

В.С. ЛОВЕЙКІН, Ю.О. РОМАСЕВИЧ

ДИНАМІКА МАШИН

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ЦП КОМПРИНТ

КИЇВ – 2013

УДК 621.8 : 531.3

ББК 34.12

Лo 68

АВТОРИ

Ловейкін Вячеслав Сергійович, Ромасевич Юрій Олександрович

РЕЦЕНЗЕНТИ

Піпа Борис Федорович, доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри інженерної механіки Київського національного університету технологій та дизайну.

Яковенко Валерій Борисович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри машин і обладнання технологічних процесів Київського національного університету будівництва і архітектури.

Чаусов Микола Георгійович, доктор технічних наук, професор, лауреат премії НАН України, завідувач кафедри механіки та опору матеріалів Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями „Механізація сільського господарства” та „Машини та обладнання сільськогосподарського виробництва”
(лист № 1/11-14183 від 18.09.2013 р.)

Ловейкін В.С.

Лo 68 Динаміка машин / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. – К.: ЦП „КОМПРИНТ”, 2013. – 227 с.

ISBN

У навчальному посібнику викладено теоретичні та прикладні питання динаміки машин. Приводяться правила та приклади складання динамічних моделей, а також способи синтезу математичних моделей за відомими динамічними моделями. На основі аналізу математичних моделей показано як визначати динамічні зусилля у елементах машин. Висвітлено питання резонансу у механізмах машини та встановлено умови які зменшують його небажану дію. Вказано методи зменшення динамічних навантажень у елементах машин та приведено приклади розрахунків. Навчальний посібник може бути корисним для студентів та викладачів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти аграрного профілю.

© Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О., 2013
© НУБІП України

ВСТУП

Динаміка машин – це розділ прикладної механіки про машини, який присвячений дослідженню динамічних процесів, що проходять при роботі машин.

Для сучасного машинобудування характерні тенденції до підвищення продуктивності машин, яка пропорційно пов'язана зі збільшенням швидкохідності та скороченням тривалості перехідних процесів, а також зростанням робочих навантажень, точності виконання робочих операцій, надійності роботи та економічності. Тому висувуються підвищені вимоги до методів розрахунку окремих елементів і систем, що використовуються при конструюванні та проектуванні машин.

Широко розповсюджені статичні методи розрахунку в одних випадках ведуть до невиправданого підвищення коефіцієнтів запасу міцності і, як наслідок, до збільшення габаритних розмірів та маси машин, а в інших – приводять до створення недостатньо надійних машин, які виходять з ладу при динамічних перевантаженнях.

Задовольнити найкращим чином всі вимоги до роботи машин можна тільки при сумісному аналізі їхніх режимів руху з урахуванням основних силових факторів. Це входить у задачу прикладної динаміки машин, яка складає фундаментальну основу їхнього конструювання.

Погодження конструкторських розробок з послідовним розв'язуванням задач динаміки дозволяє вже на стадії проектування машини вибирати її раціональну схему, оцінити точність виконання робочих процесів, енергетичні витрати, характеристики міцності та ергономічності.

За результатами попередніх динамічних розрахунків можуть бути завчасно передбачені спеціальні регулюючі, демпфуючі та розвантажувальні пристрої, які забезпечують підтримання динамічних характеристик машини в необхідних межах під час експлуатації. Вибір структури та параметрів

машини, який базується на аналізі її динамічних процесів, що проходять під час руху, одночасно вирішує проблему підвищення надійності, зменшення матеріалоемності та габаритних розмірів машини.

Розв'язок задач динаміки вимагає розробки розрахункових схем або динамічних моделей машин, які враховують їхні основні характеристики і нехтують другорядними характеристиками. Перехід від реальної машини до абстрактної еквівалентної розрахункової схеми (динамічної моделі) складає предмет прикладної динаміки машин, який в більшості випадків викликає значні труднощі для конструктора конкретних машин. Розв'язок таких задач суттєво спрощується при використанні накопиченого досвіду попередників. Це визначає зміст курсу прикладної динаміки машин, методи якої стають більш зрозумілими при розв'язуванні задач динаміки на конкретних прикладах.

Кінетостатичні методи розрахунку, які розглядаються в курсі ТММ при умові абсолютно жорстких ланок і заданому законі руху ведучої ланки, недостатньо точно враховують реальні умови роботи машин чи її складового механізму. Необхідні експлуатаційні та відповідні динамічні властивості (якості) машини можна забезпечити тільки тоді, коли при проектуванні будуть враховані динамічні процеси, що проходять під час робочого процесу, вплив маси та пружності ланок, а також зовнішніх навантажень та дисипації (втрати) енергії.

Динамічні властивості машин визначають стійкість руху робочого органу та їхніх ланок при зовнішніх навантаженнях, які змінюються в часі. Ці властивості залежать від параметрів пружної системи, власних частот коливань, динамічної піддатливості ланок та схем їхнього навантаження.

Основними характеристиками динамічних властивостей машин є такі:

- 1) найбільший допустимий режим стійкої роботи машини при можливих відхиленнях його параметрів;
- 2) амплітуда відносних коливань робочого органу та окремих ланок;
- 3) швидкодія виконання перехідних процесів;

- 4) тривалість неперервної роботи машини;
- 5) шум та коливання ланок.

Найбільші значення сил, крутних моментів та потужності, які передаються механізмами машини при її усталеному режимі роботи називаються силовими характеристиками машини. Їх використовують для окремих ланок при проектуванні та для раціональної експлуатації машини. Динамічні властивості машини забезпечуються шляхом вибору відповідних схем та параметрів системи, а також режимів руху ланок та законів керування.

Автоматичне керування машиною може здійснюватись за постійними або попередньо заданими законами, а також за законами, які виробляються самою системою керування у відповідності з поточними значеннями параметрів, що визначають хід процесу та прийнятим критерієм керування.

Курс „Динаміка машин” розв’язує задачі визначення законів руху ланок системи при заданих силових або кінематичних збуреннях, характеристики перехідних процесів, умови забезпечення стійкості системи і необхідної точності виконання робочих процесів. Задача курсу – вивчити методи підвищення динамічних властивостей машин.

У зв’язку зі збільшенням швидкостей руху ланок машин, роль динамічних розрахунків зростає. Задача створення достатньо міцної і нематеріалоемкої машини, яка здатна протистояти зовнішнім статичним та динамічним навантаженням при їхньому найбільш несприятливому стані, весь час ускладнюється і вимагає при своєму розв’язуванні розгляду багатьох факторів, які при обмежених швидкостях не враховувались. Тому виникла необхідність заміни статичних розрахунків динамічними, при яких машина розглядається комплексно, як єдина система, в якій зовнішні сили визначаються не тільки опором на робочому органі, але й законами зміни рушійних сил (моментів), які є функціями положення, швидкості та часу.

Оскільки деформації пружної системи машини досить малі в порівнянні з переміщенням робочого органу, то при статичних розрахунках

трансмiсію представляли абсолютно жорсткою, тобто вважали, що врахування деформацій є несуттєвим для аналізу роботи машин в цілому. Однак збільшення швидкостей ланок машини та нестабільність статичних сил опору на робочих органах привели до виникнення в пружних системах машин коливальних процесів, нехтувати якими стало неможливим. При цьому виявлялось, що навіть малі деформації пружної системи, викликані як власними так і вимушеними коливаннями, не кажучи про резонансні процеси, можуть привести до появи напружень, які співставимі не тільки зі статичними, але й в деяких випадках значно їх перевищують.

Машини необхідно вивчати як єдині системи, причому в їх динамічній моделі повинні бути враховані наступні фактори:

- 1) сили опору на робочому органі, які в ряді випадків є значними і змінюються в значних межах;
- 2) електричні характеристики приводного двигуна: для короткочасних процесів у машинах деяких типів статичні характеристики двигуна, які виражають залежність моменту від кутової швидкості, виявляються недостатніми і повинні бути замінені динамічними;
- 3) характеристики проміжних ланок: гідравлічних муфт, пружних муфт, пружин, пасових передач тощо;
- 4) пружні характеристики елементів трансмісії (валів, зубчастих коліс).

Врахування механічних характеристик двигунів, характеристик гідромуфт приводить до суттєвої нелінійності диференціальних рівнянь, які в результаті будуть отримані, що утруднює доведення аналітичних розв'язків до кінцевих результатів. Тому в ряді випадків необхідно змінювати криві характеристик двигунів системою спряжених прямих або замість точного рівняння характеристик застосовувати наближене, при якому безпосереднє інтегрування стає можливим.

Наведене відноситься як до процесу запуску машини, так і для процесу усталеного руху. Пояснюється це тим, що постійний опір на робочому органі машини практично не зустрічається. Неперервне коливання опору досягає в

деяких випадках до 300% від середнього значення викликає неперервні динамічні напруження в трансмісії машини. Однак, навіть в тих випадках, коли статичний опір на робочому органі може бути прийнятий з деяким наближенням стабільним, воно само по собі ще не визначає статичних напружень в деталях машин. Справа в тому, що внутрішнє тертя в машинах часто викликає значне підвищення статичного опору. Тому важливим є визначення дійсної величини сили тертя. Ще більш суттєвим для оцінки міцності машини є процес гальмування, дослідження якого ускладнюється значною різноманітністю гальмівних механізмів, що застосовуються в машинах.

Задачею прикладної динаміки машин є дослідження процесів руху машин, але не взагалі, а з точки зору отримання результатів, необхідних для вивчення характеристик кінематики, міцності, надійності тощо машин та їхніх елементів. Кінцевою метою курсу „Динаміка машин” є визначення вихідних даних для наступних розрахунків міцності елементів машин, їхньої продуктивності, надійності, а також визначення умов найбільш доцільних режимів їхнього використання.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДИНАМІКИ МАШИН

1.1. Вибір кількості ступенів вільності механічних систем

Одне із завдань динаміки машин полягає у визначенні руху системи. Після цього по відомих формулах опору матеріалів визначаються внутрішні зусилля, напруження й деформації в елементах коливного тіла [1]. Для того, щоб описати рух машини чи механізму необхідно вибрати координати, які будуть відповідати тому чи іншому стану машини.

