3.3 Основні поняття та означення теорії різницевих рівнянь

<u>Різницевий оператор</u> Δ – оператор, що переводить послідовність x_n у послідовність y_n за правилом

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \; n = 1, 2, \ldots . \qquad (3.12)$$

Вираз Δx_n називають *<u>різницею першого порядку</u>*.

<u>Різницевим рівнянням</u> називають рівняння, що містить невідому послідовність та її різниці. *<u>Розв'язком різницевого рівняння</u>* називають будь-яку послідовність, при підстановці якої у різницеве рівняння для довільного натурального n отримуємо тотожність.

<u>Різницею другого порядку</u> називають вираз

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n . \qquad (3.13)$$

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n . \qquad (3.14)$$

$$\Delta^m x_n = \Delta^{m-1} x_{n+1} - \Delta^{m-1} x_n . \qquad (3.15)$$

$$\Delta^m x_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k x_{n+k} . \qquad (3.16)$$

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \Delta^k x_n. \qquad (3.17)$$

<u>*Лінійним різницевим рівнянням*</u> називають рівняння виду

$$a_0(n)\Delta^m x_n + a_1(n)\Delta^{m-1}x_n + \ldots + \\ + a_m(n)x_n = f(n). \qquad (3.18)$$

$$c_0(n)x_{n+m} + c_1(n)x_{n+m-1} + \ldots + \\ + c_m(n)x_n = f(n). \qquad (3.19)$$

$$y_{n+1} + a \cdot y_n = b, \qquad (3.20)$$

$$y_n = y_n^o + \tilde{y}_n,$$

$$y_n^o = C \cdot \lambda^n,$$

де C – довільна стала.

$$C \cdot \left(\lambda^{n+1} + a \cdot \lambda^n\right) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -a.$$

$$y_n^o = C \cdot (-a)^n.$$

$f(n) = b = \text{const}$, то $\tilde{y}_n = A = \text{const}$.

$$A + a \cdot A = b \Rightarrow A = \frac{b}{1+a} = \tilde{y}_n.$$

$$y_n = y_n^o + \tilde{y}_n = C \cdot (-a)^n + \frac{b}{1+a}.$$

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = b. \qquad (3.21)$$

$$y_n = y_n^o + \tilde{y}_n.$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

1. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $y_n^o = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$.

2. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_n^o = \left(C_1 n + C_2\right) \cdot \lambda^n$.

3. Корені характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді маємо:

$$y_n^o = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^n \left(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi\right),\ \varphi = \arg\left(\lambda_2\right).$$

$$\tilde{y}_n = B = \text{const}.\ B + pB + qB = b,\ B = \frac{b}{1 + p + q}.$$

$$y_n = y_n^o + \frac{b}{1 + p + q},$$

p_n – ціна товару у n-му періоді.

s_n – пропозиція товару у n-му періоді,

d_n – попит на товар у у n-му періоді.

$$s_n = m + l \cdot p_{n-1},\ d_n = a - b \cdot p_n,$$

$$a > m > 0,\ l > 0,\ b > 0.$$

$d_n = s_n$. Тоді $a - b \cdot p_n = m + l \cdot p_{n-1}$.

$$b \cdot p_{n+1} + l \cdot p_n = a - m.$$

$$p_n = C \cdot \left(-\frac{l}{b} \right)^n + \frac{a-m}{b+l}.$$

$$l < b,\ p_n \to p_0 = \frac{a-m}{b+l},\ n \to \infty.$$

3.5 Лінійні системи різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} + \ldots + a_{1m}x_{m,n} + f_1(n), \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} + \ldots + a_{2m}x_{m,n} + f_2(n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m,n+1} = a_{m1}x_{1,n} + a_{m2}x_{2,n} + \ldots + a_{mm}x_{m,n} + f_m(n). \end{cases} \qquad (3.22)$$

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \cdots \\ x_{m,n} \end{pmatrix},\ B_n = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_m(n) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B_n. \qquad (3.23)$$

$X_n = X_n^o + \tilde{X}_n$, $\quad X_{n+1} = A \cdot X_n$ шукають серед векторних послідовностей виду $X_n = D \cdot \lambda^n$,

$$D \cdot \lambda^{n+1} = A \cdot D \cdot \lambda^n, \qquad (3.24)$$

$$A \cdot D = \lambda \cdot D.$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E),$$

