Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

М.І. Клименко, Є.В. Панасенко, І.Г. Ткаченко

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ:

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 10
від 27.04. 2023

Запоріжжя
2023

УДК 51:330.4 (075.8)
К492

Клименко М.І., Панасенко Є.В., Ткаченко І.Г. Застосування математичного апарату в економічних дослідженнях : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2023. 100с.

У навчальному посібнику викладено основні напрями застосування математичного апарату у економічних дослідженнях. Текст містить достатню кількість прикладів, які допоможуть студентам при вивченні даної дисципліни. Наведено варіанти семестрового індивідуального завдання для самостійної роботи студентів. У кінці кожної теми наведено питання та завдання для самоперевірки, що спрямовані на успішне оволодіння студентами основами дисципліни та їх якісну підготовку до екзамену.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика».

Рецензент

О.В. Кудін, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск

С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

ВСТУП

Професійний рівень сучасного математика значною мірою визначається вмінням застосовувати математичний апарат для аналізу складних соціально-економічних процесів, а також прийняття рішень у відповідних сферах діяльності.

Опанування основами застосування математичних методів у економічних дослідженнях дозволить майбутнім фахівцям-математикам підвищити ефективність своєї професійної діяльності та розширити сферу її застосування.

Метою вивчення курсу «Застосування математичного апарату у економічних дослідженнях» є формування цілісної системи знань з особливостей та способів застосування математичних методів у економічних дослідженнях. Завданнями дисципліни є ознайомлення студентів з основними способами застосування методів елементарної та вищої математики у практичній економічній діяльності та наукових дослідженнях з економіки, основними принципами економіко-математичного моделювання, особливостями застосування математичних моделей у економічних дослідженнях на мікро- та макрорівнях, використання математичного апарату до розв’язання прикладних економічних задач; створення основи для подальшого вивчення курсів математичного моделювання та дослідження операцій.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати**:** основні принципи застосування математичного апарату у економічних дослідженнях, основні методи елементарної та вищої математики, що застосовуються при вирішенні економічних проблем, основні застосування економіко-математичних моделей.

До основних вмінь, які студент повинен набути в результаті вивчення курсу «Застосування математичного апарату у економічних дослідженнях», слід віднести, використовувати методи лінійної алгебри та аналітичної геометрії для побудови балансових макроекономічних моделей та дослідження умов ринкової діяльності, будувати та досліджувати математичні моделі економічних об’єктів та процесів з допомогою методів математичного аналізу, застосовувати диференціальні та різницеві моделі економічних процесів для практичних економічних досліджень.

Мета та завдання курсу визначають зміст даного навчального посібника. У ньому систематично викладено навчальний матеріал щодо застосування математичних методів у економічних дослідженнях та розв’язування економічних задач математичними методами. Посібник висвітлює наступні основні теми: сутність економіко-математичного моделювання, застосування методів елементарної математики у економічних розрахунках, використання методів лінійної алгебри та аналітичної геометрії для побудови економіко-математичних моделей, оптимізаційні моделі, що зводяться до застосування методів диференціального числення функцій однієї та кількох змінних, побудова та застосування математичних моделей економічних процесів та систем у вигляді диференціальних та різницевих рівнянь. Виклад кожної теми навчальної дисципліни містить опис основних напрямів застосування математичних методів для вирішення проблем економіки, методичні вказівки щодо розв'язання основних типів задач, наведено запитання та завдання, призначені для самопідготовки студентів, а також варіанти індивідуального домашнього завдання, яке виконують студенти у межах самостійної роботи.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти у результаті вивчення дисципліни «Застосування математичного апарату у економічних дослідженнях» повинні набути таких компетентностей**:** здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях; здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями; здатність приймати обгрунтовані рішення; здатність спілкуватися з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами з інших галузей знань); здатність формулювати проблеми математично та у символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язування; здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

Вивчення дисципліни передбачає досягнення наступних результатів навчання: знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів; розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленими задачами та відомими моделями.

Основою для вивчення дисципліни «Застосування математичного апарату у економічних дослідженнях» є оволодіння студентами дисциплінами «Диференціальні рівняння», «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія» та «Математичний аналіз». Вивчення цієї дисципліни формує основу для вивчення дисциплін «Дослідження операцій та математична економіка», «Математичне моделювання».

Змістовий модуль 1. Застосування методів елементарної математики у економічних розрахунках

Мета змістового модуля 1. Сформувати у студентів знання та навички застосування методів елементарної математики у економічних дослідженнях.

План

1. Використання процентних розрахунків.
2. Задачі, що зводиться до рівнянь у цілих чисел.
3. Використання алгебраїчних рівнянь та систем.

Ключові терміни та поняття: прості та складні відсотки, діофантові рівняння, системи алгебраїчних рівнянь.

1.1. Використання процентних розрахунків

У економічних розрахунках частини величин прийнято виражати у процентах (сотих частках величини). Вираження частин числа у одних і тих же частках дозволяє швидко порівняти частини величини з цілим або між собою, спростити розрахунки.

Найчастіше проценти використовують при фінансових розрахунках, а також при дослідженні змін або порівняння між собою певних економічних величин: обсягів виробництва, рівнів виконання господарських планів, продуктивності праці тощо.

При фінансових розрахунках число, що показує, скільки процентів прибутку за визначений час забезпечує певна сума капіталовкладень, називають *процентною ставкою*, а величину прибутку – *процентними грошима*. Для розрахунку процентних грошей використовують прості та складні проценти. Якщо проценти нараховують по відношенню до початкової суми, то такий метод нарахування називають *методом простих процентів*. Якщо ж проценти нараховують по відношенню до величини, що включає початкову суму та проценти, нараховані за минулий період, то такий метод нарахування називають *методом складних процентів*.

Нехай B – початкова сума вкладення, t – період нарахування процентів (час, по завершенні якого нараховують процентні гроші), p – ставка простого процента (частка вкладення, яку нараховують вкладнику по завершенню часу t, Т – термін використання вкладення банком, $n = {}^{t}/_{T}$ – кількість періодів нарахування процентів за термін використання вкладення, S – сума вкладення, що утворилася до кінця терміну T. Тоді $B \cdot p$ – процентні гроші за один період нарахування, $P = B \cdot p \cdot n$ – процентні гроші за весь час вкладання коштів (за n періодів), $S = B(1 + pn)$ – сума вкладення на кінець його терміну (*формула простих процентів*). Ця формула означає, що зростання суми вкладення по простим процентам здійснюється за правилом арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює B, а різниця дорівнює $B \cdot p$. При цьому для сталого p сума $S = B + Bpn$ є лінійною функцією від n. Це сума, що утворюється після n-разового нарахування процентів.

Метод складних процентів означає, що проценти, отримані за період t нарахування процентів, додаються до початкової суми вкладення B і у наступний період нарахування процентів вони нараховуються вже на нову суму, що становить $S_1 = B + Bp = B(1+p)$. Отже, на кінець другого періоду нарахування процентів сума вкладення $S_2 = B(1+p) + B(1+p)p = B(1+p)^2$. Аналогічно визначаємо, що на кінець третього періоду $S_3 = B(1+p)^2 + B(1+p)^2 p = B(1+p)^3$.

До кінця всього терміну $T = t \cdot n$ дії вкладення, коли пройде n періодів t, сума вкладення становитиме $S = S_n = B(1+p)^n$. Цю формулу називають *формулою складних процентів*. Функція $S_n = B(1+p)^n$ є показниковою функцією аргументу n.

Приклад 1.1 У банку визначені наступні процентні ставки: 1) 2% від суми вкладення з щомісячним нарахуванням процентних грошей; 2) 6% від суми вкладення за умови його зберігання на протязі 3 місяців (депозит на 3 місяці); 3) 12,5% від суми вкладення за умови його зберігання на протязі 6 місяці (депозит на півроку); 4) 25% річних за умови зберігання депозиту на протязі року. У якому випадку прибуток вкладника є максимальним, якщо він не знімає кошти на протязі року?

Розв'язання. З умови задачі випливає, що потрібно використовувати складні проценти, тому для всіх випадків економіко-математична модель задачі визначається рівністю $S = B(1+p)^n$, де p набуває відповідно значень 0,02; 0,06; 0,125; 0,25. У першому випадку $n=12$, оскільки нарахування процентів здійснюється щомісячно на протязі року, у другому випадку $n=4$, у третьому – $n=2$, у четвертому – 1.

Нехай S_1, S_2, S_3, S_4 – величини вкладення після року зберігання на депозиті на умовах 1), 2), 3), 4). Відповідно маємо:

1) $S_1 = B(1+0,02)^{12} \approx 1,268B$,

2) $S_2 = B(1+0,06)^4 \approx 1,262B$,

3) $S_3 = B(1+0,125)^2 \approx 1,266B$,

4) $S_4 = B(1+0,25) = 1,25B$.

Найбільшою є сума S_1, тобто перший варіант зберігання депозиту є найбільш прибутковим для вкладника.

Приклад 1.2. У результаті поліпшення організації виробництва підвищення продуктивності праці на підприємстві склало a%. Подальше впровадження раціоналізаторської пропозиції підвищило продуктивність праці на b%. На скільки процентів зросла продуктивність праці у порівнянні з початковою?

Розв'язання. Нехай початкова продуктивність праці дорівнює x. Зміна продуктивності праці за рахунок покращення організації виробництва складає x, а сама продуктивність праці дорівнюватиме $x + x \cdot \frac{a}{100} = x\left(1 + \frac{a}{100}\right)$.

Зміна продуктивності праці за рахунок впровадження раціоналізаторської пропозиції складає $x\left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{b}{100}$. Нове значення продуктивності праці становить

$$x\left(1 + \frac{a}{100}\right) + x\left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{b}{100} = x\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right).$$

Відносне збільшення продуктивності праці у порівнянні з його початковим значенням, виражене у процентах, дорівнює

$$\frac{x\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right) - x}{x} \cdot 100\% = \left(\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right) - 1\right) \cdot 100\% = \left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\%.$$

Отриманий вираз є економіко-математичною моделлю послідовного підвищення продуктивності праці спочатку на a%, потім на b%. Наприклад, при $a = 10, b = 20$, продуктивність праці збільшиться на $\left(10 + 20 + \frac{10 \cdot 20}{100}\right)\% = 32\%$. Тут, як і у випадку складних процентів, проценти не просто додаються $(10\% + 20\% = 30\%)$, а додатково відбувається ще нарахування процентів на проценти: $\frac{10 \cdot 20}{100}\% = 2\%$.

Приклад 1.3. Визначити, яку суму слід покласти на банківський депозит при заданій процентній ставці 20% річних, щоб через рік отримати 20 тисяч грошових одиниць?

Розв'язання. Введемо наступні позначення для змінних математичної моделі: M_0– початкова сума грошового внеску, M_1– сума на депозиті через 1 рік, R – річна процентна ставка. Зв'язок між змінними задачі визначається рівнянням

$$M_1 = M_0\left(1 + \frac{R}{100}\right).$$

Це рівняння є математичною моделлю задачі. З неї визначаємо значення M_0: $M_0 = \frac{M_1}{1 + \frac{R}{100}} = \frac{12}{1,2} = 10$ (тисяч грошових одиниць).

1.2. Задачі, що зводяться до рівнянь у цілих числах

Різноманітні економічні задачі часто зводяться до рівнянь, у яких невідомі за своїм змістом можуть набувати лише цілих значень, тобто до рівнянь у цілих числах. Такі рівняння розглядали ще у давнину. Особливо багато займався ними давньогрецький математик Діофант, тому рівняння у цілих числах називають ще *діофантовими* рівняннями. Найпростішим прикладом діофантового рівняння є рівняння $ax+by=c$, a, b та c – задані цілі числа, причому a та b є взаємно простими числами, тобто вони мають єдиний спільний дільник 1, і жодне з цих чисел не дорівнює нулю.

Нехай $c=0,\ ax+by=0$. Звідси $x=-\frac{b}{a}y$. Число x є цілим лише якщо y ділиться націло на a. Отже, $y=at, t\in\mathbb{Z}$. Тоді $x=-\frac{b}{a}y=-\frac{b}{a}at=-bt$. Отже, формули, що визначають цілі розв'язки x та y рівняння $ax+by=0$, мають вигляд: $x=-bt, y=at, t\in\mathbb{Z}$.

Нехай тепер $c\neq 0$. Покажемо, що для знаходження всіх цілих розв'язків рівняння $ax+by=c$ достатньо знати який-небудь один його розв'язок (x_0, y_0), для якого $ax_0+by_0=c$. Тоді маємо: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Цілочисельні розв'язки останнього рівняння мають вигляд: $x-x_0=-bt, y-y_0=at, t\in\mathbb{Z}$. Звідси знаходимо розв'язки рівняння $ax+by=c$ у вигляді:

$$x=x_0-bt, y=y_0+at, t\in\mathbb{Z}.$$

Спосіб знаходження деякого цілочисельного розв'язку рівняння $ax+by=c$, де $c\neq 0$, розглянемо на прикладі рівняння $8x+13y=11$. Перетворимо відношення $\frac{8}{13}$ коефіцієнтів при невідомих рівняння, записавши його у вигляді скінченного ланцюгового дробу:

$$\frac{8}{13}=\frac{1}{\frac{13}{8}}=\frac{1}{1+\frac{5}{8}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{3}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}.$$

Ми подали звичайний дріб $\frac{8}{13}$ у вигляді скінченного ланцюгового дробу. При цьому ми виконували перетворення дробів доти, поки чисельник нового дробу $\frac{1}{2}$ не став рівним 1. Подальші перетворення не мають сенсу, бо на наступному етапі уже не матимемо дробу.

Останньою ланкою отриманого ланцюгового дробу є число $\frac{1}{2}$. Відкинемо цю останню ланку і перетворимо отриманий ланцюговий дріб у звичайний.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}.$$

Знайдемо різницю $\frac{8}{13}-\frac{3}{5}$. $\frac{8}{13}-\frac{3}{5}=\frac{8\cdot 5-13\cdot 3}{13\cdot 5}=\frac{1}{13\cdot 5}$.

Рівність $8\cdot 5-13\cdot 3=1$ помножимо на 11 та напишемо у вигляді:

$$8\cdot 5\cdot 11+13\cdot(-3)\cdot 11=11.$$

Порівнявши отриману рівність з рівнянням $8x+13y=11$, знаходимо, що значення $x_0=5\cdot 11=55$, $y_0=-3\cdot 11=-33$ є одним розв’язків рівняння. Тоді всі розв’язки рівняння можна записати у вигляді:

$$x=55+13t,\, y=-33-8t,\, t\in\mathbb{Z}.$$

У загальному випадку для знаходження цілочисельних розв’язків рівняння $ax+by=c$ потрібно розкласти відношення коефіцієнтів при невідомих у ланцюговий дріб, відкинути його останню ланку і виконати перетворення, аналогічні наведеним вище.

Приклад 1.4. Для перевезення великої кількості контейнерів по 170 кг та 190 кг виділено машини вантажопідйомністю 3 т. Чи можна завантажити такими контейнерами машину повністю?

Розв’язання. Складемо математичну модель задачі. Нехай x – кількість контейнерів по 170 кг, y – по 190 кг. Тоді, згідно з умовою задачі, виконується рівність $170x+190y=3000$ або $17x+19y=300$, $x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}$. Знайдемо один з можливих цілочисельних розв’язків цього рівняння, використавши розвинення відношення $\frac{17}{19}$ у ланцюговий дріб.

$$\frac{17}{19}=\frac{1}{\frac{19}{17}}=\frac{1}{1+\frac{2}{17}}=\frac{1}{1+\frac{1}{8+\frac{1}{2}}}.$$

Відкинувши останню ланку $\frac{1}{2}$ у ланцюговому дробу, отримаємо:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{8}}=\frac{8}{9}.$$

Знаходимо різницю:

$$\frac{17}{19}-\frac{8}{9}=\frac{17\cdot 9+19\cdot(-8)}{19\cdot 9}=\frac{1}{19\cdot 9},$$

$$17\cdot 9\cdot 300+19\cdot(-8)\cdot 300=300.$$

Порівнявши отриману рівність з рівнянням $17x+19y=300$, бачимо, що $x_0=9\cdot 300=2700$, $y_0=-8\cdot 300=-2400$. Отже, загальний розв'язок рівняння визначається формулами $x=2700-19t, y=-2400+17t, t\in\mathbb{Z}$.

За умовою задачі $x>0,\ y>0$. Тому отримуємо систему нерівностей

$$\begin{cases}2700-19t>0,\\ -2400+17t>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t<\dfrac{2700}{19},\\ t>\dfrac{2400}{17}.\end{cases}$$

Виділивши цілу частину у неправильних дробах, маємо:

$$141\frac{3}{17}<t<142\frac{2}{19}.$$

Єдине ціле значення *t*, що задовольняє цю умову, $t=142$. При цьому значенні t $x=2700-19\cdot 142=2, y=-2400+17\cdot 142=14$. Отже, щоб завантажити машину повністю, потрібно помістити у неї 2 контейнери по 170 кг та 14 контейнерів по 190 кг.

Приклад 1.5. Для перевезення зерна маємо мішки, у які входять 60 кг або 80 кг зерна. Скільки потрібно мати мішків кожного виду для завантаження 1 т зерна, щоб всі мішки були повними? Яка найменша кількість мішків при цьому може знадобитися?

Розв'язання. Нехай *x* – кількість мішків по 60 кг, *y* – по 80 кг. За умовою задачі отримаємо її математичну модель: $60x+80y=1000$ або $3x+4y=50$. Один цілочисловий розв'язок задачі легко підібрати: $x_0=-50, y_0=50$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд: $x=-50-4t, y=50+3t, t\in\mathbb{Z}$. За умовою задачі *x* та *y* можуть бути лише натуральними числами, тому маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases}-50-4t\ge 1\\ 50+3t\ge 1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\le-\dfrac{51}{4},\\ t\ge-\dfrac{49}{3}.\end{cases}\Rightarrow -16\frac{1}{3}\le t\le-12\frac{3}{4}.$$

Оскільки нас цікавлять лише цілі значення *t*, то $t\in\{-16,-15,-14,-13\}$.

Знайдемо *x*, *y* та загальну кількість мішків *l*, що відповідає кожному значенню *t*.

$t=-16, x_1=-50-4\cdot(-16)=14, y_1=50+3\cdot(-16)=2, l_1=14+2=16$;

$t=-15, x_2=-50-4\cdot(-15)=10, y_2=50+3\cdot(-15)=5, l_2=10+5=15$;

$t=-14, x_3=-50-4\cdot(-14)=6, y_3=50+3\cdot(-14)=8, l_3=6+8=14$;

$t=-13, x_4=-50-4\cdot(-13)=2, y_4=50+3\cdot(-13)=11, l_4=2+11=13$

Отже, для завантаження 1 т пшениці потрібно взяти 13 мішків, з яких 2 мішки по 60 кг, 11 мішків по 80 кг.

Таким чином, ми розглянули алгоритм розв'язування рівняння у цілих чисел, який можна використати при розв'язування великої кількості практичних економічних задач.

1.3. Використання алгебраїчних рівнянь та систем

Багато економічних задач мають достатньо прості математичні моделі у вигляді лінійних чи квадратичних рівнянь чи їх систем. Основною складністю, що виникає при розв'язанні таких задач, є побудова математичної моделі – вибір невідомої величини та запис умови задачі у формалізованому вигляді (запис відповідного алгебраїчного рівняння чи системи рівнянь). Від вдалого вибору невідомої величини залежать витрати часу на розв'язання задачі, а у деяких випадках – і сама можливість її розв'язання.

На прикладах розглянемо побудову найпростіших математичних моделей у вигляді алгебраїчних рівнянь або їх систем та розв'язання відповідних задач економічного змісту.

Приклад 1.6. Підприємець взяв у оренду на 4 роки приміщення на умовах щорічної виплати у кінці року A г.о. Маючи деякий початковий капітал, він подвоїв його у кінці року та оплатив оренду. Капітал, що залишився, він знову подвоїв на протязі другого року та сплатив оренду. За такою схемою він працював всі 4 роки. У результаті, в кінці четвертого року його діяльності, після оренди підприємець мав капітал, у 4 рази більший за початковий. Побудувати економіко-математичну модель накопичення капіталу підприємця та визначити величину початкового капіталу, якщо сума оренди дорівнювала 16 тис. г.о. За якої умови відбудеться накопичення капіталу? У скільки разів початковий капітал підприємця перевищував орендну плату?

Розв'язання. Нехай x – початковий капітал підприємця. Тоді після першого року діяльності величина капіталу становить $2x-A$, після другого року вона становитиме $2(2x-A)-A=4x-3A$, після третього року – $2(4x-3A)-A=8x-7A$, після четвертого року – $2(8x-7A)-A=16x-15A$. Отже, економіко-математична модель накопичення капіталу K на протязі 4 років у залежності від вартості оренди A та початкового капіталу x має вигляд: $K=16x-15A$ За умовою, ця величина становить $4x$. Отже, $16x-15A=4x,\ 12x=15A$. При $A=16$ тис. г.о. маємо: $12x=15\cdot 16,\ x=5\cdot 4=20$ (тис. г.о.).

Накопичення капіталу відбувається, якщо $K>0$, тобто $16x-15A>0$. Звідси $A<\dfrac{16}{15}x$, тобто орендна плата не повинна перевищувати $\dfrac{16}{15}$ величини початкового капіталу.

З рівності $12x=15A$ знаходимо, що $x=1{,}25A$, тобто початковий капітал перевищував орендну плату в 1,25 рази.

Приклад 1.7. Щорічні збори акціонерів підприємства вирішили розподілити щорічний прибуток 5,6 млн. г.о. наступним чином: більшу частину прибутку спрямувати у фонд розвитку підприємства, 25% цієї суми використати для виплати дивідендів акціонерам, 15% використати на соціальні потреби працівників. Було вирішено також випустити додаткові акції для продажу на біржі на суму, що дорівнює сумі виплачених дивідендів, у кількості 250 звичайних та 100 привілейованих акцій. Вартість привілейованих акцій у 1,5 рази більша за вартість звичайних акцій. Визначити, скільки коштів було виділено на кожний напрямок та вартість акцій.

Розв'язання. Нехай x – частина прибутку, спрямована у фонд розвитку підприємства, $0{,}25x$ спрямовано на виплату дивідендів, $0{,}15x$ – на соціальні потреби. Маємо рівняння: $x+0{,}25x+0{,}15x=5{,}6$. Звідси отримуємо: $1{,}4x=5{,}6$. Отже, $x=4$ млн. г.о. спрямовано у фонд розвитку підприємства, на виплату дивідендів спрямовано $0{,}25x=0{,}25\cdot 4=1$ млн. г.о., на соціальні потреби – $0{,}15x=0{,}15\cdot 4=0{,}6$ млн. г.о.

Якщо y – вартість звичайної акції, то виконується рівність $250y+100y\cdot 1{,}5=0{,}5\cdot 1$. Звідси $y=1250$ г.о. – вартість звичайної акції, $1{,}5y=1825$ г.о. – вартість привілейованої акції.

Приклад 1.8. Нафтова компанія щорічно відправляє на свої автозаправні станції 120 тис. л бензину на кожну станцію. З'ясовано, що у вихідні дні вигідніше 4 АЗС закрити, а призначений для них бензин розподіляти порівну поміж рештою АЗС. При цьому кожна АЗС збільшить обсяг реалізації бензину на 8 тис. л, що є їх граничною місткістю. Скільки АЗС має нафтова компанія? Яка гранична місткість кожної з них?

Розв'язання. Нехай x –кількість АЗС нафтової компанії. Тоді $\frac{120}{x}$ – обсяг реалізації бензину на кожній з заправок у робочі дні, а $\frac{120}{x}+8$ – у вихідні дні. Оскільки у вихідні дні не працюють 4 АЗС, то $\frac{120}{x-4}$ – обсяг реалізації на кожній з заправок, що працюють у вихідні дні. З умови задачі маємо:

$$\frac{120}{x}+8=\frac{120}{x-4}.$$

Звідси знаходимо:

$$120(x-4)+8x(x-4)-120x=0 \Rightarrow x^2-4x-60=0.$$

Корені цього рівняння $x_1=2-8=-6$ та $x_2=2+8=10$. Від'ємні корені не мають сенсу (x – кількість заправок), тому ми знайшли, що компанія має 10 АЗС, гранична місткість кожної з яких дорівнює $\frac{120}{10}+8=20(\text{тис. л})$ у вихідні дні.

Приклад 1.9. На протязі року ціна товару підвищувалась на одну й ту ж кількість процентів. Початкова ціна склала 10 г.о. Після другого підвищення вона дорівнювала 12,1 г.о. На скільки процентів підвищувалась ціна товару обидва рази?

Розв'язання. Нехай x – кількість процентів підвищення ціни товару. Тоді $10\left(1+\frac{x}{100}\right)$ – ціна товару після першого підвищення, $10\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$ – його ціна після другого підвищення. Отже, $10\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=12{,}1$. Звідси $1+0{,}01x=1{,}1$, отже, $x=10$, ціна товару підвищувалась кожного разу на 10%.

Приклад 1.10. Автозавод виробляє автомобілі двох марок (A та B) у кількості 52 тис. одиниць. На наступний рік заплановане збільшення виробництва автомобілів марки A на 75%, марки B – на 140%. У результаті виробництво автомобілів повинне збільшитися удвічі. Скільки автомобілів кожної марки автозавод випустив у поточному році і випустить наступного року?

Розв'язання. Нехай x – кількість автомобілів марки A, випущених підприємством у поточному році, y – марки B. Тоді у наступному році буде випущено $1{,}75x$ автомобілів марки A та $2{,}4y$ автомобілів марки B. З умови задачі отримаємо систему:

$$\begin{cases} x+y=52, \\ 1{,}75x+2{,}4y=104. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=52-x, \\ 1{,}75x+2{,}4(52-x)=104. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=52-x, \\ 0{,}65x=20{,}8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=32, \\ y=20. \end{cases}$$

Отже, у поточному році завод випустив 32 тис. автомобілів марки A та 20 тис. автомобілів марки B. У наступному році він випустить $32\cdot 1{,}75=56$ тис. автомобілів марки A та $20\cdot 2{,}4=48$ тис. автомобілів марки B.