Числом ступенів вільності механічної системи називається число координат, які однозначно визначають її стан. Усі реальні тіла деформуються і тому мають нескінченне число ступенів вільності. Однак залежно від характеру досліджуваного явища й необхідної точності розрахунків можна обмежити число ступенів вільності, вибираючи в якості розрахункової схеми реальної конструкції систему, яка має декілька або навіть один ступінь вільності.

Обмеження числа ступенів вільності, які враховуються в розрахунках, може бути виконане різними способами. Часто в реальній конструкції можна виділити масивні елементи, деформацією яких можна знехтувати, і пружні елементи, масу яких можна не враховувати. У цьому випадку розрахункова схема являє собою ряд масивних тіл, з'єднаних пружними зв'язками. Так, наприклад, система, представлена на рис. 1.1 а, може розглядатися як система з одним ступенем вільності, якщо маса пружини мала в порівнянні з масою вантажу і якщо нас не цікавить поведінка окремих витків пружини, а вантаж може переміщатися тільки у вертикальному напрямку.

Інший спосіб полягає в тому, що розподілену по всьому об'єму системи піддатливість (або пружність) зосереджують у кінцевому числі точок або ліній. При цьому система представляється у вигляді сукупності пружно-

зчленованих абсолютно жорстких елементів. Наприклад, пружна балка із неперервно розподіленою масою та пружністю може бути приблизно замінена рядом абсолютно жорстких мас, з'єднаних пружними елементами, кількість яких визначається необхідним рівнем точності розв'язування задачі (рис. 1.1, б, в, г).

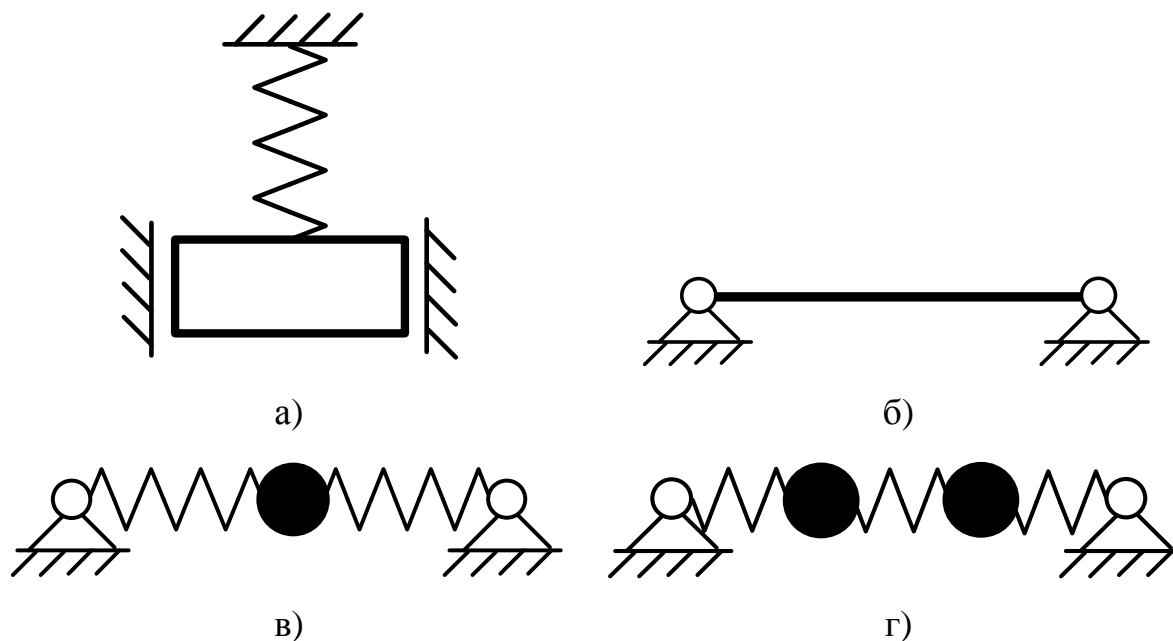


Рис. 1.1. Системи із різною кількістю ступенів вільності: а) маса на пружині (один ступінь вільності); б) балка на опорах; в) динамічна модель балки на опорах з одним ступенем вільності; г) динамічна модель балки на опорах з двома ступенями вільності

Вище були розглянуті приклади, у яких обмеження числа ступенів вільності досягалося шляхом нехтування масою одних частин системи (пружин, балок) і жорсткістю інших (вантаж). Третій спосіб визначення числа ступенів вільності системи полягає в тому, що на основі тих або інших міркувань заздалегідь задається форма її руху. Так, наприклад, при згині балки її положення в деякий момент часу визначається безліччю координат. Однак, використання гіпотези плоских перерізів дозволяє зменшити кількість ступенів вільності балки. Згідно із цією гіпотезою, положення всіх точок балки визначається положенням точок, що лежать на її осі. Завдяки прийняттю гіпотези плоских перерізів задача аналізу руху балки під час її

згину суттєво спрощується (стає одномірною), але число ступенів вільності залишається нескінченним. Подальше спрощення досягається на основі припущення, що в процесі руху співвідношення між відхиленнями від положення спокою різних точок балки не змінюються. У цьому випадку приймають, що відхилення ξ точок балки визначаються рівністю:

$$\xi(z, t) = x(t)f(z), \quad (1.1)$$

де $x(t)$ – невідома функція часу, $f(z)$ – задана функція абсциси z . Оскільки переміщення будь-якої точки балки визначається тепер єдиною змінною $x(t)$, отримана розрахункова схема має одну ступінь вільності.

Необхідно мати на увазі, що можливість схематизувати реальну динамічну систему й представити її у вигляді системи з однією, двома й більшим числом ступенів вільності залежить не тільки від виду системи, але й від характеру сил, що діють на неї.

Так, наприклад, якщо в системі, зображеній на рис. 1.1, а, відтягнути пружину убік, а потім відпустити, то виникнуть її бічні коливання, при яких не можна знехтувати власною масою пружини, якою б малою вона не була. При дослідженні такого роду коливань систему вже не можна розглядати як систему із одним ступенем вільності.

Існує цілий ряд прикладів, для яких не можна виконувати розрахунки спираючись на моделі із зосередженими параметрами. У цих випадках необхідно використовувати розподілені характеристики елементів машини і будувати динамічні моделі із розподіленими параметрами. Інколи у розрахунках динамічних навантажень в машинах використовують моделі із зосередженими та розподіленими параметрами.

Динамічні моделі із зосередженими параметрами інколи називають дискретними, із розподіленими параметрами – континуальними, а моделі із зосередженими та розподіленими параметрами – дискретно-континуальними.

Таким чином, вибір тієї або іншої розрахункової схеми може бути зроблений тільки в результаті вивчення фізичної природи розглянутих явищ і залежно від вимог до точності розрахунків.

1.2. Моделювання динаміки машин

Розв'язування задач динаміки машин починається зі збору фактів та даних наукових спостережень. На їх основі проводиться формалізація роботи машини чи механізму і будується її математична модель, тобто виділяються її найбільш суттєві риси та властивості й проводиться їх опис за допомогою рівнянь і формул.

Розглянемо основні етапи моделювання роботи машин (рис. 1.2).

Етап 1. При постановці задачі на фізичному рівні проходить процес схематизації та ідеалізації машини, тобто виділення її суттєвих факторів, що впливають на її функціонування. Деякі риси і фактори машини можуть виявитися важливими, інші – несуттєвими.

Етап 2. Після виявлення суттєвих факторів ставляться задачі моделювання й вибирається схема взаємодії між елементами машини, тобто будується динамічна модель, яка відображає суттєві фактори. Більш детально про побудову динамічних моделей буде сказано у п.п. 1.2.1.

Етап 3. Надалі здійснюється переведення необхідних характеристик на мову математичних понять і величин. Складається система параметрів, які описують основні фактори, й здійснюється формування співвідношень та рівнянь між цими параметрами і величинами (математичне моделювання). Отже, **математична модель** – це результат формалізації реальної машини. Це найбільш складна й важка стадія процесу моделювання. Тут використовують фундаментальні фізичні закони і принципи. Більш детально про методи математичного моделювання машин буде сказано у п.п. 1.2.2.

Етапи 4. Після побудови моделі (третьої етап) необхідно проводити перевірку суперечності моделі реальній машині і конкретності постановки

задачі. Тут можна використати досить просте й завжди ефективне правило фізичної розмірності всіх членів рівняння-моделі машини.

Етапи 5, 6. Перевіряється справедливість моделі за результатами розв'язування теоретичної задачі у відповідності з математичною моделлю, які зіставляються з реальними результатами роботи машини. На основі цих результатів перевіряється адекватність математичної моделі реальній машині. Глибина відображення моделлю реальної машини залежить від мети дослідження.