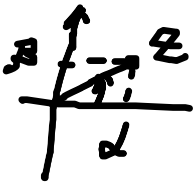
$$X_n^o = C_1 D_1 \lambda_1^n + C_2 D_2 \lambda_2^n + \ldots + C_m D_m \lambda_m^n.$$

Завдання для практичного заняття

$\lambda = \alpha \pm \beta i$ $\quad \arg\lambda_2 = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$

$|\lambda| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ $\quad \lambda - 2 = 0.\ \lambda = 2$

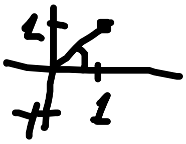
Розв'язати рівняння:



1. $x_{n+1} - 2x_n = 0,\ x_0 = 1.$ $\quad x_n = C\cdot 2^n$

   $x_0 = C\cdot 2^0 = 1 \Rightarrow C = 1$

   Відповідь: $x_n = 2^n$. $\quad x_n = 2^n$



2. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1.$

   Відповідь: $x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}$. $\quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$

   $|\lambda| = \sqrt{2}$ $\quad \arg\lambda_1 = \frac{\pi}{4}$

$x_n = (\sqrt{2})^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4} + C_2\sin n\frac{\pi}{4}\right)$

$x_0 = C_1 = 0$

$x_1 = \sqrt{2}\cdot C_2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 1$

$C_2 = 1$

3. $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = \cos n\pi,\ x_0 = x_1 = x_2 = 0.$

   $\cos\pi n = (-1)^n$

   Відповідь: $x_n = (-1)^n\left(-\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{3}\right)$. $\quad (\lambda+1)^3 = 0$

   $\lambda_{1,2,3} = -1$

4. $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = n^2, \quad x_0 = x_1 = x_2 = 0.$

   Відповідь: $\quad \tilde{x}_n = (-1)^n\cdot n^3\cdot A$ $\quad x_n^o = (-1)^n(C_1 + C_2 n + C_3 n^2)$

   $$x_n = -\frac{1}{120}\left(2n^5 - 15n^4 + 40n^3 - 45n^2 + 18n\right).$$

$x_n = x_n^o + \tilde{x}_n$

$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n,\quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

5. $\Delta^2 x_n - 3\Delta x_n + 2x_n = 0,\; x_0 = 1, \Delta x_0 = -1.$ $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$

$x_1 - x_0 = -1$

Відповідь: $x_n = 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n$.

$x_1 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$

$x_n = C_1\cdot 2^n + C_2\cdot 3^n$

$x_{n+1} = 3x_n + y_n$

$y_{n+1} = -5x_n - y_n$

6. $$\begin{cases} x_{n+1} - 3x_n - y_n = 0, \\ y_{n+1} + 5x_n + y_n = 0. \end{cases}$$

$x_0 = y_0 = 1.$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda = \lambda_1 = 1+i$

Відповідь:
$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + 3\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$
$$y_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} - 7\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

$\begin{cases} (3-1-i)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -5\alpha_1 + (-1-1-i)\alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (2-i)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad \times(-2-i) \\ -5\alpha_1 - (2+i)\alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = i-2$

7. Знайти вираз для загального члена послідовності чисел Фібоначчі: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,…, у якій кожний наступний член дорівнює сумі двох попередніх.

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

Відповідь: $$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$C\begin{pmatrix}1\\-2+i\end{pmatrix}\cdot(1+i)^n = C\begin{pmatrix}-1\\-2+i\end{pmatrix}(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = C_1\cdot \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2+i\end{pmatrix}(1+i)^n\right) + C_2\cdot \mathrm{Im}(\dots) = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$

8. Записавши різницеве рівняння для геометричної прогресії, знайдіть формулу її загального члена b_n.

$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\quad x_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

9. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.

$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\quad C_2 = -C_1$

$C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ $\quad C_1\cdot\sqrt{5} = 1$

$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

10. Числа Фібоначчі визначаються співвідношенням $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = x_2 = 1$. Знайдіть формулу n-го члена послідовності.

11. Знайдіть загальний розв'язок системи різницевих рівнянь:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

12. Зростання процентного депозиту з регулярними щорічними внесками A та річною ставкою p, де $0 < p < 1$, описується різницевим рівнянням $x_{n+1} = (1+p)x_n + A$. Знайдіть суму депозиту x_n у момент часу n, якщо початковий внесок дорівнював x_0 г.о.
13. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначите динаміку ціни p_n та дослідите її поведінку при $n \to \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p: $d(p_n) = 11 - p_n$, $s(p_{n-1}) = 1 + 4p_{n-1}$, $p = 2$.