Приклад 1.11. Працівниця кондитерського цеху має щоденне завдання на виготовлення певної кількості тортів. Вона підрахувала, що коли зможе виробляти на 1 торт за годину більше, то вона закінчить роботу на 0,5 год раніше, якщо ж за годину буде вироблятися на 5 тортів більше, то завдання буде виконане на 2 год раніше. Скільки тортів за день потрібно виготовляти працівниці у звичайному режимі?

Розв'язання. Нехай x –час, необхідний працівниці для виконання щоденного завдання, y – кількість тортів, які потрібно виготовити за годину. Тоді щоденне завдання для працівниці дорівнює xy. З умови задачі випливає наступна система:

$$\begin{cases} xy=(x-0{,}5)(y+1), \\ xy=(x-2)(y+5). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-0{,}5y=0{,}5, \\ 5x-2y=10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0{,}5(1+y), \\ 5(1+y)\cdot 0{,}5-2y=10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0{,}5(1+y), \\ 0{,}5y=7{,}5. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=8, \\ y=15. \end{cases}$$

Отже, щоденне завдання працівниці кондитерського цеху складає $xy=8\cdot 15=120$ тортів.

Приклад 1.12. Два брати вирішили зайнятися землеробством і взяли у оренду ділянку землі. За їх розрахунками, обробляючи їх разом, вони змогли б виконати цю роботу за 12 днів. Проте у одного брата з'явилась більш цікава робота, тому він взявся обробляти лише четверту частину їх загальної ділянки. Працюючи самостійно, він обробив її менш ніж за тиждень. Інший брат теж самостійно обробив свої три чверті ділянки. Вся робота зайняла у братів 27,5 днів. Скільки часу знадобилося кожному з братів, щоб обробити свою частину ділянки?

Розв'язання. Нехай x – кількість днів, потрібних першому брату для обробки всієї ділянки землі, y – другому брату для обробки всієї ділянки. Тоді $\frac{1}{x}$ – частка всієї ділянки, яку обробляє за день перший брат, $\frac{1}{y}$ – величина цієї частки для другого брата, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$ – частка всієї ділянки, що буде оброблена за день при їх спільній праці. З іншого боку, $\frac{1}{4}x$ – кількість днів, витрачених першим братом на обробку своєї частки ділянки, $\frac{3}{4}y$ – цей термін для другого брата. За умовою задачі, $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y=27{,}5$, при цьому $\frac{1}{4}x<7$, тобто $x<28$. Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12},\\ \frac{x}{4}+\frac{3y}{4}=27{,}5.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{12}-\frac{1}{y},\\ x+3y=110.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{12}-\frac{1}{y},\\ x=110-3y.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{12y}{y-12},\\ x=110-3y.\end{cases}$$

З отриманої системи випливає, що $3y^2-134y+1320=0$. Корені цього квадратного рівняння $y_1=\frac{134-46}{6}=\frac{44}{3}$, $y_2=\frac{134+46}{6}=30$. Тоді $x_1=110-3y_1=110-44=66>28$, $x_2=110-3y_2=110-90=20<28$. Отже, на обробку землі перший брат витратив $\frac{1}{4}x=\frac{20}{4}=5$ днів, другий брат – $\frac{3}{4}y=\frac{3}{4}\cdot 30=22{,}5$ днів.

Приклад 1.13. Два підприємця разом придбали 50 т товару за ціною 10 г.о. за 1 т. Другий підприємець заплатив за товар, включаючи вартість перевезення, на 112 г.о. більше, ніж перший. Перевезення 10 т товару коштувало підприємцям 1 г.о. за 100 км шляху. При цьому перший підприємець віз товар на відстань 600 км, а другий – на відстань 800 км. Яку кількість товару придбали перший та другий підприємець? Скільки коштів витратив кожен з підприємців на придбання та перевезення товару?

Розв'язання. Нехай x – кількість товару, що придбав перший підприємець, відповідно ($50–x$) – кількість товару, що придбав другий підприємець. Витрати першого підприємця на придбання та перевезення 1 т товару становлять $\left(10+\frac{1}{10}\cdot\frac{600}{100}\right)$ г.о., аналогічні витрати другого підприємця складають $\left(10+\frac{1}{10}\cdot\frac{800}{100}\right)$г.о. За умовою задачі маємо:

$$(50-x)\left(10+\frac{1}{10}\cdot\frac{800}{100}\right)-x\left(10+\frac{1}{10}\cdot\frac{600}{100}\right)=112 \cdot$$

Звідси визначаємо, що $21,4x=428$, тобто $x=20$. Отже, перший підприємець придбав 20 т товару, відповідно другий підприємець – $50-20=30$ т товару. При цьому витрати першого підприємця на придбання та перевезення товару склали $\left(10+\frac{1}{10}\cdot\frac{600}{100}\right)\cdot 20=212$ г.о., аналогічні витрати другого підприємця – $\left(10+\frac{1}{10}\cdot\frac{800}{100}\right)\cdot 30=224$ г.о.

Приклад1.14. Фірма щодня відправляє у свої магазини 18 холодильників (однакову кількість на кожен магазин). У зв'язку з закриттям 4 магазинів, кількість холодильників, що виділяється на кожний магазин, збільшилась на 6 одиниць. Скільки магазинів залишилось у фірми? Скільки холодильників вони почали одержувати?

Розв'язання. Нехай x – початкова кількість магазинів. З умови задачі отримуємо рівняння:

$$\frac{18}{x-4}-\frac{18}{x}=6\,.$$

Звідси знаходимо: $18x-18(x-4)=6x(x-4),\ x\neq 0,\ x\neq 4$. Маємо квадратне рівняння $x^2-4x-12=0$, корені якого 6 та –2. Отже, початкова кількість магазинів дорівнювала 6, їх нинішня кількість $6-4=2$. Кожен з них отримує $\frac{18}{2}=9$ холодильників.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 1

1. Вкажіть економічні завдання та сфери економічної діяльності, де використаються процентні розрахунки.
2. Поясніть різницю між простими та складними відсотками.
3. Наведіть приклади економічних проблем, для вирішення яких потрібно розв'язувати у цілих чисел.
4. Вкажіть алгоритм для розв'язування рівнянь у цілих чисел.
5. Наведіть означення алгебраїчних рівнянь та систем та прикладів економічних задач, які можна розв'язати з використанням алгебраїчних рівнянь та систем.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 1

1. Будівництво будинку коштувало 98 тис. г.о. З них 65% заплатили за матеріал, решту – за працю. Визначите, яку суму заплатили за працю?
2. Після зниження ціни на 5% вартість товару склала 38 г.о. Визначте його вартість до зниження ціни.
3. Ціну товару збільшили на 20%, потім нову ціну знизили на 17%. Знайдіть, на скільки відсотків у результаті змінилася ціна у порівнянні з початковою.
4. У результаті інфляції ціна на товар зросла за перший місяць на 5%, а за другий місяць – на 7%. Знайдіть зміну ціни за 2 місяці.
5. Ціна на товар змінювалася. На кінець 2016 року вона склала 400 г.о., на кінець чотирьох наступних років – відповідно 440 г.о.,462 г.о., 480 г.о. та 526 г.о. Визначіть, у якому році темп інфляції був найвищим.
6. Ціна на товар зросла на 300%. Знайдіть, як потрібно змінити ціну, щоб вона повернулася до попереднього рівня.
7. Після реконструкції обладнання його продуктивність за зміну зросла на 60%, витрати електроенергії за зміну скоротилися на 20%, ціна 1 кВт·год електроенергії за час реконструкції зросла на 40%. Визначте, на скільки процентів зменшилися витрати на електроенергію у розрахунку на одиницю продукції.
8. Пеня за несвоєчасну оплату комунальних послуг нараховується у розмірі 0,1% від несплаченої суми за кожен день заборгованості. Знайдіть, На скільки днів було затримано оплату, якщо на заборгованість у 20 г.о. була нарахована пеня 1 г.о.
9. Підприємство отримало у банку кредит на суму 5 млн. г.о. терміном на 5 років. Відсоткова ставка за кредитом складає 10,5% для першого року, для другого року вона збільшується на 1,5%, для третього та решти років вона зростає на 0,75% щорічно. Визначить суму боргу, що повинно повернуте через 5 років.
10. Знайдіть нинішню вартість 20 тис. г.о., які будуть отримані через 4 роки, якщо процентна ставка складає 8% річних.
11. Визначте, яку суму необхідно помістити на депозит, щоб через 4 роки отримати 4 тис. г.о. при процентній ставці 13% річних.
12. Товар продають по 100 г.о. за одиницю. Витрати на придбання одиниці товару складають 75 г.о. Знайдіть суму прибутку та рентабельність реалізації одиниці товару.
13. Виручка від реалізації товару становить 2550 г.о. Визначте, величину витрати, щоб рентабельність склала 25%.
14. Прибуток підприємства складає 5 млн. г.о., рентабельність дорівнює 25%. Знайдіть витрати.
15. Перше та друге підприємства разом виготовили у 2 рази більше велосипедів, ніж третє, а перше та третє разом – у 3 рази більше, ніж друге. Визначте, яке підприємство виготовило найбільшу кількість велосипедів.
16. Визначте, чи можна набрати суму у 1000 г.о. з допомогою купюр номіналом у 1 г.о., 10 г.о. та 100 г.о. так, щоб було використано рівно 40 купюр.

17. Студент отримав завдання, що містить 20 задач. За кожну вірно розв'язану задачу він отримує 8 балів, за невірно розв'язану – мінус 5 балів, за задачу, яку він не пробував розв'язувати – 0 балів. Студент загалом отримав 13 балів. Знайдіть, скільки задач він не пробував розв'язати?

18. Кілька однакових контейнерів важать разом 20 т, причому кожен з них важить не більше 1 т. Визначте, якої найменшої кількості машин з вантажопідйомністю 3 т достатньо, щоб вивезти за один раз весь вантаж.

19. Повітряну лінію, що пов'язує міста А та В, обслуговують літаки трьох типів. Кожен літак першого, другого та третього типу може приймати відповідно 240, 110 та 40 пасажирів, а також 27, 12 та 5 контейнерів. Всі літаки лінії можуть прийняти одночасно 760 пасажирів та 88 контейнерів. Знайдіть кількість літаків кожного типу, якщо їх загальна кількість не перевищує 8.

20. Залізничний потяг з платформами здатен перевезти 175 автомобілів. Після переобладнання платформ кожна з них стала вміщати на 2 автомобілі більше, внаслідок чого кількість платформ зменшилась на 10 при перевезенні на потягу такої ж кількості автомобілів. Визначте, скільки платформ знаходиться у потягу після їх переобладнання і скільки автомобілів розміщується на платформі

21. Два цехи підприємства *A* виготовляють щомісячно 800 одиниць продукції. Два аналогічні цехи підприємства *B* за рахунок вищої продуктивності праці виготовляють щомісячно на 140 одиниць продукції більше. Знайдіть, скільки одиниць продукції виготовляють у кожному цеху підприємств *A* та *B* з врахуванням того, що обидва цехи підприємства *B* мають продуктивність праці відповідно на 30% та 10% більшу, ніж аналогічні цехи підприємства *A*

22. Заробітні плати робітника за жовтень та листопад відносились як 9:8, а за листопад та грудень як 3:4. За грудень він отримав на 225 г.о. більше, ніж за жовтень, а за перевиконання квартального плану робітнику нарахували премію у розмірі 20% його тримісячного заробітку. Знайдіть величину оплати праці робітника у четвертому кварталі.

23. На складі знаходилось 300 кг товару. Вони були продані у нерівних кількостях двом організаціям по 12,5 г.о. за кілограм. Перша організація перевозить придбаний товар на відстань 20 км, а друга – 30 км. Перевезення 10 кг товару коштує 0,5 г.о. за 1 км шляху. Знаючи, що друга організація заплатила за придбання та перевезення товару на 900 г.о. більше, ніж перша, визначте, скільки кілограмів товару придбала кожна організація і скільки вона заплатила за товар та перевезення.

24. За 1 кг першого товару та 10 кг другого товару заплатили 200 г.о. Якщо при сезонній зміні цін перший товар подорожчає на 15%, а другий – подешевшає на 25%, то за таку ж кількість цих товарів буде сплачено 182 г.о. Визначить вартість 1 кг кожного товару.

25. Деяке замовлення виконується на підприємстві *A* на 3,6 год довше, ніж на підприємстві *B*, і на 10 годин довше, ніж на підприємстві *C*. Якщо за тих же умов праці підприємства *A* та *B* об'єднаються для виконання замовлення, то термін його виконання буде таким же, як у одного підприємства *C*. Знайдіть, на скільки годин більше чи менше одного робочого дня виконують замовлення на підприємстві *C*, якщо тривалість робочого дня 7 годин.

26. Початкова собівартість одиниці продукції дорівнювала 50 г.о. На протязі першого року виробництва вона підвищилась на деяку кількість процентів, на протязі другого року зменшилась на ту ж кількість процентів у порівнянні з першим роком. У результаті собівартість продукції склала 48 г.о. Визначити процент підвищення та зниження собівартості продукції.

27. Два працівники були прийняті на один і той же термін виконання сезонної роботи з різною оплатою одного дня праці кожному. Перший працював на a днів менше терміну і отримав r г.о., другий пропрацював на a днів більше терміну і отримав s г.о. Якщо б перший працівник працював скільки днів, як другий, то вони отримали б порівну. Визначте термін виконання роботи.

Змістовий модуль 2. Застосування лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Мета вивчення змістового модуля 2. Сформувати у студента навички застосувати апарата лінійної алгебри та аналітичної геометрії при вирішенні науково-практичних економічних проблем

План

1. Простір товарів. Вектор цін.
2. Статична модель міжгалузевого балансу.
3. Лінійна модель обміну (міжнародної торгівлі)
4. методів аналітичної геометрії
5. Поняття бюджетної множини

Ключові терміни та поняття: товар, простір товарів, індекс споживчих цін, модель Леонтьєва, міжгалузевий баланс, технологічна матриця, коефіцієнти прямих витрат, продуктивна матриця, лінійна модель міжнародної торгівлі, рівноважна ціна, точка беззбитковості, бюджетна множина.

2.1. Простір товарів. Вектор цін

При побудові економіко-математичних моделей часто використовують поняття простору товарів та вектору цін. Під *товаром* розуміють деяку продукцію, що надходить на ринок для продажу у певний час у певному місці.

Нехай маємо *n* різних товарів, обсяг *i*-го товару відповідно дорівнює x_i, i=1, 2, …, *n*. Деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектору $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n),\ x_i\geq 0,\ i=1,2,...,n.$ Множину всіх наборів товарів будемо називати *простором товарів С*. Кожний товар має певну додатну ціну. Позначимо ціну і-го товару p_i, i=1, 2,…, *n*. Вектор $p=\left(p_1,p_{2,...,}\,p_n\right)$ називають *вектором цін*. Для набору товарів $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ розглянемо вектор відповідних цін $p=\left(p_1,p_{2,...,}\,p_n\right)$. Скалярний добуток

$$\overline{p}\cdot\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=C\left(\overline{x}\right)$$

визначає ціну набору товарів $\overline{x}$.

Індекс споживчих цін характеризує зміну у часі загального рівня цін на товари та послуги, які купує населення для невиробничого споживання.

Нехай $\overline{q}=(q_1,q_2,...,q_m)$ – вектор обсягу споживчих товарів чи послуг, $\overline{p}_1=(p_{11},p_{12},...,p_{1m})$ – вектор цін у поточному місяці, $\overline{p}_0=(p_{01},p_{02},...,p_{0m})$ – вектор цін у попередньому місяці. *Індексом споживчих цін* у відсотках називають величину

$$i_p = \frac{\overline{p}_1 \cdot \overline{q}}{\overline{p}_0 \cdot \overline{q}} \cdot 100\% \cdot$$

З цієї рівності випливає, що $100\overline{p}_1 \cdot \overline{q} = i_p \overline{p}_0 \cdot \overline{q}$ або $\left(100\overline{p}_1 - i_p \overline{p}_0\right) \cdot \overline{q} = 0$. Отримана рівність свідчить, що індекс споживчих цін i_p можна визначати як числовий коефіцієнт, при якому вектор $\overline{q}$ ортогональний до вектору $100\overline{p}_1 - i_p \overline{p}_0$. Індекс інфляції обчислюють за формулою:

$$i = i_p - 100 = 100 \frac{\left(\overline{p}_1 - \overline{p}_0\right) \cdot \overline{q}}{\overline{p}_0 \cdot \overline{q}}.$$

Приклад 2.1. Витрати фірми на ресурси, які використовують для виготовлення одиниці продукції, задані у таблиці 2.1. Знайдіть ціну всіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції з використанням методу векторної алгебри. Введемо вектор витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції та вектор цін за одиницю відповідних ресурсів

Таблиця 2.1. Витрати фірми на ресурси, необхідні для виготовлення одиниці продукції

Ресурси	Кількість	Ціна за одиницю, г.о.
Сировина А	200 кг	3
Сировина В	500 м^2	5
Витрати праці	0,65 людино-год	10
Вартість експлуатації обладнання	0,7 машино-год	15

Розв'язання. Введемо вектор витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції $\overline{x} = (200; 500; 0,65; 0,7)$ та вектор цін за одиницю відповідних ресурсів $\overline{p} = (3; 5; 10; 15)$.Вартість всіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, дорівнює $\overline{x} \cdot \overline{p}$. Маємо:

$c = \overline{x} \cdot \overline{p} = 200 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 0,65 \cdot 10 + 0,7 \cdot 15 = 3117$ г.о.

Приклад 2.2. Комерційний банк, що фінансує будівництво багатоквартирних будинків, отримав на один рік кредити від трьох банків. Вони надали кредити у розмірах 200 тис. г.о., 300 тис. г.о. та 400 тис. г.о. під річні процентні ставки відповідно 40%, 25% та 30%. Визначить суму, яку потрібно виплатити за кредитом через рік.

Розв'язання. Вектор кредитів $\overline{x} = (200, 300, 400)$, вектор процентних ставок $\overline{p} = (1,4; 1,25; 1,3)$. Сума виплати за кредитом складає:

$c = \overline{x} \cdot \overline{p} = 200 \cdot 1,4 + 300 \cdot 1,25 + 400 \cdot 1,3 = 1175$ г.о.

Приклад 2.3. Визначте індекс цін та індекс інфляції, розрахувавши вартість споживчого кошика, що складається з трьох видів товарів та послуг, для поточного та попереднього місяців. Необхідні дані наведено у таблиці 3.2.

Розв’язання. Вектор обсягу споживчих товарів $\overline{q}=(3;10;2)$, вектор цін у поточному місяці $\overline{p}_1=(4000,2000,4000)$, вектор цін у попередньому місяці дорівнює $\overline{p}_0=(3500,1800,4500)$.

Розрахуємо індекс цін:

$$i_p=\frac{\overline{p}_1\cdot\overline{q}}{\overline{p}_0\cdot\overline{q}}\cdot 100\%=\frac{4000\cdot 3+2000\cdot 10+4000\cdot 2}{3500\cdot 3+1800\cdot 10+4500\cdot 2}\cdot 100\%=106,7\%.$$

Індекс інфляції $i=i_p-100\%=106,7\%-100\%=6,7\%$.

Таблиця 2.2. Вартість товарів та послуг споживчого кошика у поточному та попередньому місяцях

Товар (послуга)	Обсяг товару	Ціна одиниці товару у поточному місяці, г.о.	Ціна одиниці товару у попередньому місяці, г.о.
A	3	4000	3500
B	10	2000	1800
C	2	4000	4500

2.2. Статична модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва)

Розглянемо статичну лінійну модель багатогалузевої економіки. У основу цієї моделі покладено наступні припущення.

1. У економічній системі, що є об’єктом моделювання, виробляються та споживаються n товарів.
2. Кожна галузь виробляє лише один товар, різні галузі виробляють різні товари.
3. Під виробничим процесом у кожній галузі розуміють перетворення деяких товарів у один товар, при цьому витрати сировини на виробництво одиниці товару залишаються незмінними.

Нехай x_i – обсяг виробництва i-го товару за плановий період (рік), a_{ij} – кількість одиниць i-го товару, яку потрібно витратити на виробництво одиниці j-го товару, $i=1,...,n$, $j=1,...,n$. Величина x_i складається з двох частин: обсяг виробництва, що витрачається на виробничі потреби та обсяг виробництва, що витрачається на кінцеве (невиробниче) споживання. Виходячи з припущень моделі 1 – 3, виробниче споживання i-го товару всіма галузями дорівнює $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$, тому чисте виробництво i-го товару, призначене для кінцевого споживання, становить $x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$, $i=1,...,n$.

Якщо прирівняти чисте виробництво кожного i-го товару та кінцевий попит y_i на цей товар, то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=y_i,\ i=1,...,n. \tag{2.1}$$

Систему (2.1) називають *моделлю Леонтьєва* або *статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу*. Величини y_i у системі (2.1) є заданими.

Отже, модель Леонтьєва є системою з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. *Сутність моделі Леонтьєва полягає у визначенні обсягів валового виробництва галузей за відомим кінцевим попитом на їх продукцію на основі даних про технологічні можливості галузей, відображених у коефіцієнтах витрат* a_{ij} *системи (2.1).*

Використовуючи модель Леонтьєва, можна розв'язувати також і обернену задачу: за заданими обсягами валового виробництва кожного товару визначити обсяги його кінцевого споживання.

Величини x_i та y_i можна задавати у вартісних або натуральних одиницях виміру. У відповідності з цим розрізняють натуральний та вартісний міжгалузевий баланси. Далі будемо розглядати вартісний баланс.

Введемо наступні позначення: x_{ij} – кількість продукції i-ї галузі, що використовується для виробничих потреб у j-й галузі, z_j – умовно чиста продукція j-ї галузі, що включає кінцеве споживання, оплату праці та амортизацію. Принципова схема міжгалузевого балансу наведена у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3. Принципова схема міжгалузевого балансу у вартісному виразі

Галузі – виробники	Галузі – споживачі				Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Умовно чиста продукція	z_1	z_2	…	z_n	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j$	
Валовий продукт	x_1	x_2	…	x_n		$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$

Розглянувши схему балансу по стовбцям, робимо висновок, що сума матеріальних витрат будь-якої галузі – споживача та її умовно чистої продукції дорівнює валовій продукції цієї галузі:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j, \; j = 1, 2, ..., n. \tag{2.2}$$

Аналізуючи схему міжгалузевого балансу по рядкам, ми бачимо, що валова продукція кожної галузі – виробника дорівнює сумі матеріальних витрат її галузей – споживачів та кінцевої продукції даної галузі, призначеної для кінцевого (невиробничого) споживання:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \, , \; i = 1,...,n \, . \qquad (2.3)$$

Формули (2.3) описують систему з n рівнянь, які називають рівняннями розподілу продукції галузей матеріального виробництва за напрямами використання.

Балансовий характер таблиці 2.3 міжгалузевого балансу виражається у тому, що виконуються рівності

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j \, , \; \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \, .$$

Основу математичної моделі міжгалузевого балансу складає <u>*матриця*</u> A *коефіцієнтів прямих витрат* a_{ij}, $i = 1,...,n$, $j = 1,2,...,n$. Її називають також *технологічною матрицею*. Коефіцієнт прямих витрат a_{ij} показує, яка кількість продукції i-ї галузі потрібна (якщо враховувати лише прямі витрати) для виробництва одиниці продукції j-ї галузі, тому виконується рівність:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \; i = 1,...,n, \; j = 1,2,...,n \, . \qquad (2.4)$$

Визначивши коефіцієнти технологічної матриці A, ми тим самим визначаємо коефіцієнти моделі Леонтьєва (3.1). У матричній формі цю модель можна записати у вигляді:

$$X = AX + Y \, , \qquad (2.5)$$

де $X^T = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $Y^T = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$.

Систему (3.5) можна записати у вигляді:

$$\left(E - A\right) X = Y \, , \qquad (2.6)$$

де E – одинична матриця.

З (3.6) можна визначити валову продукцією X всіх галузей:

$$X = \left(E - A\right)^{-1} Y \, . \qquad (2.7)$$

Тут $\left(E - A\right)^{-1}$ – матриця, обернена до $(E - A)^{-1}$. Нехай $B = (E - A)^{-1}$. Тоді (2.7) набуває вигляду $X = BY$, де матрицю $B = (E - A)^{-1}$ називають *матрицею повних_витрат*, а її компоненти b_{ij} називають *коефіцієнтами повних витрат*. Вони показують, скільки всього потрібно виробити продукції i-ї галузі для виробництва одиниці продукції j-ї галузі, призначеної для кінцевого споживання.

Планові розрахунки за формулами (2.7) мають сенс у тому випадку, якщо ці розрахунки дозволять отримати розв’язання $x_i \geq 0$, $i = 1,...,n$.

Невід’ємну матрицю A називають <u>*продуктивною*</u>, якщо існує такий невід’ємний вектор X, що

$$X > AX \, . \qquad (2.8)$$

Умова (2.8) означає, що для моделі міжгалузевого балансу (2.1) існує вектор Y кінцевої продукції з додатними координатами.

Для того, щоб матриця A прямих витрат у моделі Леонтьєва була продуктивною, необхідно, щоб виконувалася хоча б одна з наступних умов.

1. Матриця $(E-A)$ є невід'ємно оборотною, тобто існує обернена матриця $(E-A)^{-1}$, всі елементи якої є невід'ємними;
2. Матричний ряд $E+A+A^2+....+A^k+...=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ є збіжним, причому його сума дорівнює $(E-A)^{-1}$;
3. Найбільше за модулем власне значення λ матриці Aє меншим за одиницю;
4. Всі головні мінори матриці $(E-A)$ є додатними.

Більш простою , але лише достатньою умовою продуктивності матриці A є обмеження на величину найбільшої з сум елементів матриці A у кожному стовбці: якщо сума елементів кожного стовпця матриці A менша за одиницю, то матриця A є продуктивною.

Двоїстою до моделі Леонтьєва $X-AX=Y$ називають систему рівнянь для цін на товари галузей:

$$P-A^TP=\Phi, \tag{2.9}$$

де $P^T=(p_1,p_2,...,p_n)$ – вектор цін на товари, A – технологічна матриця, $\Phi^T=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)$ – вектор доданої вартості на одиницю товару.