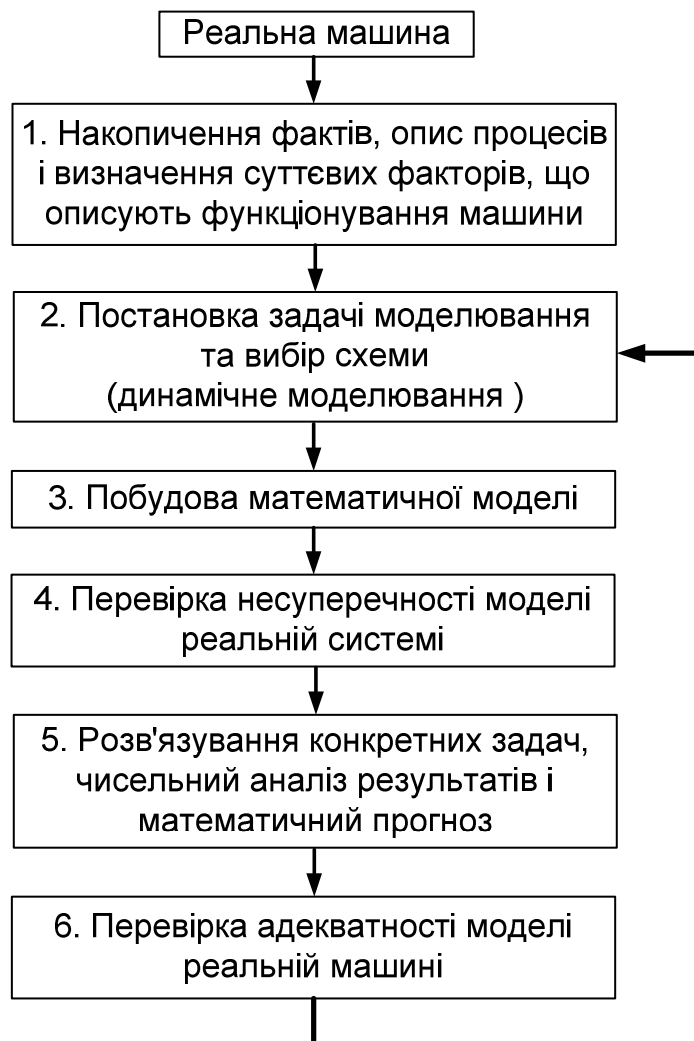


Рис.1.2. Етапи моделювання машини

Відповідно до принципів ієрархії моделей кожна модель нижчого рівня не повинна суперечити моделі вищого рівня.

1.2.1. Побудова динамічних моделей

При переході від реальної механічної системи (машини) до її динамічної моделі нехтують тими фізичними факторами, які несуттєві для даного розрахунку або дослідження. В загальному випадку при складанні динамічної моделі механічної системи необхідно враховувати зосереджені маси, розподілені маси по довжині елементів, пружність елементів, залежності рушійних та гальмівних сил двигунів від частоти обертання ротора, зміну приведених мас тощо. У кожному конкретному випадку одні фізичні фактори є головними, а інші – другорядними. Динамічна модель повинна задовольняти дві головні вимоги:

- 1) бути в необхідній мірі адекватною реальній механічній системі й, наскільки це можливо, відображати основні її фізичні властивості;
- 2) бути не дуже складною, щоб розв'язування не було досить трудомістким.

Усяке ускладнення розрахункової схеми повинне бути виправдане одержанням більш точного розв'язку. У той же час спрощення розрахункової схеми не повинно приводити до викривлення реального фізичного процесу.

Критерієм вірогідності прийнятої розрахункової схеми (динамічної моделі) є збіг результатів, отриманих теоретичним і експериментальним шляхами. Слід підкреслити, що сам експеримент повинен бути поставлений правильно, тобто відбивати ті умови роботи машини, які вивчаються й порівнюються з результатами теоретичних розрахунків.

Розглянемо процес розробки динамічної моделі механічної системи на прикладі механізму підйому вантажу вантажопідйомного крана, кінематична схема якого показана на рис. 1.3.

За окремі маси механізму приймаємо ротор електродвигуна 1, муфту з гальмівним шківом 2, редуктор 3, барабан 4 та вантаж 5. Тут не враховані окремі маси валів і канатів, оскільки їх маси приводяться до відповідних елементів, які на них закріплено. Наприклад, маси вхідного й вихідного валів

редуктора приведені відповідно до маси редуктора, а маса канату – до вантажу 5. У цьому механізмі маси 1, 2, 3 і 4 здійснюють обертальний рух, а маса 5 – поступальний.

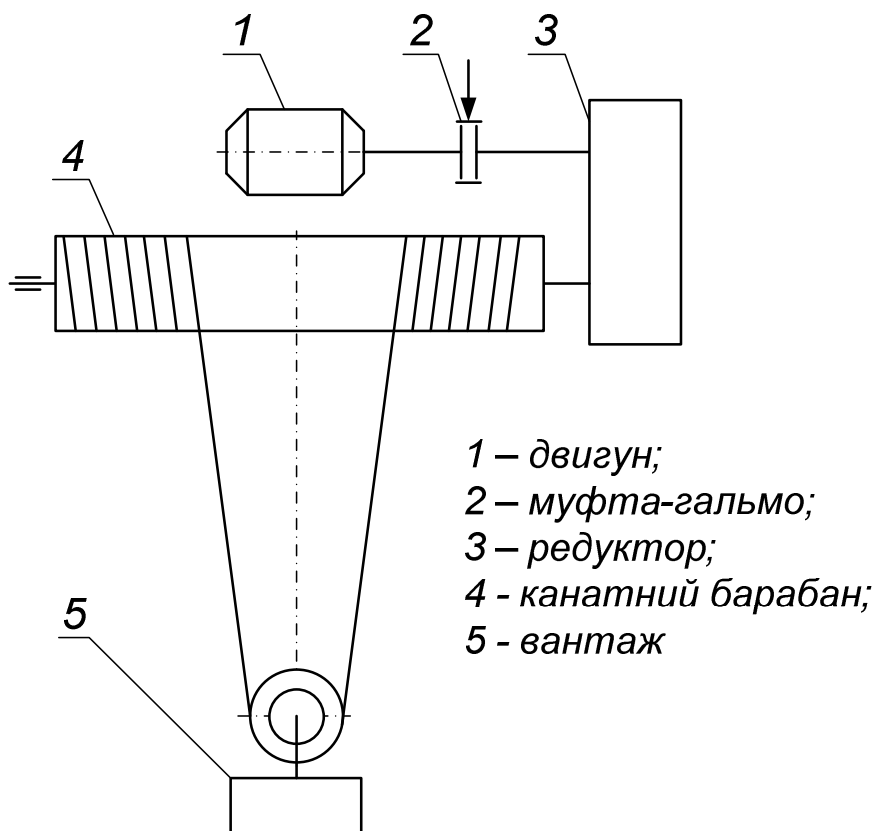


Рис. 1.3. Кінематична схема механізму підйому вантажу

Складемо з цих мас динамічну модель, з'єднавши їх між собою інерційними пружними елементами і приклавши діючі навантаження до мас, що розглядаються (рис. 1.4).

Модель складається з трьох ділянок безінерційного вала, кожна з яких обертається з кутовими швидкостями ω_1 , ω_2 і ω_3 , а також безінерційного канату, що намотується на барабан зі швидкістю v . Маси елементів двигуна 1, гальмівного шківа 2, передавального механізму 3 і барабана 4 показані на рис. 1.4 у вигляді умовних дисків з моментами інерції J_1 , J_2 , J_{31} , J_{32} , J_{33} , J_{34} та J_4 , вантаж 5 – у вигляді матеріальної точки масою m_5 . Умовні диски зв'язані між собою пружними безінерційними ділянками валів із

коефіцієнтами крутильної жорсткості $c_1, c_2, c_{31}, c_{32}, c_{34}, c_4$. Диск з моментом інерції J_4 зв'язано з вантажем масою m_5 пружним безінерційним канатом з лінійною жорсткістю c_5 через поліспастову систему із кратністю n . Кутові швидкості валів із зубчастими колесами 3.1 і 3.4 зв'язані між собою передавальним відношенням $u = \omega_1 / \omega_3$. На рис. 1.4: M_p – рушійний момент на валу двигуна, $m_5 g$ – вага вантажу.

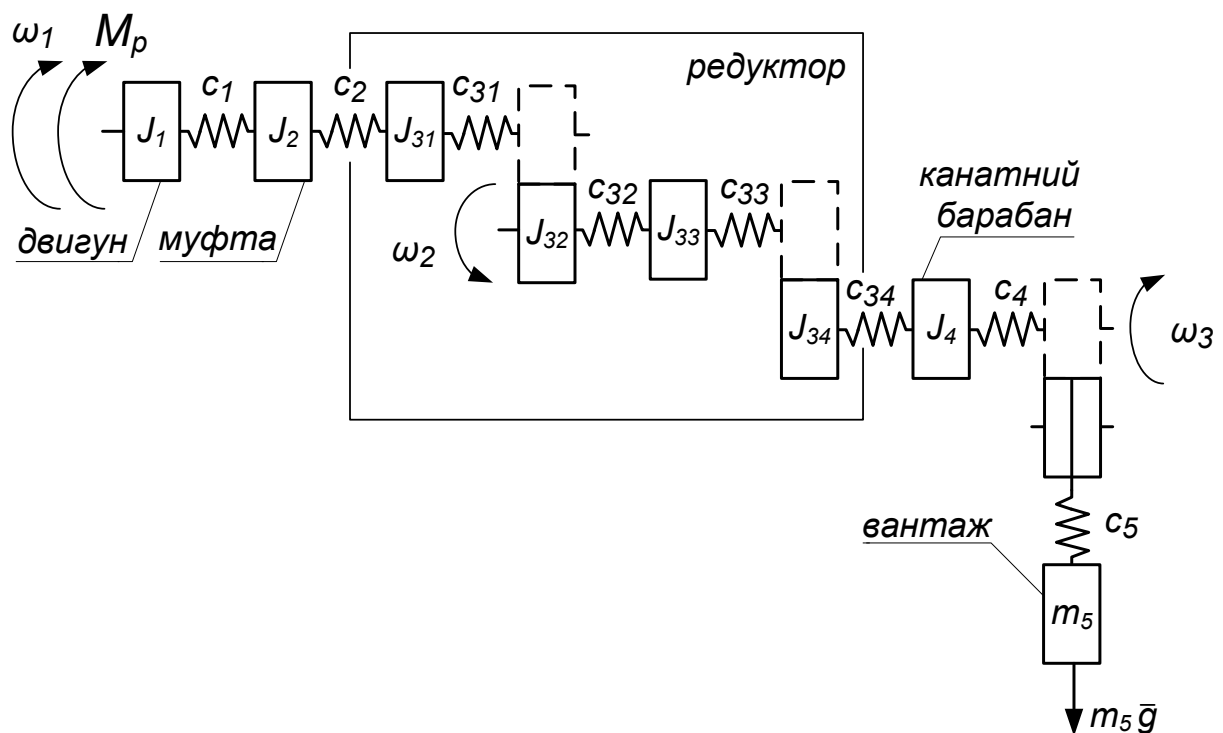


Рис. 1.4. Динамічна модель механізму підйому вантажопідйомного крана

За допомогою побудованої динамічної моделі можна створити математичну модель, яка дасть можливість визначити динамічні навантаження в елементах безінерційних пружних валів між двигуном і гальмівним шківом, шківом та зубчастими колесами й барабаном, а також у канаті, який з'єднує барабан із вантажем через поліспастову систему. Одночасне визначення цих навантажень у рамках однієї математичної моделі приводить до значного ускладнення останньої.

