\right)$, що виходить на кожнім кроці. Процес розв'язання припиняється на такому кроці N, коли має місце умова

$$C\left(X^{(N-1)}\right)<C_0\leq C\left(X^{(N)}\right).$$

За шукане розв'язання приймається вектор складу системи $X^{(N-1)}$.

10. Розрахунок надійності відновлюваних виробів.

Під відновленням розуміються будь-які дії, що приводять до поновлення функціонування системи після її відмови.

Дії можуть бути не тільки ремонтом системи (наприклад, повна заміна системи новою), що відмовила.

Усе викладене вище по резервуванню відноситься до випадку, коли працюючу резервовану систему не можна ремонтувати. Коли в процесі роботи системи можна відновлювати деякі з елементів, що відмовили, удається домогтися ще більшого збільшення надійності.

Основне коло задач розглянутих при розрахунку надійності відновлюваних виробів, відноситься до наступного процесу. Справний виріб починає експлуатуватися в момент часу $t=0$ і проробивши випадковий час X_1 виходить з ладу. На ремонт потрібно випадковий час Y_1. Цей процес продовжується протягом усього терміну служби виробу, причому величини X_i і Y_i ($i=1,2\ldots$) незалежні.

10.1. Розрахунок надійності системи методом простору станів.

Для оцінки надійності системи зазначеним методом необхідно спочатку описати систему за допомогою її станів і можливих переходів між ними. Стан системи визначається станом кожного елемента системи.

Можливі стани елементів наступні:

1. Елемент працездатний;
2. Елемент відмовив;
3. Елемент ремонтується.

Усі можливі стани, у яких може знаходитися система, утворюють простір станів.

Основною перевагою цього методу є можливість використання моделі марковських процесів для математичного опису переходів системи з одного стану в інший.

Процес зміни станів об'єкта викликається потоками відмов і потоками відновлень. Любий імовірнісний процес необхідно охарактеризувати деякими кількісними оцінками, а також потрібно вказати тип процесу. Найбільш придатним для опису процесів, що відбуваються в багатьох областях науки і техніки, є марковський процес.

У марковських випадкових процесах імовірність будь-якого стану об'єкта в майбутньому залежить від стану об'єкта в даний момент часу і не залежить від того, яким образом об'єкт прийшов у цей стан, тобто не залежить від передісторії процесу. Інакше кажучи, імовірність станів для якогось моменту часу в майбутньому не залежить від тих станів, у яких процес знаходився в минулому, а залежить тільки від стану, у якому процес знаходиться зараз. Такий процес ще називають процесом без післядії.

Любий випадковий процес корисно супроводжувати його графічним зображенням – графом можливих станів системи. Граф – одна з найпростіших математичних моделей взаємодіючих систем, що складається з крапок чи кіл з'єднаних спрямованими відрізками. *Математична модель станів системи і їхніх змін звичайно зображується у виді графа станів. На схемі графа кружечками зображують можливі стани системи, що виникають при відмовах її елементів. Стрілки показують напрямки переходів з одного стану в інше, біля стрілок показані інтенсивності переходів.*

Марковський випадковий процес існує при найпростіших потоках відмов і відновлень. Експоненційний розподіл часу роботи до відмови і часу відновлення працездатності – необхідні умови для марковського процесу.

Будуть розглядатися тільки експоненційні моделі, тобто моделі таких систем, часи роботи і відновлення елементів яких підкоряються експоненційним законам.

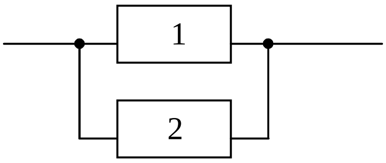
Найважливіша характеристика марковського процесу – імовірність переходу об'єкта в який-небудь стан за деякий проміжок часу. Інформація про імовірності переходу об'єкта в різні стани дозволяє визначити імовірності кожного з можливих станів процесу.

λ_{ij} *– інтенсивність переходу з i–того стану в j–тое (інтенсивність відмов)*

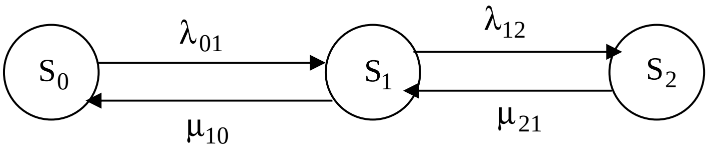
μ_{ij} *– інтенсивність зворотного переходу з j-того стану в i–тое (інтенсивність відновлення).*

Колмогоров запропонував систему диференціальних рівнянь для визначення імовірностей кожного зі станів.

Застосування диференціальних рівнянь для визначення імовірностей станів системи розглянемо на прикладі об'єкта зображеного на рисунку.



Число станів об'єкта – три. Стан S_0 – два елементи, що входять в об'єкт, працездатні. Стан S_1 – один з елементів, що входить в об'єкт, в стані відмови, а інший працездатний. S_2 – два елементи в стані відмови.



Граф станів випадкового процесу, коли число станів дорівнює трьом, зображений на наступному рисунку і відбиває всі можливі стани системи.

Звичайно припускають, що:

- *об'єкти, що відмовили, починають негайно відновлюватися;*
- *надійність засобів контролю ідеальна;*
- *за малий проміжок часу Δt імовірність більш одного переходу системи між своїми станами зневажно мала.*

Імовірність того, що об'єкт на інтервалі часу Δt, що примикає до часу t, тобто (t, t+Δt), знаходиться в стані S_0, дорівнює добутку імовірності того, що об'єкт у момент часу t знаходиться в нульовому стані, на імовірність того, що він не перейде на інтервалі часу Δt зі стану S_0 у стан S_1 плюс добуток імовірності того, що об'єкт у момент часу t знаходиться в стані S_1 на імовірність того, що він перейде в стан S_0 зі стану S_1 за час Δt. Це формулювання можна записати в такий спосіб

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\big(1 - P_{01}(\Delta t)\big) + P_1(t)\cdot P_{10}(\Delta t).$$

Аналогічно записуються рівняння для імовірностей того, що об'єкт на інтервалі часу Δt, що примикає до часу t знаходиться в станах S_1 і S_2. У результаті виходить система рівнянь

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\big(1 - P_{01}(\Delta t)\big) + P_1(t)\cdot P_{10}(\Delta t) \\ P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\big(1 - \big(P_{12}(\Delta t) + P_{10}(\Delta t)\big)\big) + P_0(t)\cdot P_{01}(\Delta t) + P_2(t)\cdot P_{21}(\Delta t) \\ P_2(t+\Delta t) = P_2(t)\big(1 - P_{21}(\Delta t)\big) + P_1(t)\cdot P_{12}(\Delta t) \end{cases}$$

Замінимо вирази, що зв'язують P_{ij} і λ_{ij}, тобто імовірності переходів і інтенсивності переходів. Імовірність переходу об'єкта зі стану S_i у стан S_j унаслідок відмови з інтенсивністю λ_{ij}

$$P_{ij}(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda_{ij}\Delta t} \approx 1 - \big(1 - \lambda_{ij}\Delta t\big) = \lambda_{ij}\Delta t.$$

Вираз $e^{-\lambda_{ij}\Delta t}$ розкладається в ряд і беруться тільки лінійні члени, що складаються

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$e^{-\lambda_{ij}\Delta t} = 1 - \lambda_{ij}\Delta t + \frac{\big(\lambda_{ij}\Delta t\big)^2}{2} - \ldots$$

Стан S_j характеризується на одиницю більшою кількістю елементів, що відмовили, чим у стані S_i.

Імовірність переходу об'єкта зі стану S_j у стан S_i унаслідок відновлення з інтенсивністю μ_{ij} дорівнює

$$P_{ij}(\Delta t) = 1 - e^{-\mu_{ij}\Delta t} \approx 1 - (1 - \mu_{ij}\Delta t) = \mu_{ij}\Delta t .$$

Імовірність відсутності переходів зі стану S_1 у стани S_2 і S_0

$$1 - (P_{12}(\Delta t) + P_{10}(\Delta t)) = 1 - (\lambda_{12}\Delta t + \mu_{10}\Delta t).$$

Підставимо отримані вирази у вихідну систему рівнянь

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda_{01}\Delta t) + P_1(t)\cdot\mu_{10}\Delta t \\ P_1(t+\Delta t) = P_1(t)(1 - \lambda_{12}\Delta t - \mu_{10}\Delta t) + P_0(t)\cdot\lambda_{01}\Delta t + P_2(t)\cdot\mu_{21}\Delta t \\ P_2(t+\Delta t) = P_2(t)(1 - \mu_{21}\Delta t) + P_1(t)\cdot\lambda_{12}\Delta t \end{cases} \qquad (2)$$

З правої частини рівнянь перенесемо в ліву частину $P_i(t)$, розділимо праву і ліву частини рівнянь на Δt. Спрямуємо $\Delta t \to 0$. Врахуємо, що $\lim \frac{P_i(t+\Delta t) - P_i(t)}{\Delta t} = \frac{dP_i(t)}{dt}$. У результаті зазначених дій система рівнянь (2) прийме вид

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + P_1(t)\cdot\mu_{10} \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = P_0(t)\cdot\lambda_{01} - (\lambda_{12} - \mu_{10})\cdot P_1(t) + P_2(t)\cdot\mu_{21} \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = P_1(t)\cdot\lambda_{12} - P_2(t)\mu_{21} \end{cases}$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення імовірностей $P_i(t)$ *знаходження системи в момент часу t у кожнім з можливих станів звичайно складають по графу станів. При цьому користуються наступним правилом.*

Для кожного можливого стану об'єкта записується рівняння, у лівій частині якого знаходиться похідна за часом від імовірності знаходження системи в i–том стані в момент часу t, тобто $\frac{dP_i(t)}{dt}$. *Число доданків у правій частині дорівнює числу стрілок, що з'єднують розглянутий стан з іншими станами. Кожний з доданків буде дорівнювати добутку інтенсивності переходу на імовірність того стану, з якого виходить стрілка. Знак добутку позитивний, якщо стрілка входить у розглянутий стан, і негативний, якщо стрілка графа виходить з даного стану.*

Система диференціальних рівнянь доповнюється нормувальною умовою $\sum_{i=0}^{n} P_i(t) = 1$, де $P_i(t)$ - імовірність присутності (знаходження) системи в i–том стані; (n+1) – число можливих станів.

Уся множина можливих станів системи розбивається на підмножину станів n_1, *у який система працездатна, і підмножину станів* n_2, *у який система непрацездатна* $n_1 + n_2 = n$.

Для оцінки надійності систем з відновленням використовують поняття функцій готовності $\Gamma(t)$ *і простою* $\Pi(t)$. *Функція готовності* $\Gamma(t)$ *дорівнює су-*

мі імовірностей знаходження системи в працездатних станах $\Gamma(t)=\sum_{i=1}^{n_1}P_i(t)$, *де* $P_i(t)$ - *імовірність знаходження системи в і–тому працездатному стані.*

Функція простою $\Pi(t)$ *дорівнює сумі імовірностей знаходження системи в непрацездатних станах* $\Pi(t)=\sum_{i=n_1+1}^{n}P_i(t)$.

Функції готовності і простою утворять повну групу подій

$$\Gamma(t)+\Pi(t)=1.$$

Функція готовності являє собою імовірність застати (знайти) виріб у справному стані в будь-який момент часу.

Зручно на початку знаходити імовірність знайти виріб у несправному стані тобто $\Pi(t)$, а потім - функцію готовності $\Gamma(t)=1-\Pi(t)$.

Сталі значення $\Gamma(t),\Pi(t)$ називають коефіцієнтами готовності k_Γ і простою k_Π.

$$k_\Gamma=\lim_{t\to\infty}\Gamma(t), \quad k_\Pi=\lim_{t\to\infty}\Pi(t).$$

Це один шлях розрахунку k_Γ *і* k_Π, *тобто вирішують систему диференціальних рівнянь, знаходять значення* $\Gamma(t),\Pi(t)$ *і далі граничним переходом знаходять* k_Γ *і* k_Π. *Другий шлях наступний. Розглядають сталий режим експлуатації при* $t\to\infty$. *При цьому всі похідні* $\frac{dP_i(t)}{dt}=0$ *і система диференціальних рівнянь переходить у систему алгебраїчних рівнянь. Вирішуємо цю систему і знаходимо* k_Γ *і* k_Π.

Надійність відновлюваного виробу звичайно визначається за умови, що в момент включення всі елементи справні. Тоді початкові умови мають вид

$$P_i(0)=\begin{cases}1, i=0\\ 0, i\neq 0\end{cases}.$$

Імовірність безвідмовної роботи $P_C(t)$ *відновлюваного виробу знаходять шляхом розв'язання системи диференціальних рівнянь складених за графом станів даного виробу при виключенні з правих частин рівнянь доданків, що містять інтенсивності переходів зі станів, що відмовили.*

Стани, що відмовили, бувають поглинаючими і відбиваючими.

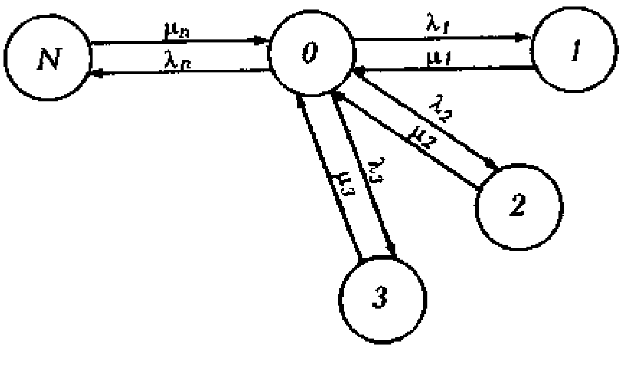
Якщо система, потрапивши в стан, що відмовляє, з нього більше не виходить, то даний стан, що відмовляє, називають поглинаючим. У противному випадку – відбиваючим.

10.2. Розрахунок надійності нерезервованих систем з відновленням.

Система з відновленням (ремонтуємі системи) – це такі системи, у яких здійснюється технічне обслуговування з метою підтримки необхідного рівня працездатності системи при її експлуатації. Зрозуміло, що поки ремонт продовжується, система знаходиться в стані відмінному від попереднього працездатного стану.

Для випадку, коли система з відновленням складається з логічно послідовного з'єднання N елементів, на графі станів буде зображено одне працездатне і N отказових станів системи.

На основі графа станів запишемо систему рівнянь Колмогорова за правилом, сформульованим вище.



Граф станів системи з відновленням без резервування

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_2(t) + \ldots + \mu_N P_N(t) - P_0(t)\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = P_0(t)\cdot\lambda_1 - \mu_1 P_1(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = P_1(t)\cdot\lambda_2 - P_2(t)\mu_2 \\ . \\ . \\ \dfrac{dP_N(t)}{dt} = P_0(t)\cdot\lambda_N - \mu_N\cdot P_N(t) \end{cases}$$

Для такого випадку функція готовності має вид $\Gamma(t) = P_0(t)$*, а функція простою дорівнює* $\Pi(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} P_i(t)$.

При сталому режимі одержимо систему алгебраїчних рівнянь. Вирішуючи цю систему, одержимо значення коефіцієнта готовності

$$k_\Gamma = \lim_{t\to\infty}\Gamma(t) = \lim_{t\to\infty} P_0(t) = P_0 = \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}}.$$

Коефіцієнт простою дорівнює

$$k_\Pi = 1 - k_\Gamma = 1 - \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}}.$$

10.3. Розрахунок надійності резервованих систем з відновленням.

У системах з відновленням при наявності резерву відмова основної системи не приводить до втрати працездатності. У випадку, коли кратність резервування дорівнює і більше двох, то може відбутися, що в отказовом стані знаходяться дві чи більш системи, тобто системи після відмови відразу починають відновлюватися. Процес ремонту може організовуватися по черзі якщо одна ремонтна бригада, чи якщо є достатня кількість ремонтних бригад, то одночасно відновлюються всі непрацездатні системи чи елементи. У першому випадку відновлення називають обмеженим, у другому – необмеженим.

Розглянемо графи станів, коли система складається з основної і m резервних ненадійних систем, при двох способах відновлення. Ця система може знаходитися в таких станах:

0 – усі системи справні;

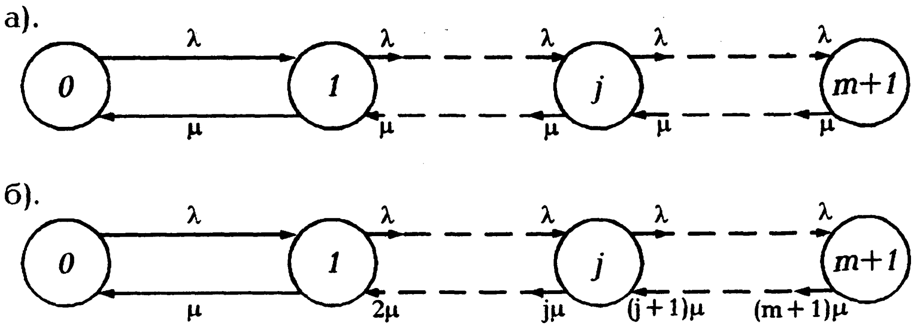
1 – відмовила основна система;

2 – відмовила основна і перша резервна системи

і т.д. до

m+1 – відмовили всі системи.

Очевидно, що (m+1) стан буде отказовим, а всі інші працездатними. Графи станів у випадку обмеженого і необмеженого відновлення при рівнонадійних системах показані на рисунку.



Граф станів системи з відновленням і ненавантаженим резервом.

а) обмежене відновлення;

б) необмежене відновлення.

Варто сказати, що у випадку необмеженого відновлення є переходи тільки між сусідніми станами і відсутні переходи через декілька станів. Хоча таке допущення здається має право на існування. Відсутність переходів між несусідніми станами пояснюється тим, що такі переходи вимагають для свого існування збігу двох чи більшої кількості подій у малому інтервалі часу Δt. При $\Delta t \to 0$ імовірність подібного збігу є нескінченно малою, тому вважають, що переходи, що передбачають збіг завершень ремонту двох і більше виробів, не відбуваються. Рівняння Колмогорова для графа а) запишуться так

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_j(t)}{dt} = P_{j-1}(t)\cdot\lambda - (\lambda+\mu)P_j(t) + P_{j+1}(t)\cdot\mu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_{m+1}(t)}{dt} = P_m(t)\cdot\lambda - \mu\cdot P_{m+1}(t) \end{cases}$$

При $\Delta t \to \infty$ одержуємо систему алгебраїчних рівнянь, що має наступні розв'язання. Один отказовий стан (m+1), тому коефіцієнт простою наступний

$$k_\Pi = \lim_{t\to\infty} \Pi(t) = \lim_{t\to\infty} P_{m+1}(t) = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m+1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j}.$$

$$k_\Gamma = 1 - k_\Pi$$

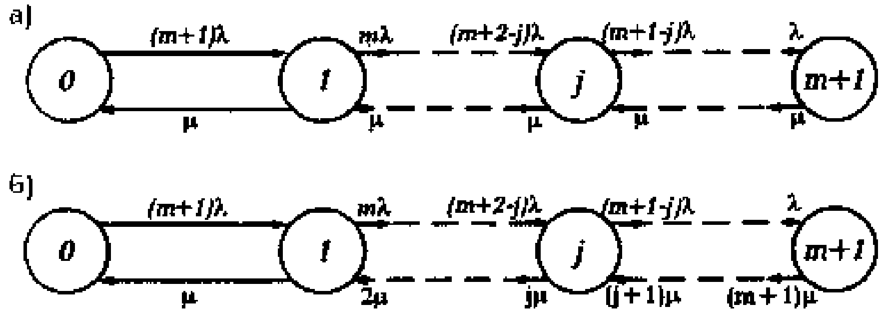
Подібним чином записують рівняння для випадку необмеженого відновлення

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_j(t)}{dt} = P_{j-1}(t)\cdot\lambda - (\lambda + j\cdot\mu)P_j(t) + (j+1)\mu P_{j+1}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_{m+1}(t)}{dt} = P_m(t)\cdot\lambda - (m+1)\mu\cdot P_{m+1}(t) \end{cases}$$

Вирішимо систему алгебраїчних рівнянь і знаходимо коефіцієнт простою

$$k_\Pi = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{j!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m+1-j}}.$$

Розглянемо графи станів системи з навантаженим резервом при обмеженому і необмеженому відновленні. Відмінність від попереднього випадку полягає в тім, що можуть одночасно відмовляти й основна і всі резервні системи. Можливі стани ті ж, що й у попередньому випадку.