Систему (2.9) називають *прибутковою,* якщо всі елементи її розв'язку – вектору P є невід'ємними. Продуктивність матриці A забезпечує прибутковість системи (3.9).

Розглянемо приклад побудови та застосування моделі Леонтьєва.

Приклад 2.4. У таблиці 2.4 наведені дані щодо міжгалузевого балансу економічної системи, що складається з двох галузей, за останній рік у грошових одиницях.

Таблиця 2.4 Міжгалузевий баланс умовної економічної системи з двох галузей

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	A	B		
A	7	21	72	100
B	12	15	123	150

Визначити необхідний обсяг валового виробництва у кожній галузі, якщо кінцеве споживання продукції галузі A повинно збільшитися удвічі, а галузі B – залишитися на попередньому рівні. Знайти умовно чисту продукцію галузей.

Розв'язання. Знайдемо елементи технологічної матриці A – коефіцієнти прямих витрат $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$. Отримуємо:

$$a_{11}=\frac{x_{11}}{x_1}=\frac{7}{100}=0{,}07;\ a_{12}=\frac{x_{12}}{x_2}=\frac{21}{150}=0{,}14;\ a_{21}=\frac{x_{21}}{x_1}=\frac{12}{100}=0{,}12;$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10 \cdot$$

Технологічна матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо її на продуктивність:

$$a_{11} + a_{21} = 0,07 + 0,12 = 0,19 < 1, \; a_{12} + a_{22} = 0,14 + 0,10 = 0,24 < 1.$$

Отже, матриця A є продуктивною і для довільного вектору Y кінцевого споживання можна знайти вектор валового виробництва X, що забезпечує даний вектор кінцевого споживання. Знайдемо вектор X за формулою (2.7): $X = (E - A)^{-1} Y$

Вектор Y кінцевого споживання має вигляд:

$$Y = \begin{pmatrix} 72 \cdot 2 = 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $B = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$$\det(E - A) = 0,93 \cdot 0,9 - (-0,14) \cdot (-0,12) = 0,8202.$$

$$B = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Вектор X валового виробництва:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти умовно чисту продукцію галузей при знайдених обсягах валового виробництва, знайдемо нові значення виробничого споживання:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \; i = 1,2; \; j = 1,2, \; x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,07 \cdot 179 = 12,53;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,14 \cdot 160,5 = 22,47; \; x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,12 \cdot 179 = 21,48;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,1 \cdot 160,5 = 16,05.$$

Умовно чисту продукцію галузей визначаємо за формулою: $z_j = x_j - x_{1j} - x_{2j}$, $j = 1,2$. Маємо:

$z_1 = 179 - 12,53 - 21,48 = 144,99$ (грошових одиниць);

$z_2 = 160,5 - 22,47 - 16,05 = 121,98$ (грошових одиниць).

2.3. Лінійна модель обміну (міжнародної торгівлі)

З допомогою лінійної моделі обміну або моделі міжнародної торгівлі можна визначити, якими повинні бути співвідношення між національними доходами країн, що торгують між собою, щоб торгівля була збалансованою.

Розглянемо модель міжнародної торгівлі, у якій беруть участь n країн. Нехай x_i – національний дохід i-ї країни, a_{ij} – частка національного доходу j-ї країни, яку вона витрачає на придбання товарів i-ї країни, p_i – загальна виручка від зовнішньої та внутрішньої торгівлі для i-ї країни. Будемо вважати, що країна витрачає весь свій національний дохід на придбання товарів всередині країни та на імпорт з інших країн. Це означає, що $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, 2, ..., n$.

Матрицю A, елементами якої є коефіцієнти a_{ij}, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$, називають *структурною матрицею торгівлі*. Сума елементів кожного стовпчика цієї матриці дорівнює одиниці.

Нехай на протязі певного фіксованого проміжку часу структура міжнародної торгівлі не змінюється, тобто не змінюється матриця A, можуть змінюватися лише національні доходи країн, що беруть участь у торгівлі. Потрібно визначити, якими повинні бути ці національні доходи, щоб міжнародна торгівля залишалася збалансованою, тобто сума виплат усіх країн дорівнювала б сумарній виручці від внутрішньої та зовнішньої торгівлі.

Для будь-якої i-ї країни виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі $p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i = 1, ..., n$. У збалансованій системі міжнародної торгівлі відсутній дефіцит, тобто $p_i = x_i$, $i = 1, ..., n$.

Нехай X – вектор, елементами якого є національні доходи $x_1, x_2, ..., x_n$, а елементами вектору P є величини сумарної виручки $p_1, p_2, ..., p_n$. Оскільки $P = A \cdot X$, то виконується рівність $A \cdot X = X$. Отже, вектор X є власним вектором структурної матриці торгівлі A, який відповідає одиничному власному значенню (рівність $A \cdot X = \lambda \cdot X$ виконується при $\lambda = 1$). Звідси випливає, що баланс у міжнародній торгівлі досягається, якщо одиниця є власним значенням структурної матриці торгівлі, а вектор X – власним вектором, що відповідає цьому власному значенню.

Приклад 2.5. Знайти співвідношення національних доходів трьох країн, що торгують між собою, у збалансованій системі міжнародної торгівлі, якщо структурна матриця торгівлі для цих країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Перевіримо, чи є $\lambda = 1$ власним значенням матриці A.

$$A-\lambda E=A-E=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Оскільки сума двох останніх рядків отриманої матриці $A-E$ дорівнює першому рядку, помноженому на (–1), то визначник цієї матриці дорівнює нулю, отже, $\lambda=1$ є власним значенням матриці A. Для знаходження відповідного йому власного вектору X розв'яжемо систему $(A-E)X=0$, або

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Методом Гауса знаходимо розв'язки цієї системи: $x_1=2,25x_3$, $x_2=2,5x_3$, $x_3=c$ – довільна додатна константа. Таким чином, збалансованість торгівлі розглянутих трьох країн досягається, якщо їх національні доходи знаходяться у співвідношенні $2,25:2,5:1$.

2.4. Застосування методів аналітичної геометрії

Розглянемо особливості застосування методів аналітичної геометрії у економічних дослідженнях. Одним з таких прикладів є модель рівноваги ринку, що дозволяє дослідити механізм формування ціни товару.

Нехай *p* – ціна одиниці товару, *s(p)* – кількість одиниць товару, які продавці пропонують на ринку за цією ціною (*функція пропозиції*), *q(p)* – кількість одиниць товару, яку покупці бажають придбати за ціною *p* (*функція попиту*). Виходячи з економічного змісту функцій пропозиції та попиту, можна стверджувати, що перша з них є зростаючою функцією, друга – спадною. Ціну p^*, за якої попит на товар дорівнює його пропозиції, називають *рівноважною ціною* товару. Для рівноважної ціни $s(p*)=q(p^*)$.

Якщо на координатній площині з горизонтальною віссю *Op* побудувати графіки функцій попиту та пропозиції, то вони перетнуться у деякій точці $E^*\left(p^*,q\left(p^*\right)\right)$, яку називають *точкою рівноваги*.

Приклад 2.6. За умови, що функція попиту на товар має вигляд $q=40-5p$, функція пропозиції $s=7,5p-10$, визначити його рівноважну ціну. Нехай уряд встановив фіксований акцизний податок T за одиницю товару. З'ясувати, як зміниться при цьому рівноважна ціна та обсяг реалізації товару.

Розв'язання. Рівноважну ціну товару p^* знаходимо з умови $s(p*) = q(p^*)$, тобто $7,5p^* - 10 = -5p^* + 40$, $12,5p^* = 50,\ p^* = 4, q(p^*) = s(p^*) = -5\cdot 4 + 40 = 20.$ Отже, точка рівноваги для цього товару $E^* = (4;20)$.

За наявності акцизного податку T г.о. за одиницю товару, функція пропозиції зміниться і її графік зміститься на T одиниць праворуч. Маємо:

$$s(p-T) = 7,5(p-T) - 10.$$

Функція попиту при цьому залишається незмінною.

Визначимо нову ціну рівноваги:

$$7,5(p-T) - 10 = -5p + 40 \Rightarrow p^* = 4 + 0,6T.$$

Відповідний обсяг реалізації становить:

$$q(p^*) = s(p^*) = 40 - 5(4 + 0,6T) = 20 - 3T.$$

Отже, нова точка рівноваги має координати: $(4 - 0,6T; 20 - 3T)$.

Ще одним прикладом застосування методів аналітичної геометрії у економічних дослідженнях є визначення *точки беззбитковості*, тобто обсягу виробництва продукції, для якого дохід підприємства дорівнює його витратам.

Нехай підприємство виробляє певну продукцію і продає її за ціною p г.о. за одиницю. Залежність витрат на виробництво продукції від обсягу виробництва х одиниць становить $y_1 = ax + b$ (*функція витрат*), залежність доходу від реалізації продукції від її обсягу $y_2 = px$ (*функція доходу*). Точку беззбитковості для виробництва даної продукції визначаємо, розв'язавши рівняння $y_1 = y_2$ або $ax + b = px$. Звідси випливає, що величина точки беззбитковості $x^* = \dfrac{b}{p-a}$. Точка беззбитковості є точкою перетину графіків функції витрат та функції доходу. Координати цієї точки на графіку $\left(\dfrac{b}{p-a}; \dfrac{bp}{p-a}\right)$. Прибуток $Q(x)$ підприємства визначається як різниця між значеннями у точці x функцій доходу та витрат: $Q(x) = y_2(x) - y_1(x)$. При $0 \le x \le x^*$ $Q \le 0$, графік функції доходу проходить нижче графіка функції витрат і підприємство має збитки. При $x > x^*$ $Q > 0$ і підприємство отримує прибуток.

Приклад 2.7. Транспортні витрати y на перевезення одиниці вантажу залізничним та автомобільним транспортом на відстань x визначається за формулами: $y_{зал.} = \dfrac{1}{2}x + 100$ та $y_{авт.} = x + 50$. Визначити доцільність використання певного виду транспорту у залежності від відстані перевезення.

Розв'язання. Знайдемо значення х, при якому витрати на перевезення кожним з видів транспорту співпадають. Отримуємо:

$$\frac{1}{2}x+100=x+50 \Rightarrow x=100.$$

Отже, при $x<100$ км $y_{авт.}<y_{зал.}$, тут вигідніше використовувати автомобільний транспорт, при $x>100$ км $y_{авт.}>y_{зал.}$, тому у цьому випадку доцільно використовувати залізничний транспорт.

2.5. Поняття бюджетної множини

Розглянемо *n*-вимірний простір товарів, елементами якого є набори товарів $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, де x_i – кількість і-го товару. Нехай P – вектор цін на товари набору, $P=(p_1,p_2,...,p_n)$. Вартість набору товарів X $PX=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$. Набори товарів X та Y є еквівалентними ($X\sim Y$), якщо ціна цих наборів однакова. Дійсно, відношення рівної вартості є відношенням еквівалентності, оскільки воно є рефлексивним ($X\sim X$), симетричним ($X\sim Y \Leftrightarrow Y\sim X$) та транзитивним ($X\sim Y \wedge Y\sim Z \Rightarrow X\sim Z$), тобто означення відношення еквівалентності виконується. Можна запропонувати і інші відношення еквівалентності на просторі товарів.

Розглянемо простір двох товарів, елементами якого є набори (x_1, x_2). Набори товарів однакової вартості c утворюють частину прямої L_c з рівнянням $p_1x_1+p_2x_2=c$, розташовану у першому квадранті координатної площини Ox_1x_2. Ця пряма перпендикулярна до вектору цін. Якщо $c_1 < c$, то пряма L_{c_1} паралельна прямій L_c та розташована ближче до початку координат. Нехай Q – кошти, що дорівнюють доходу споживача. Множинну всіх наборів товарів, вартість яких не перевищує Q, називають *бюджетною множиною* B.

Бюджетну множину можна визначити наступним чином:

$$B(P,Q)=\{X\in C: p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n\le Q\}=\{X\in C: PX\le Q\}.$$

Межею бюджетної множини називають множину наборів товарів, вартість яких дорівнює Q: $G(P,Q)=\{X\in C: PX=Q\}$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію бюджетної множини У двовимірному просторі бюджетна множина утворює трикутник у першому квадранті, однією з вершин якого є початок координат. Межа бюджетної множини перпендикулярна до вектору цін і є відрізком між осями координат у першому квадранті. У тривимірному випадку бюджетною множиною є тригранна піраміда, а її межею – похила грань між координатними площинами у першому октанті.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 2

1. Вкажіть допущення для моделі Леонтьєва.
2. Наведіть приклади застосування аналітичної геометрії у економічних дослідженнях.
3. Наведіть визначення продуктивності матриці.

4. Наведіть критерії продуктивності матриці.
5. Розкрийте зміст поняття «структурна матриця торгівлі».
6. Вкажіть, що таке точка беззбитковості та як її визначити.
7. Вкажіть, що є елементами технологічної матриці у моделі Леонтьєва.
8. Надайте означення функції доходу та функції витрат.
9. Розкрийте зміст поняття бюджетної множини.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 2

1. Діяльність економічної системи, що складається з двох галузей, на протязі останнього року характеризується наступними даними, наведеними у таблиці (в грошових одиницях). Знайдіть технологічну матрицю A цієї економічної системи.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Валовий обсяг виробництва
	A	*B*	
A	100	160	500
B	275	40	400

2. З'ясуйте, чи є продуктивною технологічна матриця $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$.

3. У таблиці наведено дані міжгалузевого балансу за звітний період у умовних грошових одиницях. Знайти необхідний обсяг валового виробництва для кожної галузі, якщо за планом кінцеве споживання у енергетиці повинно збільшитися у 2 рази, а у машинобудуванні рівень кінцевого споживання повинен зрости на 20%.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Фактичне кінцеве споживання	Валовий обсяг виробництва
	Енергетика	Машинобудування		
Енергетика	100	160	240	500
Машинобудування	275	40	85	400

4. Задано технологічну матрицю (матрицю прямих витрат) $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Знайдіть: а) вектор валового виробництва X, що забезпечує планове кінцеве споживання $Y=\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приріст ΔX валового виробництва, що забезпечує збільшення кінцевого споживання на $\Delta Y=\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

5. На плановий період відомі наведені у таблиці коефіцієнти прямих витрат та величина кінцевого споживання у промисловості, сільському господарстві та інших галузях. Визначите обсяги валового виробництва продукції у галузях та міжгалузеві постачання.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Кінцеве споживання (г.о.)
	Промисловість	Сільське господарство	Інші галузі	
Промисловість	0,3	0,25	0,2	56
Сільське господарство	0,15	0,12	0,03	20
Інші галузі	0,1	0,05	0,08	12

6. Чистою продукцією галузі називають різницю між її валовою продукцією та продукцією всіх галузей, витраченою на виробництво у даній галузі. В умовах попередньої задачі знайдіть чисту продукцію для промисловості, сільського господарства та інших галузей.

7. У просторі двох товарів з вектором цін $P=(2;5)$ вкажіть графічно множини наборів ціною а) 40 г.о.; б) не більше 60 г.о.; в) не менше 30 г.о. і не більше 40 г.о.

8. Для двох товарів з’ясуйте, як змінюється бюджетна множина та її межа, якщо а) змінюється лише дохід; б) змінюється ціна лише одного товару; в) змінюються обидві ціни, але їх співвідношення залишається сталим.

9. У просторі трьох товарів з вектором цін $P=(2;3;5)$ вкажіть графічно множини наборів ціною а) рівно 40 г.о.; б) не менше 20 г.о.; в) не більше 60 г.о.

Змістовий модуль 3. Застосування математичного аналізу у економічних дослідженнях

Мета вивчення змістового модуля 3. Ознайомлення студентів з основними методами математичного аналізу, що використовуються з економічними дослідженнями

План

1. Деякі функціональні залежності, що використовують в економічних дослідженнях.
2. Застосування похідних у економіці
3. Поняття еластичності та її застосування
4. Граничні величини у економіці
5. Економічне застосування диференціального числення функцій кількох змінних
6. Застосування визначеного інтеграла у економічних дослідженнях

Ключові терміни та поняття: функція попиту, функція пропозиції, функція корисності, граничні показники, еластичність, сумарні величини, середні величини.

3.1. Деякі функціональні залежності, що використовують в економічних дослідженнях

Найвідомішими функціями, що їх використовують для моделювання економічних процесів, є функції попиту та пропозиції. *Функція попиту* $d = d(p)$ – це залежність попиту d на деякий товар від його ціни p. *Функція пропозиції* $s = s(p)$ – це залежність пропозиції s деякого товару від його ціни. Для функцій попиту та пропозиції $d = d(p)$ та $s = s(p)$ у економічних дослідженнях часто використовують обернені функції $p = p(d)$ та $p = p(s)$, що характеризують залежність ціни товару від його пропозиції чи попиту.

Приклад 3.1. Нехай функція попиту на товар має вигляд: $d = 150 - 0,2p$. Знайти обернену до неї функцію, що моделює залежність ціни від попиту на товар. При якій ціні на товар попит на нього становитиме 130 одиниць?

Розв'язання. Виразимо змінну p через змінну d з заданої функції попиту.

$$d = 150 - 0,2p \Rightarrow 0,2p = 150 - d \Rightarrow p = 750 - 5d .$$

Якщо попит на товар становить 130 одиниць, то відповідна ціна товару складе $750 - 5 \cdot 130 = 100$ г.о.

Приклад 3.2. Функція попиту на товар визначається рівнянням $q = 600 - 2p$, де q – обсяг попиту на товар у штуках, p – його ціна, г.о. Функція пропозиції цього товару описується рівнянням $s = 300 + 4p$, q – обсяг пропозиції товару, штук. Визначити точку рівноваги на ринку цього товару.

Розв’язання. Визначаємо точку рівноваги на ринку цього товару з умови $q(p)=s(p)$ або $600-2p=300+4p$. Звідси $6p=300$, $p=50$ г.о. Цій ціні відповідає обсяг товару 500 одиниць.

При дослідженні поведінки суб’єктів економічної діяльності використовують також функцію корисності. *Функція корисності* – це суб’єктивна кількісна оцінка споживачем корисності *u* для нього певної кількості *x* товару. *Однофакторна виробнича функція* – залежність обсягу виробництва продукції підприємства від витрат ресурсу, що використовують для цього. *Функція витрат* – залежність виробничих витрат *I* від кількості виробленої продукції.

Вказані функції є прикладами функцій однієї змінної. Для побудови формул, що визначають ці функції, використовують статистичні методи обробки результатів спостережень, зокрема, метод найменших квадратів.

Нехай *M* – це загальна кількість грошей, *V* – швидкість їх обігу (кількість разів, коли грошова одиниця бере участь у розрахунках в середньому на рік), *Y* – національний продукт (вартість готових товарів та послуг, вироблених у країні), *P* – рівень цін (середнє зважене значення цін готових товарів та послуг, виражене відносно базового показника, прийнятого за одиницю. Зв’язок між цими показниками визначається *рівнянням обміну Фішера* $M=\frac{P\cdot Y}{V}$. Це основне рівняння класичної кількісної теорії грошей. Якщо величини *Y* та *V* є сталими, то з рівняння Фішера отримуємо лінійну функцію, що виражає залежність грошової маси *M* від рівня цін *P*. Лінійну функцію, що моделює залежність загальної кількості грошей *M* від величини національного продукту *Y*, також отримуємо при фіксованих значеннях *P* та *V*.

Якщо *P* та *Y* є сталими, то маємо обернено пропорційну залежність між *M* та *V*.

3.2. Застосування похідних у економіці

Розглянемо економічний зміст похідної на прикладі однофакторної виробничої функції $y=f(x)$, що моделює зв’язок між обсягом *y* виробленої за одиницю часу продукції та обсягом x витраченого на виробництво ресурсу. Нехай таким ресурсом є витрати людської праці, виражені у кількості працівників, що задіяні у виробництві або кількості відпрацьованих людино-годин. Нехай на сьогодні кількість працівників дорівнює *a.* Використовуючи поняття диференціалу, можна записати наближену рівність: $f(a+1)\approx f(a)+f'(a)$. Якщо кількість працівників є великою, то ця наближена рівність є достатньо точною. У цьому випадку значення похідної $f'(a)$ означає додаткову продукцію, яку виробляє за одиницю часу новий працівник, залучений до виробництва.

Нехай p – ціна одиниці продукції, а v – заробітна плата працівника за одиницю часу. Якщо $p \cdot f'(a) > v$, то підприємству потрібно найняти додаткового працівника, оскільки він надає підприємству більший доход, ніж отримувана ним плата за роботу.

У розглянутій ситуації похідну виробничої функції у точці a називають *граничною продуктивністю праці*, на відміну від середньої продуктивності праці, що дорівнює відношенню $\frac{f(a)}{a}$.

Розглянемо введені раніше функції, що застосовуються у економічних дослідженнях та з'ясуємо економічний зміст їх похідних. Похідна функції попиту $d = d(p)$ наближено дорівнює зміні попиту при збільшенні ціни на товар на 1 г.о. Оскільки функція попиту є спадною, то абсолютне значення її похідної показує зменшення попиту на товар з боку споживачів при збільшенні його ціни на 1 г.о.

Похідна функції пропозиції $s'(p)$ наближено дорівнює зміні пропозиції товару при збільшенні його ціни на 1 г.о. Оскільки функція пропозиції є зростаючою, то величина цієї похідної дорівнює збільшенню пропозиції товару при збільшенні його ціни на 1 г.о., тобто $s'(p) > 0$.

Похідна $u'(x)$ функції корисності $u(x)$ надає приблизну оцінку додаткової корисності для споживача від придбання додаткової одиниці товару.

У цілому похідна $f'(x)$ відображає швидкість зміни значення функції відносно зміни аргументу. Багато економічних задач вимагають відповіді на запитання про те, на скільки процентів зміниться певний показник, що є функцією, якщо його аргумент зміниться на 1%. Для відповіді на це запитання використовують характеристику функції, яку називають її еластичністю.

3.3. Поняття еластичності та її застосування

Еластичність характеризує відносну зміну економічного показника під дією одиничної відносної зміни фактору, від якого він залежить за умови незмінності решти факторів, що впливають на досліджуваний показник. Іншими словами, еластичність показує, на скільки процентів зміниться досліджуваний показник, якщо фактор, від якого він залежить, збільшиться на 1%.

Нехай досліджується залежність економічного показника y від фактору x, значення якого впливають на значення y. Розглянемо випадок, коли спостерігається функціональна залежність $y = y(x)$. Швидкість зміни величини y відносно зміни величини x визначається похідною $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, проте її застосування у економічних дослідженнях здебільшого є незручним, оскільки величина похідної залежить від обраних одиниць виміру x та y. Тому для вивчення впливу зміни величини x на величину y у економіці застосовують не абсолютні, а відносні (процентні) зміни величин, що досліджуються. Зв'язок між змінами відносних величин оцінюють за допомогою еластичності.

Еластичністю функції $y = y(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносних змін величин y та x:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = y'(x) \cdot \frac{x}{y}. \qquad (3.1)$$

Формулу (4.1) можна записати у вигляді:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \qquad (3.2)$$

Якщо еластичність визначають наближено за дискретним набором даних, наприклад, заданих у вигляді таблиці, то замість (3.1) та (3.2) для обчислення еластичності у точці (x_1, y_1) використовують формулу:

$$E_x(y) = \frac{y_2 - y_1}{y_1} : \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{\Delta y_1}{y_1} : \frac{\Delta x_1}{x_1}. \qquad (3.3)$$

Еластичність, обчислену за формулою (3.3), називають *кінцевою еластичністю*.

У економічних дослідженнях використовують також *середню (дугову) еластичність*:

$$E_x(y) = \frac{y_2 - y_1}{(y_1 + y_2)/2} : \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)/2}, \qquad (3.4)$$

а також *логарифмічну еластичність*

$$E_x(y) = \frac{\Delta(\ln y)}{\Delta(\ln x)} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) : \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \qquad (3.5)$$

З означення еластичності (3.1) випливають основні властивості цього показника.

1. $E_{ax}(by) = E_x(y)$, тобто еластичність не залежить від одиниць виміру показників x та y.

2. Еластичності взаємно обернених функцій є взаємно оберненими величинами: $E_x(y) = \dfrac{1}{E_y(x)}$.

3. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі їх еластичностей: $E_x(u \cdot v) = E_x u + E_x v$.

4. Еластичність частки функцій дорівнює різниці їх еластичностей: $E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_xu-E_xv$.

5. Еластичність суми двох функцій знаходять за формулою:

$$E_x\left(u+v\right)=\frac{d\left(u+v\right)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v}=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v}=\frac{u\cdot E_xu+v\cdot E_xv}{u+v}.$$

Приклад 3.3. Знайти еластичність степеневої функції $y=x^k$.

Розв'язання. $E_x\left(x^k\right)=\frac{d\left(x^k\right)}{dx}\cdot\frac{x}{x^k}=kx^{k-1}\cdot x^{1-k}=k$.

Розглянемо основні показники еластичності, що використовуються у економічних дослідженнях.

1. *Еластичність попиту за ціною (пряма еластичність)* визначається за формулою $E_p\left(q\right)=\frac{dq/q}{dp/p}=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}$, де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту на нього. Вона показує відносну зміну у відсотках величини попиту на товар при зміні ціни цього товару на 1% та характеризує реакцію споживачів на зміну ціни товару.

2. *Перехресну еластичність попиту за ціною* знаходять за формулою $E_{p_j}\left(q_i\right)=\frac{dq_i/q_i}{dp_j/p_j}=\frac{dq_i}{dp_j}\cdot\frac{p_j}{q_i}$. Вона показує відносну процентну зміну величини q_i попиту на i-й товар при зміні ціни p_j на j-й товар, що заміщує чи доповнює i-й товар у споживанні, на 1%.

3. *Еластичність попиту за доходом* обчислюють за формулою: $E_l\left(q\right)=\frac{dq/q}{dl/l}=\frac{dq}{dl}\cdot\frac{l}{q}$, l – середня величина доходу споживачів. Вона характеризує відносну процентну зміну величини попиту на товар при збільшенні доходу споживачів на 1%. Додатна еластичність попиту за доходом спостерігається для нормальних (якісних) товарів, від'ємна – для малоцінних (низькоякісних).