У ряді випадків немає потреби розглядати таку складну математичну модель, її можна замінити рядом простих моделей, кожна з яких враховує тільки одну пружну ділянку вала або канату. Так, якщо виникає потреба визначення динамічних навантажень у пружному канаті, то використовується динамічна модель, у якій усі ділянки валів вважаються жорсткими, а канат – пружним.

При приведенні мас ротора двигуна, гальмівного шківів, зубчастих коліс, барабана і вантажу до гілок канату, які намотуються на барабан, динамічна модель механізму підйому вантажу має вигляд, показаний на рис. 1.5. Тут прийняті такі позначення: m_{n1} – приведена маса ротора двигуна, гальмівного шківів, зубчастих коліс та барабана до гілок каната; m_{n2} – приведена маса вантажу до гілок канату; F_{n1} , F_{n2} – приведені до канату сили від дії відповідно рушійного моменту на валу двигуна й ваги вантажу; C_n – приведена жорсткість гілок канату; x_1 , x_2 – координати центрів мас відповідно m_{n1} і m_{n2} .

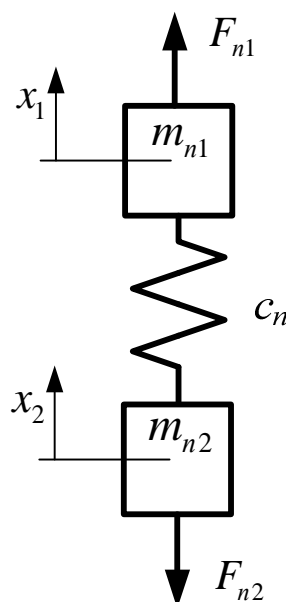


Рис. 1.5. Спрощена динамічна модель механізму підйому вантажопідйомного крана

Приведення мас та моментів інерції тіл системи базується на рівності кінетичної енергії заданої й приведеної систем; приведення сил і моментів сил – на рівності робіт (потужностей), які виконують ці сили й моменти та їх приведені величини; приведення жорсткостей – на рівності потенціальних енергій, якими володіють пружні елементи заданої і приведеної систем.

Здійснимо приведення мас, діючих сил та жорсткостей до гілок канату, що намотується на барабан для механізму підйому вантажопідйомного крана (рис. 1.6). Оскільки виникає потреба визначення динамічних навантажень у гілках канату, то приведення здійснюється з двох боків, до верхньої частини канату приводяться всі елементи від двигуна до барабана включно, а до нижньої частини – вантаж і канат (рис. 1.4).

Визначимо кінетичну енергію системи „двигун-барабан” (рис.1.4):

$$T_1 = \frac{\omega_1^2}{2}(J_1 + J_2 + J_{31}) + \frac{\omega_2^2}{2}(J_{32} + J_4), \quad (1.2)$$

де ω_1 і ω_3 – кутові швидкості обертання відповідних валів; $J_1, J_2, J_{31}, J_{32}, J_4$ – моменти інерції відповідних елементів (рис. 1.4).

Кінетична енергія приведеної системи розглянутих елементів має вигляд:

$$T_{n1} = \frac{m_{n1}v^2}{2}, \quad (1.3)$$

де v – швидкість намотування канату на барабан.

Виходячи з умов приведення мас, прирівнюємо праві вирази залежностей (1.2) і (1.3). У результаті отримаємо:

$$\frac{\omega_1^2}{2}(J_1 + J_2 + J_{31}) + \frac{\omega_2^2}{2}(J_{32} + J_4) = \frac{m_{n1}v^2}{2}. \quad (1.4)$$

Враховуючи те, що $\omega_2 = 2v/D$ (D - діаметр барабана), а $\omega_1 = u\omega_2$, $\omega_2 = 2vu/D$ та проводячи математичні перетворення, знаходимо в кінцевому вигляді вираз приведеної маси системи „двигун-барабан”:

$$m_{n1} = \frac{4}{D^2} ((J_1 + J_2 + J_{31})u^2 + J_{32} + J_4). \quad (1.5)$$

Аналогічно визначається приведена маса системи „вантаж-канат” (рис. 1.5). У цій системі враховується маса тільки тієї частини канату, яка здійснює рух.

При довжині H рухомих гілок канату від осі блока до осі барабана кінетична енергія системи „вантаж-канат” визначається залежністю:

$$T_2 = \frac{1}{2} 2H\rho v^2 + \frac{1}{2} m_5 \frac{v^2}{n^2}, \quad (1.6)$$

де ρ – маса одиниці довжини канату; n – кратність поліспасової системи.

Кінетична енергія приведеної системи цих елементів визначається наступним виразом:

$$T_{n2} = \frac{1}{2} m_{n2} v^2. \quad (1.7)$$

Прирівнявши праві частини залежностей (1.6) і (1.7), отримаємо:

$$\frac{1}{2} 2H\rho v^2 + \frac{1}{2} m_5 \frac{v^2}{n^2} = \frac{1}{2} m_{n2} v^2. \quad (1.8)$$

З одержаного рівняння знаходимо приведену масу системи „вантаж-канат”:

$$m_{n2} = 2H\rho + \frac{m_5}{n^2}. \quad (1.9)$$

Для визначення приведеної сили F_{n1} визначимо її потужність у приведеній системі і прирівняємо її до потужності рушійного моменту M_P на валу двигуна. В результаті будемо мати:

$$F_{n1}v = M_P\omega_3. \quad (1.10)$$

Враховуючи зв'язок між швидкостями v і ω_3 з останнього рівняння отримаємо:

$$F_{n1} = \frac{2M_P u}{D}. \quad (1.11)$$

Аналогічно знаходимо приведену силу F_{n2} , врахувавши рівність її потужності, необхідної для підйому вантажу:

$$F_{n2}v = \frac{m_5 g v}{n}. \quad (1.12)$$

З отриманого рівняння маємо

$$F_{n2} = \frac{m_5 g}{n}. \quad (1.13)$$

Якщо враховувати ККД передачі від двигуна до барабана η_1 і ККД поліспасової системи η_2 , то вирази для приведених сил можна записати у вигляді:

$$F_{n1} = \frac{2M_P u \eta_1}{D}, \quad (1.14)$$

$$F_{n2} = \frac{m_5 g}{\eta_2 n}. \quad (1.15)$$

Для визначення приведеної жорсткості c_n скористаємось умовою зведення жорсткості канатно-поліспасової системи c_6 (рис. 1.4) до гілки канату, яка намотується на барабан. Згідно з цією умовою маємо:

$$\frac{1}{2}c_n x_2^2 = \frac{1}{2}c \left(\frac{x_2}{n} \right)^2. \quad (1.16)$$

З отриманого рівняння знаходимо приведену жорсткість канатно-поліспасової системи:

$$c_n = \frac{c}{n}. \quad (1.17)$$

Виходячи з конструкції поліспасової системи (рис. 1.4) і враховуючи те, що жорсткість одиниці довжини каната дорівнює EA (де E – модуль пружності каната, A – площа його поперечного перерізу), можна визначити жорсткість канатно-поліспасової системи:

$$c = 2EA \left(\frac{1}{(n-1)h} + \frac{1}{H} \right), \quad (1.18)$$

де h - відстань між осями рухомих і нерухомих блоків (рис. 1.3).

Динамічна модель, що показана на рис. 1.6, має сім ступенів вільності, а на рис. 1.5 – тільки два. Таке спрощення динамічної моделі механічної системи незначно знижує її точність, але набагато спрощує її математичну модель. Зниження точності динамічної моделі механізму підйому вантажу для визначення динамічних навантажень у пружному канаті за рахунок значного зменшення кількості ступенів вільності відповідає точності визначення моментів інерції, жорсткостей окремих елементів і рушійного моменту приводного механізму [2].

1.2.2. Методи синтезу математичних моделей динамічних систем

На основі отриманої динамічної моделі формальними методами може бути побудована математична модель будь-якої механічної системи. Математичні моделі механічних систем становлять, як правило, диференціальні рівняння руху або взаємодії окремих елементів.

Для отримання диференціальних рівнянь руху механічних систем при відомих їх динамічних моделях використовуються три основних методи:

- 1) метод рівноваги з використанням принципу д'Аламбера;
- 2) принцип можливих переміщень;
- 3) принцип Гамільтона-Остроградського (рівняння Лагранжа другого роду).

Розглянемо більш детально кожний із цих методів.

Метод рівноваги. Рівняння руху будь-якої механічної системи при наявності її динамічної моделі – це вираз другого закону Ньютона, який встановлює, що швидкість зміни імпульсу будь-якої маси дорівнює діючій на неї силі. В математичній формі це записується у вигляді наступного диференціального рівняння:

$$\bar{F}(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\bar{r}}{dt} \right), \quad (1.19)$$

де $F(t)$ – вектор прикладеної сили; r – радіус-вектор координат центра мас маси m ; t – координата часу.

Для більшості задач динаміки машин і механізмів масу можна розглядати незмінною в часі. Тоді рівняння (1.19) приймає вигляд:

$$\bar{F}(t) = m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = m \ddot{\bar{r}}. \quad (1.20)$$

Отримане рівняння виражає умову рівності сили добутку маси на прискорення:

$$\bar{F}(t) - m\ddot{\bar{r}} = 0. \quad (1.21)$$

У рівнянні (1.21) другий доданок називають силою інерції, яка здійснює опір прискоренню маси.