Граф станів відновлюваної системи з навантаженим резервом
а) з обмеженим відновленням;

б) з необмеженим відновленням.

Рівняння Колмогорова для варіанта б)

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -(m+1)\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_j(t)}{dt} = (m+2-j)P_{j-1}(t)\cdot\lambda - \left(\lambda(m+1-j) + j\cdot\mu\right)P_j(t) + \left(j+1\right)\mu P_{j+1}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_{m+1}(t)}{dt} = P_m(t)\cdot\lambda - \left(m+1\right)\mu\cdot P_{m+1}(t) \end{cases}$$

Коефіцієнт простою $k_\Pi = \lim\limits_{t\to\infty}\left(P_{m+1}(t)+1\right) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{m+1}$*. Для випадку а) диференціальні рівняння складаються аналогічно,* $k_\Gamma = 1 - k_\Pi$.

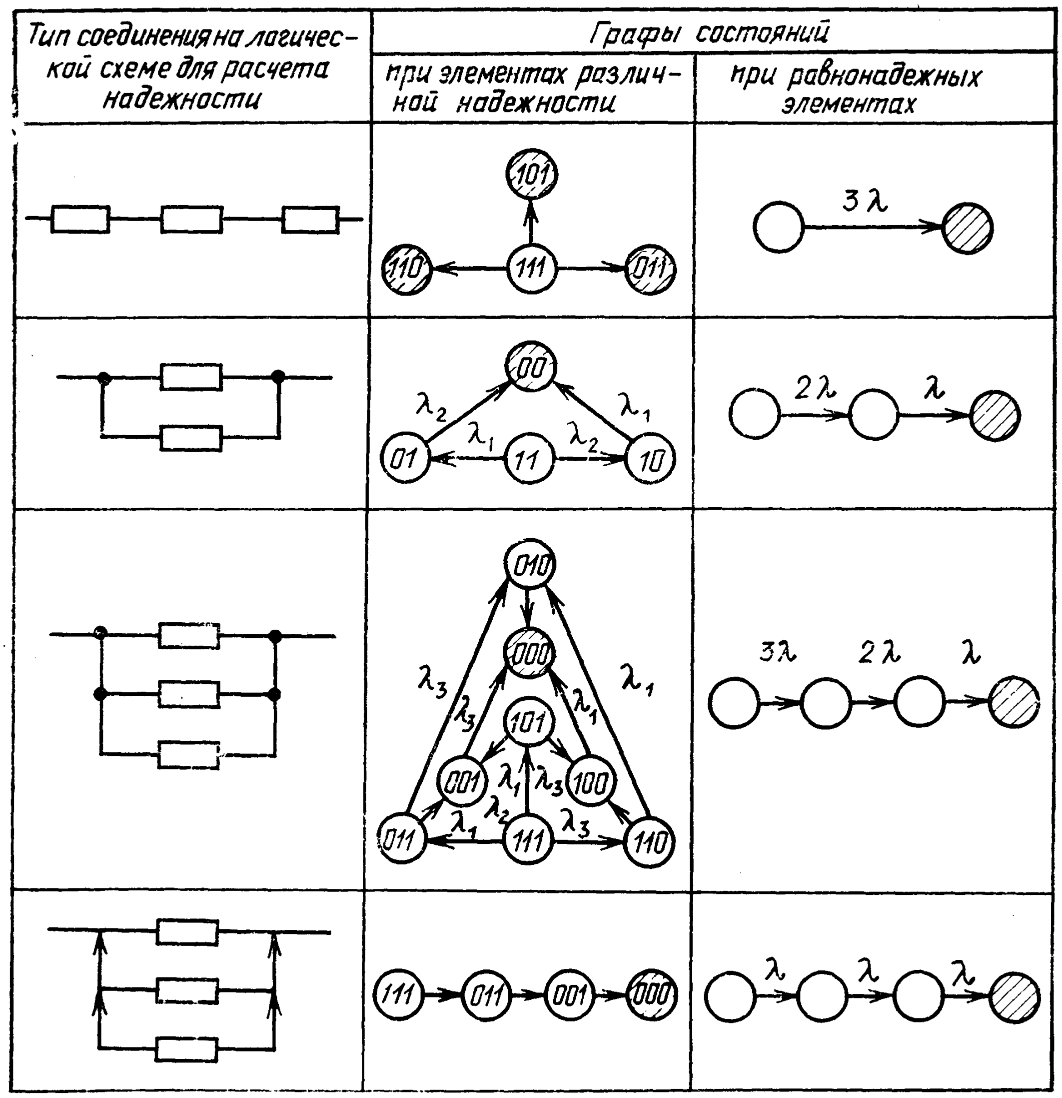
$$k_\Pi = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m+1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j}.$$

При невідновлюваній системі між станами мається лише по одній стрілці.

10.4 Перехід від логічної схеми для розрахунку надійності до графа станів системи.

Такий перехід необхідний для розрахунку надійності відновлюваних систем. Потрібно врахувати, що складання графа станів відновлюваної системи полегшується, якщо попередньо скласти граф станів для розрахунку надійності системи умовно вважаючи її неремонтуємою. *Щоб полегшити перехід, доцільно виділити типові структури графа станів, що відповідають типовим з'єднанням на логічній схемі для розрахунку надійності. Такі типові структури для неремонтиуємих систем приведені на рисунку нижче. Для переходу до графу станів відповідних відновлюваних систем необхідно в граф станів додати стрілки з інтенсивностями відновлень елементів.*

Послідовному логічному з'єднанню відповідає простий ветвящийся граф, рівнобіжному ненавантаженому з'єднанню – простий невветвящийся граф.



Нові стани додаються доти, поки всі стани не стануть отказовими (кінцевими).

Однакові стани (що збігаються по станах елементів) поєднуються.

За даними правилами будують графи станів роздільно для навантажених (працюючих) підсистем і підсистем, що знаходяться в ненавантаженому резерві.

Кінцеві стани графа станів навантаженої (працюючої) підсистеми є початковими вершинами графа станів для підсистеми, що знаходиться в ненавантаженому резерві. До кожної з цих вершин необхідно приєднати граф станів ненавантаженого резерву.

11. Метод статистичних випробувань.

Оцінка надійності системи на етапах їхнього проектування вимагає застосування складних математичних обчислень. *З появою ЕОМ широке поширення* *для розв'язання багатьох наукових і інженерних задач усілякого характеру одержав метод статистичних випробувань.*

Ефективною областю застосування цього методу є задачі, що носять імовірносний характер. Надійність, як внутрішня властивість системи, зберігає свої параметри в заданих межах і в заданих умовах експлуатації залежить від дуже великого числа факторів, що носять випадковий характер. Тому задачу дослідження надійності систем доцільно розглядати як задачу дослідження імовірносних властивостей систем, коли на них діють випадкові збурення, тобто задача вивчення і розрахунку надійності носить імовірносний характер. *Розрахунок надійності зводиться до моделювання процесів виникнення відмов і відновлень елементів і систем, а також наступній обробці отриманих даних відповідно до логічної структури досліджуваних об'єктів.*

Моделювання завжди бажаніше фізичних випробувань на безвідмовну роботу, тому що ці випробування звичайно продовжуються дуже довго, коштують дорого, вимагають значної кількості спеціального устаткування і зв'язані, найчастіше, зі знищенням значної кількості дорогих чи дефіцитних об'єктів. У той же час випробуванням піддаються лише об'єкти, що серійно випускаються, тоді як часто бажано мати інформацію про надійність проектованих об'єктів. Визначимо основні поняття, використовувані при моделюванні надійності.

Моделювання – дослідження об'єктів за допомогою побудови фізичних, або математичних моделей.

Статистичне моделювання надійності – визначення показників надійності повтореннями статистичного опиту за допомогою ЕОМ.

Метод статистичного моделювання надійності полягає в наступній послідовності дій:

1. Безперервно (багаторазово) відтворюється процес виникнення відмов окремих елементів системи і процес відновлення по заданих законах розподілу, тобто багаторазово повторюється статистичний опит.

2. Реєструється (фіксується, відзначається) виникнення відмов виробу і його відновлення по заданих ознаках. Ознаки відмови і відновлення виробу визначаються виходячи з його логічної структури роботи.

3. Обробляються результати випробувань за правилами математичної статистики.

Першим етапом, як видно, є формування можливих значень випадкових величин: часу між відмовами (чи наробітку до відмови) і часу відновлення елементів. *Як відомо, характеристиками випадкових величин є закони розподілу і параметри цих законів.* Ці ж характеристики використовуються для опису часу відмов і часу відновлення як випадкових величин. *Тому розглянемо спосіб утворення послідовностей випадкових чисел що мають необхідний закон розподілу. Для одержання (синтезу) послідовності випадкових чисел з будь-яким заданим законом розподілу досить мати послідовність випадкових чисел з рівномірним розподілом в інтервалі (0,1).*

Розподіл називають рівномірним, якщо на інтервалі, якому належать усі можливі значення випадкової величини, щільність розподілу (частота відмов) зберігає постійні значення.

$$F(X) = \int_a^b f(X)dx \;;\; f(X) = a(X) = 1; \quad a = 0, b = 1; \; F(X) = \int_0^1 dx = 1.$$

Перетворення рівномірне розподілених в інтервалі (0,1) випадкових чисел Q_i *у випадкові числа* t_i *із заданим законом розподілу* $a(t)$ *зводиться до розв'язання відносно* t_i *рівняння*

$$\int_0^{t_i} a(t)dt = Q_i . \qquad (1)$$

В основі викладеного методу лежить формування випадкової величини за рівномірним законом розподілу і наступне перетворення цього закону.
Числа з рівномірним розподілом в інтервалі (0,1) використовують тому, що:

1. Сукупність таких чисел може бути отримана з найменшими витратами машинного часу;
2. Забезпечує простоту і зручність подальших перетворень по одержанню з її інших послідовностей випадкових чисел.

Розглянемо формування випадкових величин за деяким законами.

1) Експоненційний закон

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \; Q_i(t) = 1 - e^{-\lambda t_i} \Rightarrow e^{-\lambda t_i} = 1 - Q_i(t).$$

$$t_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - Q_i).$$

2) Закон Вейбула

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t^k}, \quad Q_i(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t_i^k} \Rightarrow -\lambda_0 t_i^k = \ln(1 - Q_i(t)),$$

$$t_i = \sqrt[k]{-\frac{\ln(1 - Q_i)}{\lambda_0}} .$$

3) Нормальний закон.

Для даного розподілу рівняння (1) точно не розв'язується, тобто немає аналітичної залежності, що зв'язує значення t_i *і* Q_i*. Тому рівняння (1) необхідно вирішувати чисельно. Однак є ще один метод одержання послідовності випадкових чисел розподілених по нормальному закону. Для цього використовують центральну граничну теорему (теорема Ляпунова).*

Якщо випадкова величина X являє собою суму великого числа взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму мізерно мало, то X має розподіл близький до нормального.

Варто сказати, що випадкові величини, що підсумовуються, можуть мати будь-який закон розподілу. Не тільки рівномірний.

Сума 10-15 рівномірно розподілених випадкових величин дає нормально розподілену випадкову величину.

Послідовність випадкових величин з нормальним розподілом має наступні значення математичного чекання і дисперсії

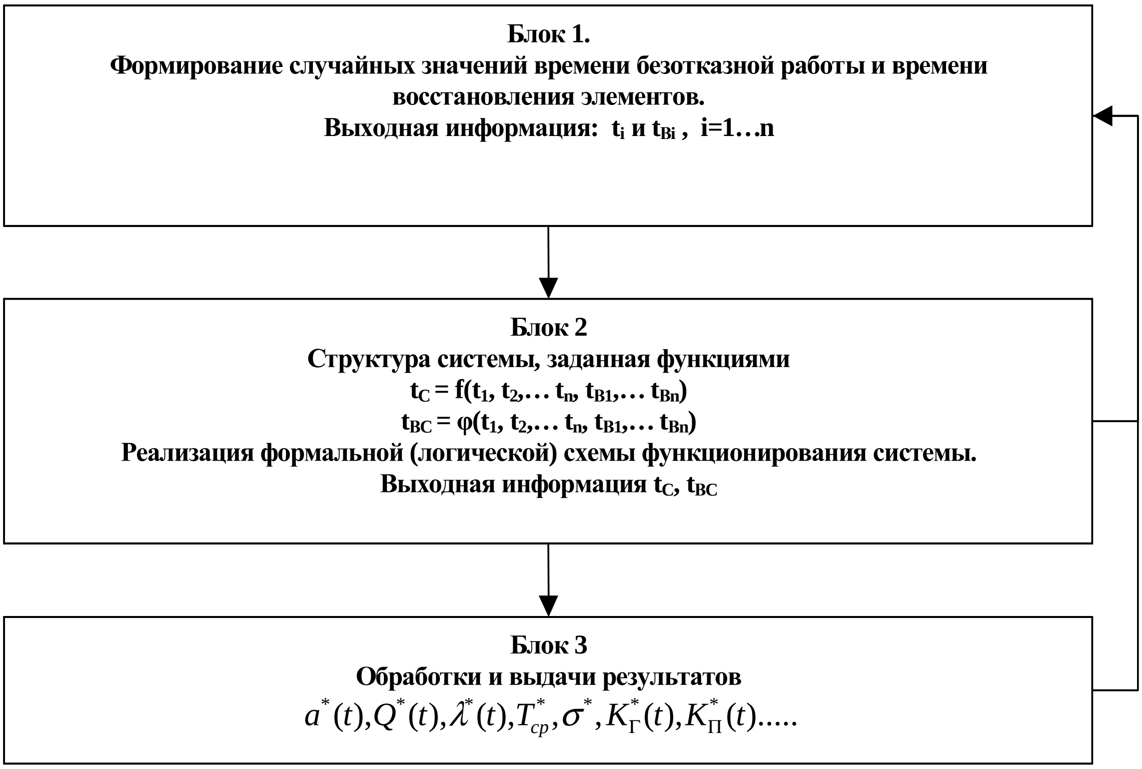
$$M = \frac{m(a+b)}{2} \;;\; D = \frac{m(b-a)^2}{12},$$

де m – число рівномірно розподілених в інтервалі (a,b) випадкових величин, що підсумовуються.

Статистичні алгоритми дослідження надійності мають три основних блоки. Блок-схема алгоритму дослідження надійності систем методом статистичних випробувань має вид, показаний на рисунку.

Тут n – число елементів у системі; t_i – випадкові значення часу безвідмовної роботи окремих елементів системи; $\mathbf{t_{Bi}}$ - випадкові величини часу відновлення окремих елементів системи.

Кожна з випадкових величин $\boldsymbol{t_i}$ *і* $\boldsymbol{t_{Bi}}$ *характеризується своїм законом роз-*



поділу $\boldsymbol{a_1(t), a_2(t),\dots a_n(t), a_{y1}(t),\dots a_{Bn}(t)}$. *Оператори другого блоку реалізують залежності безвідмовного часу роботи системи* $\boldsymbol{t}$ *і часу її відновлення* $\boldsymbol{t_{BC}}$ *від випадкових величин часу роботи елементів системи* $\boldsymbol{t_i}$ *і часу їхнього відновлення* $\mathbf{t_{Bi}}$, *тобто реалізують функції* $\boldsymbol{t = f(t_1, t_2,\dots t_n, t_{y1},\dots t_{Bn})}$ *і* $\boldsymbol{t_{BC} = \varphi(t_1, t_2,\dots t_n, t_{y1},\dots t_{Bn})}$. *Зазначені залежності* $\boldsymbol{f}$ *і* $\boldsymbol{\varphi}$ *можуть бути дуже складними, але це завжди залежності між* $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t_{BC}}$ *і* $\boldsymbol{t_i}$, $\boldsymbol{t_{Bi}}$.

Стрілки указують взаємозв'язок між блоками. Зазначена структура (зазначений алгоритм, послідовність дій) реалізується при кожному статистичному опиті. Кількість статистичних випробувань задається заздалегідь. У результаті одержують масив випадкових значень часу роботи системи $\boldsymbol{t}$ *і часу її відновлення* $\boldsymbol{t_{BC}}$. *Кількість значень* $\boldsymbol{t}$ *і* $\boldsymbol{t_{BC}}$ *окремо дорівнює кількості випробувань. Очевидно, що значення* $\boldsymbol{t}$ *і* $\boldsymbol{t_{BC}}$ *підлеглі якимсь законам розподілу. Нехай навіть складним. У блоці 3 обробляються масиви чисел* $\boldsymbol{t}$ *і* $\boldsymbol{t_{BC}}$ *за правилами математичної статистики. Тим самим визначаються статистичні кількісні характеристики надійності системи в цілому. Чим більше опитів, відповідно більше масиви значень* $\boldsymbol{t}$ *і* $\boldsymbol{t_{BC}}$ *, тим точніше розрахунок надійності.*

Достоїнства методу:

- застосовність до дослідження надійності систем будь-якої складності;

- мала чутливість до окремих помилок і відсутність нагромадження помилок.

Недоліки методу:

- швидке зростання обсягу випробувань (отже і часу рахунку) при підвищенні вимог до точності результатів;

- труднощі застосування методу для моделювання подій, що відбуваються з малою імовірністю, оскільки число випробувань обернено пропорційно імовірності настання події.

12. Технічна діагностика

12.1 Визначення

Технічна діагностика - наука про розпізнавання стану технічної системи, що включає широке коло проблем, зв'язаних з одержанням і оцінкою діагностичної інформації.

Технічна діагностика вивчає методи одержання й оцінки діагностичної інформації, діагностичні моделі й алгоритми прийняття рішень. Метою технічної діагностики є підвищення надійності і ресурсу технічних систем.

Технічна діагностика вирішує велике коло задач, багато з яких є суміжними з задачами інших наукових дисциплін. *Основною задачею технічної діагностики є розпізнавання стану технічної системи в умовах обмеженої інформації.*

Технічну діагностику іноді називають безрозбірною діагностикою, тобто діагностикою, здійснюваною без розбирання виробу. Аналіз стану проводиться в умовах експлуатації, при яких одержання інформації вкрай утруднено. Часто не представляється можливим за наявною інформацією зробити однозначний висновок і приходиться використовувати статистичні методи.

Теоретичним фундаментом для розв'язання основної задачі технічної діагностики варто вважати загальну теорію розпізнавання. Технічна діагностика вивчає алгоритми розпізнавання стану технічної системи, що зводяться до розв'язання задачі класифікації. Важливою частиною проблеми розпізнавання є правила прийняття рішень. Рішення діагностичної задачі завжди зв'язано з ризиком помилкової тривоги чи пропуску мети. Для ухвалення обґрунтованого рішення використовують методи теорії статистичних рішень.

У загальному випадку завдання розпізнавання полягає от у чому. Мається деяка сукупність об'єктів чи явищ. Відповідно до обраного принципу класифікації вона підрозділена на ряд класів, тобто складений алфавіт класів. Розроблений словник ознак, мовою якого описується кожен клас об'єктів. Створено технічні засоби, що забезпечують визначення ознак, а на обчислювальних засобах системи розпізнавання реалізований алгоритм розпізнавання, що дозволяє зіставляти апостеріорні дані про невідомий об'єкт з апріорною інформацією і на основі зіставлення визначати, до якого класу він може бути віднесений. Дані про ознаки невідомого об'єкта надходять на вхід алгоритму розпізнавання, що, використовуючи апріорні описи класів, визначає, до якого класу може бути віднесений цей об'єкт. Кожна система розпізнавання пристосована для розпізнавання тільки даного виду явищ чи об'єктів. *Правило, що кожному об'єкту ставить у відповідність визначене найменування класу, називають вирішальним правилом.*

Суть проблеми розпізнавання складається в розробці таких алфавіту класів і словника ознак, що в умовах обмежених ресурсів на побудову системи розпізнавання забезпечують максимальну ефективність системи керування, що приймає відповідне рішення в залежності від результатів рішення задачі розпізнавання. При цьому, вибираючи словник ознак і визначаючи алфавіт класів, варто знаходити найкращі вирішальні правила, границі між класами.