4. *Цінова еластичність ресурсів* $E_p\left(R\right)=\frac{dR/R}{dp/p}=\frac{dR}{dp}\cdot\frac{p}{R}$ характеризує відносну зміну у відсотках величини R попиту на певний ресурс при зміні ціни цього ресурсу на 1%.

5. *Еластичність заміщення при виробництві одного ресурсу іншим* $E_{R_j}(R_i)=\frac{dR_i}{dR_j}\cdot\frac{R_j}{R_i}$ показує, на скільки процентів зміниться кількість R_i i-го ресурсу при збільшенні кількості R_j j-го ресурсу на 1%, так, що при цьому загальний обсяг виробництва не змінюється.

Приклад 3.4. Знайти рівноважну ціну та еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни, якщо задано функцію попиту $q=-p^2+10p+4$ та пропозиції $s=2p-16$.

Розв'язання. Знайдемо рівноважну ціну товару, для якої попит на нього дорівнює пропозиції. Маємо:

$$-p^2+10p+4=2p-16.$$

Звідси отримуємо квадратне рівняння $p^2-8p-20=0$, коренями якого є значення $p_1=-2$ та $p_2=10$. Оскільки від'ємний корінь не має економічного змісту, то рівноважна ціна $p=10$ г.о. Значення попиту для цієї ціни $q(10)=-10^2+10\cdot10+4=4$, значення пропозиції $s(10)=2\cdot10-16=4=q(10)$. При $p=10$ значення $\frac{dq}{dp}=-2p+10=-2\cdot10+10=-10$, $\frac{ds}{dp}=2$.

Еластичність попиту за ціною при $p=10$ г.о. становить:

$$E_q(10)=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}=-10\cdot\frac{10}{4}=-12{,}5\%,$$

еластичність пропозиції:

$$E_s(10)=\frac{ds}{dp}\cdot\frac{p}{s}=2\cdot\frac{10}{4}=5\%.$$

3.4. Граничні величини у економіці

Сумарною величиною називають будь-яку функцію $F(x)$ незалежної змінної x. Прикладами сумарних величин у економіці є доход або витрати як функції обсягу виробництва, обсяг виробництва як функція витрат праці тощо.

Середню величину ($AF(x)$) визначають як відношення сумарної величини до незалежної змінної: $AF(x)=\frac{F(x)}{x}=\bar{F}$. Приклади середніх величин – середня виручка, середні витрати, середній доход.

Гранична (маржинальна) величина $MF(x)$ визначається як похідна сумарної величини $F(x)$ за змінною x: $MF(x)=\frac{dF}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta F}{\Delta x}$ у випадку, якщо сумарна величина змінюється неперервно. Якщо сумарна величина є дискретною, то маржинальна величина $MF(x)$ визначається як відношенні зміни $\Delta F(x)$ до зміни незалежної змінної Δx: $MF(x)=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$. У цьому випадку маржинальну величину можна розглядати як зміну сумарної величини, викликану зміною аргументу на одиницю. Прикладами маржинальних величин у економіці є маржинальний прибуток, маржинальні витрати тощо.

Гранична величина, на відміну від сумарної або середньої величини, характеризує не стан, а процес зміни економічного об'єкту, тобто це динамічна характеристика. Гранична (маржинальна) величина відображає швидкість зміни певного економічного процесу.

Приклад 3.5. Залежність між виробничими витратами y та обсягом x продукції, що виробляє підприємство, визначається функцією $y=10x+50$. Визначити виробничі витрати при обсязі виробленої продукції 100 одиниць.

Розв'язання. Граничні витрати для обсягу виробництва x дорівнюють $y'(x)$. Оскільки у нашому випадку залежність між витратами та обсягом виробництва є лінійною, то граничні витрати для будь-якого обсягу виробництва, у тому числі і при $x=100$ є сталими, оскільки для будь-якого x $y'(x)=10$ г.о. Це означає, що виробництво додаткової одиниці продукції потребує 10 г.о. додаткових витрат.

Це значення можна було отримати по іншому:

$$y(101)-y(100)=10\cdot 101+50-10\cdot 100-50=10 \text{ (г.о.)}$$

У цьому прикладі функція витрат є лінійною, тому різниця $y(x+1)-y(x)$ співпадає зі значенням похідної $y'(x)$. У загальному випадку для нелінійної функції $y(x)$ різниця $y(x+1)-y(x)$ дорівнює $y'(x)$ лише наближено при великих значеннях x.

Приклад 3.6. Залежність між виробничими витратами y г.о. та обсягом виробництва x г.о. визначається рівністю $y=1000x-4x^2$. Визначити середні та граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить x=10 г.о.

Розв'язання. Середні витрати для заданої функції виробничих витрат $y=F(x)=1000x-4x^2$ становлять $AF(x)=\dfrac{F(x)}{x}=\bar{F}=\dfrac{1000x-4x^2}{x}=1000-4x$. При x=10 г.о. $\bar{F}(10)=1000-4\cdot 10=960$ г.о. Граничні витрати $MF(x)=\dfrac{dF}{dx}=1000-8x$. При x=10 г.о. $MF(10)=1000-8\cdot 10=920$ (г.о.).

3.5. Економічне застосування диференціального числення функцій кількох змінних

Розглянемо основні функції кількох змінних, що їх використовують у економічних дослідженнях. Їх одновимірні аналоги ми розглянули у п. 3.1.

Багатофакторна виробнича функція $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ виражає залежність обсягу y продукції, яку виробляє деяка економічна система, вираженого у натуральних чи грошових одиницях, від обсягів $x_1, x_2,..., x_n$ n ресурсів, що використовуються для виробництва. Найбільш відомою виробничою функцією є виробнича функція Кобба-Дугласа $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, де A, α, β – невід'ємні константи, $\alpha + \beta \le 1$, *K* – обсяг виробничих фондів у натуральному чи вартісному виразі (величина вкладеного у виробничий процес капіталу), *L* – величина трудових ресурсів у натуральному чи вартісному виразах (величина вкладеної праці). У деяких наукових працях з економічної теорії у функції Кобба-Дугласа приймають $\alpha + \beta = 1$.

Для виробничої функції $y = y(K, L)$ двох змінних *K* та *L* величина $l = \dfrac{y}{L}$ – це середня продуктивність праці у вартісному виразі, величина $k = \dfrac{y}{K}$ – середня фондовіддача, величину $f = \dfrac{K}{L}$ називають *фондоозброєністю* (це вартість виробничих фондів, що приходиться на одиницю витрат на робочу силу або на одного робітника).

Лінії рівня виробничої функції називають *ізоквантами*. Для виробничої функції Кобба-Дугласа рівняння сімейства ізоквант має вигляд: $AK^{\alpha}L^{\beta} = c = \mathrm{const}$. Лінії, ортогональні до ізоквант виробничих функцій, називають ізоклиналями цих функцій.

Функція корисності $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ відображає суб'єктивну числову оцінку конкретною особою корисності *u* набору *n* товарів, x_{i} – кількість одиниць *i*-го товару. Лінії чи поверхні рівня функції корисності $u = u(x_1, x_2, ..., x_n) = c, c - const$, називають *кривими (поверхнями) байдужості*. Тут для двох наборів товарів з однаковою корисністю *u* споживачу байдуже, який з них вибрати.

Функція витрат $I = I(y_1, y_2, ..., y_n)$ – це залежність витрат *I* від обсягів $y_1, y_2, ..., y_n$ *n* ресурсів, що використовуються у процесі виробництва.

У теорії фінансів відомо рівняння обміну Фішера $M = \dfrac{P \cdot Y}{V}$, що виражає залежність загальної кількості грошей *M* від швидкості їх обігу *V*, національного продукту *Y*, рівня цін *P*. Величина *M* є функцією трьох змінних *V, Y, P*.

Розглянемо економічний зміст частинних похідних функцій кількох змінних на прикладі виробничої функції Кобба-Дугласа.

Зафіксуємо поточний стан підприємства, що характеризується значеннями *K* та *L*. Їм відповідає обсяг виробництва продукції $y = y(K, L)$. Нехай *L* – кількість робітників. Якщо найняти ще одного робітника, то приріст обсягу виробництва становитиме $\Delta y = y(K, L+1) - y(K, L)$. Цей частинний приріст наближено дорівнює: $\Delta y \approx \dfrac{\partial y}{\partial L}(K, L) \cdot \Delta L = \dfrac{\partial y}{\partial L}(K, L)$, оскільки приріст $\Delta L = 1$.

Таким чином, частинна похідна від виробничої функції по змінній *L* (величині трудових ресурсів або праці) наближено дорівнює додатковій вартості продукції, виробленої одним додатково найнятим робітником. Тому цю частинну похідну називають *граничною продуктивністю праці*. Для функції Кобба-Дугласа вона дорівнює:

$$\frac{\partial y}{\partial L}\left(K,L\right)=\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$$

Якщо збільшити на одиницю вартість виробничих фондів, то додаткова вартість виробленої продукції становитиме $\Delta y=y\left(K+1,L\right)-y\left(K,L\right)\approx\frac{\partial y}{\partial K}\left(K,L\right)$. Цю частинну похідну

$$\frac{\partial y}{\partial K}\left(K,L\right)=\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}$$

називають *граничною фондовіддачею*.

Гранична продуктивність праці та гранична фондовіддача є абсолютними величинами. У економічних дослідженнях у багатьох випадках доводиться визначати, на скільки процентів зміниться обсяг виробництва, якщо кількість певного виду ресурсів збільшиться на 1%, тобто визначати еластичність обсягу виробництва за певним видом ресурсів. Поняття еластичності було раніше розглянуто для функції однієї змінної, де еластичність визначалася за формулою $E_x\left(y\right)=y'\left(x\right)\cdot\frac{x}{y}$. Для функцій кількох змінних похідну замінюють на частинну похідну за змінною, для якої розраховують еластичність. Так для виробничої функції Кобба-Дугласа еластичність обсягу виробництва за працею становить

$$E_L\left(y\right)=\frac{\partial y}{\partial L}\cdot\frac{L}{y}=\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}\cdot\frac{L}{AK^{\alpha}L^{\beta}}=\beta,$$

еластичність обсягу виробництва за працею відповідно дорівнює:

$$E_L\left(y\right)=\frac{\partial y}{\partial K}\cdot\frac{K}{y}=\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}\cdot\frac{K}{AK^{\alpha}L^{\beta}}=\alpha.$$

Отже, з економічної точки зору параметри α та β у виробничій функції Кобба-Дугласа – це значення еластичності обсягу виробництва відповідно за працею та капіталом

Для спрощення складних обчислень на практиці часто використовують лінеаризацію функцій кількох змінних. Вона полягає у заміні функції $u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ у околі точки $x^*=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)$ лінійною функцією

$$g\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=u\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)+\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)\cdot\left(x_1-x_1^*\right)+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)\cdot\left(x_2-x_2^*\right)+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)\cdot\left(x_n-x_n^*\right).$$

При цьому різниця $u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)-g\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ у околі точки $x^*=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)$є нескінченно малою величиною того ж порядку, що й відстань між точками $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ та $\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)$. При лінеаризації залежність приросту лінійної функції, що є апроксимацією заданої функції, від аргументів прямо пропорціональна приростам відповідних аргументів. При цьому коефіцієнтом пропорціональності є значення відповідної частинної похідної у точці $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$.

Розглянемо можливості лінеаризації виробничої функції на прикладі виробничої функції Кобба-Дугласа. Зафіксуємо поточний стан підприємства, тобто значення праці *L*, капіталу *K*, а також обсяг виробництва $y(K, L)$, що відповідає цим значенням.

При невеликих змінах капіталу та праці dK та dL замінимо зміну обсягу виробництва Δy повним диференціалом $dy = \frac{\partial y}{\partial K}dK + \frac{\partial y}{\partial L}dL$, що наближено дорівнює Δy. Величина $\frac{\partial y}{\partial L}$ – це гранична продуктивність праці, $\frac{\partial y}{\partial K}$ – гранична фондовіддача. Отже, $\frac{\partial y}{\partial K}dK$ – це вартість додаткової продукції, виробленої додатковим числом робітників dL, а $\frac{\partial y}{\partial L}dL$ – вартість додаткової продукції, виробленої за рахунок залучення додаткових виробничих фондів dK.

Отже, при невеликій зміні кількості робітників та кількості виробничих фондів зміна вартості виробленої продукції наближено дорівнює сумі вартостей додаткової продукції, виробленої за рахунок залучення додаткових робітників та додаткової продукції, виробленої за рахунок вводу в дію додаткових виробничих фондів. Для підрахунків можна використовувати граничну продуктивність праці та граничну фондовіддачу для поточного стану виробництва (до змін кількості робітників та виробничих фондів).

Розглянемо диференціальні властивості функції корисності. Функція корисності $u(x_1, x_2, .., x_n)$ *n* змінних відображає суб'єктивну числову оцінку індивідом корисності *u* набору *n* товарів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, де x_i – кількість *i*-го товару. Будемо вважати, що кожний товар є бажаним, тобто зі зростанням кількості товару при незмінній кількості решти товарів корисність набору зростає. Вважаємо також, що функція корисності диференційовна до других похідних включно. Частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ називають *граничною корисністю i*-го товару. З властивостей функції корисності випливає, що всі її частинні похідні є додатними. Вектор-градієнт $\frac{\partial u}{\partial X} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ називають *вектором граничних корисностей*. Використання граничних корисностей дає можливість аналізу поведінки суб'єктів економічної діяльності.

Важливою властивістю функції корисності є те, що зі збільшенням споживання товару його гранична корисність зменшується, тобто другі частинні похідні виду $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$. Цю властивість називають *першим законом Госсена*.

До функцій корисності відносять, наприклад, *функцію вартості* $u(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$, неокласичну функцію $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, де α, β – невід'ємні сталі, такі, що $\alpha + \beta \le 1$.

3.6. Застосування визначеного інтеграла у економічних дослідженнях

Застосування визначеного інтеграла у економічних дослідженнях ґрунтується на можливості подання багатьох економічних величин у вигляді інтегральних сум. Розглянемо задачу про обчислення кількості товару, виробленого за певний проміжок часу.

Нехай функція $y = f(t)$ описує зміну інтенсивності деякого виробництва. Знайдемо кількість товару Q, виготовлену за проміжок часу $[0; T]$. Для цього розіб'ємо відрізок $[0; T]$ на n проміжків точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$. Кількість товару ΔQ_i, вироблена за проміжок часу $[t_{i-1}, t_i]$, наближено можна знайти за формулою: $\Delta Q_i \approx f(c_i) \cdot \Delta t_i, c_i \in [t_{i-1}, t_i], \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, ..., n.$ Тоді кількість товару $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta t_i$. При $\max_{1 \le i \le n} \Delta t_i \to 0$ отримуємо:

$$Q = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta t_i = \int_0^T f(t) dt.$$

Приклад 3.7. Знайти денний обсяг виробництва продукції, якщо продуктивність праці на протязі робочого дня змінюється у залежності від часу (у годинах) за формулою $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10$, а тривалість робочого дня складає 8 годин.

Розв'язання. Обсяг виробництва продукції

$$Q = \int_0^T f(t) dt = \int_0^8 \left(-0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10\right) dt = \left(-0{,}1 \cdot \frac{t^3}{3} + 0{,}4t^2 + 10t\right)\Bigg|_0^8 \approx 88{,}53.$$

Розглянемо приклади застосування визначеного інтеграла при розв'язуванні деяких інших економічних задач.

Приклад 3.8. Нехай на складі зберігають деякий витратний матеріал. Витрати зберігання одиниці цього матеріалу за одиницю часу дорівнюють *h*. Величина запасу матеріалу на складі є функцією часу *f(t)*. Знайти витрати на зберігання запасу матеріалу при його рівномірному витрачанні від *Q* до 0 за час *T*

Розв'язання. Витрати на зберігання матеріалу за час від *a* до *b* обчислюють за допомогою інтегралу $\int_a^b h \cdot f(t) dt$. При рівномірному витрачанні матеріалу за час *T* від величини запасу *Q* до нуля рівень запасу у момент часу *t* є лінійною функцією, причому $f(0)=Q,\ f(T)=0$. Отже, у цьому випадку маємо $f(t)=Q\left(1-\frac{t}{T}\right)$. Тоді витрати на зберігання запасу за час T становлять:

$$\int_0^T h\cdot Q\left(1-\frac{t}{T}\right)dt=hQ\cdot\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)\Bigg|_0^T=hQ\cdot\left(T-\frac{T}{2}\right)=\frac{hQT}{2}.$$

Приклад 3.9. Нехай граничні витрати підприємства $f(Q)=Q^2+3Q+5$. Знайдіть сумарні витрати за умови, що постійні витрати дорівнюють 90 г.о.

Розв'язання. Граничні витрати визначаються як похідна сумарних витрат по обсягу виробництва, отже, для знаходження сумарних витрат потрібно знайти інтеграл по обсягу виробництва від граничних витрат:

$$F(Q)=\int f(Q)dQ=\int\left(Q^2+3Q+5\right)dQ=\frac{Q^3}{3}+\frac{3Q^2}{2}+5Q+C.$$

Оскільки сталі витрати мають місце і при відсутності виробництва ($Q=0$), то $F(0)=90$, то $C=90$ і сумарні витрати мають вигляд:

$$F(Q)=\frac{Q^3}{3}+\frac{3Q^2}{2}+5Q+90.$$

Отже, застосування визначеного інтеграла у економічних досліджень ґрунтується на його означення як границі інтегральних сум.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 3

1. Надайте означення поняття функції.
2. Які функції називають парними? Які функції називають непарними? Наведіть приклади.
3. Які функції називають обмеженими? Наведіть приклади.
4. Надайте означення зростаючої, спадної, незростаючої та неспадної функції. Наведіть приклади.
5. Надайте означення функції, опуклої вгору та функції, опуклої вниз. Наведіть приклади.
6. Наведіть приклади функцій, що використовуються у економічних дослідженнях.
7. Сформулюйте означення похідної функції у точці.
8. Сформулюйте означення еластичності.
9. Наведіть формулу кінцевої еластичності
10. Наведіть формули середньої та логарифмічної еластичності
11. Чи залежить еластичність від одиниць виміру показників.
12. Наведіть формулу еластичності добутку, частки та суми двох показників.
13. Вкажіть основні види еластичності, що застосовуються у економічних дослідженнях.
14. Надайте означення сумарних, середніх та граничних величин у економіці. Наведіть приклади.

15. Вкажіть, як визначаються граничні величини у неперервному та дискретному випадках?
16. Наведіть приклади функцій кількох змінних, що використовуються у економічних дослідженнях.
17. Вкажіть, що називають ізоквантами та ізоклиналями виробничої функції.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 3

1. Попит на товар описується рівнянням $q = 2400 - 100p$, пропозиція цього товару – $s = 1000 + 250p$, p – ціна товару. Визначте параметри рівноваги ринку та яку кількість товару бажають придбати за ціною 3 г.о. за одиницю. Знайдіть, яку кількість товару буде запропоновано при ціні 5 г.о. за одиницю.
2. Нехай $s = 200p$ – функція пропозиції. Знайдіть обернену функцію, що виражає залежність ціни товару від величини пропозиції та при якій ціні величина пропозиції становитиме 1000 г.о.
3. З'ясуйте, чи є обмеженою функція Торнквіста $y = \dfrac{ax}{x+b}, a,b - \text{const}$, що описує залежність попиту y на предмети першої необхідності від доходу x споживача.
4. Функція корисності повинна задовольняти дві умови: її перша похідна повинна бути додатною, а друга від'ємною. Зі змістовної точки зору корисність товару повинна зростати зі збільшенням його кількості, проте зростання кількості товару, що споживається супроводжується зменшенням його корисності. Переконайтесь у тому, що наведені нижче функції відповідають цим умовам функції корисності: а) $y = \ln x$; б) $y = \sqrt{x}$.
5. Залежність між виробничими витратами y (г.о.) та обсягом виробленої продукції x (г.о.) визначається функцією $y = 50x - 0{,}05x^3$. Знайти середні та граничні витрати, якщо обсяг виробництва складає 10 г.о.
6. Функція виробничих витрат підприємства має вигляд $y(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250$. Знайдіть середні та граничні виробничі витрати. Обчисліть їх значення, якщо обсяг виробництва x дорівнює 10 г.о.
7. Залежність обсягу u (од.) продукції, виробленого бригадою робітників, від часу t (год.) визначається рівністю $u(t) = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t$, $0 \le t \le 8$. Знайдіть продуктивність праці бригади робітників та швидкість її зміни через 1 годину після початку роботи та за 1 годину до її завершення.
8. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (г.о.) та її валовим обсягом виробництва x (г.о.) визначається рівністю $y = 80000 - 500x$. Знайдіть еластичність собівартості за обсягом виробництва для обсягу виробництва 60 г.о.

9. Залежність між попитом q та ціною p одиниці продукції підприємства визначається співвідношенням $q = 18 - \sqrt{p}$. Знайдіть еластичність попиту за ціною та з'ясуйте, при яких значеннях ціни попит є нейтральним, еластичним та нееластичним.
10. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+8}{p+2}, \; s = p + 0,5;$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайдіть ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; а також еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни. Визначте зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

11. З'ясуйте, як пов'язані між собою граничні та середні повні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат дорівнює 1.
12. Задано функцію $y(x)$ повних витрат підприємства на виробництво x одиниць продукції. Визначите зв'язок між значеннями еластичності повних та середніх витрат.
13. Залежність між виробничими витратами y (г.о.) та обсягом виробництва x (г.о.) є функцією $y = 10x - 0,04x^3$. Визначите середні та граничні витрати при $x = 5$ г.о.
14. Залежність повних витрат y (г.о.) від обсягу виробництва x (г.о.) є функцією $y = x^3 - 2x^2 + 96$. Знайдіть, при якому обсязі виробництва граничні та середні витрати співпадають, а також еластичності повних та середніх витрат при цьому обсязі виробництва.
15. Знайдіть еластичність попиту q (од.) на товар при заданій його ціні p г.о., якщо а) $q + 10p = 50,\; p = 3$; б) $5q + 3p = 70,\; p = 10$; в) $p^2 + p + 4q = 26,\; p = 2$.
16. Залежність споживання y від доходу споживача x має вигляд: $y = \dfrac{ax}{x+b}$.

    Покажіть, що еластичність споживання за доходом залежить від значення параметра a та прямує до нуля при необмеженому зростанні доходу.
17. Нехай виробнича функція є виробничою функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити обсяг виробництва на 3%, потрібно збільшити виробничі фонди на 6% або чисельність робітників на 9%. У минулому році один робітник за місяць виробляв продукції на 1 млн. г.о., всього на підприємстві 1000 робітників. Основні фонди оцінювалися в 10 млрд. г.о. Запишіть вираз для виробничої функції та знайдіть величину середньої фондовіддачі.
18. Для виробничої функції Кобба-Дугласа $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$ знайдіть середню та граничну продуктивність праці, середню та граничну фондовіддачу, еластичності обсягу виробництва за працею та капіталом.

19. Для функції корисності $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$ побудуйте криві байдужості (лінії рівня функції корисності). Знайдіть вектор граничних корисностей. Перевірте виконання першого закону Госсена.
20. Знайдіть граничні корисності для наступних функцій корисності: а) $u = 3x_1 + 5x_2$; б) $u = \min\{x_1, 2x_2\}$.
21. Знайдіть сумарний доход *R*, якщо граничний доход $MR = 9 - 6Q$.
22. Визначте споживання С, якщо граничне споживання $C_Y = 0{,}5 + \frac{0{,}1}{\sqrt{Y}}$, причому споживання дорівнює 85 г.о., коли національний доход *Y* дорівнює 100 г.о.
23. Знайдіть зростання загальних витрат при зростанні виробництва від 6 до 10 одиниць продукції, якщо залежність маржинальних витрат *MF* підприємства від обсягу *x* виробництва визначається функцією $MF = -3x^2 + 200x + 60$.

Змістовий модуль 4. Найпростіші екстремальні задачі у економічних дослідженнях

Мета вивчення змістового модуля 4: сформувати у студентів навички застосування оптимізаційних методів при вирішенні економічних проблем.

План

1. Оптимізація функцій однієї змінної у економічному аналізі.
2. Оптимізація функцій кількох змінних.
3. Оптимізація виробничої програми підприємства

Ключові терміни та поняття: формула Вілсона, граничний продукт, функція Лагранжа, закон спадаючої віддачі, функція попиту на ресурс.

4.1. Оптимізація функцій однієї змінної у економічному аналізі

Для дослідження функцій, що є моделями різноманітних економічних систем та процесів, широко використовують апарат диференціального числення, зокрема, методи дослідження функцій на екстремум. Застосування цих методів дає змогу знаходити оптимальні параметри економічних систем, для яких функціонування таких систем буде найбільш ефективним. Одним з найпростіших прикладів такого застосування похідної є визначення оптимального обсягу виробництва фірми-монополіста. Нехай монополіст, знаючи функцію попиту на свою продукцію, вирішує, скільки її виробити та за якою ціною продавати. Якщо монополіст встановить дуже високу ціну, то споживачі за певний період придбають у нього невелику кількість продукції. Якщо він вироблятиме більше продукції, йому доведеться знизити ціну.

Для того, щоб визначити оптимальний обсяг виробництва продукції, монополіст повинен визначити залежність між прибутком та обсягом виробленої продукції. Нехай задано функцію доходу $R = R(q)$ та функцію витрат $C = C(q)$.Тоді залежність прибутку фірми від обсягу виробництва її продукції визначається рівністю:

$$P(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q).$$

З'ясуємо, для якого обсягу виробництва продукції прибуток фірми є максимальним. Для цього нам потрібно знайти точку екстремуму функції прибутку. Розв'язання цієї задачі здійснюють з допомогою похідної. Розглянемо приклад.

Приклад 4.1. На основі статистичних даних про попит на продукцію фірми у минулі роки була встановлена залежність попиту q від ціни p за одиницю товару: $q = 100000 - 200p$, де q – кількість одиниць товару, що реалізуються за рік. Витрати на виробництво та реалізацію q одиниць товару складають: $C(q) = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$. Розрахувати річний прибуток фірми та визначити його максимальне значення.