Принцип д'Аламбера (*маса викликає силу інерції, пропорційну її прискоренню і протилежно йому спрямовану*) широко застосовується в задачах динаміки машин, оскільки дає змогу вивести рівняння руху на основі умов динамічної рівноваги. Сила $F(t)$ може включати в себе різні види сил, що прикладені до маси: силу пружного опору, яка направлена в напрямку протилежному переміщенню; силу згасання, яка здійснює опір швидкості переміщення, і незалежні зовнішні сили. Якщо ввести силу інерції, що здійснює опір прискоренню маси, то рівняння руху виражають умову рівноваги всіх сил, які прикладені до маси. Принцип д'Аламбера розглядає рівновагу окремо взятої маси з прикладенням до неї всіх діючих сил, сили інерції та реакцій зв'язку з іншими масами. Для більшості простих динамічних моделей механічних систем указаний метод виводу рівнянь руху найбільш зручний.

Складемо за допомогою цього методу диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1.5.

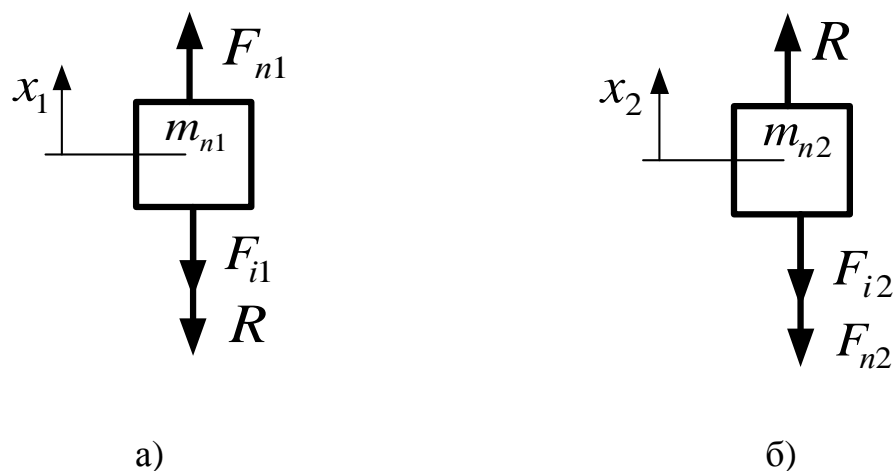


Рис. 1.6. Схеми динамічної рівноваги мас: а) m_{n1} ; б) m_{n2}

На рис. 1.6 $R=c_n(x_1-x_2)$ – реакція пружного зв'язку між масами m_{n1} і m_{n2} ; $F_{i1} = m_{n1}\ddot{x}_1$ – сила інерції, що діє на масу m_{n1} ; $F_{i2} = m_{n2}\ddot{x}_2$ – сила інерції, що діє на масу m_{n2} .

Приклад. Розглянемо динамічну рівновагу маси m_{n1} (до неї прикладені сили R та F_{i1} (рис. 1.6, а)) та маси m_{n2} (до неї прикладені сили R та F_{i2} (рис.1.6, б)).

Використовуючи умови рівноваги (1.21) для мас m_{n1} та m_{n2} , отримаємо систему диференціальних рівнянь, які описують рух динамічної моделі, показаної на рис. 1.5:

$$\begin{cases} F_{n1} - c_n(x_1 - x_2) - m_{n1}\ddot{x}_1 = 0; \\ c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2}\ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Запишемо цю систему в іншому вигляді:

$$\begin{cases} m_{n1}\ddot{x}_1 = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2); \\ m_{n2}\ddot{x}_2 = c_n(x_1 - x_2) - F_{n2}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Отримана система диференціальних рівнянь являє собою математичну модель для визначення динамічних навантажень R (реакції пружного зв'язку) у канаті.

Принцип можливих переміщень. Коли конструктивна схема машини чи механізму достатньо складна і містить ряд взаємодіючих тіл кінцевих розмірів, безпосереднє виведення умов рівноваги всіх діючих на систему сил ускладнюється. Змінні сили часто виражаються через переміщення по узагальнюючих координатах, але записати умови їх рівноваги досить складно. В цьому випадку для виведення рівнянь руху замість умов рівноваги використовують принцип можливих (віртуальних) переміщень.

Цей принцип формулюється наступним чином: *якщо система, котра знаходиться в рівновазі під дією декількох сил, отримує можливе*

переміщення, тобто будь-яке переміщення, яке задовольняє крайовим умовам, то повна робота всіх сил на цьому переміщенні дорівнює нулю.

Згідно з цим принципом рівність нулю роботи сил на можливому переміщенні системи еквівалентна умові рівноваги. Суттєва перевага цього принципу полягає в тому, що складові робіт сил на можливих переміщеннях – скалярні величини і можуть додаватися алгебраїчно, а сили, які діють на елементи динамічної моделі, є векторами і можуть додаватися тільки за правилами векторного аналізу.

При застосуванні принципу можливих переміщень у випадку руху механічної системи до заданих зовнішніх сил приєднуються сили тертя і сили інерції для кожного тіла. У цьому випадку принцип можливих переміщень можна записати так:

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = 0, \quad (1.24)$$

де N - кількість матеріальних точок системи; \bar{F}_i - вектор рівнодійної зовнішніх сил і сил тертя, що діють на матеріальну точку; m_i , \bar{r}_i - маса та вектор координати i -ої точки системи.

Для динамічної моделі, показаної на рис. 1.5, складемо диференціальні рівняння руху за допомогою принципу можливих переміщень. З цією метою визначимо всі діючі на маси m_{i1} та m_{i2} сили, включаючи й сили пружності. Використавши рівняння (1.24), отримаємо:

$$[F_{n1} - c_n(x_1 - x_2) - m_{n1}\ddot{x}_1] \delta x_1 + [c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2}\ddot{x}_2] \delta x_2 = 0. \quad (1.25)$$

Оскільки рівняння (1.25) має місце при будь-яких незалежних одне від одного значеннях варіацій δx_1 і δx_2 , то це можливо лише при умові, що коефіцієнти при кожній із цих варіацій дорівнюють нулю. Тоді будемо мати:

$$\begin{cases} m_{n1}\ddot{x}_1 = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2); \\ m_{n2}\ddot{x}_2 = c_n(x_1 - x_2) - F_{n2}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Отримана система являє собою диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1.5, яка збігається з системою (1.23), одержаною за допомогою методу рівноваги.

Принцип Гамільтона-Остроградського (рівняння Лагранжа II роду). Цей метод не вимагає векторних рівнянь рівноваги, бо він використовує скалярні величини енергії у варіаційній постановці. Суть цього методу полягає в тому, що для неконсервативних механічних систем справедливе варіаційне рівняння:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad (1.27)$$

де t_0, t_1 – початковий і кінцевий моменти часу руху системи; δT – варіація кінетичної енергії; δA – елементарна робота сил, прикладених до системи, при переході від прямого до обхідного шляху, який має з прямим шляхом спільні початкові й кінцеві умови.

Якщо система консервативна, то $\delta A = -\delta \Pi$ (де Π - потенціальна енергія системи) і $\delta T + \delta A = \delta(T - \Pi) = \delta L$. У випадку консервативної системи принцип Гамільтона-Остроградського полягає в тому, що

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0. \quad (1.28)$$

Інтеграл

$$I_L = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt \quad (1.29)$$

називається дією за Гамільтоном-Остроградським.

Застосування цього принципу можна здійснювати і в іншій формі

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(T - \Pi) + \delta A_1] dt = 0. \quad (1.30)$$

У цьому випадку консервативні сили (гравітаційні й пружні) входять у вираз потенціальної енергії, а δA_1 становить елементарну роботу неконсервативних сил (рушійних і сил опору при переміщенні системи).

Застосування принципу Гамільтона-Остроградського у формі (1.30) дає можливість спростити врахування консервативних сил, таким чином надати принципу більший формалізм.

Принцип Гамільтона-Остроградського можна покласти в основу наближених методів розв'язування задач динаміки машин, які широко застосовуються в теорії пружності й при розв'язуванні складних задач теорії коливань.

Приведений принцип був опублікований В. Гамільтоном в 1834-1835 роках для випадку стаціонарних, тобто не залежних від часу зв'язків. Незалежно від нього й у більш загальному вигляді для нестационарних неголономних зв'язків цей принцип був сформульований М.В. Остроградським в 1848 році.

За допомогою принципу Гамільтона-Остроградського складемо диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 1.5.

Кінетична і потенціальна енергія цієї моделі мають вигляд:

$$T = \frac{1}{2} m_{n1} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_{n2} \dot{x}_2^2; \quad (1.31)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_n (x_1 - x_2)^2. \quad (1.32)$$

Елементарну роботу неконсервативних сил представимо виразом

$$\delta A_1 = F_{n1} \delta x_1 - F_{n2} \delta x_2. \quad (1.33)$$

Варіація $\delta(T - \Pi)$ для розглядуваної моделі має вигляд

$$\delta(T - \Pi) = m_{n1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + m_{n2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2 - c_n(x_1 - x_2)\delta x_1 + c_n(x_1 - x_2)\delta x_2. \quad (1.34)$$

Після підстановки виразів (1.33) та (1.34) у рівняння (1.30) отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} \{m_{n1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + m_{n2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2 + [F_{n1} - c_n(x_1 - x_2)]\delta x_1 + [c_n(x_1 - x_2) - F_{n2}]\delta x_2\} dt = 0. \quad (1.35)$$

Перших два члени рівняння (1.35) проінтегруємо по частинах, у результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (m_{n1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + m_{n2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2) dt &= m_{n1}\dot{x}_1\delta x_1 \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ &+ m_{n2}\dot{x}_2\delta x_2 \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (m_{n1}\ddot{x}_1\delta x_1 + m_{n2}\ddot{x}_2\delta x_2) dt. \end{aligned} \quad (1.36)$$

У зв'язку з тим, що на границях інтегрування варіації δx_1 і δx_2 дорівнюють нулю, перших два члени правої частини співвідношення (1.36) дорівнюють нулю. Тому після підстановки виразу (1.36) в рівняння (1.35) отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{[F_{n1} - c_n(x_1 - x_2) - m_{n1}\ddot{x}_1]\delta x_1 + [c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2}\ddot{x}_2]\delta x_2\} dt = 0. \quad (1.37)$$

Оскільки варіації δx_1 і δx_2 в середині інтервалу $[t_0, t_1]$ довільні й незалежні між собою, то рівняння (1.36) можливе в загальному випадку лише при умові, що коефіцієнти при варіаціях δx_1 і δx_2 дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} F_{n1} - c_n(x_1 - x_2) - m_{n1}\ddot{x}_1 = 0; \\ c_n(x_1 - x_2) - F_{n2} - m_{n2}\ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Отримана система рівнянь є системою диференціальних рівнянь руху динамічної моделі (рис. 1.5).