Побудова і функціонування систем розпізнавання зв'язано з нагромадженням і аналізом апріорної інформації. При статистичному підході до задачі розпізнавання описами класів є умовні щільності розподілу імовірностей значень ознак $x_1,\ldots,x_N$ для кожного класу, тобто функції $f_i(x_1,\ldots,x_N)$, а також апріорні імовірності P_i появи об'єктів відповідних класів.

Другим важливим напрямком технічної діагностики є теорія контролеспроможності. Контролеспроможністю називається властивість виробу забезпечувати достовірну оцінку його технічного стану і раннє виявлення несправностей. Важливі задачі теорії контролеспроможності зв'язані з розробкою алгоритмів пошуку несправностей, розробкою діагностичних тестів, мінімізацією процесу встановлення діагнозу.

12.2 Постановка задач технічної діагностики

Однією з важливих особливостей технічної діагностики є розпізнавання в умовах обмеженої інформації, коли потрібно керуватися визначеними прийомами і правилами для ухвалення обґрунтованого рішення. Стан системи описується безліччю визначальних її ознак (параметрів).

Розпізнавання стану системи – це віднесення стану системи до одного з можливих класів (діагнозів). Число діагнозів (класів, типових станів) залежить від особливостей задачі і цілей дослідження. Часто потрібно провести вибір одного з двох діагнозів – диференціальна діагностика чи дихотомія. Наприклад, зробити висновок "справний стан" чи "несправний стан". *Результати визначення технічного стану об'єкта називаються діагнозом. У більшості задач технічної діагностики діагнози (класи) установлюються заздалегідь, і в цих умовах задачу розпізнавання називають задачею класифікації.*

Тому що технічна діагностика зв'язана з обробкою великого обсягу інформації, то прийняття рішень (розпізнавання) часто здійснюється за допомогою ЕОМ. *Сукупність послідовних дій у процесі розпізнавання називається алгоритмом розпізнавання. Ознаки системи повинні бути досить інформативними, щоб при обраному числі діагнозів процес поділу (розпізнавання) міг бути здійснений.*

У задачах діагностики стан системи описується за допомогою комплексу ознак $X = (x_1,x_2,\ldots,x_N)$, де x_j – ознака, що має m_j розрядів. У технічній діагностиці можливі стани системи – діагнози D_i – вважаються відомими. Постановка задачі при імовірносних методах розпізнавання така. Мається система, що знаходиться в одному з *n* випадкових станів D_i. Відома сукупність ознак, кожна з яких з визначеною імовірністю характеризує стан системи. Потрібно побудувати вирішальне правило, за допомогою якого сукупність ознак, що діагностується, була б віднесена до одного з можливих станів (діагнозів) технічної системи.

13. Основи теорії статистичних рішень

Аналіз характеру задачі розпізнавання об'єктів чи явищ у випадку, коли характер ознак імовірносний, тобто коли між ознаками (параметрами) об'єктів і класами, до яких вони можуть бути віднесені, існують імовірносні зв'язки, показав, що побудова алгоритмів розпізнавання може бути заснована на результатах теорії статистичних рішень. У методах статистичних рішень вирішальне правило вибирається виходячи з умов оптимальності, наприклад з умови мінімуму ризику. Виникли в математичній статистиці як методи перевірки статистичних гіпотез (роботи Неймана і Пірсона), розглянуті методи знайшли широке застосування в радіолокації (виявлення сигналів на фоні перешкод), радіотехніці, загальній теорії зв'язку й інших областей (медицина).

Методи статистичних рішень успішно використовуються в задачах технічної діагностики для формування алгоритмів розпізнавання. Розглянемо процес розпізнавання при наявності одного діагностичного параметра.

13.1 Метод мінімального ризику

Це один з методів статистичних рішень. Якщо стан системи характеризується одним параметром, то система має одномірний простір ознак. Поділ здійснюється на два класи: D_1 – справний стан; D_2 – наявність дефекту. *Тоді правило рішення полягає в наступному:*

$$\text{при } X < X_0 \quad X \in D_1; \quad \text{при } \quad X > X_0 \quad X \in D_2\,, \qquad (1)$$

X_0 – граничне значення параметра.

Істотно, що області справного D_1 і дефектного D_2 станів перетинаються і тому принципово неможливо вибрати значення X_0, при якому правило (1) не давало б помилкових рішень. Для приклада на рис.1 показані розподіли параметра X для дефектних і справних виробів (станів).

Завдання полягає в тім, щоб зробити вибір X_0 у деякому сенсі оптимальним, наприклад, щоб він давав найменше число помилкових рішень. Розглянемо можливі помилки при прийнятті рішень.

Помилковою тривогою називається випадок, коли приймається рішення про наявність дефекту, але в дійсності система знаходиться в справному стані – замість D_1 приймається D_2.

Пропуск мети (дефекту) – ухвалення рішення про справний стан, тоді як система містить дефект – замість D_2 приймається D_1.

Ці двоякого роду помилки можуть мати різні наслідки чи різні ціни. Зазначені терміни зв'язані з радіолокацією, але легко інтерпретуються в задачах діагностики.

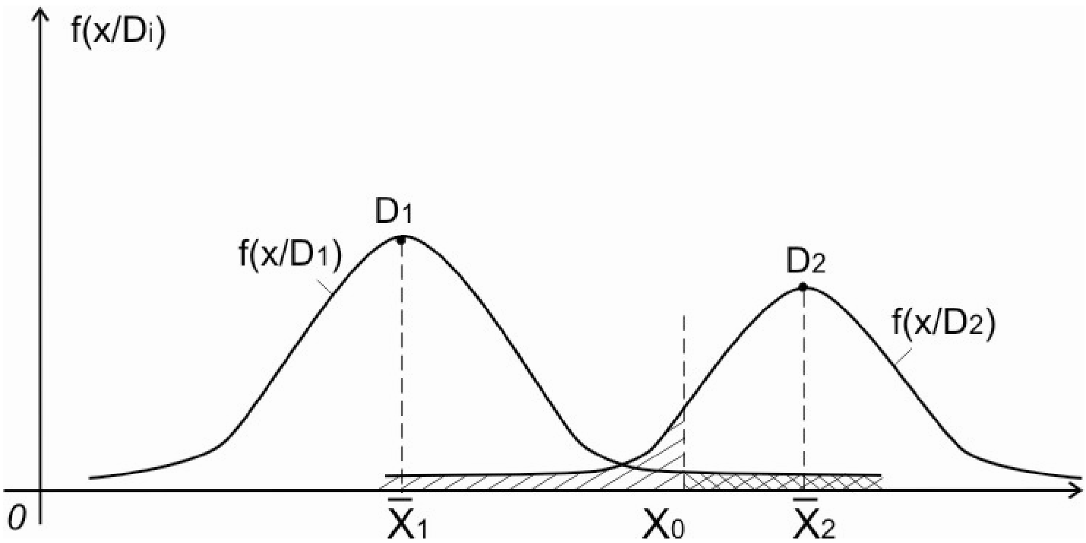
Позначимо H_{ij} (i,j = 1,2) можливі рішення за правилом (1). Перший індекс відповідає прийнятому діагнозу, другий – дійсному стану. Тоді H_{12} – пропуск дефекту; H_{21} – помилкова тривога; H_{11} і H_{22} – правильні рішення.

Розглянемо імовірність помилкової тривоги $P(H_{21})$ при використанні правила (1). Випадок, коли при $X > X_0$ об'єкт є справним, але за правилом (1) розглядається як дефектний.

Імовірність ситуації $X > X_0$ для справних виробів

$$P(x > x_0 / D_1) = \int_{x_0}^{\infty} f(x / D_1) dx .$$

Імовірність помилкової тривоги дорівнює імовірності добутку двох подій:



Статистичний розподіл щільності імовірності діагностичного параметра X для справного D_1 і дефектного D_2 станів.

наявність справного стану і значення $X > X_0$.

Тоді буде

$$P(H_{21}) = P(D_1)\ P(x > x_0 / D_1) = P_1 \cdot \int_{x_0}^{\infty} f(x / D_1) dx , \qquad (2)$$

де $P_1 = P(D_1)$ – апріорна імовірність діагнозу D_1.

Вона вважається відомою на підставі попередніх статистичних даних. Подібним чином знаходиться імовірність пропуску дефекту

$$P(H_{12}) = P(D_2)\ P(x < x_0 / D_2) = P_2 \cdot \int_{-\infty}^{x_0} f(x / D_2) dx . \qquad (3)$$

У задачах технічної діагностики значення апріорних імовірностей P_1 і P_2 у більшості випадків відомі по статистичним даним.

Помилкову тривогу в теорії статистичних рішень ще називають помилкою першого роду, а пропуск мети – помилкою другого роду.

Імовірність ухвалення помилкового рішення складається з імовірностей помилкової тривоги і пропуску дефекту. Якщо приписати "ціни" цим помилкам, то вийде вираз для середнього ризику

$$R = C_{21}P(H_{21}) + C_{12} \cdot P(H_{12}) = C_{21}P_1 \cdot \int_{x_0}^{\infty} f(x/D_1)dx + C_{12}P_2 \int_{-\infty}^{x_0} f(x/D_2)dx . \qquad (4)$$

Ціна помилки має умовне значення, але вона повинна враховувати передбачувані наслідки помилкової тривоги і пропуску дефекту. *У задачах надійності вартість пропуску дефекту звичайно істотно більше вартості помилкової тривоги $З_{12} > З_{21}$.* Може вводитися ціна правильних рішень H_{11} і H_{22}, що для порівняння з вартістю втрат (помилок) приймається негативною. *Ризики правильних і помилкових рішень являють собою елементи платіжної матриці виду*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

де C_{11} і C_{22} , C_{12} і C_{21} – втрати, зв'язані відповідно з правильними рішеннями і помилками першого і другого роду.

По головній діагоналі платіжної матриці розташовані втрати при правильних рішеннях, а по обидва боки від її - втрати при помилкових рішеннях. Якщо $C_{ii} < 0$, $i=1,\ldots,m$, то такі негативні втрати можна розглядати як виграш при правильних рішеннях.

У загальному випадку середній ризик (очікувана величина втрат) виражається рівністю

$$R = C_{11}P(H_{11}) + C_{21} \cdot P(H_{21}) + C_{12}P(H_{12}) + C_{22} \cdot P(H_{22}) = C_{11}P_1 \cdot \int_{-\infty}^{x_0} f(x/D_1)dx +$$

$$+ C_{21}P_1 \int_{x_0}^{\infty} f(x/D_1)dx + C_{12}P_2 \int_{-\infty}^{x_0} f(x/D_2)dx + C_{22}P_2 \int_{x_0}^{\infty} f(x/D_2)dx \qquad (5)$$

Розпізнавана величина X є випадковою і тому рівності (4) і (5) являють собою середнє значення (математичне чекання) ризику.

Знайдемо граничне значення X_0 у правилі (1) з умови мінімуму середнього ризику. Диференціюючи (5) по X_0 і дорівнюючи похідну нулю, одержимо умову екстремуму

$$\frac{dR}{dx_0} = C_{11}P_1 f(x_0/D_1) - C_{21}P_1 f(x_0/D_1) + C_{12}P_2 f(x_0/D_2) - C_{22}P_2 f(x_0/D_2) = 0 ,$$

чи можна записати

$$f(x_0/D_1)(C_{21} - C_{11})P_1 = f(x_0/D_2)(C_{12} - C_{22})P_2 ,$$

$$\frac{f(x_0/D_1)}{f(x_0/D_2)} = \frac{(C_{12} - C_{22})P_2}{(C_{21} - C_{11})P_1} . \qquad (6)$$

Ця умова часто визначає два значення X_0 , з яких одне відповідає мінімуму, а друге – максимуму ризику. Співвідношення (6) є необхідною, але недостатньою умовою мінімуму. Для існування мінімуму R в точці $X = X_0$ друга похідна повинна бути позитивною $\frac{d^2R}{dX_0^2} > 0$, що приводить до наступної умови відносно похідних щільностей розподілів

$$\frac{f'(x_0/D_1)}{f'(x_0/D_2)} < \frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1}. \qquad (7)$$

Якщо розподіли f(X/D$_1$) і f(X/D$_2$) одномодальні, тобто містять не більш однієї крапки максимуму, то при $\overline{X}_1 < X_0 < \overline{X}_2$ умова (7) виконується. Дійсно, у правій частині рівності (7) коштує позитивна величина, а при $X > \overline{X}_1$ похідна $f'(X/D_1) < 0$, тоді як при $X < \overline{X}_2$ значення $f'(X/D_2) > 0$.

Таким чином, під величиною параметра X_0 розуміють граничне значення діагностичного параметра, що забезпечує за правилом (1) мінімум середнього ризику.

Тоді за методом мінімального ризику приймається наступне рішення про стан об'єкта, що має дане значення параметра X

$$X \in D_1, \text{ якщо } \frac{f(x/D_1)}{f(x/D_2)} > \frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1} \text{ при } X < X_0; \qquad (8)$$

$$X \in D_2, \text{ якщо } \frac{f(x/D_1)}{f(x/D_2)} < \frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1} \text{ при } X > X_0.$$

Часто виявляється зручним розглядати не відношення (6), а логарифм цього відношення. Це не змінює результату, тому що логарифмічна функція зростає монотонно разом зі своїми аргументами. Розрахунок, наприклад, для нормального розподілу при використанні логарифма виявляється трохи простіше.

Приклад 1. Розглянемо випадок, коли параметр X має нормальний розподіл. Розсіювання параметра приймається однаковим для розподілів справних і несправних виробів. Щільності розподілів будуть

$$f(x/D_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma^2}\right]; \; f(x/D_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Вносимо ці співвідношення в рівність (6) і після логарифмування одержуємо

$$\ln\left[\frac{f(x_0/D_1)}{f(x_0/D_2)}\right] = -\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x_0^2 + \overline{x}_1^2 - 2x_0\overline{x}_1 - x_0^2 - \overline{x}_2^2 + 2x_0\overline{x}_2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(2x_0(\overline{x}_2 - \overline{x}_1) + \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2\right) = \ln\frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1}$$

Звідси

$$x_0 = \frac{\overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2}{2(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)} + \frac{\sigma^2}{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}\ln\frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1};$$

$$x_0 = \frac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}{2} - \frac{\sigma^2}{(\overline{x}_2 - \overline{x}_1)}\ln\frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1}.$$

У багатьох практичних задачах виграші для правильних рішень не використовуються, тобто приймають $C_{11} = C_{22} = 0$.

Приклад 2. Діагностика стану трансмісії газотурбінного двигуна здійснюється по вмісту заліза в мастилі. Для справного стану середнє значення складає $\overline{X}_1 = 5$ (5 г заліза на 1 т олії) і середньоквадратичне відхилення $\sigma_1 = 2$. При наявності дефекту підшипників і інших деталей (несправний стан) ці значення рівні $\overline{X}_2 = 12$, $\sigma_2 = 3$. Розподіли передбачаються нормальними. Потрібно визначити граничний вміст заліза в мастилі, вище якого двигун підлягає зняттю з експлуатації і розбиранню. По статистичним даним несправний стан трансмісій спостерігається в 10% двигунів. Приймемо, що відношення вартостей пропуску мети і помилкової тривоги $З_{12}/З_{21} = 20$. Відмовимося від винагороди правильних рішень, тобто $C_{11} = C_{22} = 0$. Тоді з умови (6) одержимо

$$\frac{f(x_0/D_1)}{f(x_0/D_2)} = 20\frac{0{,}1}{0{,}9} = 2{,}22.$$

Щільність розподілу

$$f(x_0/D_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_0-5)^2}{2\cdot 2^2}\right],$$

$$f(x_0/D_2) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_0-12)^2}{2\cdot 3^2}\right].$$

Вносимо ці значення в попередню рівність і одержуємо після логарифмування

$$\ln\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{(x_0-5)^2}{8} - \ln\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{(x_0-12)^2}{18} = \ln 2{,}22;$$

$$-\frac{(x_0-5)^2}{8} + \frac{(x_0-12)^2}{18} = \ln\frac{2\cdot 2{,}22}{3}; \quad -9(x_0-5)^2 + 4(x_0-12)^2 = 8\cdot 9\cdot \ln\frac{2\cdot 2{,}22}{3};$$

$$-5x_0^2 - 6x_0 + 322{,}8 = 0\ ; \ 5x_0^2 + 6x_0 - 322{,}8 = 0;$$

$$x_0 = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 20\cdot 322{,}8}}{10} = 7{,}46.$$

Граничне значення параметра $X_0 = 7{,}46$ г заліза на 1 т мастила.

$\overline{X}_1 < X_0 < \overline{X}_2$, $5 < 7{,}46 < 12$, тобто $X_0 = 7{,}46$ – крапка мінімуму.

Розрахуємо для граничного значення $X_0 = 7{,}46$ г/т імовірності помилкової тривоги і пропуску дефекту за формулами (2) і (3):

імовірність помилкової тривоги

$$P(H_{21}) = P_1\cdot\int_{x_0}^{\infty} f(x/D_1)dx = 0{,}9\cdot\int_{7{,}46}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-5)^2}{8}\right]dx = 0{,}0984;$$

імовірність пропуску дефекту

$$P(H_{12}) = P_2\cdot\int_{-\infty}^{x_0} f(x/D_2)dx = 0{,}1\cdot\int_{-\infty}^{7{,}46}\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-12)^2}{18}\right]dx = 0{,}00655.$$

Середній ризик обчислюється по співвідношенню (4) при зазначених значеннях імовірностей станів P_1 і P_2 і при $C_{21} = 1$, $C_{12} = 20$

$$R = C_{21}P(H_{21}) + C_{12} \cdot P(H_{12}) = 1 \cdot 0{,}0984 + 20 \cdot 0{,}00655 = 0{,}229.$$

Одержали мінімально можливу величину середнього ризику R = 0,229.

13.2. Метод мінімального ризику при наявності зони невизначеності

У деяких випадках, коли потрібно висока вірогідність розпізнавання (велика вартість помилок пропуску мети і помилкової тривоги), доцільно ввести зону невизначеності (зону відмови від розпізнавання). Вирішальне правило буде наступним

Якщо $X \le X_а$, то $X \in D_1$; $X \ge X_в$, те $X \in D_2$.

Якщо $X_а < X < X_в$, то відмова від розпізнавання.

Відмова від розпізнавання є небажаною подією. Вона свідчить, що наявної інформації недостатньо для ухвалення рішення і потрібні додаткові відомості.