Розв'язання. Виразимо ціну товару через величину обсягу реалізації:

$$p(q) = \frac{100000}{200} - \frac{q}{200} = 500 - \frac{q}{200}.$$

Величина доходу (обсягу продаж) фірми: $R(q) = 500q - \frac{q^2}{200}$. Тоді річний прибуток знайдемо за формулою:

$$P(q) = R(q) - C(q) = 500q - \frac{q^2}{200} - \left(150000 + 100q + 0{,}003q^2\right) =$$

$$= -0{,}008q^2 + 400q - 150000.$$

Визначимо при якому значенні обсягу товару q прибуток є максимальним. Знайдемо $P'(q)$:

$$P'(q) = -0{,}016q + 400.$$

З рівності $P'(q) = -0{,}016q + 400 = 0$ знаходимо значення q, що є точкою екстремуму: $q = 25000$ одиниць товару. Знайдена точка екстремуму є точкою максимуму, оскільки $P''(q) = -0{,}016 < 0$. Максимальне значення прибутку при цьому складе $P(25000) = -0{,}008 \cdot (25000)^2 + 400 \cdot 25000 - 150000 = 4850000$ (г.о.)

Приклад 4.2 (оптимізація оподаткування підприємства). Нехай величина доходу R від залежності від кількості x реалізованого товару є функцією $R(x) = 16x - x^2$, а функція витрат на виробництво товару має вигляд $C(x) = x^2 + 1$. Визначити оптимальний для бюджету рівень податку на одиницю продукції та прибуток підприємства при такому оподаткуванні.

Розв'язання. Нехай t г.о. – податок з одиниці продукції. Тоді сумарний податок з x одиниць продукції складе $T = tx$ г.о. Залежність між прибутком підприємства та обсягом виробництва є функцією $F(x) = R(x) - C(x) - tx = 16x - 2x^2 - tx - 1$. Значення обсягу виробництва, що максимізує прибуток, визначається з рівності $F'(x) = 0 : 16 - 4x - t = 0 \Rightarrow x = 4 - \frac{t}{4}$. Підставивши це значення x у сумарну величину податку, отримаємо: $T = tx = t\left(4 - \frac{t}{4}\right) = 4t - \frac{t^2}{4}$. Знайдемо t, для якого T є максимальним. Маємо:

$$T'(t) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow t = 8.$$

При $t=8$ г.о. максимальна величина прибутку досягається при $x=4-\frac{8}{4}=2$. Тоді $F_{\max}=F(2)=16\cdot 2-2\cdot 2^2-8\cdot 2-1=7$ (г.о.)

Оптимальна з точки зору бюджету величина податку $T=8\cdot 2=16$ (г.о.). При відсутності оподаткування $(t=0)$ величина прибутку підприємства становить: $F(x)=16x-2x^2-1$.

Тоді отримуємо:

$$F'(x)=16-4x=0\Rightarrow x=4,\ F_{\max}=F(4)=16\cdot 4-2\cdot 4^2-1=31 \text{ (г.о.)}.$$

Цей приклад свідчить, що зменшення оподаткування стимулює зростання виробництва продукції і приводить до зростання прибутку підприємства від її реалізації.

Застосовані у розглянутих прикладах міркування лежать у основі теорії однoресурсної фірми. Нехай фірма випускає один товар, використовуючи при цьому лише один ресурс. Кількість товару дорівнює *y*: $y=F(x)$ – виробнича функція, де *x* – кількість ресурсу, витраченого у процесі виробництва. Будемо вважати, що виробнича функція є диференційовною та задовольняє наступні аксіоми.

Аксіома 1. На деякій частині області визначення виробничої функції (*економічній області*) ця функція є неспадною, тобто збільшення витрат ресурсу не спричиняє зменшення обсягу виробництва. У економічній області $F'(x)\ge 0$. Цю похідну називають *граничним (маржинальним) продуктом*.

Аксіома 2. Існує опукла підмножина *S* економічної області, для якої підмножина $\{x\in S: F(x)\ge c\}$ також є опуклою для всіх значень c і у цій підмножині друга похідна виробничої функції є недодатною.

Розглянемо економічний зміст цих аксіом. Перша аксіома відображає той факт, що у реальній економіці збільшення виробничих витрат за інших рівних умов не може спричинити зниження рівня виробництва продукції. Економічний зміст твердження про те, що друга похідна виробничої функції не є додатною, полягає у тому, що зі збільшенням витраченого ресурсу, починаючи з деякої величини, граничний продукт починає зменшуватися. Цю властивість виробничих систем у економіці називають *законом спадаючої віддачі*.

Нехай *p* – ціна одиниці ресурсу, *v* – ціна одиниці товару, який виробляє фірма. Величина прибутку $P(x)$ є функцією кількості *x* ресурсу, витраченого на виробництво за умови, що ціни є сталими. Тоді $P(x)=vF(x)-px$. Потрібно максимізувати функцію прибутку $P(x)$ для невід'ємних значень змінної *x*:

$$P(x)\to \max,\ x\ge 0.$$

Знайдемо стаціонарні точки функції прибутку з рівності $P'(x)=0$. Отримуємо: $vF'(x)-p=0\Rightarrow F'(x)=\frac{p}{v}$. Оскільки $F''(x)\le 0$, то знайдений корінь цього рівня є точкою максимуму. Отже, кількість ресурсу, який необхідно витратити для забезпечення оптимального обсягу виробництва продукції, що забезпечує максимум прибутку фірми, визначають з рівняння

$$F'(x) = \frac{p}{v}. \qquad (4.1)$$

Розглянемо економічний зміст співвідношення (4.1). Величина $F'(x)$ є граничним продуктом, а $vF'(x)$ – це вартість граничного продукту, який додатково отримують з одиниці ресурсу. Оскільки вартість одиниці ресурсу дорівнює p, отримуємо стан рівноваги: після виробництва та реалізації додаткової одиниці товару отримуємо скільки ж коштів, скільки витратили на придбання одиниці ресурсу. Отже, збільшувати обсяг виробництва доцільно доти, поки не почне виконуватися співвідношення (4.1), тобто поки не буде досягнута рівність доходу від реалізації додаткової одиниці продукції та витрат на придбання потрібного для цього ресурсу. Нехай $x = x^*$ – розв'язок рівняння (4.1). Він залежить від цін p та v, тобто $x^* = x^*(p, v)$. Цю функцію цін називають функцією *попиту на ресурс з боку фірми*. Якщо діють ринкові ціни p та v, то фірма визначає необхідний обсяг придбання ресурсу згідно з цією функцією $x^*(p, v)$. Підставивши $x^*(p, v)$ у виробничу функцію $y = F(x)$, отримаємо вираз для обсягу виробництва продукції у вигляді функції цін p та v: $y = F\left(x^*(p, v)\right)$. Отриману функцію називають *функцією пропозиції продукції фірми*.

Приклад 4.2. Обсяг виробництва деякого товару залежить від витрат людської праці x (кількість робітників), причому цю залежність можна представити виробничою функцією $y = 6\sqrt{x}$. Ціна одиниці товару 40 г.о., заробітна плата робітника складає 30 г.о. за години. Інші витрати, крім оплати праці, не враховуються. Знайти оптимальну кількість робітників, що забезпечує максимальний прибуток підприємства.

Розв'язання. Якщо кількість робітників дорівнює x, то прибуток підприємства становить: $P(x) = 40 \cdot 6\sqrt{x} - 30x$. Знайдемо максимум функції прибутку за умови, що $x > 0$. Похідна цієї функції має вигляд:

$$P'(x) = \frac{120}{\sqrt{x}} - 30.$$

Розв'язавши рівняння $P'(x) = 0$, отримуємо $x = 16$. При цьому значенні x друга похідна $P''(x) = -60 \cdot x^{-3/2} = -\frac{60}{x\sqrt{x}} < 0$, тому значення $x = 16$ надає прибутку максимального значення. Цей же результат можна отримати, безпосередньо використавши формулу (4.6). Дійсно, тоді маємо $F'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{30}{40} \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$.

Застосуємо апарат диференціального числення для дослідження зв'язку між прибутком фірми та величиною податкових надходжень у державу при заданій ставці податку. Нехай y – обсяг продукції, виробленої на підприємстві, а ціна на продукцію лінійно зменшується зі збільшенням її обсягу: $v(y) = a - by$. Залежність витрат *I* від обсягу виробництва *y* є квадратичною: $I(y) = cy^2 + dy + e$, де *a, b, c, d, e* – деякі додатні константи. Нехай податок є акцизом зі ставкою t, тобто з кожної проданої одиниці товару платять податок *t* г.о., а з усього обсягу товару платять податок *G*=*ty*. При цьому фірма отримує прибуток

$$P(y) = y(a - by) - cy^2 - dy - e - ty.$$

Визначимо обсяг виробництва, що максимізує прибуток. Для нього повинна виконуватись рівність $P'(y) = 0$. Отже, отримуємо:

$$P'(y) = a - 2by - 2cy - d - t = 0 \Rightarrow 2(b + c)y = a - d - t \Rightarrow y = \frac{a - d - t}{2(b + c)}.$$

Враховуючи, що $P''(y) = -2b - 2c < 0$, отримане значення *y* надає функції прибутку максимальне значення. Наявність акцизного податку спричиняє зменшення оптимального обсягу виробництва та відповідного прибутку підприємства.

Для прогнозування дій уряду щодо встановлення акцизного податку *t*, обчислимо податковий доход держави:

$$G = ty = \frac{(a - d - t)t}{2b + c},$$

тобто ця функція є квадратичною відносно *t*, а її графіком є парабола, гілки якої спрямовані вниз. Максимум податкового доходу досягається при значенні *t*, що є абсцисою цієї вершини, тобто $t^* = \dfrac{a - d}{2}$. Відповідне значення податкового доходу отримаємо, підставивши це значення *t* у вираз для $G(t)$: $G^* = \dfrac{(a - d)^2}{8(b + c)}$.

Для цього значення t^* оптимальний обсяг виробництва

$$y^* = y(t^*) = \frac{a - d - t^*}{2(b + c)} = \frac{(a - d)^2}{16(b + c) - e}.$$

Прикладом застосування методів дослідження функцій на екстремум є відома у логістиці формула Вілсона.

Розглянемо роботу ідеального складу. Такий склад відпускає своїм клієнтам продукцію, що знаходиться на зберіганні (сировину, матеріали, запасні частини тощо) рівномірно, зі сталою швидкістю *M* одиниць товару за одиницю часу. Нехай *h* – витрати на зберігання одиниці запасу за одиницю часу, *T* – час, на протязі якого запас повністю витрачається, тобто період циклу, на протязі якого склад витрачає запас. На початку циклу на склад надходить запас, обсяг якого становить *Q* одиниць.

Склад має адміністративні (сталі) витрати *K*, величина яких не залежить від величини запасу. По мірі зменшення запасу на складі здійснюється організація нового постачання на склад. Чергова партія запасу прибуває на склад у момент повної витрати попередньої партії. Будемо вважати, що розвантаження нової партії здійснюється миттєво.

Задача полягає у мінімізації середніх витрат складу за одиницю часу. Якщо величина партії постачання дорівнює Q, то тривалість циклу витрачання запасу становить $\frac{Q}{M}$, а середні за одиницю часу адміністративні витрати становлять $\frac{K \cdot M}{Q}$ г.о. Середня величина запасу на складі дорівнює $\frac{Q}{2}$, тому середні змінні витрати на зберігання запасу на одиницю часу становлять $\frac{hQ}{2}$. Таким чином, загальні середні витрати за одиницю часу становлять $G = \frac{KM}{Q} + \frac{hQ}{2}$. Знайдемо величину Q партії постачання на склад, що мінімізує запас. Для цього знайдемо критичні точки функції $G(Q)$:

$$G'(Q) = -\frac{KM}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow Q = Q^* = \sqrt{\frac{2KM}{h}}.$$

При всіх можливих значеннях Q, у тому числі і Q^*, друга похідна $G''(Q) = \frac{2KM}{Q^3} > 0$, тому при $Q = Q^*$ функція $G(Q)$ досягає мінімуму. Отже, отримали величину партії постачання, при якій середні витрати зберігання запасу на складі є мінімальними:

$$Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}. \qquad (4.2)$$

Формулу (4.2) називають *формулою Вілсона*. При цьому мінімальна величина середніх витрат $G_{\min} = \sqrt{2KMh}$.

З формули (4.2) можна отримати критерій оптимальності обсягу партії постачання: розмір партії постачання є оптимальним тоді і лише тоді, коли на протязі циклу зберігання адміністративні витрати дорівнюють змінним витратам на зберігання запасу. Дійсно, при оптимальному розмірі партії постачання $Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$ адміністративні витрати за цикл дорівнюють K, а змінні витрати на зберігання запасу за цикл дорівнюють

$$\frac{hQ}{2} \cdot \frac{Q}{M} = \frac{hQ^2}{2M} = \frac{h \cdot 2KM}{h \cdot 2M} = K.$$

Навпаки, з умови рівності адміністративних та змінних витрат на зберігання запасу отримуємо:

$$K = h \cdot \frac{Q}{M} \cdot \frac{Q}{2} = \frac{hQ^2}{2M} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}},$$

тобто величину партії постачання, що співпадає з отриманою за формулою Вілсона.

Приклад 4.3. На склад цемент надходить у баржі по 1500 т. Адміністративні витрати дорівнюють 2000 г.о. Змінні витрати зберігання цементу оцінюються в 0,1 г.о. за добу на 1 т цементу. Кожної доби склад відпускає 50 т цементу. Знайти витрати на зберігання цементу на протязі циклу зберігання. Визначити оптимальний обсяг партії постачання.

Розв'язання. Середній обсяг цементу, що зберігається на складі, дорівнює $\frac{1500}{2} = 750$ т. Отже, середні змінні витрати на зберігання цементу за добу становлять $750 \cdot 0{,}1 = 75$ г.о. Тривалість циклу складає $\frac{1500}{50} = 30$ днів. Отже, змінні витрати зберігання за цикл складають $75 \cdot 30 = 2250$ г.о. З врахуванням адміністративних витрат отримуємо, що загальні витрати зберігання запасу за цикл становлять 2000+2250=4250 (г.о.)

Оптимальний обсяг партії постачання розрахуємо за формулою Вілсона:

$$Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 50}{0{,}1}} \approx 1420 \text{ т.}$$

4.2. Оптимізація функцій кількох змінних

У економічних дослідженнях задачі оптимізації функцій кількох змінних – це задачі, у яких потрібно визначити, для яких значень аргументу функції, що моделюють певні економічні величини (прибуток, витрати, обсяг виробництва, корисність тощо), досягають екстремальних значень. Найчастіше це задачі на умовний екстремум. Прикладом такої задачі є задача оптимізації вибору споживача.

Будемо вважати, що ціна *i*-го товару дорівнює p_i, вектор цін $\overline{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$, а доход споживача, який він може витратити на придбання товарів, дорівнює Q. На придбання набору товарів $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ він може витратити кошти, що дорівнюють $p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i = \overline{P} \cdot \overline{X}$. Отже, споживач може придбати лише такий набір товарів, для якого виконується нерівність $\overline{P} \cdot \overline{X} \le Q$. Множину таких наборів називають *бюджетною множиною B*. Бюджетна множина B є замкненою та обмеженою. *Межею бюджетної множини* називають множину $G = \left\{ \overline{X} \in B : \overline{P} \cdot \overline{X} = Q \right\}$. Межа G є відрізком на площині у випадку двох товарів, площиною у просторі для трьох товарів, гіперплощиною у просторі *n* товарів.

Споживач, маючи доход, бажає його витрати з максимальною корисністю для себе, тобто перед ним виникає задача максимізації функції корисності. Йому потрібно визначити набір товарів $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який максимізує його функцію корисності $u(\bar{X}) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ при виконанні бюджетного обмеження $\bar{P} \cdot \bar{X} \le Q$. Отже, маємо екстремальну задачу у *n*-вимірному просторі:

$$\begin{cases} u(\bar{X}) \to \max, \\ \bar{X} \in B(\bar{P}, Q). \end{cases} \tag{4.3}$$

Оскільки $u(\bar{X})$ є неперервною функцією, визначеною на замкненій обмеженій бюджетній множині *B*, то вона досягає на ній максимуму, тобто розв'язок задачі (5.3) існує. При цьому будь-яка точка $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, на якій функція корисності досягає максимуму, лежить на межі *G* бюджетної множини. Дійсно, допустимо, що деяка точка максимуму *Z* не лежить на межі бюджетної множини *G*. Тоді $\bar{P} \cdot \bar{Z} < Q$. У цьому випадку у споживача залишається невикористаною сума коштів $Q - \bar{P} \cdot \bar{Z}$ і на неї можна придбати додаткові товари, тобто отримати новий набір товар, у якому кількості товарів є більшими, ніж у X^*. Для цього набору значення функції корисності буде більшим, ніж для набору *Z*. Отримали протиріччя з твердженням, що *Z* – точка максимуму на бюджетній множині.

Теорема. Якщо функція $u(\bar{X})$ є строго опуклою вгору на бюджетній множині *B*, то на цій множині існує єдина точка максимуму. З курсу математичного аналізу згадаємо, що функція *n* змінних $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ є строго опуклою вгору на деякій множині, якщо для будь-яких точок *X* та *Y* цієї множини та для будь-якої сталої $0 < \lambda < 1$ $u(\lambda \bar{X} + (1-\lambda)\bar{Y}) > \lambda u(\bar{X}) + (1-\lambda) u(\bar{Y})$.

Доведення. Нехай *A* та *C* – дві точки максимуму, тобто $u(X) \le u(A) = u(C)$ для будь-якої точки *X* бюджетної множини *B*. Точки *A* та *C* є точками максимуму, тому вони розташовані на межі бюджетної множини: $\bar{P} \cdot \bar{A} = \bar{P} \cdot \bar{C} = Q$. Розглянемо точку *E*, таку, що $\bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{C})$. Тоді $\bar{P} \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \bar{P} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) = \frac{Q}{2} + \frac{Q}{2} = Q$. Отже, $E \in B$. На цій множині функція $u(X)$ є строго опуклою вгору, отже, $u(E) > u(A) = u(C)$. Отримали протиріччя з тим, що точки *A* та *C* є точками максимуму функції $u(X)$, яке доводить теорему.

Отже, якщо функція корисності споживача строго опукла вгору, то у бюджетній множині існує її єдина точка максимуму, тобто єдиний набір товарів, що максимізує корисність для споживача. Цю єдину точку максимуму X^* називають *точкою попиту* споживача.

Ми з'ясували, що точка попиту лежить на межі бюджетної множини. Отже, для знаходження цієї точки отримуємо задачу дослідження функції багатьох змінних на екстремум за наявності обмеження у формі рівності, тобто задачу Лагранжа:

$$\begin{cases} u(X) \to \max, \\ \bar{P} \cdot \bar{X} = Q. \end{cases} \tag{4.4}$$

Розв'яжемо цю задачу методом Лагранжа. Складемо функцію Лагранжа

$$L(X,\lambda) = u(X) + \lambda\left(Q - \bar{P} \cdot \bar{X}\right).$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму функції кількох змінних, знайдемо частинні похідні функції Лагранжа та прирівняємо їх до нуля. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\, i = 1,2,...,n, \\ \bar{P} \cdot \bar{X} = Q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i,\, i = 1,2,...,n \\ \bar{P} \cdot \bar{X} = Q. \end{cases} \tag{5.5}$$

З останньої системи випливає, що точка попиту лежить на межі бюджетної множини і у цій точці вектор граничних корисностей $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ пропорційний вектору цін $\bar{P}$, тобто у точці попиту відношення граничної корисності будь-якого товару з набору до ціни цього товару є сталою величиною. Отже, взаємозамінними є кількості товарів, що мають однакову ціну. Споживачу невигідно споживати один товар замість іншого, що має таку ж ціну, і змінювати структуру споживання, оскільки така зміна може лише погіршити корисність для нього товарів з набору.

Приклад 4.4. Знайти точку попиту споживача з функцією корисності $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$, .якщо доход споживача, який він може витратити на товари набору, дорівнює Q, а вектор цін товарів набору $\bar{P} = (p_1, p_2)$.

Розв'язання. Частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$. Запишемо систему рівнянь (5.5):

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} : \dfrac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 x_1 = p_2 x_2, \\ 2 p_1 x_1 = Q. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{p_1}{p_2} x_1, \\ x_1 = \dfrac{Q}{2p_1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{Q}{2p_1}, \\ x_2 = \dfrac{Q}{2p_2}. \end{cases}$$

4.3. Оптимізація виробничої програми підприємства

Розглянемо задачу про оптимізацію виробничої програми підприємства, що при виробництві товару витрачає n видів ресурсів і виробнича функція підприємства має вигляд: $y = F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, де y – обсяг виробництва товару, x_i – обсяг витрат i-го ресурсу.

Раніше у п. 3.4 розглянуто випадок, коли підприємство виробляє один товар. Було показано, що збільшувати обсяг виробництва доцільно доти, поки не буде досягнута рівність доходу від реалізації додаткової одиниці продукції та витрат на придбання потрібного для цього ресурсу, тобто при оптимальному обсягу виробництва граничний доход підприємства дорівнює його граничним витратам. Аналогічний результат отримуємо, якщо виробнича функція підприємства є функцією кількох змінних. Будемо вважати, що виробнича функція підприємства $y = F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ є неперервно диференційовною, її частинні похідні є невід'ємними у її області визначення, а функція є опуклою вгору у цій області.

Нехай $\overline{P} = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ – вектор цін на ресурси, v – ціна одиниці товару, що випускається на підприємстві, всі ціни вважаються сталими. Прибуток підприємства W є функцією витрат ресурсів $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, при цьому маємо:

$$W\left(X\right) = vy - \overline{P} \cdot \overline{X} = vF\left(X\right) - \overline{P} \cdot \overline{X} .$$

Отже, отримуємо задачу оптимізації функції кількох змінних:

$$\begin{cases} W\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to \max, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{4.6}$$

Використавши необхідну умову екстремуму функції кількох змінних (рівність нулю її частинних похідних), отримуємо:

$$v\frac{\partial F}{\partial x_i} = p_i,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{4.7}$$

Точка $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, координати якої визначаємо з системи (4.7), є стаціонарною точкою функції прибутку. Оскільки виробнича функція опукла вгору на своїй області визначення, опуклою вгору є й функція прибутку (додавання до функції лінійної функції $\overline{P} \cdot \overline{X}$ не змінює характеру її опуклості), тому знайдена стаціонарна точка X^* функції прибутку є її точкою максимуму. Координати цієї точки визначають кількість ресурсів, потрібних для виробництва оптимального обсягу продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Для задачі оптимізації виробничої функції кількох змінних вектор частинних похідних $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$, тобто вектор-градієнт виробничої функції називають *граничним вектором-продуктом* або *вектором граничних продуктів*. Цей вектор відображає реакцію об'єму виробництва товару на зміну витрат ресурсів. З співвідношення (5.7) випливає, що у оптимальній точці вектор граничних продуктів пропорціональний вектору цін, причому коефіцієнтом пропорційності є ціна одиниці продукції. Оптимальний розв'язок (5.7) єдиний для всіх додатних значень цін на ресурси $p_i, i = 1, 2, ..., n$ та ціни v на одиницю товару. Таким чином, отримуємо вектор-функцію $X^* = X^*(v, \bar{P})$. Цю функцію називають *функцією попиту на ресурси* з боку підприємства у залежності від цін на них та ціни на товар, що виробляє це підприємство. Якщо ці ціни відомі, виробник за функцією попиту на ресурси визначає обсяг необхідних для виробництва ресурсів, а підставивши ці значення у виробничу функцію, знаходить оптимальний обсяг виробництва, що забезпечує максимальний прибуток.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 4

1. Сформулюйте необхідні та достатні умови екстремуму для функцій однієї змінної.
2. Сформулюйте необхідні та достатні умови екстремуму для функцій кількох змінних.
3. Сформулюйте задачу Лагранжа на умовний екстремум.
4. Наведіть загальний вигляд функції Лагранжа.
5. Наведіть формулу Вілсона.
6. Як визначають функцію попиту на ресурс та функцію пропозиції товару для підприємства?
7. Вкажіть, що є елементами вектора граничних продуктів.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 4

1. Підприємство працює на двох ринках. Функції попиту (залежності ціни від попиту) для кожного з них мають вигляд: $P_1 = 500 - Q_1$, $P_2 = 360 - 1,5Q_2$. Сумарна функція витрат має вигляд: $C = 50000 + 20Q$. Запропонуйте цінову політику підприємства (які ціни воно повинно встановити для першого та другого ринків), щоб його прибуток був максимальним.
2. Фірма виробляє два види товарів, A_1 та A_2, і продає їх по ціні 1000 г.о. та 800 г.о. відповідно. Функція витрат має вигляд: $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$, де Q_1 та Q_2 позначають відповідно обсяги виробництва товарів, відповідно A_1 та A_2. Знайдіть значення Q_1 та Q_2, при яких фірма отримуватиме максимальний прибуток.
3. Нехай виробнича функція деякого підприємства має вигляд: $Q = F(K, L) = 4K \cdot L + L^2$. Нехай витрати на одиницю капіталу (K) та одиницю праці (L) становлять відповідно 1 г.о. та 2 г.о. Визначте величину витрат на капітал та працю при максимальному обсязі виробництва продукції, якщо загальна сума витрат становить 105 г.о.