Із принципу Гамільтона-Остроградського можна отримати відоме рівняння Лагранжа другого роду. Згідно із принципом Гамільтона-Остроградського, серед можливих траєкторій руху системи дійсною є та, на якій варіація дії (1.29) дорівнює нулю, тобто повинно виконуватись рівняння:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = 0. \quad (1.39)$$

Інакше кажучи, дійсна траєкторія динамічної системи повинна задовольняти рівнянню (1.39).

Отже, для того щоб знайти траєкторію руху механічної системи, яка викликана прикладеними до системи зовнішніми силами, потрібно визначити стаціонарні точки дії (1.29). Аналізуючи отриману задачу неважко впевнитись у тому, що вона є найпростішою задачею варіаційного числення:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \quad (1.40)$$

де x_0, x_1 - відповідно початковий та кінцевий стан (положення) динамічної системи. Для того, щоб знайти екстремум дії (1.29) необхідно скласти рівняння Ейлера:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (1.41)$$

Розв'язок рівняння (1.41) буде мати дві постійні інтегрування, які знаходяться відповідно до крайових умов $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Зазначимо, що рівняння (1.41) справедливе лише для потенціальних сил (сили, робота яких не залежить від форми траєкторії руху системи, а залежить тільки від початкової й кінцевої точки прикладання сили; отже,

потенціальні сили – такі сили, робота яких по будь-якій замкненій траєкторії рівна нулю, що означає збереження механічної енергії в системі при дії на неї потенціальних сил; приклади потенціальних сил: сила ваги, сила пружності тощо). Для непотенціальних сил рівняння Лагранжа II роду записується у такому вигляді [3]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad (1.42)$$

де Q_x - узагальнена сила, яка визначається таким чином:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_{неп}, \quad (1.43)$$

де $Q_{неп}$ - непотенціальна сила, що діє на систему. Кількість рівнянь, які необхідно скласти для побудови математичної моделі руху машини чи механізму рівна кількості її узагальнених координат.

Для прикладу складемо математичну модель руху динамічної системи (рис. 1.5) за допомогою рівняння Лагранжа II роду. На систему представлену на рис. 1.5 діють як потенціальні так і непотенціальні сили. Тому будемо використовувати рівняння (1.42), (1.43).

Крім того, кількість узагальнених координат рівна двом, тому необхідно скласти два рівняння (1.42). Раніше були знайдені кінетична (1.31) та потенціальна (1.32) енергії системи. Надалі запишемо вирази для узагальнених сил:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + Q_{неп1} = -\frac{1}{2} c_n \frac{\partial (x_1 - x_2)^2}{\partial x_1} + F_{n1} = F_{n1} - \frac{1}{2} c_n \frac{\partial (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}{\partial x_1} = \\ &= F_{n1} - \frac{1}{2} c_n \left(\frac{\partial x_1^2}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial x_1x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1} \right) = F_{n1} - \frac{1}{2} c_n (2x_1 - 2x_2) = F_{n1} - c_n (x_1 - x_2), \quad (1.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + Q_{нен2} = -\frac{1}{2}c_n \frac{\partial(x_1 - x_2)^2}{\partial x_2} + F_{n2} = F_{n2} - \frac{1}{2}c_n \frac{\partial(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}{\partial x_2} = \\
&= F_{n2} - \frac{1}{2}c_n \left(\frac{\partial x_1^2}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2} \right) = F_{n2} - \frac{1}{2}c_n (-2x_1 + 2x_2) = F_{n2} - c_n(x_2 - x_1). \quad (1.45)
\end{aligned}$$

Надалі знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_{n1} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_{n2} \dot{x}_2^2 \right)}{\partial x_1} = 0, \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_{n1} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_{n2} \dot{x}_2^2 \right)}{\partial x_2} = 0, \quad (1.47)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_{n1} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_{n2} \dot{x}_2^2 \right)}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_{n1} 2\dot{x}_1 \right) = \frac{d}{dt} (m_{n1} \dot{x}_1) = m_{n1} \ddot{x}_1, \quad (1.48)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_{n1} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_{n2} \dot{x}_2^2 \right)}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_{n2} 2\dot{x}_2 \right) = \frac{d}{dt} (m_{n2} \dot{x}_2) = m_{n2} \ddot{x}_2. \quad (1.49)$$

Підставимо вирази (1.44)-(1.49) у формулу (1.41) та отримаємо:

$$\begin{cases} m_{n1} \ddot{x}_1 = F_{n1} - c_n(x_1 - x_2); \\ m_{n2} \ddot{x}_2 = F_{n2} - c_n(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (1.50)$$

Усі три методи отримання диференціальних рівнянь руху машин та їх механізмів рівнозначні, і, як показує аналіз отриманих рівнянь, ці методи для однієї й тієї ж динамічної моделі приводять до одного і того ж результату. Звичайно вибір методу для будь-якої конкретної механічної системи залежить від типу динамічної моделі та визначається самим дослідником.

Для отримання необхідних результатів диференціальні рівняння руху механічної системи підлягають інтегруванню з метою визначення характеристик стану (переміщень, швидкостей і прискорень) окремих елементів у функції часу [2].

1.3. Моделювання приводних зусиль

При вивченні фізичних або хімічних процесів, що відбуваються в електричних, гідравлічних або теплових двигунах, розглядають звичайно досить складні фізичні моделі. Однак при розв'язуванні задач динаміки машин нас цікавлять тільки ті властивості двигунів, які визначають характер їх взаємодії з іншими функціональними частинами машини. Ці властивості визначаються механічними характеристиками двигунів, що представляють собою залежності між законами зміни в часі вхідного параметра $u(t)$, узагальненої координати вихідної ланки $x(t)$ і узагальненої рушійної сили $Q(t)$.

Вибравши ту або іншу форму характеристики двигуна, ми тим самим вибираємо його динамічну модель. Залежно від ступеня ідеалізації властивостей двигуна прийнято розрізняти кілька видів його характеристик [4].

Ідеальна кінематична характеристика виходить при припущенні, що узагальнена швидкість вихідної ланки $\dot{x}(t)$ в кожний момент часу залежить тільки від значення вхідного параметра в цей же момент і не залежить від узагальненої сили:

$$\dot{x}(t) = f(u). \quad (1.51)$$

Така характеристика виявляється прийнятною в ряді випадків для опису властивостей „жорстких” двигунів, у яких швидкість вихідної ланки слабо залежить від навантаження або взагалі від нього не залежить (наприклад синхронний електричний двигун) (рис. 1.7, а).

Припускаючи, що узагальнена рушійна сила не залежить від швидкості вихідної ланки й визначається тільки значенням вхідного параметра, одержуємо іншу ідеалізовану модель двигуна, яка називається **ідеальна силова характеристика**. Вона описується таким рівнянням:

$$Q(t) = f(u). \quad (1.52)$$

Ця характеристика може бути прийнята для деяких типів „м'яких” двигунів, у яких узагальнена рушійна сила слабо залежить від швидкості („м'які” характеристики мають, наприклад, двигуни внутрішнього згорання) (рис. 1.7, б).

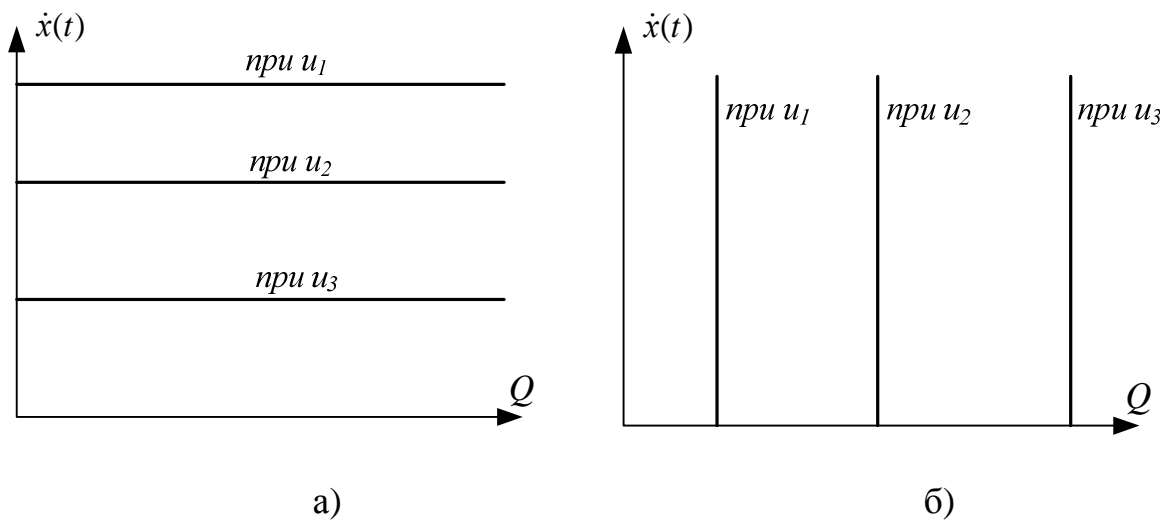


Рис. 1.7. Механічні характеристики двигунів: а) ідеальна кінематична; б) ідеальна силова

При використанні ідеальної кінематичної характеристики часто говорять, що двигун є „джерелом швидкості”, а у випадку ідеальної силової характеристики – „джерелом сили (моменту)”. Ідеальними характеристиками звичайно користуються на перших етапах проектування машини, коли відомий тільки тип двигуна й необхідно оцінити необхідну потужність.