Величина середнього ризику при наявності зони відмови від розпізнавання може бути виражена наступною рівністю

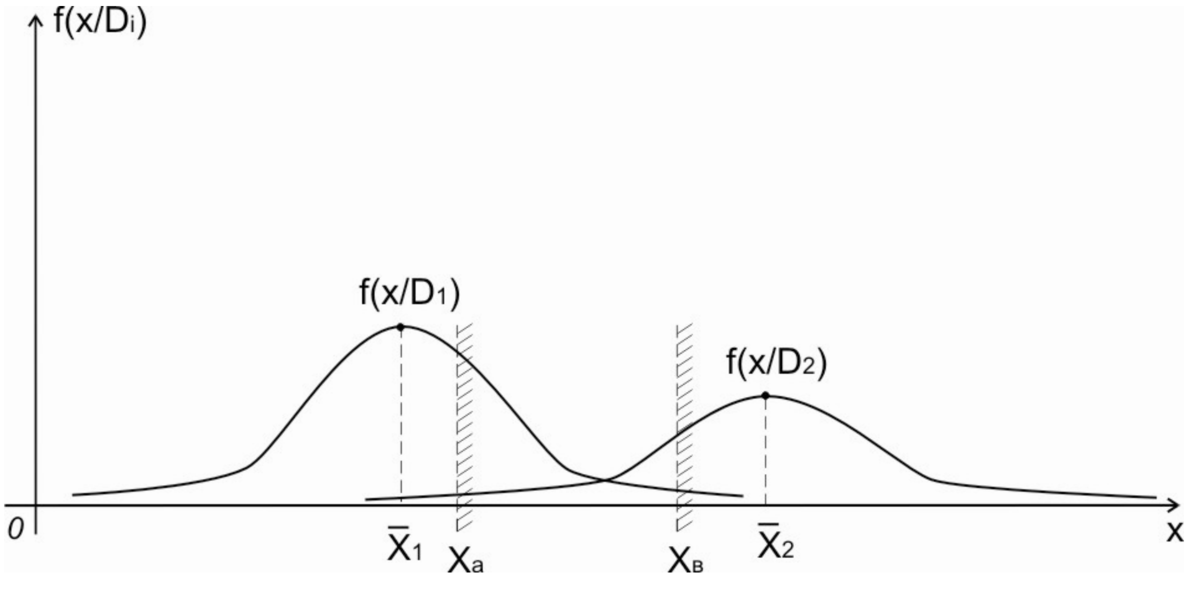
$$R = C_{11}P_1\int_{-\infty}^{x_a} f(x/D_1)dx + C_{21}P_1\int_{x_b}^{\infty} f(x/D_1)dx + C_{12}P_2\int_{-\infty}^{x_a} f(x/D_2)dx + C_{22}P_2\int_{x_b}^{\infty} f(x/D_2)dx +$$
$$+ C_0\int_{x_a}^{x_b}[P_1 f(x/D_1) + P_2 f(x/D_2)]dx \tag{9}$$

C_0 – ціна відмови від розпізнавання, $C_0 > 0$.

Визначимо границі області ухвалення рішення, виходячи з мінімуму середнього ризику. Диференціюючи вираз (9) по $X_а$ і $X_в$ і дорівнюючи похідні до нуля, знайдемо

$$\frac{\partial R}{\partial x_a} = C_{11}P_1 f(x_a/D_1) + C_{12}P_2 f(x_a/D_2) - C_0[P_1 f(x_a/D_1) + P_2 f(x_a/D_2)];$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_b} = -C_{21}P_1 f(x_b/D_1) - C_{22}P_2 f(x_b/D_2) + C_0[P_1 f(x_b/D_1) + P_2 f(x_b/D_2)].$$



Дорівнюємо частні похідні до нуля і з цих рівнянь одержуємо

$$\frac{f(x_a/D_1)}{f(x_a/D_2)} = \frac{P_2(C_{12}-C_0)}{P_1(C_0-C_{11})}; \quad \frac{f(x_b/D_1)}{f(x_b/D_2)} = \frac{P_2(C_0-C_{22})}{P_1(C_{21}-C_0)}. \tag{10}$$

Рівності (10) виражають необхідні умови екстремуму і можуть існувати, якщо їхні праві частини позитивні. Для цього необхідно, щоб $C_{12} > C_0$, $C_{21} > C_0$, т. е. вартість помилок повинна перевищувати вартість відмови від розпізнавання. Якщо не заохочувати правильні рішення ($C_{11} = 0$, $C_{22} = 0$) і не платити за відмови від розпізнавання $C_0 = 0$, то область невизначеності буде займати всю область зміни параметра. Для існування мінімуму функції двох змінних $R(X_а, X_в)$ повинне бути

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_a^2}\frac{\partial^2 R}{\partial x_b^2} - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x_a \partial x_b}\right)^2 > 0.$$

Унаслідок рівності нулю змішаної похідної, умови мінімуму такі

$$\frac{f'(x_a/D_1)}{f'(x_a/D_2)} < \frac{(C_{12}-C_0)P_2}{(C_0-C_{11})P_1}; \quad \frac{f'(x_b/D_1)}{f'(x_b/D_2)} < \frac{(C_0-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_0)P_1}. \tag{11}$$

Для "одногорбих" розподілів за умови

$$\overline{x}_1 < x_a < x_b < \overline{x}_2. \tag{12}$$

Співвідношення (11) виконуються і рівності (10) дають значення $X_а$ і $X_в$, що відповідають мінімуму ризику.

Розглянемо випадок, коли параметр X розподілений по нормальному законі при діагнозах D_1 (справний стан) і D_2 (несправний стан), причому середньоквадратичне відхилення в обох випадках однаково.

Щільності розподілів

$$f(x/D_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma^2}\right]; \quad f(x/D_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma^2}\right].$$

У силу співвідношень (10) будемо мати

$$\ln\frac{f(x_a/D_1)}{f(x_a/D_2)} = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[2x_a(\overline{x}_2-\overline{x}_1) + \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2\right] = \ln\frac{P_2}{P_1} + \ln\frac{C_{12}-C_0}{C_0-C_{11}};$$

$$\ln\frac{f(x_b/D_1)}{f(x_b/D_2)} = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[2x_b(\overline{x}_2-\overline{x}_1) + \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2\right] = \ln\frac{P_2}{P_1} + \ln\frac{C_0-C_{22}}{C_{21}-C_0}.$$

З останніх рівностей знаходимо

$$x_a = \frac{\overline{x}_1+\overline{x}_2}{2} - \frac{\sigma^2}{\overline{x}_2-\overline{x}_1}\left[\ln\frac{P_2}{P_1} + \ln\frac{C_{12}-C_0}{C_0-C_{11}}\right];$$

$$x_b = \frac{\overline{x}_1+\overline{x}_2}{2} - \frac{\sigma^2}{\overline{x}_2-\overline{x}_1}\left[\ln\frac{P_2}{P_1} + \ln\frac{C_0-C_{22}}{C_{21}-C_0}\right].$$

При $C_{11} = C_{22} = 0$ і $C_0 \to 0$ одержуємо $X_а \to -\infty$, $X_в \to \infty$, тобто зона невизначеності займає всю область зміни параметра.

14. Методи поділу в просторі ознак

Статистичний підхід виявляється ефективним при розв'язанні масових задач, де вдається зібрати достовірну статистику. У випадку відсутності таких статистичних даних практична цінність результатів істотно знижується.

Багато важливих задач, наприклад, задачі розпізнавання образів, класифікації, технічної і медичної діагностики, обробки експериментальних даних можуть бути описані математичними моделями, у яких потрібно відокремити дві чи більш множини.

Необхідно ввести ряд визначень.

Клас - множина об'єктів, подібних по природі й ознакам.

Класифікація - процедура віднесення до того чи іншого класу.

Образ – сукупність ознак об'єкта.

Розпізнавання образів – синонім класифікації, коли по сукупності ознак об'єкт відносять до якого-небудь класу.

Стан об'єкта можна представити точкою в просторі ознак.

Аналітична ознака – вимірювана величина, що характеризує властивості об'єкта.

Кластер - множина ознак об'єктів одного класу.

Вибір ознак (ранжирування параметрів) є непростою задачею. Не слід використовувати малоінформативні для даної задачі ознаки і не використовувати ознаки, що корелюють між собою.

Ранжирування параметрів (вибір ознак) дає можливість визначити найбільш інформативні з них і перейти в простір меншої розмірності, що полегшує і прискорює формування вирішального правила, по якому судять про приналежність даної крапки одній з множин. Досвід розв'язання реальних задач показує, що досить достовірне розпізнавання можна провести, використовуючи тільки невелику частину наявних параметрів.

Методи поділу в просторі ознак є одними з найбільш важливих методів діагностики. Ці методи засновані на природній гіпотезі компактності, відповідно до якої точки, що відображають стан (діагноз) об'єкта, групуються в одній області простору ознак. Таким чином, постановка діагнозу зводиться до успішного відділення множин ознак (кластерів). *Алгоритм розпізнавання образів (станів) містить у собі дискримінантний аналіз – метод поділу кластерів (множин). Лінійний дискримінантний аналіз апроксимує границі між кластерами лінійними функціями. Існують різні види критеріальних функцій, однак багато методів їхнього синтезу зводяться до лінійних критеріальних функцій.*

14.1. Метричні методи розпізнавання

Кожен конкретний об'єкт може бути характеризований вектором $\overline{X}$ у багатомірному просторі ознак $\overline{X}=(x_1, x_2,\ldots,x_N)$.

Часто виявляється зручним представити об'єкт як точку багатомірного простору, що є кінцем вектора X. Якщо система описується двохразрядними ознаками, то компоненти вектора X виражаються двійковими числами. Тоді кожний з об'єктів у просторі ознак є однією з вершин одиничного N – мірного куба. Безперервними діагностичними параметрами системи можуть бути, наприклад, температура, тиск, концентрація речовин і т.п.

Областю діагнозу D_i називається множина точок простору ознак, що володіють станом (діагнозом) D_i. Звичайно такі області заповнюють досить компактну частину простору ознак. Тому зображення об'єктів одного класу більш близькі друг до друга, чим зображення різних класів. Метричні методи діагностування (розпізнавання) засновані на кількісній оцінці цієї близькості. Мірою близькості вважається відстань між точками.

У багатьох задачах діагностики простір ознак є анізотропним, т. е. одиниці виміру в різних напрямках різні. Координатам x_j можуть відповідати параметри різної фізичної природи. Відстань крапки $\overline{X}$ до крапки $\overline{a}_i$, що належить діагнозу D_i, буде таким

$$l_i(\overline{X},\overline{a}_i)=\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}^2(x_j-a_{ij})^2}\,. \qquad (3.1)$$

Тут λ_{ij} – вагарні коефіцієнти. Як правило виявляється доцільним прийняти $\lambda_{ij} = 1/\sigma_{ij}$, де σ_{ij} – середньоквадратичне відхилення ознаки (параметра) X_j для зразків з діагнозом D_i.

Величина λ_{ij} у цьому випадку має ясний фізичний сенс: чим менше розсіювання ознаки x_j, тим більше його діагностичне значення. У загальному випадку можна покласти $\lambda_{ij} = C_{ij}/\sigma_{ij}$, де безрозмірний коефіцієнт C_{ij} характеризує діагностичну цінність ознаки. Для вагових коефіцієнтів λ_{ij} може виконуватися умова нормування

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}=1\,, \quad i = 1,2,\ldots,n; \qquad n \text{ – число діагнозів } D_i.$$

Метрика (3.1) змінюється не тільки для різних напрямків, але і для різних діагнозів. Існує два підходи в метричних методах розпізнавання: діагностика по відстані до еталона і по відстані до множини.

Метод розпізнавання по відстані до еталона (розпізнавання по методу еталонів)

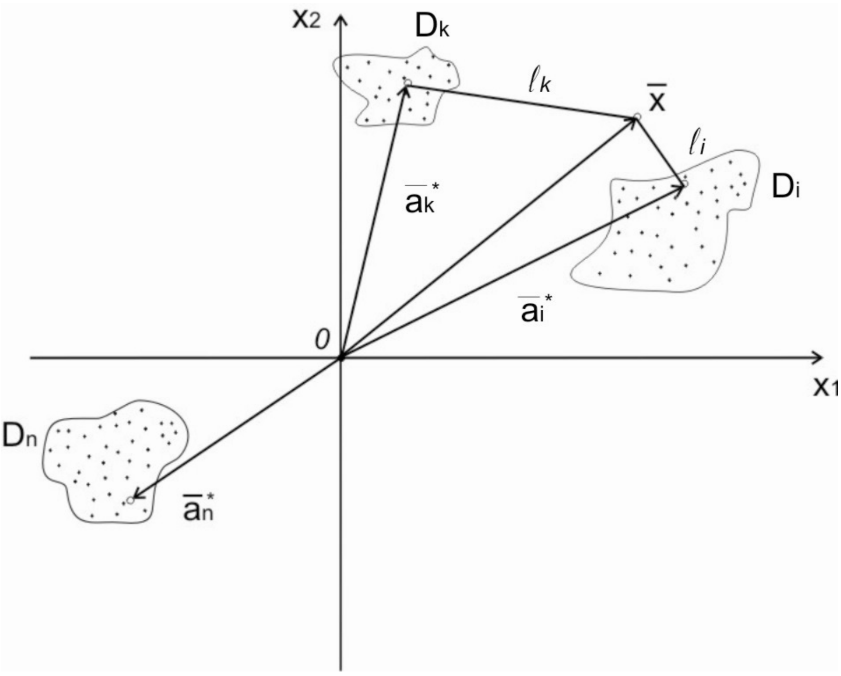
У методі еталонів віднесення представленого для розпізнавання об'єкта до одного з n діагнозів (станів) відбувається по найменшій відстані до еталона. Як еталон для діагнозу D_i приймається типовий об'єкт, що має діагноз D_i. Найбільш природний вибір еталона складається у використанні середніх значень параметрів в області діагнозу. Якщо відомі M_i об'єктів з діагнозом D_i, то як еталон діагнозу D_i можна прийняти вектор $\overline{a}^*_i = (a^*_{i1}, a^*_{i2},\ldots,a^*_{iN})$, координати якого a^*_{ij} розраховуються за формулою

$$a^*_{ij}=\frac{1}{M_i}\sum_{s=1}^{M_i}a^s_{ij}\,. \qquad (3.2)$$

Тут i – номер діагнозу, $i = \overline{1,n}$; j – номер координати точок простору ознак, $j = \overline{1,N}$.

У формулі (3.2) підсумовування відбувається по точках області діагнозу D_i для однакових координат j при сталості індексів i та j. Вектор ознак $\overline{a_i^s}$ являє собою об'єкт із верифікованим діагнозом (станом) D_i.

Рівність (3.2) визначає еталон як центр ваги області діагнозу. Координати вектора $\overline{a_i^*}$ дорівнюють середнім значенням координат a^*_{ij} векторів, що входять в область діагнозу D_i (навчальну послідовність).



Розглянемо тепер алгоритм розпізнавання. Рисунок, що пояснює діагностику по відстані до еталона, показаний нижче.

Припустимо, що в просторі ознак як діагностична міра відстані приймається квадрат відстані (3.1), тобто вираз

$$l_i^2 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{i_j}^2 (x_j - a_{ij}^*)^2 .$$

Для діагностики пред'явлений об'єкт $\overline{X}$. *Для віднесення об'єкта* $\overline{X}$ *до одного з* n *діагнозів, визначаються відстані* l^2_i *до еталонних точок* $\overline{a}^*_1$, $\overline{a}^*_2,\dots,\overline{a}^*_n$... *Об'єкт* $\overline{X}$ *відносять до діагнозу* D_i*, якщо міра відстані між точками* $\overline{X}$ *та* $\overline{a}^*_i$ *мінімальна, тобто якщо* $l^2_i = min$*, то* $\overline{X} \in D_i$ *, чи в іншій формі* $\overline{X} \in D_i$*, якщо* $l^2_i < l^2_k$ *,* $к=1,2,\dots,n;\ к \neq i$.

Якщо вводиться додатковий поріг розпізнавання у виді деякої області, що оточує точку еталона, то додатковою необхідною умовою приймається наступна

$$\delta_{ij}^1 < x_j - a_{ij}^* < \delta_{ij}^2, \qquad (3.3)$$

де δ_{ij}^1, δ_{ij}^2 – границі області ухвалення рішення для діагнозу D_i і координати x_j.

Умова (3.3) визначає N -мірний паралелепіпед, усередині якого повинна знаходитися точка X для ухвалення рішення $\overline{X} \in D_i$. *Ці області для різних діагно-*

зів можуть перекриватися. Їхнє введення дозволяє виключити випадки, коли відстань l^2_i мінімальна, але точка $\overline{X}$ настільки вилучена від області D_i, що рішення $\overline{X} \in D_i$ неправдоподібне. Якщо точка $\overline{X}$ виходить з області (3.3), то відбувається відмова від розпізнавання, що небажано. У зв'язку з цим границі (3.3) не слід вибирати занадто вузькими, однак розширення області діагнозу зменшує надійність розпізнавання.

У багатьох задачах розпізнавання доцільно використовувати діагностичну міру відстані

$$l_i^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{(x_j - a_{ij}^*)^2}{\sigma_{ij}^2},$$

де a^*_{ij} і σ_{ij} – середнє значення і середньоквадратичне відхилення координати x_j об'єктів з діагнозом D_i. Оцінку a^*_{ij} і σ_{ij} можна проводити на 8 – 10 зразках із установленим діагнозом.

Також застосовують діагностику по кутовій відстані. Близькість вектора $\overline{X}$ *до еталонного вектора* $\overline{a}^*_i$ *можна охарактеризувати за допомогою кута між векторами (рис.4)*

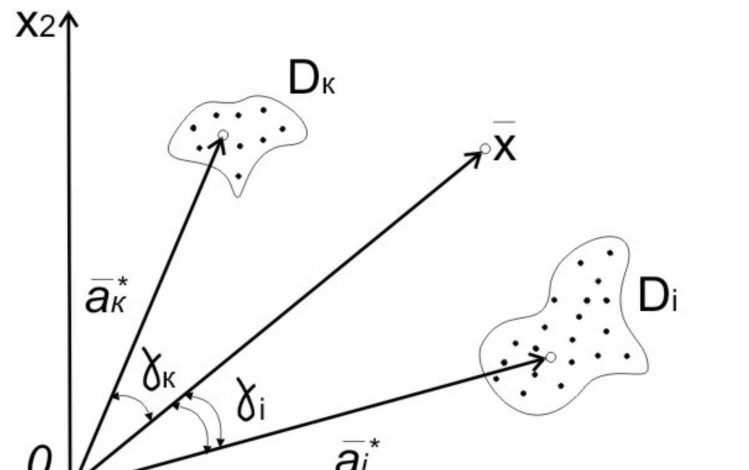
Зручно використовувати косинус кута між векторами, визначаючи його за допомогою скалярного добутку

$$\cos\gamma_i = \frac{\overline{x} \cdot \overline{a_i^*}}{|\overline{x}||\overline{a_i^*}|}. \qquad (3.4)$$

Як видно з рівності (3.4), перетворення масштабу не впливає на кут між векторами. Скалярний добуток і норма векторів визначаються як в евклідовому просторі

$$\overline{x} \cdot \overline{a_i^*} = x_1 a^*_{i1} + \ldots + x_N a^*_{iN} = \sum_{j=1}^{N} x_j a_{ij}^*.$$

У розгорнутому виді рівність (3.4) буде такою



Діагностика по кутовій відстані

$$\cos\gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j a_{ij}^*}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{*2}}}.$$

Якщо вектори $\overline{X}$ *та* $\overline{a}^*_i$ *ортогональні (*$\gamma_i = \pi/2$*), то скалярний добуток дорівнює нулю.*

При діагностиці по кутовій відстані приймається рішення $\overline{X} \in D_i$*, якщо кут між векторами* $\overline{X}$ *та* $\overline{a}^*_i$ *найменший чи* $\cos\gamma_i = max$, $i = \overline{1, n}$.

14.2. Лінійні методи поділу (лінійний дискримінантний аналіз)

Існують дискримінантні та поділяючі функції. Нехай у просторі ознак (параметрів) містяться точки, що належать n різним діагнозам (станам) D_1, $D_2, \ldots, D_n$.

Дискримінантними функціями для цих діагнозів називають скалярні функції $f_i(\overline{X})$, $i = \overline{1, n}$*, що задовольняють умові*

$$f_i(\overline{x}) > f_j(\overline{x}) \text{ при } \overline{X} \in D_i,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i. \qquad (3.5)$$

Таким чином, функція $f_i(\overline{X})$ приймає для точок діагнозу D_i найбільші значення в порівнянні з всіма іншими дискримінантними функціями. *Лінійна дискримінантна функція в загальному виді записується в такий спосіб*

$$f_i(\overline{X}) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \lambda_{i1}x_1 + \lambda_{i2}x_2 + \ldots + \lambda_{iN}x_N + \lambda_{iN+1},$$

де $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in+1}$ – вагові коефіцієнти.