4. У невеликій теплиці щодня збирають врожай огірків y, що залежить від кількості робітників x: $y = 4\sqrt{x} + 4\ln x$. Знайдіть оптимальну кількість робітників, якщо денна заробітна плата робітника дорівнює ціні 4 кг огірків.
5. Знайдіть функцію попиту на ресурс та функцію пропозиції продукції підприємства з виробничою функцією $y = v\ln(x+1)$, де y – обсяг виробництва, x – витрати ресурсу, v – вартість одиниці продукції, р – ціна одиниці ресурсу, $p < v$.
6. Апельсини привозять у магазин на машині. Постійні витрати у розрахунку на одну поїздку складають 50 г.о. Щодобово магазин продає 2 т апельсинів. Витрати на зберігання складають 0,2 г.о. за 1 кг апельсинів за добу. За формулою Вілсона розрахуйте оптимальний розмір партії постачання апельсинів, знайдіть періодичність їх постачання у магазин, середні щодобові витрати. Підрахуйте ці витрати при розмірах партії постачання 2 т та 0,5 т.
7. При цінах $\overline{P} = (p_1, p_2)$ та доході Q знайдіть точку попиту для функції корисності $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.
8. Підприємство за місяць виробляє продукції на 10 млн. г.о., його основні фонди коштують також 10 млн. г.о. Економісти підрахували, що для збільшення обсягу виробництва на 1 млн. г.о. необхідно придбати обладнання на 3 млн. г.о. Відомо, що виробнича функція підприємства є функцією Кобба-Дугласа при $\alpha + \beta = 1$, чисельність робітників дорівнює 1000 осіб. Знайдіть виробничу функцію підприємства.
9. Основні фонди фермерського господарства коштують 10 млн. г.о. На ньому працюють 9 робітників. Для збільшення доходу фермер запросив у господарство ще одного працівника і побачив, що його доход збільшився на 8% і склав 13 млн. г.о. Виробництво сільськогосподарської продукції у цьому господарстві описується виробничою функцією Кобба-Дугласа при $\alpha + \beta = 1$. Знайдіть цю функцію.
10. Підприємець вирішив створити невелике автотранспортне підприємство з надання послуг населенню. Ознайомившись зі статистичними даними, він побачив, що приблизна залежність щоденної виручки від кількості автомобілів A та кількості працівників N виражається формулою $Y = 90000 \cdot A^{1/2} \cdot N^{1/4}$. Амортизаційні та інші витрати на один автомобіль становлять 40000 г.о., щоденна зарплата працівникам становить 10000 г.о. Знайдіть оптимальну кількість працівників та автомобілів.

Змістовий модуль 5. Диференціальні моделі у економічних дослідженнях

Мета вивчення змістового модуля 5: набуття студентами знання про методи побудови диференціальних моделей економічних процесів та їх застосуванні у економічних дослідженнях.

План

1. Диференціальна модель насичення ринку.
2. Модель природного зростання виробництва продукції.
3. Моделі динаміки ринкової ціни та виробничих фондів.
4. Модель економічного зростання Солоу

Ключові терміни та поняття: логістична крива, модель Золотаса, рівняння Ферхюльста-Перла, модуль Солоу

5.1. Диференціальна модель насичення ринку

Побудуємо модель насичення ринку продукцією деякого підприємства. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва цієї продукції у момент часу t. Будемо вважати, що зі збільшенням виробництва відбувається насичення ринку цією продукцією і її ціна $p(y)$ зменшується за лінійним законом:

$$p(y) = b - ay,\ a > 0, b > 0.$$

Швидкість зміни обсягів виробництва прямо пропорційна доходу підприємства від реалізації виробленої продукції з коефіцієнтом пропорційності k:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot p(y) \cdot y = k(b - ay)y. \qquad (5.1)$$

Розв’яжемо це диференціальне рівняння, розділивши змінні:

$$\frac{dy}{y(b - ay)} = k \cdot dt.$$

Інтегруючи ліву частину цього рівняння за змінною *y*, а праву – за змінною t, отримаємо:

$$y(t) = \frac{b \cdot Ce^{bkt}}{a\left(Ce^{bkt} - 1\right)}.$$

Графіком отриманої функції $y(t)$ є так звана *логістична крива*. При $t \to +\infty$ $y(t) \to \frac{b}{a}$.

Модель (6.1) є диференціальною, оскільки вона виражається диференціальним рівнянням. До диференціальної моделі виду (6.1) зводиться *модель Золотаса* динаміки рівня суспільного добробуту, яка описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dW}{dy} = kW\left(A - W\right), \tag{5.2}$$

де W – рівень суспільного добробуту, $k > 0$, $A > 0$ – відомі сталі, y – доход на душу населення. Рівняння (6.2) називають *рівнянням Ферхюльста-Перла*. Його розв'язком є логістична крива $W\left(y\right) = \dfrac{A}{1 + Be^{-Aky}}$, де B – стала інтегрування, яка визначається з початкової умови $W(0) = W_0$.

5.2. Модель природного зростання виробництва продукції

Побудуємо модель динаміки виробництва деякого виду продукції, що продається на ринку за фіксованою ціною p. Нехай $q(t)$ – кількість продукції, реалізованої на ринку на момент часу t. Тоді на цей момент величина доходу підприємства складає $p \cdot q(t)$.Частина цього доходу, $J(t) = mpq(t)$ витрачається на модернізацію та розширення виробництва ($m = \text{const}$ – норма інвестицій, $0 < m < 1$). Якщо вироблена продукція реалізується повністю, то внаслідок розширення виробництва буде отримано приріст доходу, частина якого знову буде спрямована на розширення виробництва. Нехай швидкість зміни обсягу виробництва прямо пропорційна збільшенню інвестицій. Тоді для знаходження $q(t)$ отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dq}{dt} = \alpha \cdot J\left(t\right) = \alpha \cdot mp \cdot q\left(t\right), \tag{5.3}$$

де $\alpha = \text{const}$ – коефіцієнт пропорціональності, $k = \alpha \cdot m \cdot p$ – стала величина. Розділивши у отриманому рівнянні змінні, знаходимо: $\dfrac{dq}{q} = \alpha \cdot dt$. Звідси після інтегрування отримуємо: $q\left(t\right) = Ce^{kt}$, де C – стала інтегрування. Її визначають з початкової умови: $q(0) = q_0$. Звідси знаходимо, що $q\left(t\right) = q_0 e^{kt}$.

Отже, застосування диференціальної моделі природного зростання виробництва продукції зводиться до інтегрування звичайного диференціального рівняння, у якому можна поділити змінні. Під природним зростанням тут розуміємо збільшення масштабу виробництва за рахунок прибутку від реалізації товару, що виробляться.

5.3. Моделі динаміки ринкової ціни та виробничих фондів

У моделі динаміки ринкової ціни товару встановлюється зв'язок між зміною ціни $p(t)$ та незадоволеним попитом $d(p)-s(p)$, $d(p)=a-bp$ – величина попиту, $s(p)=\alpha+\beta p$ – величина пропозиції товару за ціною $p(t)$, $a>0$, $b>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ – відомі сталі. Вважається, що швидкість зміни ціни пропорційна незадоволеному попиту з коефіцієнтом пропорційності $k>0$:

$$\frac{dp}{dt}=k\cdot\left(d(p)-s(p)\right).$$

Підставивши у цей вираз лінійні залежності для попиту $d(p)$ та пропозиції $s(p)$, отримаємо звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dp}{dt}+k(b+\beta)p=k(a-\alpha).$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$p(t)=C\cdot e^{-k(b+\beta)t}+\frac{a-\alpha}{b+\beta}.$$

При $t\to\infty$ $p(t)\to\dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$.

Отримаємо диференціальну модель динаміки основних виробничих фондів на підприємстві. Нехай K – вартість основних виробничих фондів підприємства, μ – коефіцієнт їхнього вибуття, тобто за рік фонди зменшуються на величину μK. Вважаючи, що вибуття виробничих фондів відбувається рівномірно, отримаємо, що за час Δt вони зменшаться на величину $\mu K\cdot\Delta t$. Сталі інвестиції у обсязі J за рік збільшують за час Δt величину фондів на $\rho J\cdot\Delta t$, де $\rho=\text{const}$. Отже, отримуємо рівність:

$$K(t+\Delta t)=K(t)-\mu K\cdot\Delta t+\rho J\cdot\Delta t,$$

звідки

$$\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=\rho J-\mu K.$$

Перейшовши у останній рівності до границі при $\Delta t\to 0$, отримуємо звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $K(t)$:

$$\frac{dK}{dt}=\rho J-\mu K.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$K(t)=C\cdot e^{-\mu t}+\frac{\rho J}{\mu}, \tag{5.4}$$

де C – стала інтегрування. Рівність (6.4) характеризує динаміку основних виробничих фондів підприємства. Сталу C визначають з початкової умови

$K(0)=K_0$. Тоді $C=K_0-\dfrac{\rho J}{\mu}$ і рівність (6.4) набуває вигляду:

$$K(t)=\left(K_0-\frac{\rho J}{\mu}\right)\cdot e^{-\mu t}+\frac{\rho J}{\mu}.$$

5.4. Модель економічного зростання Солоу

Нехай $X=F(K,L)$ – виробнича функція деякої економічної системи, X – обсяг виробництва, K – вартість основних виробничих фондів, L – витрати на оплату праці. Далі розглянемо випадок, коли виробнича функція є функцією Кобба – Дугласа: $X=K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}$.

У *моделі Солоу* вважається, що швидкість зміни факторів виробництва K та L має вигляд:

$$\begin{cases}\dfrac{dK}{dt}=s\cdot X,\\[2mm] \dfrac{dL}{dt}=\lambda\cdot L,\end{cases} \tag{5.5}$$

де s – частка накопичення у доході X від реалізованої продукції, λ – темп зростання оплати праці.

Нехай $k=\dfrac{K}{L}$. Тоді виробнича функція Кобба-Дугласа набуває вигляду:

$$X=K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}=L\cdot\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=L\cdot k^{\alpha}. \tag{5.6}$$

Підставивши (5.6) у перше з рівнянь системи (6.5), отримаємо:

$$\frac{dK}{dt}=s\cdot L\cdot k^{\alpha}.$$

Враховуючи, що $K=kL$, з останнього рівняння з врахуванням другого рівняння системи (5.5), знаходимо:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{d(k\cdot L)}{dt}=L\frac{dk}{dt}+k\frac{dL}{dt}=L\frac{dk}{dt}+k\cdot\lambda L.$$

Звідси отримуємо, що $\dfrac{dK}{dt}=s\cdot L\cdot k^{\alpha}=L\dfrac{dk}{dt}+k\lambda L$ або

$$\frac{dk}{dt}+\lambda k=s\cdot k^{\alpha}. \tag{5.7}$$

Рівняння (5.7) є рівнянням Бернуллі. Інтегруючи його за допомогою підстановки $k=u(t)\cdot v(t)$, знаходимо загальний розв’язок (5.7) у вигляді

$$k(t)=e^{-\lambda t}\left(\frac{s}{\lambda}e^{\lambda(1-\alpha)t}+C_1\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\frac{K(t)}{L(t)}.$$

Отже, знайдено відношення факторів виробництва у момент часу t. Сталу інтегрування C_1 визначають з початкової умови $k(0)=\dfrac{K(0)}{L(0)}=k_0$.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 5

1. Вкажіть, які математичні моделі називають диференціальними.
2. Надайте означення диференціального рівняння.
3. Вкажіть основні типи диференціальних рівнянь першого порядку.
4. Наведіть приклади лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.
5. У чому полягає модель насичення ринку товаром?
6. Наведіть рівняння логістичної кривої.
7. Що описує модель Золотаса?
8. Наведіть рівняння Ферхюльста-Перла.
9. У чому полягає модель природного зростання виробництва продукції?
10. Охарактеризуйте сутність диференціальної моделі динаміки ринкової ціни.
11. Поясніть, для чого використовують диференціальну модель динаміки основних виробничих фондів.
12. Висвітліть сутності моделі Солоу.
13. Вкажіть основні припущення моделі Солоу.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 5

1. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва продукції деякого підприємства. Залежність ціни товару від обсягу виробництва має вигляд: $p(y)=b-ay$, $a>0$, $b>0$. Швидкість зростання обсягу виробництва є зростаючою функцією прибутку. Валові виробничі витрати описуються залежністю $c(y)=\alpha y+\beta$, $\alpha>0$, $\beta>0$. Побудуйте диференціальну модель для знаходження залежності обсягу виробництва продукції від часу t. Знайдіть функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=-2$.

2. Знайдіть функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=-1$ і при $y=2$ ціна $p=10$.

3. Знайдіть функцію, що має сталу еластичність k.

4. Знайдіть функцію попиту $y=y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=\dfrac{y-100}{y}$, $p=10$ при $y=90$, $0<y<100$.

5. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу у кожний даний момент часу пропорційна його фактичній вартості $A(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $k=\text{const}$. Початкова вартість обладнання $A(0)=A_0$.

Визначте фактичну вартість обладнання у момент часу t.

6. Знайдіть обсяг реалізованої продукції за час $t=10$ днів, якщо модель зростання обсягів реалізації в умовах конкурентного ринку має вигляд: $\dfrac{dy}{dt}=y(2-y)$, $y(0)=1$.
7. Швидкість зростання інвестиційного капіталу у момент часу t пропорційна величині капіталу з коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює процентній ставці r. Знайдіть закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції.
8. Ціна товару $p(t)$ є функцією часу, функції попиту d та пропозиції s лінійно залежать від ціни, швидкості її зміни $p'(t)$ та темпу $p''(t)$. При цьому $d(p)=p''-p'-2p+480$, $s(p)=2p''+3p'+3p+80$. Знайдіть динаміку зміни ціни $p(t)$ в умовах ринкової рівноваги $\left(d(p)=s(p)\right)$, якщо у початковий момент часу $t=0$ ціна товару дорівнювала 120 г.о., а швидкість її зміни дорівнювала 40.

Змістовий модуль 6. Різницеві моделі у економічних дослідженнях

Мета вивчення змістового модуля 6: оволодіти студентом апарату різницевих рівнянь та використанням його у економічним дослідженням

План

1. Основні поняття теорії різницевих рівнянь.
2. Динамічна модель Леонтьєва.
3. Модель Самуельсона-Хікса.

Ключові терміни та поняття: різницевий оператор, різницеве рівняння, лінійне різницеве рівняння, порядок різницевого рівняння, динамічна модель Леонтьєва, модель Самуельсона-Хікса.

6.1. Основні поняття теорії різницевих рівнянь

Різницевим оператором Δ називають оператор, що переводить послідовність x_n у послідовність y_n за правилом

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n,\ n = 1, 2, \dots . \qquad (6.1)$$

Вираз Δx_n називають *різницею першого порядку*.

Різницевим рівнянням називають рівняння, що містить невідому послідовність та її різниці. *Розв'язком різницевого рівняння* називають будь-яку послідовність, при підстановці якої у різницеве рівняння для довільного натурального n отримуємо тотожність.

Різницею другого порядку називають вираз

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n . \qquad (6.2)$$

Оскільки $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$, то

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n . \qquad (6.3)$$

За індукцією можна визначити *різницю* m*-го порядку*:

$$\Delta^m x_n = \Delta^{m-1} x_{n+1} - \Delta^{m-1} x_n . \qquad (6.4)$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести формулу:

$$\Delta^m x_n = \sum_{k=0}^{m} \left(-1\right)^{m-k} C_m^k x_{n+k} . \qquad (6.5)$$

Виконується також рівність:

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \Delta^k x_n . \qquad (6.6)$$

У формулах (6.12) та (6.13) $C_m^k = \dfrac{m!}{k!\left(m-k\right)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

Лінійним різницевим рівнянням називають рівняння виду

$$a_0(n)\Delta^m x_n + a_1(n)\Delta^{m-1}x_n + ... + a_m(n)x_n = f(n), \qquad (6.7)$$

де x_n – невідома послідовність, $a_0, a_1, ..., a_m, f$ – задані функції натурального аргументу n. Число m (старший порядок різниці) називають *порядком різницевого рівняння*. Використовуючи формулу (6.5), лінійне різницеве рівняння можна записати у вигляді:

$$c_0(n)x_{n+m} + c_1(n)x_{n+m-1} + ... + c_m(n)x_n = f(n). \qquad (6.8)$$

Якщо $f(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ то рівняння (6.7) або (6.8) називають *лінійним однорідним різницевим рівнянням* m*-го порядку*.

Розглянемо різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+1} + a \cdot y_n = b, \qquad (6.9)$$

де y_n, y_{n+1} – члени невідомої числової послідовності.

Різницеві рівняння є дискретним аналогом диференціальних рівнянь, тому математичні моделі, у яких використовуються різницеві рівняння, відносяться до дискретних моделей. Методи розв’язання лінійних різницевих рівнянь аналогічні методам розв’язання лінійних диференціальних рівнянь.

Загальний розв’язок рівняння (6.9) будемо шукати у вигляді: $y_n = y_n^\circ + y_n^*$, де y_n° – загальний розв’язок відповідного однорідного різницевого рівняння $f(n) = 0$, y_n^* – частинний розв’язок заданого неоднорідного різницевого рівняння.

Загальний розв’язок однорідного рівняння y_n° шукаємо у вигляді: $y_n^\circ = C \cdot \lambda^n$, де C – довільна стала. Підставивши y_n° у рівняння $y_{n+1} + a \cdot y_n = 0$, знаходимо:

$$C \cdot \left(\lambda^{n+1} + a \cdot \lambda^n\right) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -a.$$

Тут λ фактично є коренем характеристичного рівняння $\lambda + a = 0$, отриманого аналогічно такому рівнянню для диференціального рівняння $y' + ay = 0$ (у різницевому рівнянні y_{n+m} замінюємо на λ^m). Отже, $y_n^\circ = C \cdot (-a)^n$.

Частинний розв’язок y_n^* неоднорідного різницевого рівняння (6.9) шукаємо за виглядом його правої частини $f(n)$. Оскільки у даному випадку $f(n) = b = \text{const}$, то $y_n^* = A = \text{const}$. Знайдемо сталу A, підставивши $y_n^* = A$ у рівняння. Маємо:

$$A + a \cdot A = b \Rightarrow A = \frac{b}{1+a} = y_n^*.$$

Таким чином, ми отримали розв’язок різницевого рівняння (6.9) у вигляді:

$$y_n = y_n^\circ + y_n^* = C \cdot (-a)^n + \frac{b}{1+a}.$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що має вигляд:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = b. \qquad (6.10)$$

Тут p, q та b – задані сталі.

Структура загального розв'язку рівняння (6.10) також визначається рівністю $y_n = y_n^\circ + y_n^*$. Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Можливими є наступні випадки.

1. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_n^\circ = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$.

2. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, причому $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_n^o = \left(C_1 n + C_2\right) \cdot \lambda^n$.

3. Корені характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді маємо:

$$y_n^\circ = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^n \left(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi\right),\ \varphi = \arg\left(\lambda_2\right).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.10) у відповідності до його правої частини шукаємо у вигляді: $y_n^* = B = \mathrm{const}$. Підставивши y_n^* у рівняння, знаходимо: $B + pB + qB = b$, звідки $B = \dfrac{b}{1 + p + q}$. Отже, розв'язком рівняння (6.10) є послідовність $y_n = y_n^\circ + \dfrac{b}{1 + p + q}$, де y_n° визначається у залежності від вигляду коренів характеристичного рівняння.

Прикладом економіко-математичної моделі, що приводиться до розв'язання лінійного різницевого рівняння, є так звана *павутиноподібна модель ринку*.

Нехай деяке виробниче підприємство визначає пропозицію свого товару у поточному періоді на основі цін, що склалися у попередньому періоді: $s_n = s\left(p_{n-1}\right)$. Попит на товар залежить від ціни товару у поточному періоді: $d_n = d\left(p_n\right)$. Будемо вважати функції попиту та пропозиції лінійними, тобто

$$s_n = m + l \cdot p_{n-1},\ d_n = a - b \cdot p_n,\ a > m > 0,\ l > 0,\ b > 0.$$

Знайдемо ціну рівноваги з умови $d_n = s_n$. Тоді $a - b \cdot p_n = m + l \cdot p_{n-1}$. Замінивши номер ($n-1$)-го члена послідовності на n, отримуємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку відносно ціни p_n:

$$b \cdot p_{n+1} + l \cdot p_n = a - m.$$

Розв'язком цього лінійного різницевого рівняння є послідовність

$$p_n = C \cdot \left(-\frac{l}{b}\right)^n + \frac{a - m}{b + l}.$$

З отриманого розв'язку випливає, що при $l < b$ $p_n \to p_0 = \dfrac{a - m}{b + l}$, якщо $n \to \infty$. Це значення p_0 є ціною рівноваги для даного товару. Якщо $l > b$, то з часом ціна p_n буде віддалятися від ціни рівноваги p_0. Для випадку $l = b$ спостерігаємо циклічні коливання ціни p_n у n-му періоді часу відносно значення p_0.

Лінійною називають систему різницевих рівнянь відносно m невідомих послідовностей $x_{1,n}$, $x_{2,n},\ldots,x_{m,n}$ (n – номер члена послідовності):

$$\begin{cases} x_{1,n+1}=a_{11}x_{1,n}+a_{12}x_{2,n}+\ldots+a_{1m}x_{m,n}+f_1(n), \\ x_{2,n+1}=a_{21}x_{1,n}+a_{22}x_{2,n}+\ldots+a_{2m}x_{m,n}+f_2(n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m,n+1}=a_{m1}x_{1,n}+a_{m2}x_{2,n}+\ldots+a_{mm}x_{m,n}+f_m(n). \end{cases} \tag{6.11}$$

Перейдемо до матричних позначень:

$$X_n=\begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \ldots \\ x_{m,n} \end{pmatrix},\ B_n=\begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_m(n) \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (6.18) можна записати у матричній формі:

$$X_{n+1}=A\cdot X_n+B_n. \tag{6.12}$$

Загальний розв'язок системи (6.19) будемо шукати у вигляді: $X_n=X_n^o+\tilde{X}_n$, де X_n^o – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $\tilde{X}_n$ – частинний розв'язок (6.12). Для розв'язання лінійної однорідної системи різницевих рівнянь використовують *метод Ейлера*, згідно з яким фундаментальну систему розв'язків системи $X_{n+1}=A\cdot X_n$ шукають серед векторних послідовностей виду $X_n=D\cdot\lambda^n$, де D – деякий вектор. Підставивши $X_n=D\cdot\lambda^n$ у матричну рівність $X_{n+1}=A\cdot X_n$, отримуємо:

$$D\cdot\lambda^{n+1}=A\cdot D\cdot\lambda^n, \tag{6.13}$$

звідки знаходимо, що $A\cdot D=\lambda\cdot D$. Це означає, що векторна послідовність $X_n=D\cdot\lambda^n$ є розв'язком лінійної однорідної системи різницевих рівнянь $X_{n+1}=A\cdot X_n$ тоді і лише тоді, коли λ є власним значенням матриці A, а D – відповідним йому власним вектором.

Власні значення матриці A визначаються як корені многочлена $P(\lambda)=\det(A-\lambda E)$, де E – одинична матриця. Цей многочлен називають характеристичним многочленом для системи різницевих рівнянь (6.12), а рівняння $P(\lambda)=0$ – її характеристичним рівнянням.

Якщо всі власні значення $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ матриці A є дійсними і різними (всі корені характеристичного рівняння дійсні та прості), то фундаментальну систему розв'язків утворюють векторні послідовності $D_1\lambda_1^n$, $D_2\lambda_2^n$, …, $D_m\lambda_m^n$. Тут D_i – власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_i, $i=1,2,\ldots,m$. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи різницевих рівнянь у цьому випадку має вигляд:

$$X_n^\circ=C_1D_1\lambda_1^n+C_2D_2\lambda_2^n+\ldots+C_mD_m\lambda_m^n.$$

Отже, загальна схема розв'язання лінійні різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами аналогічна схемі розв'язання їх неперервних аналогів. Дискретні моделі широко використовуються при моделюванні економічної динаміки.

6.2. Динамічна модель Леонтьєва

У моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу $X = AX + Y$, розглянутій раніше, всі її елементи вважалися сталими, середніми за деякий період часу. На практиці обсяг виробництва у період часу $n+1$ визначається значеннями X_n та Y_n, що були досягнуті у періоді n. Тому розглядається динамічна модель Леонтьєва у вигляді:

$$X_{n+1} = AX_n + Y_n . \tag{6.13}$$

Матричне рівняння (6.13) є системою n лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Постановка задачі: для заданого вектора кінцевого споживання Y_n та матриці прямих витрат A визначити вектор валового виробництва X_n.

Приклад 6.1 Визначити вектор валового виробництва X_n у динамічній моделі Леонтьєва, якщо технологічна матриця $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$, вектор кінцевого споживання $Y_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок системи $X_{n+1} = AX_n + Y_n$ лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді $X_n = X_n^{\circ} + X_n^{*}$, де X_n° – загальний розв'язок однорідної системи, X_n^{*} – частинний розв'язок заданої системи. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0,2-\lambda & 0,3 \\ 0,3 & 0,2-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Його корені $\lambda_1 = -0,1$, $\lambda_2 = 0,5$. Знайдемо відповідні власні вектори. При $\lambda_1 = -0,1$ отримуємо рівняння для координат α_1 та α_2 власного вектора:

$$0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0 ,$$

звідки $\alpha_1 = -\alpha_2$, наприклад, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$.

Для $\lambda_2 = 0,5$ маємо:

$$-0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0 .$$

Звідси отримуємо $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Отже, власні вектори $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$X_n^{\circ} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n ,$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі.

Частинний розв’язок заданої системи будемо шукати за виглядом правої частини цієї системи: $X_n^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n$, $X_{n+1}^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1}$. Підставивши ці вирази у задану неоднорідну систему, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n + \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + 1 \\ 0,3\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 1 \end{pmatrix} \cdot 2^n .$$

Після скорочення обох частин цієї рівності на 2^n, отримуємо систему рівнянь відносно α_1 та α_2:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 0,2\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + 1, \\ 2\alpha_2 = 0,3\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,8\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = -1, \\ 0,3\alpha_1 - 1,8\alpha_2 = -1. \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{3}.$$

Отже, $X_n^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 2^n$, загальний розв’язок системи (вектор валового виробництва) X_n у розглянутій динамічній моделі Леонтьєва матиме вигляд:

$$X_n = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 2^n .$$

Значення сталих C_1 та C_2 можна знайти, знаючи вектор валового виробництва у перші два роки.

6.3. Модель Самуельсона-Хікса

Модель Самуельсона-Хікса – це динамічна модель, у якій економічний цикл розглядається як наслідок взаємодії національного доходу, споживання та накопичення капіталу. Основне припущення моделі полягає у тому, що попит d у момент часу $t = n + 1$ лінійно залежить від величини національного доходу y у попередній момент часу $t = n$:

$$d_{n+1} = ay_n + b .$$

Модель Самуельсона-Хікса можна подати у вигляді лінійного неоднорідного різницевого рівняння другого порядку

$$y_{n+2} = (a + \alpha) y_{n+1} - \alpha y_n + b , \tag{6.14}$$

де $\alpha > 0$ – акселератор або темп приросту капіталомісткості національного доходу.