У реальних двигунах узагальнена швидкість вихідної ланки залежить не тільки від значення вхідного параметра, але й від навантаження, яке характеризується величиною узагальненої сили. Як правило, зі збільшенням навантаження швидкість зменшується. Враховуючи цей зв'язок, приходимо до **статичної характеристики двигуна:**

$$\dot{x} = f(Q, u), \quad (1.53)$$

яка також може бути представлена у такій формі:

$$Q = f(u, \dot{x}). \quad (1.54)$$

Існують двигуни, у яких процес перетворення енергії носить циклічний характер. До них відносяться, наприклад, поршневі двигуни внутрішнього згорання. У таких двигунах рушійний момент залежить не тільки від швидкості, але й від координати вихідної ланки, і статична характеристика представляється у формі:

$$Q = f(u, x, \dot{x}) \quad (1.55)$$

або

$$\dot{x} = f(Q, u, x). \quad (1.56)$$

Статичні характеристики двигунів адекватно відображають їхні властивості при статичних режимах роботи, тобто в тих випадках, коли параметри u , Q , \dot{x} , є постійними по величині або змінюються досить повільно.

У загальному випадку через інерційність фізико-хімічних процесів, що протікають у двигуні, значення швидкості вихідної ланки в даний момент часу залежить не тільки від миттєвого значення навантаження, але й від значень її похідних за часом. У першому наближенні ця залежність може бути врахована введенням у характеристику двигуна першої похідної за часом від $Q(t)$:

$$Q = f(u, x, \dot{x}, T, \dot{Q}) \quad (1.57)$$

або у іншій формі

$$\dot{x} = f(u, x, T, Q, \dot{Q}). \quad (1.58)$$

Параметр T називається постійною часу двигуна, а вирази (1.57) і (1.58) – його динамічними характеристиками.

Характеристики виду (1.57), (1.58) для деяких типів двигунів досить добре описують широкий клас динамічних режимів. Для інших типів двигунів вони виявляються придатними для використання тільки в тих випадках, коли узагальнена швидкість $\tilde{\delta}$ змінюється в порівняно вузьких межах. Динамічні режими, що не задовольняють цій умові, вимагають використання більш складних динамічних моделей.

1.3.1. Гідравлічний двигун об'ємного регулювання

Двигун складається з насоса регульованої продуктивності (рис. 1.8) і гідромотора. Вхідним параметром гідромотора є продуктивність насоса W_n яку в першому наближенні можна вважати не залежною від перепаду тисків p_δ [5].

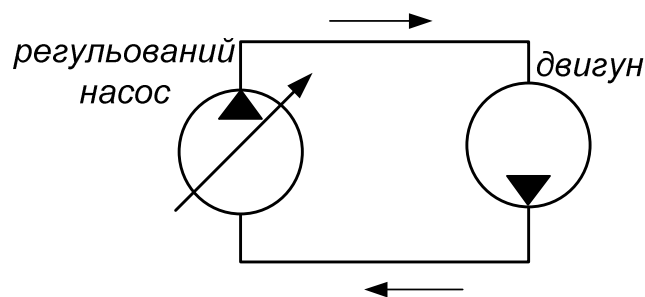


Рис. 1.8. Схема гідравлічного двигуна об'ємного регулювання

При відсутності навантаження ($Q=0$) кутова швидкість гідромотора пропорційна витраті:

$$\dot{x} = \frac{W_n}{k_\delta}. \quad (1.59)$$

Рівняння (1.59) – це ідеальна кінематична характеристика; коефіцієнт k_{∂} називається характеристичним об'ємом гідромотора. При наявності моменту опору на валу двигуна виникає перепад тисків між входом і виходом гідромотора. При цьому

$$\dot{x} = \frac{W_H}{k_{\partial}} - \frac{W_H}{g_{\epsilon} k_{\partial}^2} Q, \quad (1.60)$$

де g_{ϵ} - коефіцієнт витoku робочої рідини.

Якщо навантаження змінюється в часі, то механічна характеристика двигуна записується таким чином:

$$\dot{x} = \frac{W_H}{k_{\partial}} - \frac{W_H}{g_{\epsilon} k_{\partial}^2} Q - \frac{V_0}{E k_{\partial}^2} \dot{Q}, \quad (1.61)$$

де E - модуль об'ємної пружності робочої рідини; V_0 - внутрішній об'єм трубопроводу високого тиску з підключеними до нього об'ємами насоса та гідромотора. Рівняння (1.61) можна записати в іншому виді:

$$T \dot{Q} + Q = \frac{k_{\partial} W_H}{g_{\epsilon}} - \frac{k_{\partial}^2}{g_{\epsilon}} \dot{x}, \quad (1.62)$$

де T - постійна часу двигуна ($T = \frac{V_0}{E g_{\epsilon}}$). Рівняння (1.61) та (1.62) – це динамічні механічні характеристики гідравлічного двигуна об'ємного регулювання.

1.3.2. Гідродвигун із дросельним регулюванням

На рис. 1.9 показана схема найпростішого гідродвигуна із дросельним регулюванням. Тут роль вхідного параметра u виконує положення крана (заслінки) регульованого дроселя. При зміні площі його прохідного перерізу змінюється витрата рідини через дросель, а отже, міняється швидкість

вихідної ланки гідродвигуна. Регулятор тиску підтримує постійним тиск живлення перед дроселем, що створюється насосом. Направляючий гідророзподільник (золотник) здійснює реверсування роторного або поршневого гідромотора.

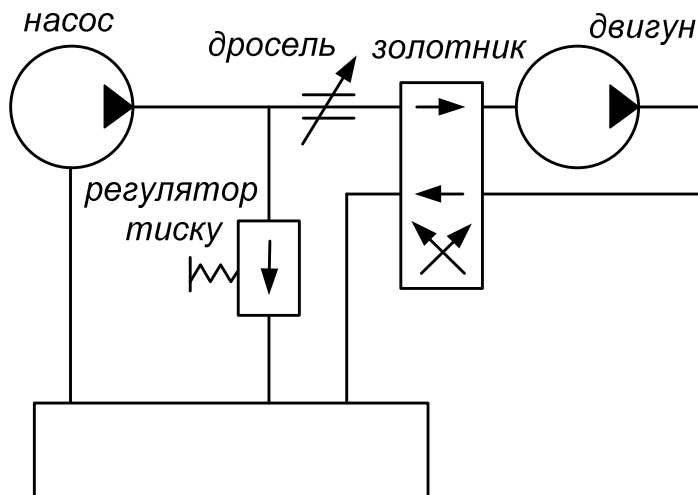


Рис. 1.9. Схема гідродвигуна із дросельним регулюванням

Статична характеристика дросельного гідроприводу записується у вигляді:

$$\dot{x} = \mu f(u) \frac{\sqrt{2}}{k_d \sqrt{\rho}} \sqrt{p_n - \frac{Q}{k_d}} - \frac{g_s}{k_d^2} Q, \quad (1.63)$$

де μ – коефіцієнт витрати для дроселя, який залежить від форми його перерізу; $f(u)$ – залежність площі отвору від вхідного параметра u тобто від положення крана; ρ – об'єм робочої рідини; p_n – тиск на вході у дросель, який вважається постійним.

Для режимів, близьких до статичних ($u = u_0 \approx const$, $Q_0 = Q \approx const$, $\dot{x} = v_0 \approx const$), можна користуватися лінеаризованою динамічною характеристикою [6]:

$$T \frac{d}{dt} (Q - Q_0) + Q - Q_0 = r(u - u_0) - s(\dot{x} - v_0), \quad (1.64)$$

де Q_0 , u_0 , v_0 – відповідно момент на валу двигуна, положення заслінки дроселя та швидкість двигуна, в околі яких здійснена лінеаризація; T – постійна часу двигуна, яка визначається за формулою

$$T = \frac{\sqrt{2}V_0}{E \mu f(u_0)} \sqrt{\rho \left(p_n - \frac{Q_0}{k_\partial} \right)}; \quad r \text{ та } s - \text{ коефіцієнти, які визначають за}$$

$$\text{формулами: } r = 2k_\partial \frac{df}{du} \frac{u_0 \left(p_n - \frac{Q_0}{k_\partial} \right)}{f(u_0)}, \quad s = \frac{\sqrt{2}k_\partial^2}{\mu f(u_0)} \sqrt{\rho \left(p_n - \frac{Q_0}{k_\partial} \right)}.$$

Характеристика (1.64) справедлива при значенні сили, що не перевищує деякого граничного значення тиску, обумовленого налаштуванням регулятора. Це граничне значення слабо залежить від \dot{x} . В цілому статичні робочі характеристики мають форму, показану на рис. 1.10, де ділянка ВС відповідає формулі (1.63), а ділянка АВ визначається налаштуванням регулятора тиску.