Якщо діагнози D_i *і* D_j *у просторі ознак мають загальну границю, то рівняння поділяючої поверхні буде такою*

$$f_i(\overline{x}) - f_j(\overline{x}) = 0. \qquad (3.6)$$

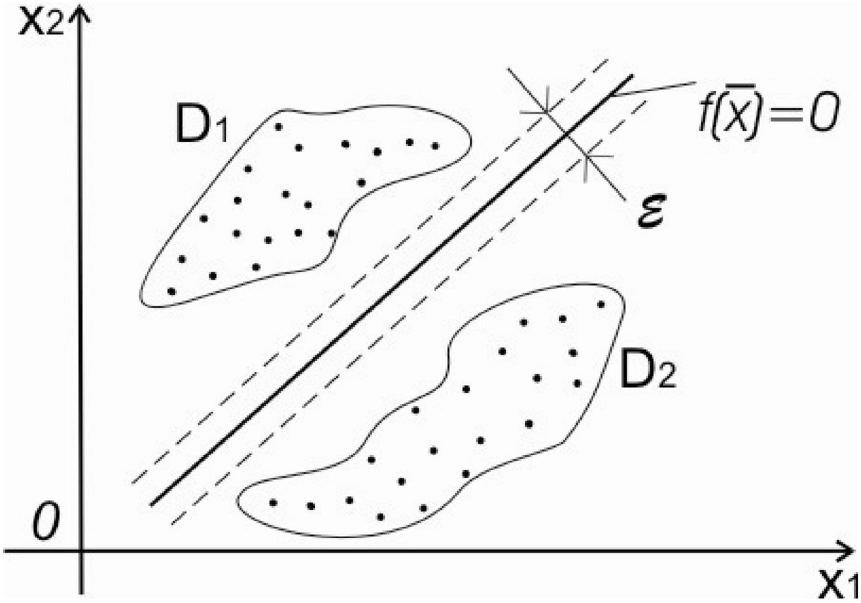
Істотне практичне значення має поділ на два діагнози (стани) D_1 *і* D_2*, наприклад, справне і несправне. Цей випадок називається дихотомією чи диференціальною діагностикою. При розпізнаванні двох станів як поділяючу функцію можна прийняти різницю відповідних дискримінантних функцій* $f(\overline{x}) = f_1(\overline{x}) - f_2(\overline{x})$. За допомогою поділяючої функції можна вказати наступне вирішальне правило

$$f(\overline{x}) > 0 \text{ при } \overline{X} \in D_1; \qquad f(\overline{x}) < 0 \text{ при } \overline{X} \in D_2. \qquad (3.7)$$

Рівняння поділяючої поверхні $f(\overline{x}) = 0$.

Для підвищення вірогідності розпізнавання застосовують пороги чутливості. Тоді вирішальне правило формулюється в такий спосіб

$$\text{при } f(\overline{X}) \geq \varepsilon \quad X \in D_1; \quad \text{при } f(\overline{X}) \leq -\varepsilon \quad X \in D_2; \qquad (3.8.)$$



Розділююча поверхня і розділюючий шар у просторі ознак.

при $-\varepsilon < f(\overline{X}) < \varepsilon$ *відмова від розпізнавання;* ε *– досить мала позитивна величина.*

При відмові від розпізнавання для ухвалення рішення потрібно надходження додаткової інформації. У випадку (3.8.) мається поділяючий шар, товщина якого залежить від обраних значень порогів. Відзначимо, що поверхні, що розділяють області діагнозів у просторі ознак, можуть бути різними, тому що вибір дискримінантних функцій не є однозначним.

Один з найважливіших класів поділяючих функцій утвориться з лінійних дискримінантних функцій. Тоді поділяюча функція при розпізнаванні двох класів буде

$$f(\overline{x}) = f_1(\overline{x}) - f_2(\overline{x}) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} \qquad (3.9)$$

$$\lambda_j = \lambda_{1j} - \lambda_{2j}, \qquad j = 1,2,\ldots,N+1.$$

Величини λ_j називаються ваговими коефіцієнтами.

Методи розпізнавання за допомогою лінійних поділяючих функцій називаються лінійними методами поділу. Діагнози, для яких можливо таке розпізнавання, вважаються лінійно-розділимими. Вагові коефіцієнти λ_j *утворять ваговий вектор з числом компонентів N+1*

$$\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{N+1}).$$

Для зручності геометричної інтерпретації доповнимо вектор $\overline{X}$ ще одним компонентом x_{N+1}=1. Тоді доповнений вектор ознак

$$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}).$$

Надалі будемо розглядати вектори в доповненому просторі (x_{N+1} =1) ознак.

Поділяючу функцію при діагностиці на два стани можна представити у виді скалярного добутку

$$f(\overline{x}) = \overline{\lambda} \cdot \overline{x}. \qquad (3.10)$$

Умова поділу (вирішальне правило)

$$f(\bar{x}) = \bar{\lambda} \cdot \bar{x} > 0 \quad \text{при} \quad \bar{X} \in D_1;$$
$$f(\bar{x}) = \bar{\lambda} \cdot \bar{x} < 0 \quad \text{при} \quad \bar{X} \in D_2. \qquad (3.11)$$

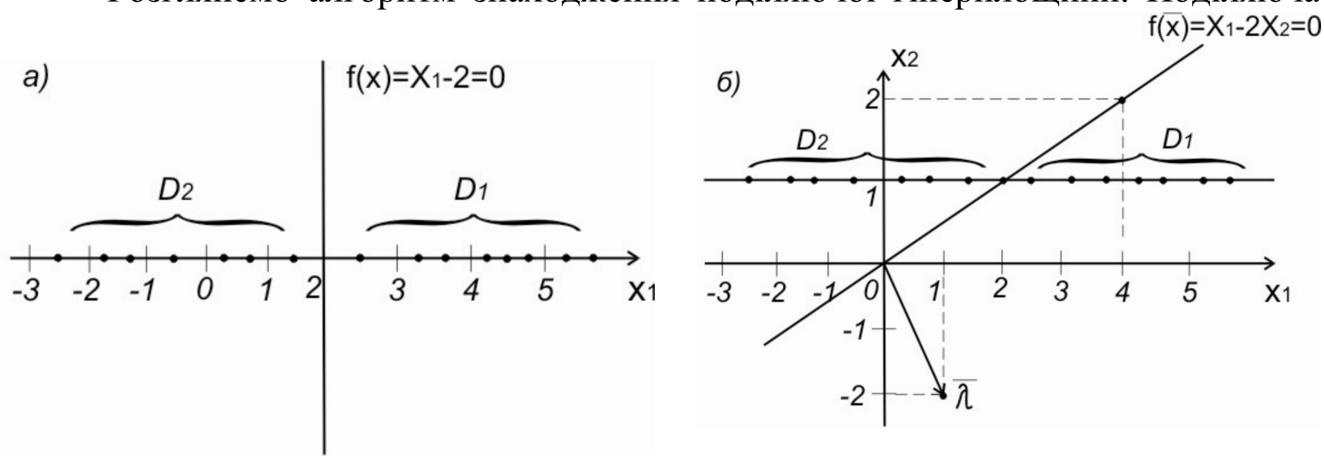
Поділяюча поверхня (3.10) є площиною в (N+1)-мірному просторі чи гіперплощиною. Рівняння поділяючої гіперплощини

$$f(\bar{x}) = \bar{\lambda} \cdot \bar{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1}. \qquad (3.12)$$

Рівняння (3.12) означає, що ваговий вектор $\bar{\lambda}$ перпендикулярний поділяючої гіперплощині. У доповненому просторі ознак поділяюча гіперплощина завжди проходить через початок координат.

Приклад. Нехай система визначається одним параметром і поділяюча функція в просторі ознак $f(x) = x_1 - 2$. Відповідно до умови (3.7.) при $x_1 > 2$ точки належать діагнозу D_1, при $x_1 < 2$ – діагнозу D_2. У доповненому просторі ознак поділяюча функція $f(\bar{X}) = x_1 - 2x_2$. Ваговий вектор має складові $\bar{\lambda} = (1, -2)$. Умови поділу залишаються колишніми. Поділ у просторі ознак і в доповненому просторі ознак для цього приклада показаний на рисунку.

Розглянемо алгоритм знаходження поділяючої гіперплощини. Поділяюча



Розділення в просторі ознак (а) и доповненому просторі ознак (б).

гіперплощина проходить через початок координат у доповненому просторі ознак і нормальна ваговому вектору $\bar{\lambda}$. Отже, вектор $\bar{\lambda}$ однозначно визначає положення поділяючої площини в просторі ознак і задача зводиться до знаходження вектора $\bar{\lambda}$. При визначенні вектора $\bar{\lambda}$ застосовується процедура послідовних наближень. Для її реалізації використовують навчальну послідовність. *Під навчальною послідовністю розуміється сукупність зразків з відомим діагнозом – сукупність верифікованих зразків.* Ця послідовність використовується для навчання, у даному випадку для знаходження вагового вектора поділяючої гіперплощини.

Алгоритм навчання (визначення вагового вектора) полягає в наступному. Для навчання пред'являється перший зразок $\bar{X}_1$, для якого діагноз (стан) відомий. Як перше наближення для вектора $\bar{\lambda}$ приймається

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{X}_1, \text{ якщо } \bar{X}_1 \in D_1, \text{ чи } \bar{\lambda}_1 = -\bar{X}_1, \text{ якщо } \bar{X}_1 \in D_2.$$

Виходить, що поділяюча площина перпендикулярна вектору першої точки навчальної послідовності. Далі пред'являється другий зразок, описуваний вектором $\overline{X}_2$. Спочатку перевіряється правильність попереднього наближення для поділяючої площини. Якщо виконується умова $\lambda_1 X_2 > 0$, то ваговий вектор не потрібно коректувати і в другому наближенні приймається $\overline{\lambda}_2 = \overline{\lambda}_1$. Потім пред'являється третій зразок $\overline{X}_3$ і проводиться перевірка попереднього значення вагового вектора. Якщо $\overline{\lambda}_2 \overline{X}_3 > 0$, то вектор $\overline{\lambda}_2$ не вимагає виправлень і приймається $\overline{\lambda}_3 = \overline{\lambda}_2$. У цьому випадку точки $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ лежать по одну сторону від поділяючої площини. Якщо $\overline{\lambda}_2 \overline{X}_3 < 0$, то умова поділу (3.11) $\overline{\lambda} \cdot \overline{X} > 0$ не виконується і потрібно скорегувати ваговий вектор. Тепер приймають $\overline{\lambda}_3 = \overline{\lambda}_2 + \overline{X}_3$ і далі переходять до показу наступного зразка. У загальному виді описану процедуру можна представити так

$$\overline{\lambda}_{n+1} = \overline{\lambda}_n + r_{n+1} \overline{x}_{n+1}. \qquad (3.13)$$

У цій рівності

$$\text{при} \quad \overline{X_{n+1}} \in D_1 \quad \text{буде} \quad r_{n+1} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \overline{\lambda}_n \cdot \overline{X}_{n+1} > 0 \\ 1, \text{ якщо } \overline{\lambda}_n \cdot \overline{X}_{n+1} < 0 \end{cases}$$

$$\text{при} \quad \overline{X_{n+1}} \in D_2 \quad \text{буде} \quad r_{n+1} = \begin{cases} -1, \text{ якщо } \overline{\lambda}_n \cdot \overline{X}_{n+1} > 0 \\ 0, \text{ якщо } \overline{\lambda}_n \cdot \overline{X}_{n+1} < 0 \end{cases} \qquad (3.14)$$

Іншими словами, при неправильних відповідях до вектора $\overline{\lambda}_n$ додається вектор точки, щодо якої була зроблена помилка. Після чергового показу зразка з навчальною послідовністю ваговий вектор $\overline{\lambda}$ залишається колишнім чи виправляється. Побудований процес послідовних наближень приводить до визначення вагового вектора за кінцеве число виправлень, тобто за кінцеве число виправлень ваговий вектор $\overline{\lambda}$, одержуваний з рівності (3.13), здійснює поділ (3.11). У практичних задачах області діагнозів характеризуються навчальними послідовностями, тобто деяким числом об'єктів із заздалегідь установленим діагнозом. У зв'язку з цим виконання умов лінійної розделимості перевіряється по навчальній вибірці. *Достатня умова лінійної розделимості двох непересічних областей діагнозів полягає в тому, що області діагнозу повинні бути опуклими областями.*

Область називається опуклою, якщо відрізок прямої, що з'єднує дві довільні точки області, не виходить за її межі. Зазначену умову можна послабити, відносячи вимоги опуклості тільки до частини поверхні області, більш близької до іншої області.

14.3. Зв'язок метричних методів з методом дискримінантних функцій

У метричних методах процес навчання складається у формуванні множини (групи) зразків із установленим діагнозом і визначенні еталонного (середнього) вектора для них. Метод дискримінантних функцій дає можливість визначення вагового вектора шляхом показу зразків з навчальної послідовності.

Дискримінантна функція $f_i(\overline{X})$ має значення більші, ніж інші функції, для всіх точок $\overline{X}$, що входять в область діагнозу D_i. Метричні методи визначення мінімальної відстані дають очевидну можливість наступного вибору дискримінантних функцій $f_i(\overline{x}) = 1/l_i^2$.

Тоді поділяюча функція (3.6.) прийме такий вид

$$f_i(\overline{X}) - f_k(\overline{X}) = \frac{1}{l_i^2} - \frac{1}{l_k^2} = \frac{l_k^2 - l_i^2}{l_i^2 \cdot l_k^2} = 0. \qquad (3.15)$$

Однак дискримінантні функції можна записати різним образом. Можна вибрати

$$f_i(\overline{X}) = -l_i^2; \quad f_k(\overline{X}) = -l_k^2, \qquad (3.16)$$

що приводить до більш простої структури дискримінантної функції.

Розглянемо метод мінімальної відстані до еталона при використанні квадратичної діагностичної міри відстані

$$l_i^2 = \left|\overline{x} - \overline{a}_i^*\right|^2 = \left(\overline{x} - \overline{a}_i^*\right) \cdot \left(\overline{x} - \overline{a}_i^*\right).$$

Дискримінантна функція (13.16) буде такою

$$f_i(\overline{X}) = -l_i^2 = 2\,\overline{X} \cdot \overline{a}_i^* - \left|\overline{a}_i^*\right|^2 - \left|\overline{X}\right|^2.$$

Тому що величина $|\overline{X}|^2$ однакова для всіх дискримінантних функцій, то можна прийняти в остаточному виді

$$f_i(\overline{X}) = \overline{X} \cdot \overline{a}_i^* - \frac{\left|\overline{a}_i^*\right|^2}{2}.$$

Для діагностики двох станів D_i та $D_к$ поділяюча функція прийме вид

$$f(\overline{X}) = f_i(\overline{X}) - f_k(\overline{X}) = \overline{X} \cdot \left(\overline{a}_i^* - \overline{a}_k^*\right) + \frac{\left|\overline{a}_k^*\right|^2}{2} - \frac{\left|\overline{a}_i^*\right|^2}{2}. \qquad (3.17)$$

На підставі виразу (13.17) можна укласти, що метод мінімальної відстані до еталона при квадратичній мірі відстані приводить до лінійній поділяючій функції виду (3.9)

$$f(\overline{X}) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1},$$

де N-мірний ваговий вектор $\overline{\lambda} = \overline{a}_i^* - \overline{a}_k^*$, а ваговий коефіцієнт $\lambda_{N+1} = \dfrac{\left|\overline{a}_k^*\right|^2}{2} - \dfrac{\left|\overline{a}_i^*\right|^2}{2}$.

15. Алгоритми діагностування

Процес визначення технічного стану об'єкта називається діагностуванням.

Несправність як фізичне явище називається дефектом, під яким розуміється невідповідність властивостей об'єкта необхідним показникам.

Діагноз – остаточний висновок про технічний стан об'єкта.

Засоби й об'єкт діагностування, взаємодіючі між собою, утворять систему діагностування.

Система діагностування в процесі визначення технічного стану реалізує деякий алгоритм діагностування.

Алгоритм діагностування складається із сукупності елементарних перевірок, задає послідовність їхньої реалізації і правила обробки результатів елементарних перевірок з метою одержання діагнозу. Елементарна перевірка являє собою деякий мінімальний (не підлягаючому розчленовуванню в даних конкретних умовах) експеримент над об'єктом діагностування, що характеризується вхідним (тестовим чи робочим) впливом, подаваним на об'єкт, і складом конкретних точок, з яких знімається відповідь об'єкта на цей вплив. Отримане значення відповіді (значення сигналів у контрольних точках) називається результатом елементарної перевірки. *Алгоритм діагностування називається безумовним, якщо він задає одну фіксовану послідовність реалізації елементарних перевірок. Умовний алгоритм діагностування задає кілька різних послідовностей реалізації елементарних перевірок. При кожнім застосуванні такого алгоритму чергова елементарна перевірка вибирається за результатами попередніх уже реалізованих перевірок.*

При достатньому різноманітті припустимих елементарних перевірок можна одержувати різні по якості безумовні чи умовні алгоритми діагностування, що вирішують ті самі задачі діагностування. У зв'язку з цим мають практичний сенс задачі побудови оптимальних алгоритмів діагностування.

Оптимальним називають алгоритм діагностування, що задовольняє екстремальному (часто мінімальному) значенню деякої заданої функції, що кількісно характеризує ту чи іншу якість алгоритму в цілому і називається цільовою функцією оптимізації.

Цільовою функцією оптимізації можуть бути витрати на реалізацію елементарних перевірок для визначення технічного стану об'єкта. Для стислості цю функцію називають ціною алгоритму діагностування. Для графічного представлення алгоритмів можна використовувати деревоподібні графи.

Задачі побудови оптимальних алгоритмів діагностування успішно зважуються методом обробки таблиць покрить у випадку безумовних алгоритмів і методами теорії запитальників для умовних алгоритмів.

15.1 Оптимізація умовних алгоритмів діагностування

Побудова безумовних алгоритмів діагностування методами обробки таблиць покрить здійснюється без урахування імовірностей технічних станів об'єкта, що рівносильно припущенню про рівність цих імовірностей. *У багатьох практичних випадках це не так – майже завжди справний стан об'єкта більш імовірний, чим будь-які деякі його несправні стани. Урахування нерівних імовірностей технічних станів об'єкта дозволяє будувати алгоритми діагностування в середньому більш економічні, чим без такого урахування. Це справедливо в першу чергу для умовних алгоритмів діагностування.*

Для побудови оптимальних умовних алгоритмів діагностування запропоноване значне число методів: апарат теорії марковських процесів, теорія статистичних рішень. *У даному розділі буде розглянутий один з найбільш зручних методів наочного представлення і побудови оптимальних умовних алгоритмів діагностування з досить простим математичним апаратом, заснований на використанні теорії запитальників. Теорія запитальників має велике методологічне значення в розумінні і постановці задач побудови умовних алгоритмів діагностування.*

15.1.1 Поняття запитальника

Мається кінцева множина E, що складається з N елементів y_i, i = 1,2,…,N. Елементи y Є E називають подіями. Кожній події y Є E приписане позитивне число W(y), що називається вагою події y. Зафіксовано розбивку множини E на λ класів E_μ, $1 \le |E_\mu| < N$, $\mu = 1,2,\ldots,\lambda$. Задано таку множину T розбивок t_j, j = 1,2,…,|T|, множини E на класи. Елементи t Є T називають питаннями. Число a(t), $1 \le a(t) \le N$ класів $E_{\gamma(t)}$, $\gamma(t) = 1,2,\ldots,a(t)$ у розбивці t Є T називається підставою питання t. Ознаки, по яких виділяються класи подій у розбивці t Є T, називаються відповідями питання t. Кожному питанню t Є T привласнене позитивне число C(t), називане ціною питання t. Порушити питання t_j Є T щодо множини E – значить розбити цю множину E на $a(t_j)$ класів $E_{\gamma(tj)}$. Однак питання з T можна ставити також щодо будь-якого класу $E_{\gamma(tj)}$. Поставивши питання t_l відносно $E_{\gamma(tj)}$, одержимо класи $E_{\gamma(tjtl)}$, щодо кожного з яких знову можна задавати (ставити) питання з T и т.д.

Метою постановки питань є розпізнавання (ідентифікація, виділення) підмножин E_μ, $\mu = 1,2,\ldots,\lambda$ множини E.

