1. Тензорні поля

Якщо кожній точці M деякої множини простору $\mathbb{R}^3$ ставиться у відповідність значення тензорної величини, то кажуть, що на цій множині задано *тензорне поле* $T(M)$.

Якщо $T(M)$ – тензор нульового рангу, тензорне поле називається *скалярним полем*. Якщо $T(M)$ – тензор першого рангу, тензорне поле називається *векторним полем*.

2. Скалярне поле та його характеристики

Скалярне поле позначають $u(M) = u(x_1, x_2, x_3)$. Скалярні поля бувають:

- однорідними (у всіх точках області приймають сталі значення) або неоднорідними (приймають різні значення);
- стаціонарними (не залежать від часу) або нестаціонарними (залежать від часу);
- тривимірними (залежать від трьох координат), плоскими (залежать від двох координат) або одновимірними (залежать від однієї координати).

Поверхнею рівня скалярного поля називається сукупність точок простору, для яких $u(x_1, x_2, x_3) = c = const$.

Градієнтом скалярного поля називається вектор $\overline{grad\, u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$.

Похідною скалярного поля за напрямом l називається $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \overline{grad\, u} \cdot \bar{l}$.

За напрямом градієнта скалярне поле має найбільшу швидкість зростання, величина цієї швидкості дорівнює модулю градієнта.

3. Векторне поле та його характеристики

Векторне поле позначають

$$\bar{A}(M) = \big(A_1(x_1, x_2, x_3), A_2(x_1, x_2, x_3), A_3(x_1, x_2, x_3)\big).$$

Векторні поля бувають:

- однорідними (у всіх точках області є сталим вектором) або неоднорідними (довільний вектор);
- стаціонарними (не залежать від часу) або нестаціонарними (залежать від часу);

- тривимірними (залежать від трьох координат x_1, x_2, x_3, двовимірними (залежать від двох координат) або одновимірними (залежать від однієї координати).

Двовимірне поле $\bar{A}(M) = \big(A_1(x_1,x_2), A_2(x_1,x_2), A_3(x_1,x_2)\big)$ називають плоским, якщо $A_3(x_1,x_2) = 0$. Двовимірне поле, яке не є плоским, називається плоскопаралельним.

Потоком векторного поля через поверхню S в напрямку нормалі $\bar{n}$ називається поверхневий інтеграл: $\Pi = \oiint_S \ \bar{A} \cdot \bar{n}\ dS$.

Циркуляцією векторного поля вздовж замкненої кривої L, параметричне рівняння якої $\bar{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ називається криволінійний інтеграл: Ц $= \oint_L \ \bar{A} \cdot d\bar{r}$.

Дивергенція векторного поля: $div\,\bar{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$.

Ротор векторного поля: $\overline{rot\bar{A}} = \begin{vmatrix} \bar{\iota_1} & \bar{\iota_2} & \bar{\iota_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$.

Формула Остроградського-Гаусса (тут V – тіло, обмежене замкненою поверхнею S, $\bar{n}$ – зовнішня нормаль до S):

$$\oiint\limits_S \bar{A} \cdot \bar{n}\ dS = \iiint\limits_V div\,\bar{A}\,dx_1 dx_2 dx_3.$$

Формула Стокса (тут L – замкнена крива, яка обмежує поверхню S, $\bar{n}$ – нормаль до тієї сторони поверхні S, щоб, дивлячись з кінця нормалі, спостерігач бачив оббіг кривої L проти годинникової стрілки):

$$\oint\limits_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \oiint\limits_S \overline{rot\bar{A}} \cdot \bar{n}\ dS.$$

4. Спеціальні векторні поля

Якщо векторне поле $\bar{A}$ є полем градієнта деякого скалярного поля u, то векторне поле $\bar{A}$ називається *потенціальним*, а поле u – його *скалярним потенціалом*: $\bar{A} = \overline{grad\, u}$.

Критерій потенціальності: $\overline{rot\bar{A}} = \bar{0}$.

Скалярний потенціал обчислюється за формулою:

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1^0}^{x_1} A_1(t, x_2^0, x_3^0)dt + \int_{x_2^0}^{x_2} A_2(x_1^0, t, x_3^0)dt + \int_{x_3^0}^{x_3} A_3(x_1^0, x_2^0, t)dt + u(x_1^0, x_2^0, x_3^0),$$

де (x_1^0, x_2^0, x_3^0) – фіксована точка, (x_1, x_2, x_3) довільна точка.

Якщо векторне поле $\bar{A}$ є полем ротора деякого векторного поля $\bar{W}$, то векторне поле $\bar{A}$ називається *соленоїдальним*, а поле $\bar{W}$ – його *векторним потенціалом*: $\bar{A} = \overline{rot\,\bar{W}}$.

Критерій соленоїдальності: $div\,\bar{A} = 0$.

Векторний потенціал обчислюється з точністю до градієнта деякого скалярного поля за формулою:

$$\bar{W}(x_1, x_2, x_3) = \bar{\imath_2} \int_{x_1^0}^{x_1} A_3(t, x_2, x_3)dt +$$

$$+\bar{\imath_3}\left(-\int_{x_1^0}^{x_1} A_2(t, x_2, x_3)dt + \int_{x_2^0}^{x_2} A_1(x_1^0, t, x_3)dt\right),$$

де (x_1^0, x_2^0, x_3^0) – фіксована точка, (x_1, x_2, x_3) довільна точка.

Векторне поле, яке одночасно є потенціальним та соленоїдальним, називається *гармонічним* полем.