Загальний розв’язок рівняння (6.14) будемо шукати у вигляді суми частинного розв’язку y_n^* неоднорідного рівняння та загального розв’язку y_n° відповідного однорідного рівняння: $y_n = y_n^\circ + y_n^*$. Частинний розв’язок (6.15) шукаємо у вигляді сталої $y_n^* = A$, яку визначаємо шляхом підстановки у рівняння:

$$A-(a+\alpha)A+\alpha A-b=0.$$

Звідси знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.14):

$$y_n^* = \frac{b}{1-a}.$$

Характеристичне рівняння для (6.14) має вигляд:

$$\lambda^2-(a+\alpha)\lambda+\alpha=0.$$

Вигляд розв'язку однорідного рівняння залежить від знаку дискримінанта для характеристичного рівняння.

Приклад 6.2 Використовуючи модель Самуельсона-Хікса, визначити динаміку зростання національного доходу y_n, якщо для даної національної економіки параметри моделі $a=\alpha=0{,}5; b=5$, у початкові періоди часу $n=0$ та $n=1$ національний доход становив відповідно $y_0=10$ г.о., $y_1=20$ г.о.

Розв'язання. Підставивши параметри моделі у різницеве рівняння (6.14), отримаємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+2}-y_{n+1}+0{,}5y_n=5.$$

Запишемо та розв'яжемо відповідне характеристичне квадратне рівняння:

$$\lambda^2-\lambda+0{,}5=0.$$

Його дискримінант дорівнює $-1<0$, рівняння має пару комплексних коренів

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}.\ \lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{i}{2},\ |\lambda_2|=|\lambda_1|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \arg\lambda_2=\frac{\pi}{4},$$

тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y_n^\circ=(|\lambda_2|)^n\left(C_1\cos(n\arg\lambda_2)+C_2\sin(n\arg\lambda_2)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді невідомої константи: $y_n^*=A$. Підставивши цю сталу у рівняння, отримаємо:

$$A-A+0{,}5A=5\Rightarrow A=10=y_n^*.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_n=y_n^\circ+y_n^*=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right)+5.$$

Значення сталих C_1 та C_2 знайдемо, використовуючи початкові умови $y_0=10$, $y_1=20$. При $n=0$ та $n=1$ відповідно отримуємо:

$$y_0=C_1+5=10\Rightarrow C_1=5,\ y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5\cos\frac{\pi}{4}+C_2\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}+\frac{C_2}{2}=20\Rightarrow C_2=35.$$

Отже, вираз для залежності величини національного доходу y_n від часу n

, що моделює динаміку національного доходу, має вигляд:

$$y_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(5\cos\frac{n\pi}{4} + 35\sin\frac{n\pi}{4}\right) + 5.$$

Розглянута дискретна модель Самуельсона-Хокса використовується при досліджені динаміки національної економічної системи за відомих їх параметрів.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 6

4. Наведіть означення різниць першого, другого та m-го порядків.
5. Наведіть означення різницевого рівняння.
6. Наведіть загальний вигляд лінійного різницевого рівняння.
4. Надайте означення порядку різницевого рівняння.
5. Які лінійні різницеві рівняння називають однорідними?
6. Наведіть характеристичне рівняння для загального вигляду лінійного різницевого рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
7. Поясніть зміст павутиноподібної моделі ринку.
8. Вкажіть, у чому полягає метод Ейлера розв’язання систем лінійних різницевих рівнянь.
9. Висвітліть зміст динамічної моделі Леонтьєва.
10. Розкрийте сутності моделі Самуельсона-Хікса.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 6

1. Записавши різницеве рівняння для геометричної прогресії, знайдіть формулу її загального члена b_n.
2. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.
3. Числа Фібоначчі визначаються співвідношенням $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = x_2 = 1$. Знайдіть формулу n-го члена послідовності.
4. Розв’яжіть рівняння $2y_n - y_{n+1} = 1 + 2n - n^2$, $y_1 = 1$.
5. Знайдіть загальний розв’язок системи різницевих рівнянь:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

6. Зростання процентного депозиту з регулярними щорічними внесками A та річною ставкою p, де $0 < p < 1$, описується різницевим рівнянням $x_{n+1} = (1+p)x_n + A$. Знайдіть суму депозиту x_n у момент часу n, якщо початковий внесок дорівнював x_0 г.о.
7. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначите динаміку ціни p_n та дослідите її поведінку при $n \to \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p: а) $d(p_n) = 11 - p_n$,

$s(p_{n-1}) = 1 + 4p_{n-1}$, $p = 2$; б) $d(p_n) = 5 - 1{,}2p_n$, $s(p_{n-1}) = 1 + 0{,}8p_{n-1}$, $p = 4$.

8. Знайдіть динаміку зростання національного доходу за моделлю Самуельсона-Хікса $y_{n+2} = (a+\alpha)y_{n+1} - \alpha y_n + b$, якщо: а) $a = \alpha = 0{,}5$; $b = 8$; $y_0 = 5$ г.о., $y_1 = 6$ г.о.; б) $a = 0{,}5$; $\alpha = 3$; $b = 0$; $y_0 = 10$ г.о., $y_1 = 12$ г.о.

Змістовий модуль 7. Сутність економіко-математичного моделювання

Мета вивчення змістового модуля 7: сформувати у студентів знання про сутність економіко-математичного моделювання, його призначення та особливості застосування.

План

1. Процес економіко-математичного моделювання.
2. Поняття складної системи
3. Поняття імітаційного моделювання
4. Стохастичні методи економіко-математичного моделювання

Ключові терміни та поняття: математична модель, економіко-математична модель, екзогенна змінна, ендогенна змінна, детерміновані моделі, стохастичні моделі, оптимізаційна модель, метод Монте-Карло.

7.1. Процес економіко-математичного моделювання

Оскільки при прийнятті рішень у економіці можливості проведення експериментів є обмеженими, то важливим методом розробки таких рішень та дослідження економічних систем є економіко-математичне моделювання. *Економіко-математичне моделювання* – це процес побудови математичних моделей економічних систем, процесів та явищ. *Модель* – це об’єкт, що заміщує оригінал та відображає найбільш важливі для даного дослідження властивості оригіналу. Модель, що є сукупністю математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей тощо), називають *математичною.*

Процес побудови економіко-математичної моделі є послідовністю наступних етапів.

1) Формулювання предмета та мети дослідження.
2) Виділення елементів об’єкта, важливих для досягнення мети дослідження.
3) Вербальний (словесний) опис взаємозв’язків між виділеними елементами об’єкта моделювання.
4) Введення символічних позначень для врахованих характеристик об’єкта моделювання, формулювання взаємозв’язків між ними у вигляді математичних співвідношень.
5) Проведення розрахунків за побудованою математичною моделлю та аналіз отриманого розв’язку.

Слід розрізняти математичну структуру моделі та її змістовну інтерпретацію. Математична структура моделі складається з введених змінних та параметрів, що відображають елементи дослідження, а також рівнянь та нерівностей, що відображають зв’язки між ними.

У моделі розрізняють *екзогенні та ендогенні змінні*. Значення екзогенних змінних є заданими, значення ендогенних змінних визначають у ході розрахунків за моделлю.

Математичні моделі різних економічних об’єктів та процесів можуть мати однакову математичну структуру, але при цьому різну економічну інтерпретацію.

Існують різні системи класифікації економіко-математичних моделей. За типами об’єктів, що моделюються, розрізняють макроекономічні та мікроекономічні моделі. *Макроекономічні моделі* описують економіку як єдине ціле, пов’язуючи між собою показники, що характеризують її стан: валовий внутрішній продукт, інвестиції, споживання, зайнятість, обсяг грошової маси тощо. *Мікроекономічні моделі* описують взаємодію структурних та функціональних складових економіки та їх поведінку на ринку. Основним об’єктом мікроекономічного моделювання є підприємство.

З точки зору врахування зміни економічних систем у часі розрізняють *статичні та динамічні моделі*. У статичних моделях розглядають стан об’єкта у конкретний момент часу, тут змінні моделі не залежать від часу. У динамічних моделях вони є функціями часу.

З точки зору врахування дії випадкових факторів розрізняють *детерміновані та стохастичні моделі*. У детермінованих моделях зв’язки між змінними розглядаються як функціональні. Стохастичні моделі передбачають наявність дії випадкових факторів на показники, що досліджуються. У таких моделях використовують апарат теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів.

Оптимізаційні моделі передбачають побудову цільової функції, що відображає результат діяльності економічної системи та дослідження цієї функції на екстремум з врахуванням обмежень, накладених на цю систему.

7.2. Поняття складної системи

Одним з важливих завдань сучасної науки є розробка та впровадження у практику методів дослідження динаміки функціонування складних систем. До таких систем відносять великі виробничі енергетичні, гідротехнічні комплекси з автоматизованим керуванням, комп’ютерні комплекси, що є засобами керування такими системами, а також різноманітні соціально-економічні та біологічні системи. Суттєву роль у таких дослідженнях відіграють загальносистемні питання, що відносяться до загальної структури системи, організації взаємозв’язків між її елементами, взаємодії елементів системи з її зовнішнім середовищем, керування діяльністю її елементів тощо. Ці питання складають сутність системного підходу до вивчення властивостей реальних складних об’єктів.

На сьогодні не існує загальноприйнятого означення складної системи. Віднесення певного об’єкту моделювання до категорії складних систем значною мірою залежить від мети та задач його моделювання. Надалі будемо вважати об’єкт моделювання *складною системою*, якщо його властивості та особливості задач, що виникають при моделюванні цього об’єкту, вимагають дослідження цього об’єкту як системи з великою кількістю елементів, що взаємопов’язані та взаємодіють між собою, а також забезпечують виконання нею деякої достатньо складної функції.

Сукупність деяких взаємопов’язаних елементів, що входять до складу системи, утворює її *підсистему*. Підсистеми є деякими частинами системи, що можуть функціонувати самостійно. Наприклад, у системі виробничого підприємства окремий цех можна розглядати як підсистему.

Функціонування складної системи здійснюється під впливом підсистеми керування. Під *керуванням системою* розуміють цілеспрямований вплив на неї, що здійснюється з метою її певної зміни або підтримки у існуючому стані. Цей вплив здійснюється підсистемою керування.

Характерною рисою складної системи є її взаємодія з зовнішнім середовищем та функціонування в умовах дії випадкових зовнішніх факторів.

Отже, надалі складною системою будемо називати систему, що здійснює деяку складну функцію, та до складу якої входить велика кількість елементів.

Серед задач, що виникають у зв’язку з моделюванням складних систем, можна виокремити два основні класи: 1) задачі аналізу, пов’язані з дослідженням властивостей та поведінки системи у залежності від її структури та значень параметрів; 2) задачі синтезу, що зводяться до вибору структури та значень параметрів у залежності від заданих властивостей системи.

Типовими задачами математичного моделювання складних систем можуть бути пошук оптимальних або близьких до оптимальних розв’язків задач підвищення їх ефективності, визначення їх характеристик та властивостей, а також встановлення взаємозв’язків між елементами системи.

При проектуванні складних систем, їх модернізації, а також при визначенні оптимальних режимів експлуатації, задачі аналізу розглядають як задачі оцінки можливих варіантів системи. Для кожного з них обчислюють систему показників, що характеризують властивості системи (ефективність, надійність тощо). Порівнюючи ці характеристики, вибирають оптимальний варіант для проектування системи.

Якість функціонування складної системи визначають з допомогою її показників ефективності. *Показником ефективності* складної системи називають її числову характеристику, що відображає ступінь пристосованості системи до виконання поставлених перед нею задач. Без визначення показника ефективності складної системи неможливо чітко визначити її мету та задачі. При цьому вибір показника ефективності суттєво впливає на інтерпретацію властивостей системи та результатів її дослідження.

Нехай складною системою є деякий виробничий процес. За показник ефективності цієї системи можна вибрати її продуктивність, тобто кількість виробів, виготовлених за одиницю часу. Оцінюючи якість виробничого процесу на основ цього критерію, ми будемо приділяти основну увагу факторам, що сприяють досягненню максимальної продуктивності. При цьому недостатня увага буде приділятися таким характеристикам виробничого процесу як витрати енергії та матеріалів, витрати на заробітну платню, якість продукції тощо. Аналогічна ситуація має місце і для інших показників ефективності. Цей приклад свідчить, що вибір показника ефективності функціонування системи суттєво впливає на формування його цілей та задач.

Для того, щоб показник ефективності достатньо повно відображав якість роботи системи, він повинен враховувати її основні особливості та властивості, умови її діяльності та взаємодію з зовнішнім середовищем. Отже, він повинен залежати від структури системи, значень її параметрів, характеру взаємодії з зовнішнім середовищем, тобто вибір показника ефективності визначається характером діяльності системи. Тому показник ефективності складної системи можна розглядати як функціонал, визначений на множині всіх можливих процесів її функціонування.

У зв'язку з тим, що складні системи функціонують в умовах впливу випадкових факторів, значення таких функціоналів виявляються випадковими величинами. Тому при виборі показників ефективності використовують їх середні значення (математичні сподівання): середня кількість виробів за одиницю часу, середня тривалість поїздки, середній час очікування у черзі. Інколи за показник ефективності обирають ймовірність деякої події, наприклад, ймовірність успішної посадки літака.

Крім показників ефективності, при описанні роботи складної системи використовують і інші показники, що характеризують її властивості: надійність, якість керування тощо.

Розглянемо побудову показника, що характеризує надійність діяльності системи. Звичайно у теорії надійності таким показником є середній час безвідмовної роботи системи або ймовірність безвідмовної роботи системи на протязі деякого заданого часу. Проте для багатьох складних систем відмова окремого елемента ще не означає зупинки роботи системи у цілому, вона спричиняє лише зниження ефективності її роботи.

Постановка задачі про оцінку надійності складної системи зводиться до наступного. Вважаються відомими показники, що описують інтенсивність відмов окремих елементів складної системи: середня кількість відмов за одиницю часу, закон розподілу проміжків часу між послідовними відмовами. Ці характеристики визначаються експериментально. Нехай за показник ефективності складної системи вибрано деякий функціонал R. Його значення залежить не лише від структури та параметрів системи, але й від показників надійності її окремих елементів.

Нехай R_1 – значення показника ефективності для випадку, коли відмови елементів мають інтенсивності, що відповідають заданим характеристикам, R_2 – для випадку відсутності відмов елементів. Тоді за показник надійності даної системи можна вибрати величину $\Delta R = \left| R_1 - R_2 \right|$, що показує, наскільки зменшується ефективність системи внаслідок можливих відмов її елементів, у порівнянні з ефективністю ідеальної системи, елементи якої є абсолютно надійними.

Для розрахунку показників надійності, крім характеристик інтенсивності відмов елементів, задаються також характеристики витрат часу на відновлення їх працездатності.

7.3. Поняття імітаційного моделювання

Для дослідження поведінки реальних систем широко застосовують статистичне або імітаційне моделювання Застосування методів імітаційного моделювання дозволяє отримати інформацію про поведінку системи шляхом створення її комп’ютеризованої моделі. Статистичне моделювання дозволяє оцінити функціональні характеристики системи, що є об’єктом моделювання. Воно застосовується у різних галузях науки та техніки. Прикладами задач, що розв’язують з допомогою статистичного моделювання, є наступні задачі.

1) Обчислення кратних інтегралів;
2) Обчислення констант;
3) Обернення матриць;
4) Дослідження процесів дифузії;
5) Проектування систем масового обслуговування, зв’язку, управління запасами;
6) Аналіз хімічних процесів;
7) Оцінка поведінки споживачів, визначення цін, прогнозування діяльності підприємств;

8) Дослідження динаміки демографічних процесів, впливу екології на здоров'я людини;
9) Задачі біології та медицини;
10) Дослідження військової стратегії та тактики.

Сутність статистичного моделювання полягає у імітації випадкових величин та випадкових процесів та ґрунтується на використанні випадкових вибірок. Замість аналітичного описання складної системи тут використовують імітацію випадкового процесу з використанням випадкових чисел. У результаті кожного разу отримуємо нову, відмінну від попередньої, реалізацію випадкового процесу. Ці реалізації можна використати як статистичні дані. Потрібні характеристики системи отримуємо у результаті їх обробки методами математичної статистики.

Найпростішою формою методу статистичного моделювання є метод Монте-Карло. Розглянемо сутність цього методу на простому прикладі обчислення площі круга, обмеженого колом, рівняння якого має вигляд:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25.$$

Спочатку помістимо цей круг у квадрат зі стороною, що дорівнює діаметру круга, тобто 10 одиниць. Сторони квадрату дотикаються до кола. Нехай при киданні точки навмання у квадрат потрапляння у точки з різними координатами, розташованими всередині квадрату, є рівноймовірними подіями.

Нехай вибірка складається з n спостережень за точками квадрата, m з яких потрапили у круг. Тоді відношення площі круга до площі квадрату можна наближено оцінити як відношення $\frac{m}{n}$.

Координати x та y точок квадрату розглядаються як рівномірно розподілені випадкові величини з щільностями розподілу ймовірностей

$$f(x)=\frac{1}{10},\ -4\le x\le 6;\quad f(y)=\frac{1}{10},\ -3\le y\le 7.$$

Поза вказаними проміжками щільності розподілу ймовірностей дорівнюють нулю.

Нехай R_1 та R_2 – різні випадкові числа з відрізку $[0;1]$. Тоді координати (x,y) точок квадрату можна виразити через ці випадкові числа у наступному вигляді:

$$x=-4+\left(6-(-4)\right)R_1=-4+10R_1,$$

$$y=-3+\left(7-(-3)\right)R_2=-3+10R_2.$$

Використовуючи наведені вище формули, ми генеруємо випадково розподілені точки (x', y') квадрата для кожної пари випадкових чисел (R_1, R_2). Отримана точка (x', y') потрапляє всередину круга, якщо

$$(x'-1)^2 + (y'-2)^2 \le 25.$$

Наприклад, якщо $R_1 = 0,0589$ та $R_2 = 0,6733$, отримуємо:

$$x' = -4 + 10R_1 = -4 + 10 \cdot 0,0589 = -3,411,$$

$$y' = -3 + 10R_2 = -3 + 10 \cdot 0,6733 = 3,733.$$

Оскільки величина $(-3,411-1)^2 + (3,733-2)^2 = 22,46 < 25$, то точка (x', y') потрапляє всередину круга.

Оцінка площі круга покращується зі збільшенням кількості *n* генерованих точок (обсягу вибірки). Підвищити точність обчислення площі можна, здійснюючи її оцінку при *n* спостереженнях *N* разів, і прийнявши за наближене значення площі круга середню арифметичну *N* отриманих результатів. Точність цього наближення для площі круга збільшується зі збільшенням обсягу *n* вибірки.

Результати експерименту, пов'язаного з імітаційним моделюванням, необхідно отримати у вигляді довірчого інтервалу, що характеризує величину відхилення наближеного значення показника від його точного значення.

Нехай *A* – точне значення показника, що обчислюється, $\bar{A}$ та $\tilde{\sigma}^2$ – його середнє значення та вибіркова дисперсія при *N* спостереженнях. Тоді довірчий інтервал для А при довірчій ймовірності $1-\alpha$ має вигляд:

$$\bar{A} - \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}, N-1} \le A \le \bar{A} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}.$$

Тут $t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$ – точка t-розподілу Стьюдента, що відповідає рівню значимості α та кількості ступенів вільності *N*-1.

У розглянутому вище прикладі про площу круга при *n*=10000, *N*=10, $\bar{A} = 78,57\,\text{см}^2$, $\tilde{\sigma} = 0,47$ см^2 при $\alpha = 0,05$ довірчий інтервал для оцінки точного значення площі становить $78,23 \le A \le 78,9$. Зазначимо. що точне значення площі цього круга, округлене до 0,01, становить 78,54 см^2.

Отже, сутність методу Монте-Карло полягає у наступному. Для знаходження значення *a* деякої величини вибирають випадкову величину *X*, математичне сподівання якої *M(X)=a*. Здійснюють *n* випробувань, у результаті яких отримують *n* можливих значень *X*, далі обчислюють їх середню арифметичну $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ За оцінку наближеного значення a^* числа *a* вибирають $\bar{x}$.

Метод Монте-Карло називають також методом статистичних випробувань. Теорія цього методу визначає, як найбільш доцільно визначити випадкову величину *X*, як знайти її можливі значення та оцінити похибку методу.

Нехай для отримання оцінки a^* математичного сподівання *a* випадкової величини *X* було здійснено *n* незалежних випробувань (тобто розіграно *n* можливих значень *X*) і з їх результатами була знайдена вибіркова середня $\overline{x}$, прийнята у якості оцінки математичного сподівання, тобто $a^* = \overline{x}$. Розглянемо задачу знаходження верхньої межі δ похибки такої оцінки з заданою ймовірністю (надійністю) γ:

$$P\left(\left|\overline{x} - a\right| \le \delta\right) = \gamma. \tag{7.1}$$

Тут маємо визначити точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності за вибірковою середньою з допомогою довірчих інтервалів. Ця задача розглядається у математичній статистиці. Використаємо отримані там результати, а саме розглянемо три можливі випадки.

1. Випадкова величина *X* має нормальний закон розподілу і її середнє квадратичне відхилення σ відоме. У цьому випадку з надійністю γ верхня межа похибки

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \tag{7.2}$$

де *n* – кількість випробувань (розіграних значень *X*), *t* – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, для якого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, σ – відоме середнє квадратичне відхилення *X*.

Приклад 7.1. З надійністю $\gamma = 0{,}95$ знайти верхню межу похибки δ, якщо для оцінки математичного сподівання випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0{,}5$, було розіграно 100 можливих значень *X*.

Розв'язання. Маємо *n*=100, $\sigma = 0{,}5$, $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. За таблицею значень функції Лапласа знаходимо *t*=1,96. Отже, за формулою (7.2) верхня межа похибки $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}098$.

2. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом, її середнє квадратичне відхилення невідоме. У цьому випадку з надійністю γ верхня межа похибки визначається за формулою

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}. \tag{7.3}$$

У формулі (4.3*)* *n* – кількість випробувань, *s* – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}. \tag{7.4}$$

Значення t_γ знаходять за статистичною таблицею значень цього показника.

Приклад 7.2. З надійністю $\gamma = 0,95$ знайти верхню межу похибки δ, якщо для оцінки математичного сподівання величини X, розподіленої за нормальним законом, було розіграно 100 її можливих значень і за ними знайдено виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення *s*=0,5.

Розв'язання. За умовою*, n*=100, *s*=0,5. Використавши статистичну таблицю значень t_γ, знаходимо, що при $\gamma = 0,95$, *n*=100 $t_\gamma = 1,984$. Отже, $\delta = \frac{1,984 \cdot 0,5}{\sqrt{100}} = 0,099$.

3. Випадкова величина X розподілена за законом, що відрізняється від нормального. У цьому випадку при достатньо великій кількості випробувань $\left(n > 30\right)$ з надійністю, що наближено дорівнює γ, верхню межу похибки δ можна обчислити за формулою (7.2), якщо середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X* відоме.

Якщо величина σ є невідомою, то у формулу (7.2) замість нього можна підставити його оцінку s, або використати формулу (7.3). Зі зростанням *n* різниця між результатами, отриманими за цими формулами зменшується, оскільки при $n \to \infty$ розподіл Стьюдента наближається до нормального розподілу.

Для того, щоб знайти найменше число випробувань, яке забезпечить наперед задану верхню межу похибки δ, потрібно виразити *n* з формул (7.2) або (7.3). Отримаємо:

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} \text{ (формула (5.2)),}$$

$$n = \frac{t_\gamma^2 \cdot s^2}{\delta^2} \text{ (формула (5.3)).} \tag{7.5}$$

Перша з цих формул отримана з формули (7.2), друга з формул з (7.3). Ці формули на практиці використовують для знаходження необхідної кількості випробувань.

7.4. Стохастичні методи економіко-математичного моделювання

Розглянемо особливості застосування методу Монте-Карло до проєктування систем масового обслуговування. Розглянемо спочатку основні поняття теорії масового обслуговування.

Послідовність подій, що з'являються у випадкові моменти часу, називають *потоком подій.* Прикладами потоку подій є надходження викликів до «Швидкої допомоги», прихід клієнтів у перукарню, послідовність відмов елементів приладу тощо.

До основних властивостей потоків подій відносять стаціонарність, відсутність післядії та ординарність. Властивість *стаціонарності* полягає у тому, що ймовірність появи k подій на будь-якому проміжку часу залежить лише від числа k та тривалості t проміжку часу. Властивість *ординарності* означає, що за нескінченно малий проміжок часу може з'явитися не більше однієї події. *Відсутність післядії* означає взаємну незалежність появ певного числа подій у проміжки часу, що не перетинаються між собою. Потік подій, що має властивості стаціонарності, ординарності та відсутності після дії називають *найпростішим* або *пуассонівським потоком*.

Інтенсивністю λ *потоку подій* називають середню кількість подій, що з'являються за одиницю часу. Ймовірність появи k подій у найпростішого потоку за час t визначають за *формулою Пуассона*:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \tag{7.6}$$

Розглянемо систему масового обслуговування, що складається з N каналів з відмовами (заявка покидає таку систему, якщо всі канали виявляться зайнятими). На неї надходить найпростіший потік заявок. Відома щільність розподілу інтервалу часу τ між двома послідовними заявками:

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \lambda > 0, \tau > 0. \tag{7.7}$$

Щільність (6.2) – щільність для показникового закону розподілу.

Кожна заявка надходить до першого каналу обслуговування. Якщо він вільний, то він обслуговує заявку, інакше заявка надходить на другий канал та обслуговується ним, якщо він вільний, інакше переодить до третього каналу і так далі. Якщо всі канали виявляться зайнятими, заявка отримує відмову.

Здійснюється підрахунок кількості виконаних заявок та кількості відмов.

Нехай потрібно знайти математичне сподівання кількості виконаних заявок та кількості відмов за певний час T. Для розв'язання цієї задачі виконують n випробувань, кожне тривалістю T. У кожному випробуванні визначається кількість виконаних заявок та кількість відмов.

Нехай t_0 – тривалість обслуговування каналом заявки, t_i – момент звільнення *i*-го каналу, T_k – момент надходження *k*-ої заявки, τ_k – проміжок часу між надходженнями *k*-ої та *k*+1-ої заявок, $T_{k+1} = T_k + \tau_k$ – момент надходження *k*+1-ої заявки, *n* – кількість випробувань.