Задачами повної ідентифікації називають задачі, у яких $|E_\mu|=1$, $\mu= 1,2,\ldots,\lambda=N$. У таких задачах метою постановки питань є одержання N одноелементних класів множини E. Перше питання завжди ставиться щодо множини E. Друге і наступні питання задаються щодо класів, отриманих у результаті постановки попередніх питань. Постановка питань припиняється після того, як всі утворені класи виявляться одноелементними. Після закінчення ідентифікації різним подіям відповідають різні послідовності питань і відповідей, що розрізняються або їх числом, або складом чи тим і іншим разом.

Сукупність Q питань і послідовності їхньої постановки, що забезпечують ідентифікацію N подій множини E називають запитальником для E. Для однієї множини E можуть бути побудовані різні запитальники, що розрізняються складом і послідовністю питань. Тому виникає задача вибору кращих (оптимальних) у тім чи іншому сенсі запитальників. Розв'язання задачі побудови оптимальних запитальників є основним предметом досліджень теорії запитальників.

15.1.2 Представлення запитальника графом

Запитальник для множини E може бути представлений деревоподібним графом, множина внутрішніх (не висячих) вершин x якого є припустимими питаннями з множини Q. N висячим вершинам y поставлені у відповідність N подій множини E. Кожній внутрішній вершині x Є Q запитальника відповідає підмножина E(x) подій, щодо якої ставиться питання x. Початковій вершині x_0 відповідає множина $E(x_0) = E$. Множину усіх вершин графа позначимо символом Z, а граф – символом G. Основу питання x позначають a(x), а ціну - C(x). Для будь-якої вершини графа z Є Z розрізняють множину її послідовників і її попередників.

Ціною шляху з x_0 у z Є Z називають суму

$$C(x_0, Z) = \sum_{i=x_0}^{z} C_i(x). \qquad (1)$$

Тоді $C(x_0, x_0) = 0$. Ціна шляху $C(x_0,y)$ характеризує витрати на ідентифікацію події в Є E. Ці витрати будуть ненадлишковими в даному запитальнику G , коли шлях ведучий з x_0 у кожну подію в Є E, буде єдиним без контурів. *Саме тому запитальнику G для множини E с ненадлишковими витратами на ідентифікацию подій відповідає дерево з коренем x_0, у якого в кожну вершину, крім кореня x_0, заходить тільки одна дуга, у корінь x_0 не заходить жодна дуга і немає контурів.*

Відносна вага p(y) події в Є E визначається в такий спосіб

$$p(y) = \frac{w(y)}{W}, \quad \text{де} \quad W = \sum_{y \in E} w(y). \qquad (2)$$

При цьому $0 < p(y) < 1$ та $\sum_{y \in E} p(y) = 1$, тобто множину E можна розглядати як повну систему подій у Є E с імовірностями p(y). Тоді витрати на ідентифікацію подій по запитальнику в цілому визначаються як ціна обходу графа G

$$C(x_0, E) = \sum_{y_i \in E} C(x_0, y_i) p(y_i). \qquad (3)$$

Вага p(x) питання x Є Q визначається як сума ваг подій, що належать підмножині E(x) чи, що те ж, що є послідовниками (нащадками) питання x

$$p(x) = \sum_{y \in E(x)} p(y). \qquad (4)$$

Якщо у виразі (3) ціни шляхів $C(x_0, y_i)$ представити у виді сум цін питань, а потім розкрити дужки і зробити перегруповування членів, то для ціни обходу запитальника можна одержати інший вираз

$$C(x_0, E) = \sum_{x_j \in Q} C(x_j) p(x_j). \qquad (5)$$

Вага кореня запитальника, як і сума ваг його висячих вершин, дорівнює одиниці.

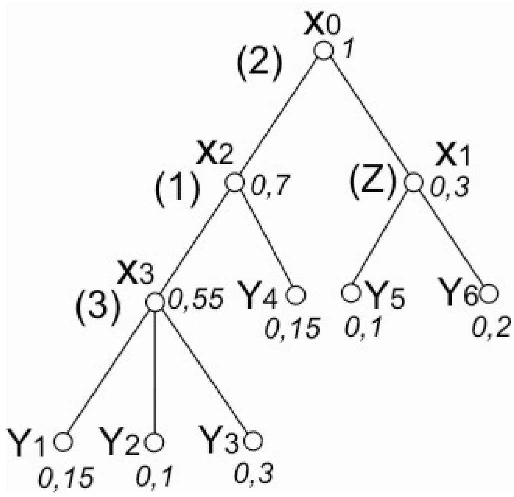
Приклад 1. На рисунку 1 представлений приклад запитальника для шести подій |E| = 6 з чотирма питаннями |T| = 4. Ваги подій і питань зазначені поруч з відповідними вершинами числами без дужок, а ціни питань – числами в дужках.

Підрахуємо ціну обходу заданого запитальника

По (3): $C(x_0,E)=(2+1+3)(0,15+0,1+0,3) + (2+1)0,15 + (2+2)(0,1+0,2) = 4,95$

чи

по (5): $C(x_0,E)= 2\cdot 1 + 1\cdot 0,7 + 3\cdot 0,55 + 2\cdot 0,3 = 4,95$.



Запитальник к прикладу 1

Мовою запитальників можуть бути сформульовані багато теоретичних і практичних задач. Крім розглянутих задач побудови алгоритмів діагностування, до таких задач відносяться побудова кодів змінної довжини і процедур сортування предметів за значеннями властивих їм ознак, задачі типу угадування задуманого числа і т.п.

Ціна обходу являє собою досить загальну і корисну характеристику запитальника. Відповідність між реалізованими запитальниками й алгоритмами діагностування очевидна. Події y – це технічні стани чи дефекти; ваги подій p(y) – найчастіше імовірності появи технічних станів чи дефектів; питання x – елементарні перевірки; основи питань a(x) – числа різних можливих результатів елементарних перевірок; ціни питань C(x) – кількісні витрати (часу, грошей, енергії, людських зусиль) на реалізацію елементарних перевірок; вихідна множина питань T – множина припустимих елементарних перевірок; множина Q питань – сукупність елементарних перевірок, що входять в алгоритм діагностування; ціна обходу запитальника $C(x_0,E)$ *– середні витрати на виявлення чи пошук технічних станів чи дефектів об'єкта. Ціна обходу* $C(x_0,E)$ *дорівнює середній вартості чи середньому часу визначення технічного стану в алгоритмах діагностування з умовною зупинкою.*

Основними параметрами запитальників є в першу чергу ваги p(y) подій y Є E, ціни C(x) і основи a(x) питань x Є Q. Різний характер цих даних визначається особливостями задач, розв'язуваних за допомогою запитальників. Якщо всі питання запитальників мають однакові основи a(x) = a = const, то запитальник називається однорідним, чи гомогенним. Якщо хоча б для однієї пари питань x_i Є Q і x_j Є Q, i ≠ j, запитальника має місце нерівність $a(x_i) \neq a\,(x_j)$, то запитальник називається неоднорідним, чи гетерогенним. Однорідні запитальники, у яких a=2, такі називають дихотомічними запитальниками, а однорідні запитальники по основі a > 2 – поліхотомічними запитальниками.

Рангом r(z) вершини z Є Z запитальника G називають число дуг шляху, що починається в кореневій вершині x_0 і закінчується у вершині z.

Нехай g_m – число питань по основі a_m; h_l – число питань з ціною C_l у запитальнику G. Тоді загальна кількість усіх питань |Q| буде

$$\Sigma g_m = \Sigma h_l = |Q|. \qquad (6)$$

Число подій N зв'язано з числом g_m питань і їхніх основ a_m наступною залежністю

$$N = \Sigma g_m(a_m - 1) + 1. \qquad (7)$$

Наприклад, для запитальника на рисунку 1 буде

$g_1 = 3$, $a_1 = 2$, $g_2 = 1$, $a_2 = 3$; $C_1 = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $C_2 = 2$, $h_3 = 1$, $C_3 = 3$.

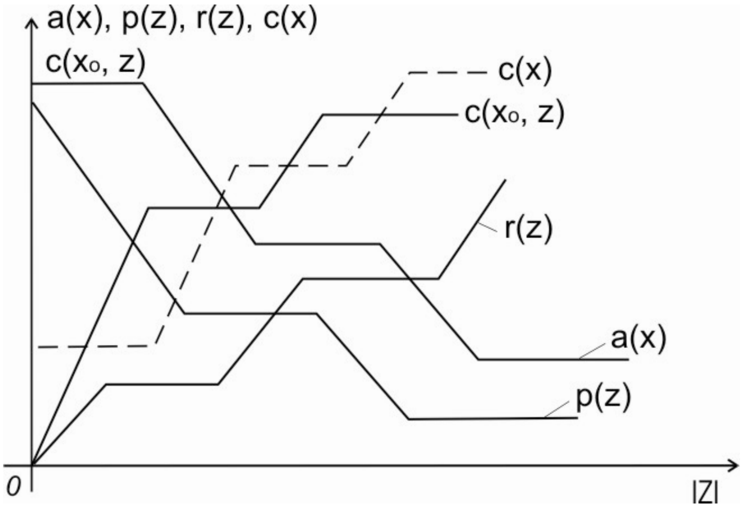
Тоді одержимо

$$N = 3(2 - 1) + 1(3 - 1) + 1 = 6.$$

15.1.3 Алгоритм перетворення заданого запитальника в оптимальний

Оптимальний запитальник G_0, що дозволяє розрізнити N подій за допомогою $|Q|$ питань, що мають основу a_m і ціни C_l, є дерево з коренем x_0, таке, що його вершинам z, розташованим у неубутному порядку щодо їхніх рангів r(z), привласнені ваги p(z) у незростаючому порядку, а ціни $C(x_0, z)$ ведучих до них з x_0 шляхів – у неубутному порядку. При цьому питання x розташовуються в незростаючому порядку щодо їхніх основ a(x) і в неубутному порядку щодо їхніх цін C(x). Серед усіх вершин одного рангу r немає ні однієї, вага якої перевищує суму ваг інших а *вершин того ж рангу, де* а *- найменше з основ питань рангу r -1. Рисунок 2 є умовною ілюстрацією зазначеного у визначенні упорядкування значень основних параметрів оптимального запитальника.*

Ціна обходу оптимального запитальника найменша з усіх можливих значень. Перетворення заданого запитальника G в оптимальний запитальник G_0 може бути виконане багаторазовим застосуванням операцій перестановки підзапитальників, цін і основ питань, а також упорядкування вершин у межах того самого рангу. Оптимальним буде запитальник, зменшення ціни обходу якого за допомогою зазначених операцій неможливо. Однак більш ефективним є перетворення заданого запитальника в оптимальний по наступному алгоритму.



Графічна ілюстрація по упорядкуванню значень основних параметрів оптимального запитальника

Задано деякий запитальник G, що розрізняє множину E з N подій y_i з вагами $p(y_i)$, $i = 1,2,\ldots,N$ за допомогою $|Q|$ питань, серед яких g_m питань мають основи a_m і h_l питань мають ціни C_l. Тут $m \in M$ та $l \in L$, де M, L – деякі числові множини. Перетворити запитальник G в оптимальний запитальник G_0.

1) Утворити з ваг подій p(y), а також з основ a(x) і цін C(x) питань запитальника G два списки: список 1 – ваг $p(y_к)$, $y_к \in E$, розташованих у неубутному порядку, $p(y_к) \le p(y_{к+1})$, к = 1,2,…,N та список 2 – пар основ і цін питань (a_j, C_j), у якому основи розташовані в неубутному порядку $a_j \le a_{j+1}$, $j = 1,2,\ldots,\Sigma g_m=|Q|$, а ціни розміщені в незростаючому порядку $C_j \ge C_{j+1}$, $j = 1,2,\ldots,\Sigma h_l=|Q|$. Прийняти j =1 і перейти до пункту 2.

2) Узяти зі списку 2 пару (a_j, C_j) і віднести її до питання x_j оптимального запитальника G_0, тобто прийняти, що $a(x_j) = a_j$ та $C(x_j) = C_j$. Взяти і викреслити з писку 1 a_j перших ваг і прийняти їх як ваги послідовників питання x_j. Визначити вагу питання $p(x_j) = \sum_{к=1}^{a_j} p(y_к)$ і перейти до пункту 3.

3) Перевірити значення j. Якщо $j < |Q|$, то перетворити список 1, зберігши в ньому не викреслені ваги і включивши в нього вагу питання $p(x_j)$. Розташувати ці ваги в неубутному порядку, збільшити j на 1 і повернутися до пункту 2. Якщо $j = |Q|$, то перейти до пункту 4.

4) Кінець побудови оптимального запитальника G_0.

Приклад 2. Перетворити запитальник G, представлений на рисунку1, в оптимальний за допомогою викладеного алгоритму.

Крок 1. Утворимо список 1 ваг подій запитальника G

0,1; 0,1; 0,15; 0,15; 0,2; 0,3,

а також список 2 пар основ і цін його питань:

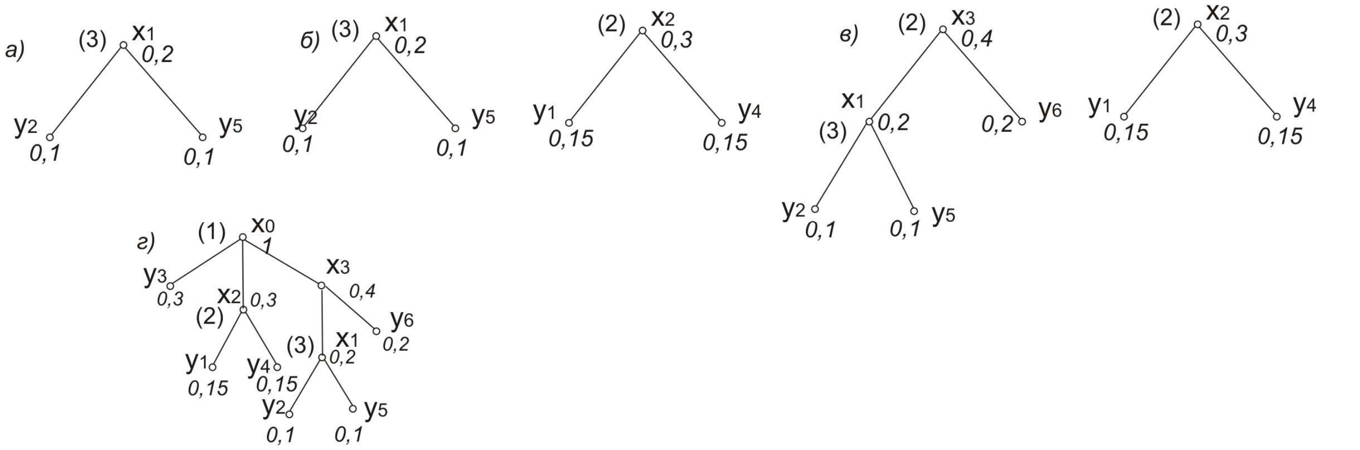
(2,3); (2,2); (2,2); (3,1).

Наступні кроки процедури побудови запитальника ілюструються на рисунку 3.

Крок 2. Беремо першу пару зі списку 2 , ставимо у відповідність їй питання x_1 з основою 2 і ціною 3. Двом послідовникам питання x_1 поставимо у відповідність дві перших ваги зі списку 1. Отриманий фрагмент запитальника показаний на рисунку 3а. Далі викреслимо з писку 1 дві перших ваги і включимо в нього вагу $p(x_1) = 0,2$ питання x_1. Одержуємо новий список

0,15; 0,15; 0,2; 0,2; 0,3.

Крок 3. Беремо другу пару зі списку 2 і формуємо питання x_2, для якого $a(x_2) = 2$, $C(x_2) = 2$, $p(x_2) = 0,15 + 0,15 = 0,3$. Фрагмент запитальника показаний на рисунку 3б. Список 1 здобуває вид:



Проміжні підзапитальники й оптимальний запитальник к прикладу 2

0,2; 0,2; 0,3; 0,3.

Крок 4. Третя пара зі списку 2 утворить питання x_3, $a(x_3) = 2$, $C(X_3) = 2$, $p(x_3) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$ – рисунок 3в. Одержуємо список 1:0,3; 0,3; 0,4.

Крок 5. Остання пара зі списку 2 визначає корінь x_0 шуканого запитальника G_0, $a(x_0) = 3$, $C(x_0) = 1$, $p(x_0) = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4 = 1$. Побудований оптимальний запитальник представлений на рисунку 3г. Ціна обходу побудованого запитальника дорівнює $C(x_0,E) = 1\cdot 1+2\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}2=1+0{,}8+0{,}6+0{,}6=3$.

Однозначне упорядкування на графі оптимального запитальника ваг подій, а також основ і цін питань спричиняє безумовність послідовності операцій викладеного алгоритму.

У ряді практичних випадків задаються обмеження по витратах на реалізацію алгоритмів діагностування – обмеження за цінами обходу запитальників. Врахувати такі обмеження можна в такий спосіб. Будується оптимальний запитальник без урахування обмежень. Ціна його обходу порівнюється з припустимою і якщо не перевищує її, то отриманий запитальник є шуканим розв’язанням. У противному випадку варто зменшити спочатку задану глибину діагностування. Для цього в оптимальному запитальнику віддаляються по одному питання, послідовниками яких є тільки висячі вершини. Ціна обходу запитальника, одержуваного після кожного чергового видалення питання, порівнюється з заданою припустимою. Видалення питань припиняється по досягненні заданої припустимої ціни обходу.

Очевидно, описаний процес супроводжується поступовим зменшенням глибини діагностування. Необхідність збільшення продуктивності праці на операціях діагностування, скорочення часу виявлення, пошуку й усунення несправностей, зменшення обсягів і складності засобів діагностування викликає інтерес до розробки методів побудови оптимальних алгоритмів діагностування і пояснює їх важливість.

16. Діагностика енергетичного обладнання
16.1 Загальні положення

Ціль діагностики – визначення працездатності виробу в даний момент часу, виявлення дефектів, що розвиваються, його окремих вузлів і прогнозування технічного стану.

Прогнозування технічного стану виробу означає визначення майбутнього стану виробу на підставі вивчення факторів, від яких цей стан залежить. Основним принципом прогнозування є використання минулого досвіду. Апріорна інформація про виріб є базою для процесу прогнозу й одержання оцінок у майбутньому (апостеріорні оцінки). Прогноз можна розуміти як одержання апостеріорної оцінки деякої якості досліджуваного явища на основі апріорних зведень про минуле і сьогодення.

Розв'язання задачі прогнозу виконується у виді реалізації наступних послідовних етапів:

- розробка моделі досліджуваного процесу і її математичний опис;
- одержання даних контролю і використання їх для визначення досліджуваного процесу;
- обчислення необхідних апостеріорних характеристик процесу.

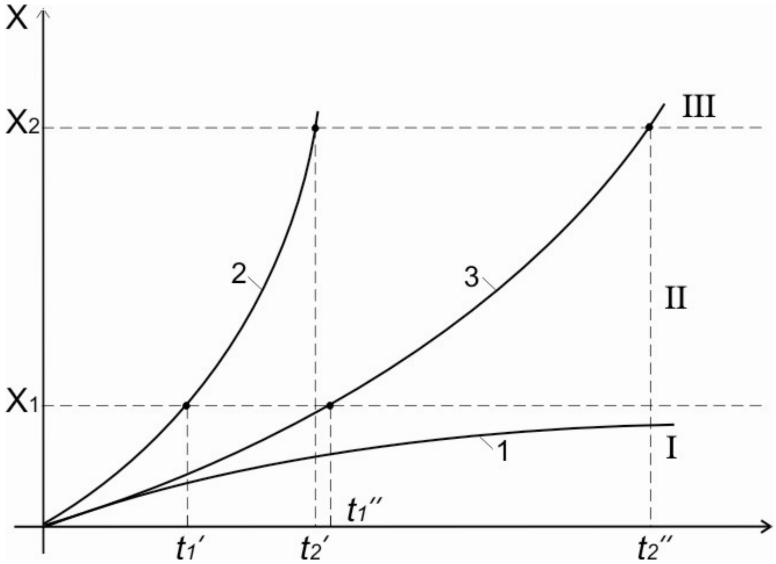
Не завжди після постановки діагнозу необхідний негайний останов агрегату з проведенням на ньому ремонтно-відбудовчих робіт. Рішення по цьому питанню приймається після прогнозування. *У прогностичних математичних моделях повинні бути відтворені процеси розвитку й утворення дефекту.* В даний час в енергетиці відсутня єдина концепція діагностування і прогнозування, існують і успішно застосовуються окремі методики.

Проводиться статистичний аналіз причин ушкодження силового устаткування в енергосистемах, що дозволяє виявити найбільші вузли, що часто ушкоджуються, (елементи) у залежності від типу устаткування і термінів його експлуатації. Однак відсутній однозначний взаємозв'язок між динамікою дефектів, що розвиваються, і проведенням планово-попереджувальних ремонтів (ППР), що часто приводить до невиправданих витрат засобів без істотного підвищення надійності. Тому представляється доцільним у системах контролю і діагностики відмовитися від термінів, що задаються графіком, обслуговування і ревізії, і перейти до установки цих термінів на основі оцінки експлуатаційного стану устаткування.

Нехай за допомогою якого-небудь засобу контролю проводиться вимір діагностичного параметра x. Тоді можлива зміна параметра в часі показана на рисунку. Переходу устаткування зі справного стану в умовно працездатний відповідає значення $x = x_1$ у момент часу t_1. Значення $x=x_2$ визначає перехід з умовно працездатного стану в непрацездатний в момент часу t_2.

Під устаткуванням розуміється в першу чергу енергетичне оснащення електростанцій: турбіни, турбогенератори, силові трансформатори.

Граничні значення першого рівня x_1 дозволяють виділити з усієї маси устаткування саме те, у якому може мати місце дефект, що розвивається, і яке варто взяти на спеціальний контроль для проведення більш докладного обстеження.



Зміна в часі контролюємого параметру х, що використовується, для діагностики експлуатаційного стану силового обладнання. І – справний стан; ІІ - наявність дефектів, що розвиваються; ІІІ – непрацездатний стан; 1 – бездефектне обладнання; 2 – обладнання с дефектом, що швидко розвивається; 3 – обладнання с дефектом, що повільно розвивається.

Значення другого рівня x_2 є гранично припустимими, по досягненні яких устаткування повинне бути виведене з роботи для усунення дефекту.

Система контролю і діагностики повинна виконувати наступні функції:

1) прогнозувати справний стан до наступного обстеження на підставі аналізу попереднього режиму роботи і даних періодичного контролю без відключення;

2) виявлення наявності дефектів, що розвиваються, в устаткуванні за допомогою датчиків безперервного контролю стану по першому рівні х1 чи відключення виробу при досягненні другого рівня х2 контрольованих параметрів.

Зниження витрат у порівнянні з прийнятою зараз системою періодичного контролю і ППР забезпечується за рахунок проведення ремонтних робіт не в жорстко встановлений термін, а по фактичному стану устаткування, що зв'язано з більш низькою вартістю відбудовного ремонту при виявленні ушкодження в порівнянні з аварійним ремонтом.

16.2 Діагностика силових трансформаторів

Діагностика орієнтована на виявлення дефектів на ранніх стадіях розвитку при мінімальних витратах на їхнє усунення. Діагностика включає методи виявлення дефектів під робочою напругою і на відключеному устаткуванні. Можливі складові системи контролю і діагностики (СКД) для потужних силових трансформаторів наведені в таблиці 1.

Спосіб контролю	Вид контролю	Об'єкт і засоби контролю
Безперервний без відключення	Контроль стану	Датчики концентрації характерних газів (водень, сума пальних газів). Датчики рівня часткових розрядів. Датчики зміни опору КЗ
	Контроль режиму	Термосигналізатори Лічильник КЗ Лічильник перенапруг Контроль перевантаження Контроль перезбудження
Періодичний без відключення	Контроль мастила	Хроматографічний аналіз розчинених в мастилі газів Фізико-хімічний аналіз мастила
	Зовнішній контроль	Вимір вібрації Вимір шуму Тепловізійний контроль
Періодичний с відключенням	Внутрішній контроль	Вимір діелектричних характеристик ізоляції. Вимір коефіцієнта трансформації, струму і втрат XX. Вимір опору КЗ, випробування низьковольтним імпульсом. Випробування підвищеною напругою.

1. Оцінка механічного стану обмоток силових трансформаторів при випробуваннях і в експлуатації.

Надійність трансформатора в значній мірі визначається його здатністю витримувати електродинамічні впливи, що виникають при КЗ. Недостатня електродинамічна стійкість обмоток при КЗ приводить до механічних деформацій обмоток і є однією з основних причин виходу трансформатора з ладу.

При випробування трансформаторів на стійкість при КЗ для контролю рівня запресовування обмоток, виміру електродинамічних сил, що діють на опори обмоток, застосовуються тензометричні датчики сил. Однак в експлуатації для оцінки механічного стану обмоток використовуються, в основному, два методи: метод виміру опору КЗ $Z_к$ і метод частотного аналізу МЧА. Допускається зміна $Z_к$ до 3% у порівнянні зі значеннями, обмірюваними при введенні трансформатора в експлуатацію і 5% - у порівнянні з паспортним значенням, розрахованим по напрузі КЗ.

Метод частотного аналізу також відомий за назвою методу низьковольтних імпульсів. Для реалізації методу низьковольтних імпульсів виготовляються діагностичні установки типу "Імпульс", застосовувані в енергосистемах і на електростанціях.

Суть методу низьковольтних імпульсів (те ж, що і МЧА) полягає в подачі на обмотку трансформатора зондувального імпульсу низької напруги і реєст-

рації відгуків – реакцій обмоток на вплив зондувального імпульсу. Механічний стан обмоток оцінюється по змінах у записаних осцилограмах і частотах. Будь-які зміни геометрії обмоток приводять до зміни відповідних ємкостей і індуктивностей і, отже, до зміни спектра частот. Остання модифікація установки "Імпульс-8 " містить у собі портативний комп'ютер із встановленими в ньому платами для запису й обробки сигналів, а також генератор імпульсів. Програмне забезпечення дозволяє робити запис сигналів, фільтрацію, збереження в базі даних, порівняння осцилограм, засоби їхньої обробки й аналізу. Висновок про наявність чи відсутність деформацій в обмотках приймається на основі критеріїв, закладених у програму.

При КЗ на обмотки трансформаторів діють осьові, радіальні і тангенціальні сили. Осьові сили при перевищенні критичних значень приводять до втрати осьової стійкості провідників і їхньому поляганню. Радіальні сили можуть викликати характерну деформацію втрати радіальної стійкості – хвилю радіальних деформацій уздовж майже усієї висоти обмотки там, де максимальна осьова індукція магнітного поля розсіювання. Деформована котушка по всьому периметрі обжимає розташований усередині її стрижень, а в одному місці вона має несиметричний викид, хвилю.

При КЗ спостерігаються деформації, що свідчать про дію на обмотки тангенціальних сил. Можливі наслідки дії цих сил: поворот всієї обмотки навколо своєї осі, скручування чи розкручування обмотки, коли верхня і нижня половини повертаються в різні сторони. У результаті тангенціальних переміщень обмоток можуть виникнути небезпечні деформації відводів, їхній натяг. При цьому можливі замикання між витками чи на землю, що спричиняє подальші руйнування. Тангенціальні сили набагато більші в низьковольтних обмотках, чим у високовольтних.

2) Хроматографічний аналіз.

Хроматографічний аналіз розчинених в мастилі газів (ХАРГ) є одним з основних методів оцінки стану силових трансформаторів.

Хроматографія (греч. Chroma – колір, фарба) фізико-хімічний метод поділу й аналізу сумішей, заснований на різному розподілі їхніх компонентів між двома фазами – нерухомої (сорбент із розвитою поверхнею) і рухливий (елюент), що протікає через нерухому.

Газова хроматографія застосовується для поділу газів, визначення домішок шкідливих речовин у повітрі, воді, ґрунті, промислових продуктах. Хроматографічним методом можливий поділ близьких по властивостях речовин. Після поділу компонента аналізованої суміші можна ідентифікувати і кількісно визначати (масу, концентрацію) будь-якими відомими хімічними методами.

По концентраціях розчинених у трансформаторному мастилі газів можна судити про можливий розвиток дефекту. Визначення газовмісту ізоляційних мастил здійснюється за допомогою спеціальних приладів – хроматографів, призначених для деяких видів хроматографії. У загальному випадку газова хроматографія припускає необхідність добору проб мастила з трансформатора і передачу їх у фізико-хімічну лабораторію. *При діагностиці трансформаторів вимірюють вміст восьми газів – сім основних плюс кисень – і вологовміст. До* *семи основних газів відносяться водень (H_2), окис вуглецю (CO), двоокис вуглецю (CO_2), метан (CH_4), етан (C_2H_6), етилен (C_2H_4), ацетилен (C_2H_2). Проби трансформаторного мастила повинні проходити без підсмоктування газів з навколишнього середовища. Це важливо не тільки для точності вимірів, але й у зв'язку з тим, що старіння мастила зв'язане в основному з окисними процесами при участі кисню повітря. Для зменшення вмісту кисню в мастилі проводять його дегазацію на дегазаційних установках, а також додають в мастило антиокисні присадки.*

Одержувані від енергосистем дані хроматографічних аналізів для трансформаторів, у яких виявлені дефекти, показують, що газовий склад і значення концентрації окремих газів залежать не тільки від виду і характеру ушкодження, але і від терміну служби й умов експлуатації обладнання. *Різноманіття факторів, що впливають, утрудняє вибір чисельних значень критеріїв, що з одного боку, повинні надійно забезпечувати розпізнавання трансформаторів, що мають дефект, а з іншого боку, не приводити до частих необґрунтованих виводів з роботи справного обладнання.*

Одним з найбільш розповсюджених є критерій граничних концентрацій. Його сутність полягає в тому, що для ряду розчинених в мастилі газів установлюються граничні концентрації, що визначають перехід устаткування зі справного в умовно працездатний стан. Якщо за результатами хроматографічного аналізу концентрація одного чи декількох газів перевищує граничне значення, то такий трансформатор береться під прискорений хроматографічний контроль і в разі потреби виводиться в ремонт. При такому підході вибір значень граничних концентрацій принципово важливий. Якщо ці концентрації прийняті надмірно заниженими, то виникає ризик узяття на контроль невиправдано великої кількості одиниць устаткування з наступним виводом з роботи і невиявленням дефекту. Завищені значення граничних концентрацій ведуть до можливості не узяти вчасно на контроль трансформатор, що має дефект, що може привести до аварії.

Розрахунок граничних концентрацій розчинених в мастилі вуглеводородних газів можна провести методом мінімального ризику для визначеної групи (виду) трансформаторів. Помилкове рішення про узяття на прискорений контроль справного трансформатора називають помилкою першого роду. Помилка другого роду складається в помилковому прийнятті трансформатора, що має дефект, за справний. При кожнім хроматографічнім аналізі концентрації розчинених в мастилі газів є випадковими величинами, тому методика вибору граничних концентрацій повинна спиратися на досить представницьку вибірку даних, засновану на результатах багаторічних вимірів.

Метод мінімального ризику використовувався для розрахунку граничних концентрацій газів в мастилі трансформаторів напругою 750 кВ. Для визначення апріорних імовірностей P_1 і P_2 справного стану і виявлення дефекту використовувалися експериментальні вибірки. Для справних трансформаторів вихідна вибірка містить 300 хроматографічних аналізів, а для дефектних трансформаторів – 965 хроматографічних аналізів. *У результаті була розрахована концентрація A_0 для кожного газу, при якій мінімізується функція ризику (середній ризик) кожного газу. У таблиці нижче приведені результати розрахунків. A_0 –*

гранична концентрація для кожного газу; P_{21} – імовірність зробити помилку першого роду, тобто імовірність перевищення концентрацією газу в справних трансформаторів граничного значення; P_{12} – імовірність помилки другого роду, тобто імовірність одержання у дефектного трансформатора концентрації газу нижче граничного значення.

Функція ризику являє собою імовірність зробити кожну з помилок. При концентрації A_0 ця імовірність приймає мінімальне значення P_0 для окремо узятого газу.

Газ	Гранична концентрація A_0	Імовірність помилкової тривоги $P_{21}(A_0)$	Імовірність пропуску дефекту $P_{12}(A_0)$	$P_0(A_0)$
Водень (H_2)	0,0027	0,29	0,2	0,43
Метан (CH_4)	0,0015	0,12	0,15	0,25
Ацетилен (C_2H_2)	0,0008	0,1	0,34	0,4
Етилен (C_2H_4)	0,0037	0,04	0,14	0,17
Етан (C_2H_6)	0,0014	0,05	0,21	0,25
Окис вуглецю(С)	0,017	0,32	0,55	0,69
Вуглекислий газ (CO_2)	0,083	0, 08	0,15	0,22

Результати розрахунків показують, що найменша імовірність зробити помилку при використанні критерію граничних концентрацій забезпечується по етилену (мінімальний ризик P_0 = 0,17), вуглекислому газу (P_0 = 0,22), метану і етану (P_0 = 0,25). Це спричиняється тим, що понад 80% дефектів, що виявляються в трансформаторах, зв'язано з підвищеним нагріванням, для якого характерне виділення перерахованих газів. Функції розподілу концентрації цих газів для справних і дефектних трансформаторів розрізняються найбільшою мірою. При оцінці стану трансформатора по змісту СО (окис вуглецю) варто бути дуже обережним, оскільки максимальна імовірність зробити помилку може досягати 70% (P_0 = 0,69). По усій видимості при повільному розвитку дефекту і великих інтервалів у доборі проб мастила, що виділився СО за рахунок кисню повітря встигає окислитися до CO_2, що і приводить до зниження концентрації СО і малому розходженню функцій розподілу F_1 і F_2. Для підвищення надійності діагностики за значенням СО можна рекомендувати проведення не менш двох послідовних хроматографічних аналізів з інтервалом у кілька днів.

16.3 Дефекти і діагностика турбогенераторів. Фізичні процеси, що викликають дефекти турбогенераторів

1. Магнітне тяжіння і вібрація статора

Сили магнітної взаємодії між ротором і статором (магнітне тяжіння) викликають коливання статора генератора, що називають магнітними вібра-

ціями. Ці вібрації приводять к таким ушкодження генераторів, як стирання міжлистової ізоляції активної сталі і порушення пружної підвіски сердечника.

Заходи для підвищення вібростійкості статорів потужних синхронних машин складаються у відбудуванні сердечника від резонансу на основній хвилі сил магнітного тяжіння, застосуванні гнучкої підвіски сердечника в корпусі і поліпшення конструкції самих корпусів. Для відбудування сердечника від резонансу змінюють напрямок вирубки листів активної сталі. Роблять це поперек прокату, що збільшує ізгибну твердість сердечника і його резонансну частоту за рахунок підвищення еквівалентного модуля пружності всієї конструкції. Шляхом поліпшення еластичності пружних елементів підвіски і впровадження нової технології зборки статора з попереднім піджаттям пружних ребер досягається значний ефект зниження вібрацій корпусів.

2. Аксіальні сили магнітного тяжіння в торцевої частині сердечника

У крайніх пакетах активної сталі сердечника статора силові лінії магнітного поля проходять не тільки уздовж листів, але і входять у них з торця сердечника, створюючи аксіальні складові магнітної індукції, значення якої 0,2 – 0,6 Тл, і викликаючи появу аксіальних сил магнітного тяжіння. Ці знакозмінні сили в торцевої частині сердечника збуджують вібрацію крайніх пакетів, механічні напруги й виснажений злам окремих листів активної сталі. Частини листів, що відламалися, падають на обмотку статора, стирають її ізоляцію, у результаті чого відбувається пробій обмотки.

В міру переходу генератора від генерування реактивної потужності до її споживання росте аксіальна складова індукції, напруга вигину зростає.

Аксіальні сили магнітного тяжіння викликають розпушення листів крайніх пакетів стали статора. Найбільш ефективним засобом боротьби з розпушенням і ушкодженням крайніх листів є склейка аркушів крайніх пакетів. Склеювання одного чи декількох крайніх пакетів регламентовано в технології зборки турбогенераторів на заводах-виготовлювачах.

3. Термомеханічні процеси в сердечнику статора

Термомеханічні деформації відносять до статичних деформацій, тому що швидкість їхнього протікання дуже мала в порівнянні з «швидкими» вібраційними процесами і складає години і дні. Деформації і напруги елементів статора розділяють на аксіальні і тангенціальні. У турбогенераторах аксіальні деформації є більш значимими через велику довжину статора. *Основні елементи, що беруть участь в аксіальних деформаціях - сердечник і обмотка статора. Дія деформацій виявляється в розпушені крайніх пакетів і у впливі на ізоляцію обмотки. Основною причиною розпушення є термічний вплив стрижнів обмотки на зубці, що приводить до пластичних деформацій останніх, тому що впливу тільки нагрівання активної сталі для цього недостатньо. Взаємодія стрижня і зубця фрикційне і воно приводить до значного взаємного переміщення особливо в торцевих частинах сердечника. Відбувається прослизання стрижня щодо активної сталі, викликаючи дотичні напруження.*

Аксіальна складова магнітного поля в торцевої зоні статора при роботі турбогенератора в режимі споживання реактивної потужності, крім посилення вібрації листів, викликає також підвищений нагрів крайніх пакетів, тому що ця складова поля входить перпендикулярно в лист і шихтовка стали не обмежує в такому випадку вихрові струми. При номінальному навантаженні температура крайніх пакетів на 6 гр. С вище, ніж у середніх пакетах.

Важливим фізичним процесом, що приводить до ослаблення пресування, є пружнов'язкий плин лакового покриття листів електротехнічної сталі, що знаходиться під постійним великим тиском. Крім ослаблення пресування порушення лакового покриття приводить до одній з найважчих аварій турбогенератора – «пожежі» у сталі. Для усунення ушкоджень потрібен заводський ремонт статора. Розвиток «пожежі» протікає швидко і зона ушкодження захоплює значну частину сердечника, незважаючи на прошарки лаку між листами і наявність вентиляційних каналів. У генераторах з аксіальною вентиляцією «пожежа» у сталі поширюється ще швидше по каналах у напрямку руху газу. Попередження «пожежі» у сталі та його своєчасне виявлення залишається актуальною задачею.

4. Теплові процеси в обмотці статора

Гранично припустимі значення температури активних частин турбогенератора, механічних напруг, а також електричної напруженості в ізоляції, є основними обмеженнями при проектуванні турбогенераторів. Найбільш ймовірним термічним дефектом обмотки статора є закупорка окремих охолодних каналів, що приводить до істотного підвищення температури в місці закупорки. При цьому відбувається швидке старіння ізоляції і скорочення терміну її служби. Однак фіксація явища сполучена з великими труднощями, особливо, якщо закупорений порожній провідник лежить у глибині паза. Наприклад, якщо між крайнім (найближчим до клина паза статора) і закупореним провідниками знаходяться більш трьох порожніх провідників з нормальною циркуляцією дистиляту, то перевищення температури крайніх провідників над їх нормальною температурою не перевершує 0.5 гр. С, тобто не може бути виявлене за допомогою основних засобів вимірів - терморезисторів, розташованих під клином. Установка терморезисторів на бічній грані стрижня на порядок збільшує чутливість вимірів, але тільки в тих випадках, коли закупорки відбуваються в шарі, що прилягає до терморезистору. До того ж не вдається відрізнити вилучений потужний термодефект від близького, але малої потужності. *Також можливі наступні небажані явища. Ослаблення кріплення обмотки статора, її вібрація, і як наслідок, стирання ізоляції. Зволоження ізоляції, викликуване руйнуванням порожніх провідників у результаті улучення феромагнітних часток у гідравлічний тракт обмотки і виразки міді.*

5. Вібраційний і напружений стан обмотки статора

Вібраційний стан обмоток статора є одним з головних показників якості проектування і виготовлення турбогенераторів. Підвищена вібрація обмотки статора викликає: стирання ізоляції обмотки; руйнування паяних з'єднань провідників, що особливо небезпечно для машин з водяним охолодженням обмотки статора.