Нехай перша заявка надійшла у момент часу $T_1 = 0$, коли всі канали вільні. Вона надходить до першого каналу і обслуговується ним за час t_0.

Змоделюємо момент T_2 надходження другої заявки. Для цього виберемо випадкове число r_1 та розіграємо значення τ_1, враховуючи показниковий закон розподілу випадкової величини з щільністю $f(\tau)$. Для цього випадку отримуємо:

$$\tau_1 = -\frac{\ln r_1}{\lambda}. \tag{7.8}$$

Отже, друга заявка надійде у момент часу $T_2 = T_1 + \tau_1 = 0 + \tau_1 = \tau_1$. Якщо виявиться, що $t_1 \le T_2$, тобто друга заявка надійшла після того, як звільнився перший канал, то він задовольняє другу заявку і у лічильник виконаних заявок додається одиниця. Якщо $t_1 > T_2$, то перший канал зайнятий і заявка надходить до другого каналу і виконується ним, оскільки розрахунок почався з припущенням, що всі канали вільні. У лічильник виконаних заявок додається одиниця.

Якщо у деякий момент часу всі канали виявилися зайнятими, то заявка отримує відмову і у лічильник відмов додається одиниця.

Випробування закінчується, якщо чергова заявка надійде у момент часу, що перевищує момент закінчення випробування, тобто, якщо $T_{k+1} > T$.

У результаті і-го випробування у лічильниках виявиться $n_{1,i}$ виконаних заявок та $n_{2,i}$ відмов. Оцінками математичних сподівань виконаних заявок та відмов є вибіркові середні:

$$\bar{n}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{1,i}}{n}, \bar{n}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{2,i}}{n}. \tag{7.9}$$

Для знаходження найменшої кількості випробувань, яка з надійністю γ забезпечує задану верхню межу похибки δ, використовують формулу:

$$n = \frac{z^2\sigma^2}{\delta^2}. \tag{7.10}$$

Тут значення параметра *z* визначають з рівності $\Phi(z) = \frac{\gamma}{2}, \sigma = \frac{1}{\lambda}$.

Розглянемо один зі способів обчислення визначених інтегралів за допомогою імітаційного моделювання – метод осереднення підінтегральної функції.

Нехай потрібно наближено обчислити визначений інтеграл

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (7.11)$$

Розглянемо випадкову величину *X*, розподілену рівномірно на інтервалі інтегрування $(a;b)$ з щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in (a;b), \\ 0, & x \notin (a;b). \end{cases}$$

Тоді математичне сподівання функції випадкової величини *X*

$$M(\varphi(x)) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (7.12)$$

Звідси знаходимо:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = (b-a)M(\varphi(x)). \qquad (7.13)$$

Замінимо математичне сподівання $M(\varphi(x))$ його оцінкою – вибірковою середньою і отримаємо наближене значення інтегралу у вигляді:

$$I^* = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i), \qquad (7.14)$$

де x_i – можливі значення випадкової величини *X*, $x_i = a + (b-a)r_i$, r_i – випадкові числа.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 7

1. Поясніть сутність економіко-математичного моделювання.
2. Вкажіть види економіко-математичних моделей.
3. Розкрийте зміст поняття складної системи.
4. Наведіть приклади складних систем.
5. Надайте означення математичної моделі.
6. Вкажіть етапи процесу побудови економіко-математичної моделі.
7. Наведіть приклади статичними та динамічними моделями.
8. Наведіть означення стохастичної моделі.
9. Розкрийте зміст поняття оптимізаційної моделі.
10. Наведіть приклади складних систем.
11. Надайте означення показника ефективності систем.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 7

1. У деякій галузі 4 підприємства випускають 3 види продукції. У матриці $A(4\times 3)$ задано обсяги виробництва продукції на кожному заводі у першому кварталі, у матриці $B(4\times 3)$ – у другому кварталі. Знайдіть: а) обсяги виробництва продукції кожного виду за перше півріччя; б) приріст обсягів виробництва продукції у першому кварталі порівняно з другим кварталом, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Підприємство виробляє 3 види продукції. Його виробнича програма характеризується вектором $A=\begin{pmatrix}100 & 200 & 100\end{pmatrix}$. Ціна реалізації одиниці продукції i-го типу у j-му регіоні задана матрицею $B(3\times 4)$, де b_{ij} – ціна реалізації продукції i-го типу у j-му регіоні. Знайдіть матрицю C виручки підприємства по регіонам, якщо

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Підприємство виробляє 3 типи продукції, використовуючи 4 види ресурсів. Норми витрат i-го типу ресурсів на виробництво одиниці j-го виду продукції задані у матриці витрат $A(4\times 3)$. Вектор X визначає обсяги виробництва продукції кожного типу. Визначіть матрицю S повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}100 & 80 & 110\end{pmatrix}.$$

4. Для виробництва 4 видів продукції підприємство використовує 3 види ресурсів. Витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, запас ресурсів кожного виду та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду наведені у таблиці. Побудуйте економіко-математичну модель для розробки оптимального плану виробництва продукції.

Ресурси	Витрати ресурсів на одиницю продукції				Запас ресурсів
	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4	
Сировина	3	5	2	4	60
Робочий час	22	14	18	30	400
Час роботи обладнання	10	14	8	16	128
Прибуток, у.г.о.	30	25	8	16	

5. На двох автоматичних лініях виготовляють вироби трьох типів, дані про які наведено у таблиці. Побудуйте математичну модель завантаження автоматичних ліній, що мінімізує загальні витрати. План повинен бути виконаний не пізніше, ніж за 15 діб.

Виріб	Продуктивність лінії, од./добу		Витрати на роботу ліній, у.г.о./добу		План, од.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

6. На обробку надійшла партія з 150 дошок, довжина кожної з яких дорівнює 7,5м, для виготовлення комплектів з 4 дошок. Кожний комплект складається з 1 дошки довжиною 3м, 2 дошок довжиною 2м та 1 дошки довжиною 1,5м. Складіть план розпилювання дошок, що максимізує кількість їх комплектів.

Змістовий модуль 8. Макроекономічні виробничі функції

Мета вивчення змістового модуля 8: надати студентам знання про сутність, призначення та методи побудови виробничих функцій, їх застосування для моделювання виробничих процесів.

План

1. Поняття виробничої функції.
2. Характеристики виробничої функції
3. Однорідні виробничі функції.
4. Виробничі функції зі сталою еластичністю.

Ключові терміни та поняття: виробнича функція, неокласична виробнича функція, мультиплікативна виробнича функція, граничні норми зміщення, еластичність виробничої функції, ізокванта, ізокліналь.

8.1. Поняття виробничої функції

Виробничою функцією називають функцію, що встановлює взаємозв'язок між факторами виробництва (працею та капіталом) та його результатом на певному рівні економічної діяльності (підприємство, ринок, галузь, економіка).

Нехай X – обсяг виробництва у економічній системі, що є об'єктом дослідження, K – основний капітал (інвестиції у засоби виробництва), L – витрати праці. Діяльність цієї економічної системи можна описати з допомогою виробничої функції $X = F\left(K, L\right)$, яка у загальному випадку є нелінійною.

Виробничу функцію $X = F\left(K, L\right)$ називають <u>*неокласичною*</u>, якщо вона є диференційовною та задовольняє наступні умови:

1) $F\left(0, L\right) = F\left(K, 0\right) = 0$ – при відсутності хоча б одного з факторів виробництва (праці чи капіталу) виробництво є неможливим;

2) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ – зростання обсягів виробництва супроводжується зростанням витрат ресурсів;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ – при збільшенні витрат ресурсів швидкість зростання виробництва сповільнюється;

4) $\lim\limits_{K \to +\infty} F\left(K, L\right) = \lim\limits_{L \to +\infty} F\left(K, L\right) = +\infty$ – при необмеженому зростанні одного з факторів виробництва обсяг виробництва необмежено зростає;

Виробничу функцію виду

$$X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} \qquad (8.1)$$

називають <u>*мультиплікативною виробничою функцією*</u>.

Коефіцієнт A у (3.1) називають <u>*коефіцієнтом нейтрального технічного прогресу*</u>, $\alpha_1 > 0$ та $\alpha_2 > 0$ – <u>*коефіцієнти еластичності відповідно за капіталом*</u> та <u>*за працею*</u>.

Окремим випадком мультиплікативної виробничої функції є виробнича функція Кобба-Дугласа:

$$X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \qquad (8.2)$$

Частинні похідні виробничої функції $X = F(K, L)$ за аргументами K та L називають *граничними ефективностями факторів виробництва*. Вони дорівнюють приросту обсягу виробництва на одиницю приросту відповідного фактора виробництва, капіталу (виробничих фондів) чи праці.

Частинна похідна $\dfrac{\partial F}{\partial K}$ – *гранична ефективність виробничих фондів* (*гранична фондовіддача*).

Частинна похідна $\dfrac{\partial F}{\partial L}$ – *гранична продуктивність праці*.

Для мультиплікативної виробничої функції гранична фондовіддача $\dfrac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2}$, середня фондовіддача $\dfrac{X}{K} = A \cdot K^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2}$. Таким чином, гранична фондовіддача пропорційна середній фондовіддачі з коефіцієнтом пропорційності α_1. Аналогічно можна показати, що гранична продуктивність праці пропорційна середній продуктивності праці з коефіцієнтом пропорційності α_2. Маємо:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_1 \frac{X}{L}. \qquad (8.3)$$

З рівностей (8.3) випливає, що при $\alpha_1 < 1,\ \alpha_2 < 1$ граничні віддачі факторів менші, ніж середні.

При $\alpha_1 < 1,\ \alpha_2 < 1$ для мультиплікативної виробничої функції виконується третя умова неокласичної функції: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, тобто зі зростанням витрат ресурсу його гранична віддача зменшується. Можна довести, що мультиплікативна виробнича функція має й інші властивості неокласичної функції, тобто вона є неокласичною.

Розглянемо економічну інтерпретацію параметрів A, α_1 та α_2 мультиплікативної виробничої функції (3.1). Коефіцієнт $A > 0$ нейтрального технічного прогресу залежить від рівня розвитку технологій у конкретній економічній системі. Коефіцієнт α_1 еластичності виробництва за капіталом показує на скільки відсотків зріс обсяг виробництва, якщо вартість виробничих фондів зросла на 1%, коефіцієнт α_2 еластичності виробництва за працею показує на скільки відсотків зріс обсяг виробництва, якщо вартість витрат на оплату праці зросла на 1%.

Для обчислення α_1 та α_2 можна використати формулу (8.2), згідно з якою маємо:

$$\alpha_1 = \frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln K))} = \alpha_K, \ \alpha_2 = \frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln L))} = \alpha_L.$$

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то зростання виробництва є інтенсивним, при $\alpha_1 < \alpha_2$ спостерігається екстенсивне зростання.

Розглянемо темп зростання обсягу виробництва у період часу $t+1$ порівняно з періодом часу t:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}.$$

Якщо піднести обидві частини цієї рівності до степеня $\dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, то будемо мати:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Ввівши позначення $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = 1 - \alpha$, отримаємо:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}. \tag{8.4}$$

У правій частині рівності (3.4) маємо зважену середню геометричну темпів зростання витрат ресурсів, де ваговими коефіцієнтами α та $1-\alpha$ є відносні коефіцієнти еластичності факторів $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$ та $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

При $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ обсяг виробництва зростає швидше, ніж у середньому зростають фактори виробництва:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} > \left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

тобто темп зростання виробництва більший, ніж середній темп зростання факторів. Отже, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ виробнича функція характеризує зростаючу економічну систему.

Ізоквантою виробничої функції $X = F(K, L)$ називають лінію рівня цієї функції на координатній площині OKL. Отже, рівняння ізокванти має вигляд:

$$F\left(K,L\right)=X_0=\text{const}.$$

Для мультиплікативної виробничої функції рівняння ізокванти має вигляд:

$$A\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2}=X_0=\text{const}.$$

Звідси знаходимо:

$$K^{\alpha_1}=\frac{X_0}{A\cdot L^{\alpha_2}}=\frac{X_0}{A}L^{-\alpha_2}\Rightarrow K=\left(\frac{X_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}L^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}=C\cdot L^{-\lambda},\ \lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Отримали рівняння гіперболи, асимптотами якої є осі координат.

Для різних значень K та L, розташованих на одній ізокванті, обсяг виробництва є сталим, тобто тут ресурси K та L заміняють один одного.

Оскільки на ізокванті $F\left(K,L\right)=X_0=\text{const}$, то на цій кривій маємо:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial K}dK+\frac{\partial F}{\partial L}dL=0. \qquad (8.5)$$

Частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial K}>0$, $\frac{\partial F}{\partial L}>0$, тому у рівності (8.5) диференціали dK та dL мають різні знаки. Якщо $dL<0$, тобто скорочуються витрати праці, то для збереження виробництва на сталому рівні потрібно, щоб витрати капіталу $dK>0$. Зменшення витрат праці на величину $\left|dL\right|$ повинно компенсуватися збільшенням інвестицій у виробничі фонди на величину $\left|dK\right|$.

8.2. Характеристики виробничої функції

Відношення модулів диференціалів факторів виробництва називають *граничною нормою заміщення* одного фактора іншим:

$$s_K=\frac{\left|dK\right|}{\left|dL\right|}=-\frac{dK}{dL}=\frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}$$ – гранична норма заміщення праці капіталом;

$$s_L=\frac{\left|dL\right|}{\left|dK\right|}=-\frac{dL}{dK}=\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}$$ – гранична норма заміщення капіталу працею.

При цьому $s_K\cdot s_L=1$.

Знайдемо граничні норми заміщення для мультиплікативної виробничої функції.

$$\frac{\partial F}{\partial L}=A\cdot K^{\alpha_1}\cdot\alpha_2\cdot L^{\alpha_2-1},\ \frac{\partial F}{\partial K}=A\cdot\alpha_1\cdot K^{\alpha_1-1}\cdot L^{\alpha_2}.$$

Тоді $s_K=\frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{K}{L}$, $s_L=\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{L}{K}$.

Лінії найбільшого зростання виробничої функції називають її *ізокліналями*. Оскільки напрям найбільшого зростання функції збігається з напрямом її градієнта, а градієнт функції є ортогональним до її ліній рівня, то ізоклінали виробничої функції є ортогональними до її ізоквант.

Градієнт виробничої функції $\operatorname{grad} X = \left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L} \right)$, то рівняння ізоклінали у диференціальній формі можна записати у вигляді:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}. \tag{8.6}$$

Знайдемо ізоклінали мультиплікативної виробничої функції. Підставивши вирази для частинних похідних

$$\frac{\partial F}{\partial L} = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot \alpha_2 \cdot L^{\alpha_2 - 1} = \alpha_2 \cdot \frac{X}{L}, \ \frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1 \cdot \frac{X}{K}$$

у (8.6), отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{K \cdot dK}{\alpha_1} = \frac{L \cdot dL}{\alpha_2}.$$

Інтегруючи ліву частину рівняння за змінною K, а праву частину – за змінною L, отримуємо рівняння ізокліналей у вигляді:

$$\frac{K^2}{2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{L^2}{2} + C \Leftrightarrow K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + a},$$

де $a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2$, (K_0, L_0) – координати точки, через яку проходить ізокліналь.

При $a = 0$ рівняння ізоклінали – це рівняння прямої $K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot L$.

Перейдемо у мультиплікативній виробничій функції до безрозмірних величин. Нехай X_0, K_0, L_0 – значення обсягу виробництва та витрат ресурсів (виробничих факторів) у базовому році. Тоді мультиплікативну виробничу функцію у відносних показниках можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{L}{L_0} \right)^{\alpha_2}. \tag{8.7}$$

Позначимо $\frac{X}{X_0} = \tilde{X}$, $\frac{K}{K_0} = \tilde{K}$, $\frac{L}{L_0} = \tilde{L}$. Тоді рівність (3.7) можна записати у вигляді:

$$\tilde{X} = \tilde{K}^{\alpha_1} \tilde{L}^{\alpha_2}. \tag{8.8}$$

Знайдемо ефективність економічної системи, діяльність якої описується виробничою функцією (8.8). Під *ефективністю* розуміють відношення результату до витрат, понесених на його отримання. У виробничій функції присутні два види витрат: витрати праці $\tilde{L}$ та витрати капіталу $\tilde{K}$. У відповідності з цим розрізняють два частинних показники ефективності: $\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}$ –

фондовіддача; $\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}$ *– продуктивність праці*.

Узагальненим показником економічної ефективності є зважена середня геометрична частинних показників, яку називають *коефіцієнтом економічної ефективності*:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \tag{8.9}$$

де $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $1-\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Вагові коефіцієнти α та $1-\alpha$ називають *відносними еластичностями*.

За допомогою коефіцієнта економічної ефективності виробничу функцію (8.8) можна записати у вигляді:

$$\tilde{X} = E \cdot \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \tag{8.10}$$

У (3.10) коефіцієнт E не є сталою величиною: $E = E\left(\tilde{K}, \tilde{L}\right)$.

Під *масштабом виробництва* M розуміють середню величину витрачених ресурсів:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \tag{8.11}$$

З (8.10) та (8.11) випливає, що обсяг виробництва $\tilde{X}$ дорівнює добутку коефіцієнта економічної ефективності на масштаб виробництва.

8.3. Однорідні виробничі функції.

Виробничу функцію $X = F(K, L)$ називають *однорідною виробничою функцією степеня* γ, якщо

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L). \tag{8.12}$$

Наприклад, мультиплікативна виробнича функція є однорідною виробничою функцією степеня $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$, оскільки

$$F(\lambda K, \lambda L) = A\lambda^{\alpha_1} K^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} L^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} F(K, L).$$

Отримаємо вираз для граничної норми s_K заміщення праці капіталом для однорідної виробничої функції. У цьому випадку $F(K, L) = L^{\gamma} \cdot F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^{\gamma} f(k)$, де $k = \frac{K}{L}$ – фондоозброєність, $f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$.

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial L}$ та $\frac{\partial F}{\partial K}$. Враховуючи, що $k = \frac{K}{L}$, знаходимо:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \gamma \cdot L^{\gamma-1} f(k) - L^{\gamma} f'(k) \cdot \frac{K}{L^2} = L^{\gamma-1}\left(\gamma f(k) - k \cdot f'(k)\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = L^{\gamma} \cdot f'(k) \cdot \frac{1}{L} = L^{\gamma-1} f'(k).$$

Отже, гранична норма заміщення праці капіталом має вигляд:

$$s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\gamma \cdot f(k)}{f'(k)} - k. \quad (8.13)$$

Таким чином, гранична норма s_K заміщення праці капіталом є функцією лише фондоозброєності.

Для однорідних виробничих функцій вводиться поняття еластичності заміщення праці капіталом:

$$\sigma_K = \frac{dk / k}{ds_K / s_K}. \quad (8.14)$$

Ця величина вказує, на скільки % потрібно змінити фондоозброєність, щоб досягти зміни граничної норми заміщення праці капіталом на 1%. Аналогічно вводиться поняття еластичності σ_L заміщення капіталу працею. Можна показати, що $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$.

Покажемо, що для мультиплікативних виробничих функцій $\sigma = 1$. У цьому випадку обсяг виробництва

$$X = F(K, L) = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \; \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}, \; s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k, \; k = \frac{K}{L}, \; \frac{ds_K}{dk} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\sigma_K = \frac{dk}{k} \cdot \frac{s_k}{ds_K} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1.$$

8.4. Виробничі функції зі сталою еластичністю

Виробничі функції, для яких еластичність заміщення є сталою ($\sigma = \text{const}$), називають CES-функціями.

Оскільки у цьому випадку $\sigma = \frac{dk / k}{ds / s} = \text{const}$, то маємо: $\frac{ds}{s} = \frac{dk}{\sigma \cdot k} \Rightarrow \ln s = \frac{1}{\sigma} \ln k + \ln C$. З останньої рівності знаходимо, що гранична норма заміщення у даному випадку має вигляд: $s = C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}}$, де C – стала.

Підставивши отриманий вираз для s у (8.13), знайдемо вираз для CES-функції. Маємо: $C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\gamma \cdot f(k)}{f'(k)} - k$. Звідси знаходимо, що $\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\gamma}{Ck^{\frac{1}{\sigma}} + k}$.

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, отримуємо (C_1 – стала інтегрування):

$$\ln f = \frac{\gamma\sigma}{\sigma - 1}\ln\left(C_1\left(C + k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)\right).$$

Звідси вираз для $f(k)$ має вигляд:

$$f(k) = C_1\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C\right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Враховуючи, що $k = \frac{K}{L}$, $f = \frac{X}{L^{\gamma}}$, знаходимо вираз для виробничої CES-функції у вигляді:

$$X = C_1\left(K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Ввівши позначення $\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$, $\frac{1}{C+1} = \alpha < 1$, $C_1(C+1)^{-\frac{1}{\rho}} = A$, отримуємо вираз для CES-функції через K та L у вигляді:

$$X = F(K, L) = A \cdot \left(\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (8.15)$$

При $\gamma = 1$ та $\sigma \to 1$ CES-функція прямує до виробничої функції Кобба-Дугласа.

Крім розглянутої мультиплікативної виробничої функції у економічних дослідженнях часто зустрічаються *лінійна виробнича функція* $X = A \cdot K + B \cdot L$, а також *виробнича функція типу «витрати-випуск»* $X = \min\left\{\frac{K}{A}, \frac{L}{B}\right\}$, де A та B – відомі константи.

Увівши у мультиплікативну виробничу функцію множник $e^{\lambda t}$, де λ – темп зростання функції за рахунок інтенсивних факторів (вдосконалення технології, підвищення кваліфікації працівників тощо), отримуємо *виробничу функцію Тінбергена*: $X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot e^{\lambda t}$. При дослідженнях впливу факторів виробництва на його обсяг зустрічаються також інші типи виробничих функцій.

Використавши апарат виробничих функцій, можна оцінити ефективність виробництва та вдосконалити процес планування виробничої діяльності.

Питання для самоконтролю до змістового модуля 8

1. Сформулюйте означення виробничої функції.
2. Вкажіть призначення виробничих функцій.
3. Наведіть означення неокласичних виробничих функцій.
4. Надайте означення мультиплікативної виробничої функції.
5. Запишіть виробничу функцію Кобба-Дугласа?
6. Розкрийте зміст граничних ефективності факторів виробництва?
7. Наведіть формули для обчислення граничної фондовіддачі та граничної

продуктивності праці.

8. Наведіть приклад виробничої функції, що характеризує зростаючу економічну систему.

9. Надайте означення ізокванти та ізокліналі.

10. Поясніть, як обчислюють граничну норму заміщення факторів виробництва.

11. Наведіть означення масштабу виробництва.

12. Поясніть, як обчислюють ефективність виробництва.

13. Наведіть приклад однорідної виробничої функції.

14. Надайте означення CES-функції.

15. Наведіть приклади нелінійних виробничих функцій.

Завдання для самоконтролю до змістового модуля 8

1. Для лінійної виробничої функції $X = a \cdot K + b \cdot L$, $a > 0$, $b > 0$ побудуйте ізоокванти й ізокліналі. Знайти норми заміщення праці капіталом s_K та капіталу працею s_L.

2. Визначити граничну фондовіддачу та граничну продуктивність праці у економічній системі, функціонування якої описується виробничою функцією $X = F(K, L) = 1500 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,7}$, якщо вартість основних виробничих фондів $K = 3200$ у.г.о., витрати на оплату праці $L = 1000$ у.г.о.

3. Для виробничої функції $X = 1200 \cdot K^{0,4} \cdot L^{0,6}$ визначити еластичність виробництва за працею та за капіталом.

4. Виробнича функція має вигляд: $X = 0,931 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594}$. За деякий період часу обсяг виробництва збільшився у 4,08 рази, основні виробничі фонди – у 6,62 рази, кількість працівників – у 1,79 рази. Визначіть, яка частина зростання обсягу виробництва пояснюється зростанням його масштабу, а яка – зростанням його ефективності.

5. Запишіть рівняння ізокліналей для виробничої функції з попереднього прикладу.

6. Виробнича функція Леонтьєва визначається рівністю $X = \min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\}$, де a та b – відповідна кількість одиниць капіталу та одиниць праці, необхідних для виробництва одиниці продукції. Побудуйте ізокванти та ізокліналі виробничої функції Леонтьєва при $a = 5$, $b = 3$.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Економіко-математичні методи та моделі / за ред. Мацкул В.М. Одеса : Одеський національний економічний університет, 2018. 404 с.
2. Математичні методи і моделі в управлінні економічними процесами. / Л.М. Малярець та ін. Харків : Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, 2016. 420 с.
3. Козак Ю.Г., Мацкул В.М. Математичні методи та моделі для магістрів з економіки. Практичні застосування. Київ : Центр учбової літератури, 2016. 252 с.
4. Вища та прикладна математика в економічних прикладах та задачах: практикум. / О.К. Щетініна та ін. Київ : Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, 2015. 244 с.
5. Буценко Ю.П., Диховничий О.О., Тимошенко О.А. Математичні моделі в економічних задачах. Практикум. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2014. 57 с.
6. Рядно О.А., Піскунова О.В.,Рибальченко Л.В., Хрущ Я.В. Математичні моделі у фінансах. Дніпропетровськ : Дніпропетровська державна фінансова академія, 2011. 188 с.
7. Математичне та комп'ютерне моделювання економічних процесів. / З.М .Соколовська та ін. Одеса : Астропрінт, 2016. 308 с.
8. Економіко-математичне моделювання / за ред. О.Т. Іващука. Тернопіль : Економічна думка, 2008. 704 с.
9. Блащак Н.І., Цимбалюк Н.І., Бойко А.Р. Вища математика в економічних задачах прикладного змісту. Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя, 2020. 100 с.
10. Werner F., Sotskov Y.N. Vfthematics of Economics and Business. London and New York : Rostlende. 536 p.
11. Dunbar S. Mathematical Modeling in Economics and Finanse. New York, AMS/NAA, 2019. 322 p.

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Клименко Михайло Іванович
Панасенко Євген Валерійович
Ткаченко Ірина Григорівна

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ:

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *О.В. Кудін*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Є.В. Панасенко*