Основним фізичним процесом, що викликає коливання обмотки статора, є взаємодія струмів в обмотці з магнітним полем. У потужних турбогенераторах зусилля, що діють на один стрижень у пазу, досягають декількох тисяч ньютонов на метр.

Небезпечні напруги в міді провідників і деформація ізоляції можуть з'являтися тільки в резонансних умовах. Установка пружних клинів у пазу дозволяє виключити появу резонансу. Підвищення твердості кріплення дозволяє знизити вібрації і забезпечити їх стабільність на рівні 50 – 100 мкм. Однак при цьому зростає вплив магнітних вібрацій сердечника на вібрації і вбраний стан обмотки. Тому для забезпечення низьких рівнів вібрацій необхідно не тільки підвищувати твердість кріплення частин обмотки, але і знижувати вібрації сердечника статора.

6. Фізичні процеси в роторі

Обертовий ротор знаходиться в ще більш важких термомеханічних умовах, чим статор, оскільки в ньому діють дуже великі відцентрові сили. Через велику вагу ротора, що складає десятки тонн, при довжині вала між підшипниками до 11 м прогин ротора досягає 1.5 мм, що ще більше збільшує знакозмінні зусилля в його тілі.

Важкі системні аварії, такі як коротке замикання на виводах генератора, помилкова синхронізація викликають крутильні коливання валопровіда всього турбогенератора. При крутильних коливаннях збільшуються дотичні напруження в різних частинах валопровіда і сдвигові деформації. *Головним наслідком дії знакозмінних напруг у роторі є поступовий розвиток усталостних тріщин, що виникають у місцях концентрації напруг. Поява тріщин супроводжується виникненням підвищеної вібрації ротора.*

При несиметричних режимах струми зворотної послідовності обмотки статора створюють зворотнеобертове магнітне поле, що індуктує змінні струми в пазових металевих клинах ротора, що представляють одночасно і демпферну обмотку, у тілі ротора, в обмотці збудження. Обмотка збудження однофазна, що вносить несиметрію в розподіл індуктованих змінних струмів, а, отже, створює нерівномірне нагрівання різних ділянок ротора.

Несиметричне навантаження також створює нерівномірне нагрівання ротора, що викликає появу кольорів мінливості на поверхні бочки ротора.

Асинхронні режими й асинхронні пуски мають аналогічний вплив, оскільки в цих режимах прямообертовий магнітний потік статора переміщається в просторі щодо ротора і також індуктує змінні струми в пазових клинах, тілі ротора й обмотці збудження. *Нерівномірне нагрівання ротора приводить до його вигину і збільшення вібрації.*

Виявлення дефектів турбогенераторів.

Дефект – це таке ушкодження генератора, при розвитку якого згодом відбудеться відмова генератора. Діагностичними ознаками дефекту називають супутні їм фізичні явища. Розвиток дефекту відбувається довгостроково і носить складний характер. Звичайно при цьому виникає ланцюгова реакція – один дефект спричиняє виникнення і розвиток іншого відразу чи декількох інших дефектів. *Тому в ланцюжки розвитку дефектів уводиться важливе визначення – ключовий дефект, тобто загальний дефект, що викликає наступні дефекти. Ланцюг причино-слідчих зв'язків розвитку ключових дефектів зображують структурними схемами, що потім використовують при розробці алгоритмів оперативної діагностики генератора за допомогою ЕОМ.*

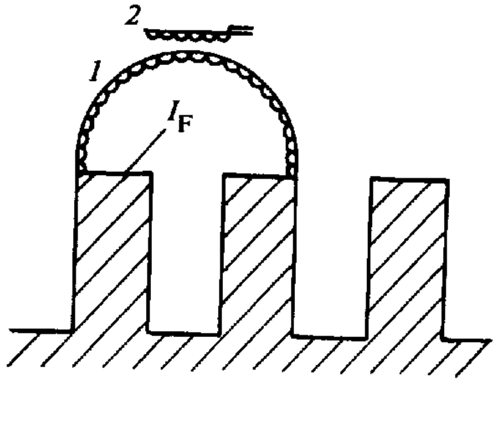
Крім штатних контрольно–вимірювальних пристроїв застосовуються численні спеціальні пристрої для виявлення і локалізації місць дефектів. Спеціальні пристрої постійно удосконалюються й у них застосовуються нові фізико – технічні методи. *Діагностичні ознаки в більшості випадків не мають однозначної приналежності к визначеним дефектам, що утрудняє їхню ідентифікацію. Вірогідність діагнозу й ідентифікації підвищується зі збільшенням числа контрольованих ознак.*

Тепловізійний контроль стану сердечника статора. *Метод заснований на вимірі інфрачервоного випромінювання спеціальною апаратурою. Тепловізори призначені для запису теплового поля поверхні у виді теплової карти.* Методика вимірів складається з наступної послідовності дій.

1) Знімається контрольна теплокарта на холодному сердечнику.
2) Спеціальною обмоткою, що намагнічує, виробляється нагрівання сердечника в результаті чого його середня температура підвищується на кілька градусів.
3) Відразу після вимикання струму в обмотці, що намагнічує, знімається тепловізором перша теплокарта.
4) Через 10-12 хв. знімається друга теплокарта, а потім з інтервалами і наступні.

Через особливості поширення теплоти в масиві сталі на першій і другий теплокартах, знятих після нагрівання, виявляються тільки поверхневі вогнища нагрівання. При остиганні сердечника ці вогнища швидко зникають і поступово починають виступати глибинні вогнища, тому карти, отримані через 20-50 хв. дозволяють оцінювати неоднорідності теплового поля в глибині масиву сталі, тобто розкривати його внутрішню структуру.

Аналіз теплокарт показав, що порівняння яскравості виявлених вогнищ нагрівання не є вичерпною і тому остаточною інформацією про небезпеку дефекту. *Велику роль грає динаміка зміни яскравості в часі - найбільш важкі аварії викликаються саме глибинними дефектами, що виявляються при багаторазовому знятті теплокарт і не можуть приводити до яскравих ділянок на теплокартах. Усі дефекти рекомендується визначати на теплокартах по наступним ознакам: відносна яскравість зображення; форма дефектної зони; динаміка зміни яскравості в часі.* Тому що теплове поле на внутрішній поверхні статора створюється відразу декількома джерелами нагрівання, той їхній поділ на теплокарті представляє неоднозначну задачу. Усунення цієї невизначеності досягається шляхом зняття додаткових теплокарт в умовах імпульсного нагрівання.



Виявлення дефектів за допомогою вимірювальної котушки при кільцевому намагнічуванні сердечника статора. *Цим способом виявляється магнітне поле у внутрішньої поверхні статора, що викликається вихровими струмами, що виникають при замиканні листів сердечника.* Для збудження вихрових струмів навколо спинки статора намотується обмотка з п'яти витків кабелю не-великого перетину, що живиться від автотрансформатора невеликої потужності. Подавана напруга складає 25-30 В. *Якщо в сердечнику через замикання листів сталі протікають вихрові струми, то вони створюють своє магнітне поле, що виявляється вимірювальною котушкою. Вимірювальна котушка охоплює два сусідніх зубці і для виявлення місць дефектів її переміщають уздовж сердечника статора.* Для компенсації тангенціального магнітного потоку, створюваного обмоткою, додатково до вимірювального встановлюється компенсаційна котушка, розташовувана на відстані 5 см від поверхні зубців. ЕРС, що наводиться в компенсаційній котушці, віднімається від ЕРС вимірювальної котушки. При справному сердечнику вихрові струми викликають сигнал на рівні 15 мА, а при наявності замикань листів сталі сигнал збільшується до 1А в залежності від місця, глибини і типу дефекту.

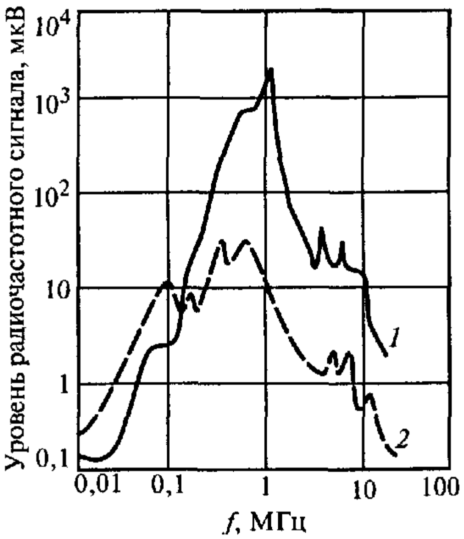
Визначення місцевих нагрівань за допомогою іонізаційних камер. *Цим методом виявляються місцеві нагріви за рахунок виявлення в охолодному водні продуктів теплового розкладання ізолюючих лаків і інших покрить, застосовуваних у деталях конструкції активної зони турбогенератора.* Після іонізаційної камери знаходиться попередня камера, а потім вимірювальна камера. Якщо водень не містить домішок, всі іони нейтралізуються в попередній камері, а струм вимірювальної камери дорівнює практично нулю – менш $5*10^{-14}$ А. Коли водень містить тверді частки, важкі іони не встигають нейтралізуватися в попередній камері й у вимірювальній камері протікає струм 10^{-13} - 10^{-12} А, що сигналізує про наявність сильного нагрівання ізоляції чи сердечника. Пристрій доповнюється пристосуванням, що керує фільтрами, що затримують частки пиролиза. Аналіз умісту фільтрів подає додаткову інформацію про вузол, що перегрівається.

Подальший розвиток розглянутий метод раннього виявлення сильних нагрівань одержав завдяки застосуванню індикаторних покрить і хроматографії. В ізоляційних матеріалах, застосовуваних у турбогенераторах, мікрочастинки починають з'являтися тільки при температурах вище 200^0 С. Індикаторні покриття забезпечують виділення часток при більш низьких температурах, що дозволяє здійснити виявлення місцевих нагрівань на більш ранній стадії і підвищити ефективність детектора з іонізаційною камерою. Розроблено кілька видів індикаторних покрить для диференційованого використання: сердечник статора, поверхня ротора, лобові частини обмотки статора й ін.

Віброакустичний метод виявлення розпушення крайніх пакетів сердечника. *Метод виявляє початкову стадію розпушення крайніх пакетів і заснований на реєстрації віброударних процесів.* Зіткнення крайнього листа з іншими створює віброакустичні сигнали, що поширюються по сердечнику. Вимір цих сигналів за допомогою п'єзоелектричних акселераторів, наступна фільтрація і виділення середньоквадратичного значення віброприскорення в області 3 – 10 кГц дозволяє використовувати цей метод як засіб оперативної діагностики.

Вимір віброприскорень проводять спочатку в режимі холостого ходу без збудження, а потім у режимі холостого ходу з номінальним збудженням. Перше з них використовують у якості опорного, оскільки через відсутність у цьому режимі сили, що змушує, акселерометри вимірюють шумовий сигнал, не зв'язаний безпосередньо з коливаннями листів зубця. Рівень віброприскорень у другому режимі визначається появою сил магнітного тяжіння і станом зубцової зони крайніх пакетів.

Ультразвуковий метод оцінки щільності пресування сердечника. *Метод відноситься до ремонтної діагностики, тому що вимагає останова генератора і виїмки ротора. Засновано метод на явищі залежності швидкості поширення ультразвукових коливань у шихтованому сердечнику поперек пакетів (в аксіальному напрямку) від зусилля пресування.* Швидкість звуку при зміні тиску пресування визначається конструктивними факторами – товщиною пакета, співвідношенням площ зубців і вентиляційних розпірок – і сплошностю пакетів, тобто присутністю порожнин між аркушами активної сталі, створюваних мікронерівностями рельєфу поверхні листів. Ці порожнини можуть бути заповнені в результаті упругов'язкого плину лакових плівок спресованого сердечника чи замасленням крайніх пакетів. Так при тиску пресування 1 МПа швидкість звуку в незамасленому, слабозамасленому і сильно замасленому пакетах відповідно складає 350, 650 і 3370 м/с. Замаслення активної сталі значно ускладнює оцінку стану щільності пресування. Тому проведення ультразвукових вимірів на генераторі варто проводити після очищення від мастила пакета статора.



Виявлення ушкоджень виміром електромагнітного випромінювання генератора. *Спектр електромагнітного випромінювання генератора у визначених частотних діапазонах змінюється при розвитку таких дефектів як пазові розряди, іскріння і розрядні явища в лобових частинах обмотки статора через ушкодження покрить і забруднення. Можуть бути часткові розряди в корпусній ізоляції при «незавершених пробоях», електрична дуга в місцях замикань чи у місцях поломки провідників, дугостворення при ушкодженні ізоляції.*

На рисунку як приклад зіставлені спектри електромагнітного випромінювання турбогенератора без дефекту (2) і з дефектом (1), викликаним дуговим розрядом у з'єднанні обмотки. З рисунка випливає, що при частоті 1Мгц у несправному генераторі вимірюваний сигнал на два порядки вище, ніж у нормальному стані.

Частоти електромагнітного випромінювання залежать від виду дефекту. Явищу корони відповідають частоти близько 350 МГц, а явищу пробою – 1ГГц. Тому для підвищення ефективності методу використовуються фільтри, що дозволяють проводити частотний аналіз електромагнітного випромінювання й ідентифікувати причину високочастотного розряду.

Перевірка стану заклиновкі стрижнів обмотки статора. *Звичайним способом перевірки стану пазових клинів є їхнє простукування за допомогою молотка.* Однак для цього потрібно виїмка ротора, що можливо тільки при капітальному ремонті генератора. Пристрій, що дозволяє виконати ту ж перевірку, але без виїмки ротора, являє собою вібратор у сполученні з мікрофоном. Пристрій вільно переміщається уздовж пазових клинів, якщо зазор між статором і ротором складає не менш 1 см. Частотний аналіз шуму, створюваного вібратором у клинах, показує, що при високих частотах (2 – 10 кГц) амплітуди коливань в ослаблених клинах помітно вище через їхнє мале демпфірування, коли клини втрачають контакт із поверхнею паза.

Виявлення міжвиткових замикань обмотки збудження ротора. *Міжвиткові замикання в обмотках електричних машин завжди приводять до порушення їхньої працездатності і з працею виявляються, особливо, якщо потрібно знайти конкретне місце дефекту. Головна причина цього полягає в малій зміні основних інтегральних параметрів обмотки при замиканні одного витка чи декількох сусідніх витків.* Багато в чому це відноситься до закритого в пазах металевими клинами, а з торців – бандажним вузлом, обмотці ротора турбогенератора.

Для виявлення виткових замикань обмотки збудження звичайно проводять вимір її повного опору при живлені змінним струмом 50 Гц напругою 220 В при різних частотах обертання ротора. При наявності замикання в короткозамкненому витку виникає струм, магнітний потік якого зменшує магнітний потік всієї обмотки. Отже, повний опір обмотки ротора зменшується. Тут важливим є зіставлення вимірів з раніше отриманими на свідомо справному генераторі. Однак вимір опору на змінному струмі не має необхідну чутливість через значний зазор між статором і ротором у турбогенераторах, що створює великий магнітний опір для магнітного поля ротора.

В іншому способі виявлення міжвиткових замикань фіксують зміну не повного опору всієї обмотки, а зміну магнітного поля над кожним пазом ротора. Для цього на статорі встановлюють датчик у виді вимірювальної котушки. Датчик орієнтований у просторі так, щоб ЕРС у ньому індуктовалась тангенціальною складовою потоку розсіювання між коронками зубців ротора. ЕРС датчика прямо пропорціональна струму в пазу і при наявності короткозамкнених витків в осцилограмі ЕРС будуть спостерігатися знижені значення амплітуд ЕРС датчика при проходженні паза з міжвитковим замиканням. Як правило, крім тангенціальних встановлюються і радіально розташовані вимірювальні котушки, що підвищують чутливість методу при різних режимах роботи генератора – холостий хід, навантаження.

Література

1. Дружинин Г. В. Надёжность автоматизированных систем. – М.:Энергия, 1977.-536с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа,1977.-479с.
3. Гнеденко Б. В., Беляев Ю.К., Соловьёв А. А. Математические методы в теории надёжности. – М.: Наука, 1965.- 367с.
4. Ермолин Н. П., Жерихин И. П. Надёжность электрических машин. – Л.: Энергия, 1976.-249с.
5. Половко А. М. Основы теории надёжности. – М.: Наука, 1964. – 487с.
6. Половко А. М., Маликова И. М. Сборник задач по теории надёжности.- М.: Советское радио, 1972.- 408с.
7. Рипс Я. А., Савельев Б. А. Анализ и расчёт надёжности систем управления электроприводами. – М.: Энергия, 1974.-248с.
8. Сотсков Б.С. Основы теории и расчёта надёжности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники. – М.: Высшая школа, 1970.-272с.
9. Голинкевич Т. А. Прикладная теория надёжности. – М.: Высшая школа, 1985.-168с.
10. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний. – М.: Физматгиз, 1961.-228с.
11. Горский Л.К. Статистические алгоритмы исследования надёжности.–М.: Наука,1970.- 400с.
12. Козлов Б. А., Ушаков И. А. Справочник по расчёту надёжности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. – М.: Советское радио, 1975.- 472с.
13. Гук Ю. Б., Лосев Э. А., Мясников А.В. Оценка надёжности электроустановок. – М.: Энергия, 1974.- 201с.
14. Гольдберг О.Д. Качество и надёжность асинхронных двигателей. – М.:Энергия, 1968.-176с.
15. Гольдберг О. Д. Испытания электрических машин. – М.: Высшая школа, 1990. – 256с.
16. Лозинский А. Ю., Марущак Я. Ю. Расчёт надёжности электроприводов. Львов: Львовская политехника, 1996. – 236с.
17. Луцкий В.А. Расчёт надёжности и эффективности радиоэлектронной аппаратуры.-Киев.: Наукова Думка, 1966. – 208с.
18. Широков А. М. Надёжность радиоэлектронных устройств. - М.: Высшая школа,1972.– 272с.
19. Горелова Г. В. Метод оптимума номинала и его применение. – М.: Энергия, 1970.-200с.
20. Ушаков И.А. Методы решения простейших задач оптимального резервирования. - М.: Советское радио, 1969.-176с.
21. Кузьмин Ф. И. Задачи и методы оптимизации показателей надёжности. – М.: Советское радио, 1972.-224с.
22. Б.А. Козлов Резервирование с восстановлением. - М.: Советское радио, 1969. – 152с.

23. Надёжность автоматизированных систем управления.\ Под ред. Хетагурова Я.А. - М.: Высшая школа, 1979.-288с.
24. Биргер И.А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 240с.
25. Пархоменко П.П., Согомонян Е.С. Основы технической диагностики. – М.: Энергоиздат, 1981. – 320с.
26. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания. – М.: Высшая школа, 1984. – 208с.
27. Извеков В.И., Серихин Н.А., Абрамов А.И. Проектирование турбогенераторов. – М.: Издательство МЭИ, 2005. – 440с.
28. Хазан С.И. Турбогенераторы: повреждения и ремонт. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 520с.
29. Байда Н.П., Месюра В.И., Роик А.М. Самообучающиеся анализаторы производственных дефектов РЭА – М.: Радио и связь, 1991. – 256с.
30. Технические средства диагностирования. Справочник / Под ред. Клюева В. В. – М.: Машиностроение, 1989. – 672с.
31. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. – К.: Наукова думка, 1992. – 196с.
32. Осипов О.И., Усынин Ю.С. Техническая диагностика автоматизированных электроприводов. – М.: Энергоатомиздат, 1991. - 160с.
33. Мозгалевский А.В. и др. Автоматический поиск неисправностей. – Л.: Машиностроение, 1967. – 264с.

Конспект лекцій з дисципліни «Надійність і діагностика електрообладнання» для студентів за напрямом 6.050702 - Електромеханіка

Укладач: кандидат технічних наук, доцент Клюєв Олег Володимирович

51918, м. Дніпродзержинськ, вул. Дніпробудівська, 2
Підписано до друку
Формат 60/84 1/16. Обсяг ______.
Тираж екз. Замовлення_______________