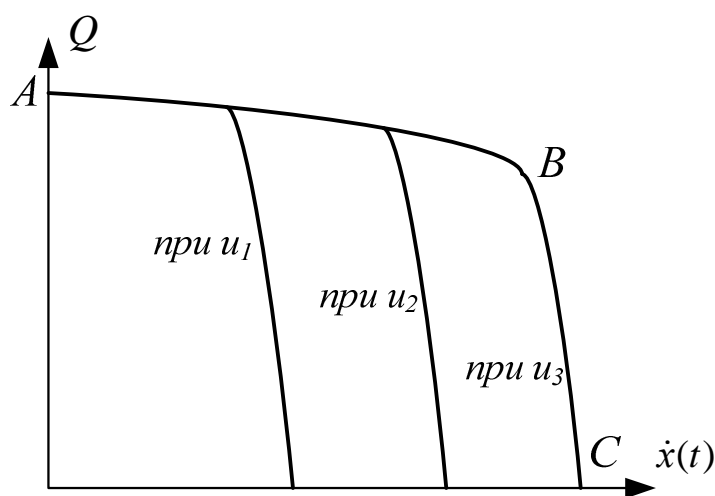


Рис. 1.10. Сімейство статичних характеристик двигуна із дросельним регулюванням

1.3.3. Пневматичний двигун

У пневматичних двигунах у якості робочого тіла звичайно використовують стиснене повітря. Найчастіше пневматичні приводи

використовують у якості силових: вони забезпечують прикладення до виконавчого органа (наприклад, поршня) заданої сили, величина якої визначається тиском у робочій камері циліндра. На рис. 1.11 схематично показано найпростіший поршневий пневмодвигун із однією робочою камерою. Вхідним параметром є координата органа (золотника, заслінки), який керує надходженням стисненого повітря в робочу камеру.

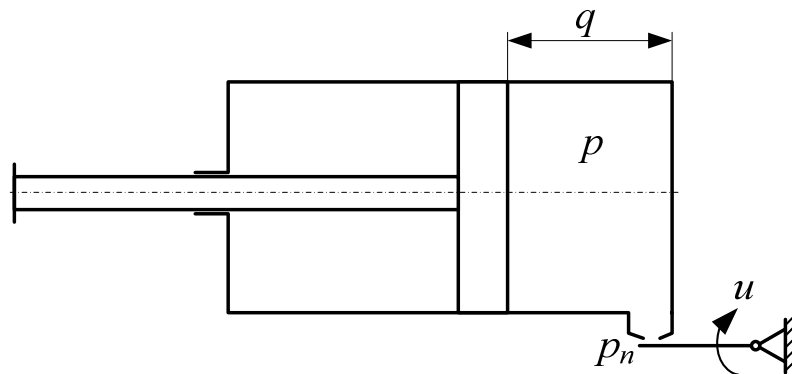


Рис. 1.11. Схема поршневого пневмодвигуна

Механічні характеристики пневматичного двигуна є нелінійними. Якщо прийняти певні припущення, щодо характеру термодинамічних процесів, що відбуваються при заповненні камери, можна одержати вираз лінеаризованої динамічної характеристики пневматичного двигуна, який з точністю до коефіцієнтів збігається з формулою (1.64). Коефіцієнти для динамічної механічної характеристики пневмодвигуна, які входять у вираз (1.64) визначаються так:

$$\begin{cases} T = \frac{S h_0 \mu g}{R \tau} \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0; \\ r = -S \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)_0 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0 \right]^{-1}; \\ s = -\frac{S^2 p_0 \mu g}{R \tau} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0 \right]^{-1}, \end{cases} \quad (1.65)$$

де S – площа поршня; R – універсальна газова стала; τ – абсолютна температура; p – тиск у робочій камері; h_0 – швидкість руху поршня двигуна, в околі якої лінеаризована механічна характеристика; μ – коефіцієнт витрати, величина якого залежить від конструкції дроселя і може змінюватись від 0,75

до 0,9; $\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_0$ та $\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)_0$ визначаються при $u=u_0$ та $p=p_0$ із формули:

$$G = \mu f(u) g \sqrt{2p_n \rho_n F(p/p_n)}, \quad (1.66)$$

де p_n – тиск живлення; залежність $F(p/p_n)$ визначається за формулою:

$$F(p/p_n) = \begin{cases} \frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{p}{p_n}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_n}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right], & \text{при } \frac{p}{p_n} > 0,528 \text{ (докритична течія повітря);} \\ \frac{k}{k+1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}, & \text{при } \frac{p}{p_n} \leq 0,528 \text{ (надкритична течія повітря),} \end{cases} \quad (1.67)$$

де k - відношення теплоємкості при постійному тиску до теплоємкості при постійному об'ємі (для повітря $k=1,4$).

1.3.4. Електродвигун постійного струму

До переваг електроприводу можна віднести те, що для нього джерелом енергії слугує мережа постійного або змінного струму. Відсутня необхідність у використанні трубопроводів, а також проблема забруднення навколишнього середовища. Велика кількість машин обладнана електродвигунами постійного струму, на виході котрого крутний момент пропорційний силі струму на вході двигуна. У такому електродвигуні подача струму до ротора здійснюється через щітки, котрі доволі легко можна пошкодити і тому вони вимагають необхідної уваги при обслуговуванні [7].

Принцип дії двигуна постійного струму ілюструє рис. 1.12, він полягає у взаємодії магнітних полів полюсів статора і провідників ротора, по яких протікає струм.

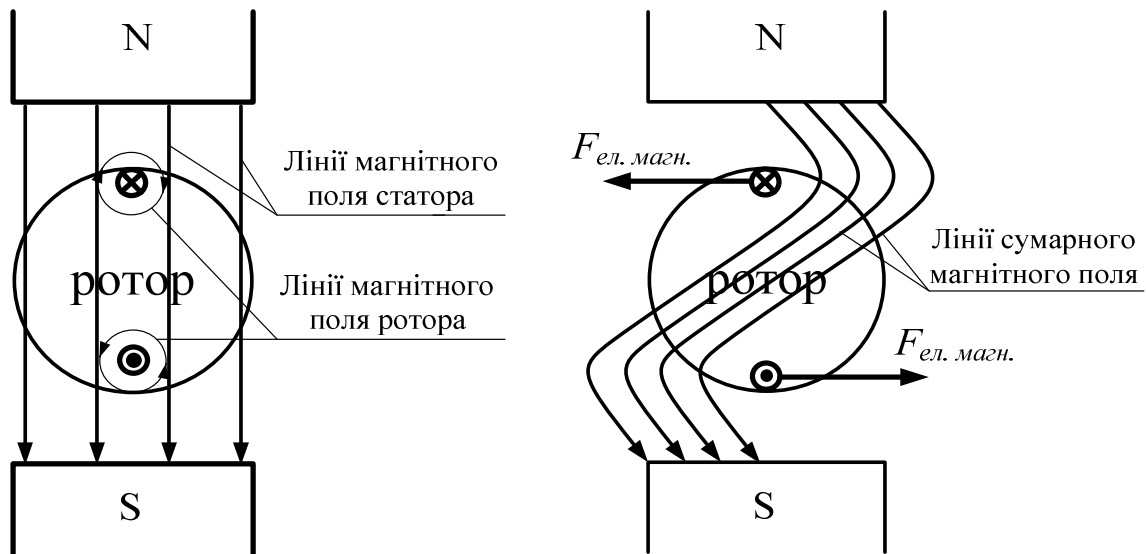


Рис. 1.12. Принцип виникнення електромагнітного моменту у двигуні постійного струму

Якщо струм у провіднику йде від нас (на рис. 1.12 провідник по якому струм йде від нас позначений колом із хрестиком), то, за правилом гвинта, магнітні силові лінії навколо провідника спрямовані за годинниковою стрілкою. У результаті додавання магнітних полів полюсів і провідника підсилиться магнітне поле праворуч від провідника ротора й послабиться ліворуч від нього. До провідника буде прикладена сила, яка виштовхує його убік ослабленого магнітного поля, тобто вліво. Аналогічні процеси відбуваються з провідником, який знаходиться над південним полюсом статора (цей провідник показано колом із точкою – струм по ньому йде до нас).

На рис. 1.13 показано схему вмикання електричного двигуна постійного струму із незалежним збудженням. Електромагнітний момент, що виникає у двигуні виражається формулою:

$$M = k\Phi \cdot I_{rot} = k'I_{коло збудж} \cdot I_{rot}, \quad (1.68)$$

де k – коефіцієнт, що залежить від конструкції ротора двигуна; k' – коефіцієнт, що залежить від конструкції ротора та статора двигуна; Φ – магнітний потік двигуна; I_{rot} – струм обмотки ротора; $I_{коло збудж}$ – струм кола збудження двигуна.

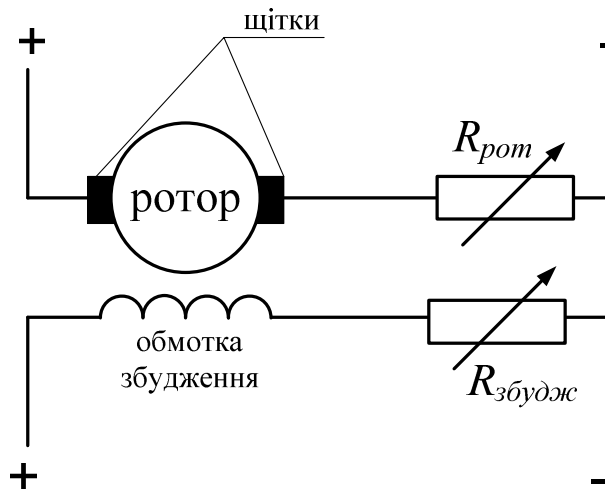


Рис. 1.13. Електрична схема вмикання двигуна постійного струму незалежного збудження

Статична механічна характеристика двигуна постійного струму має вигляд:

$$\dot{x} = \frac{U}{k\Phi} - Q \frac{R_{я} + R_{rot}}{k^2\Phi^2}, \quad (1.69)$$

де U – напруга живлення двигуна; $R_{я}$ і R_{rot} – відповідно опори якоря та додаткового реостату включеного в коло якоря.

Якщо врахувати електромагнітну інерційність електричного двигуна, то можна отримати його динамічну механічну характеристику:

$$T\dot{Q} + Q = \beta \left(\frac{U}{k\Phi} - \dot{x} \right), \quad (1.70)$$

де β – жорсткість механічної характеристики ($\beta = \frac{k^2 \Phi^4}{R_{я} + R_{ром}}$); T – електромеханічна стала часу двигуна ($T = \frac{L_{я}}{R_{я} + R_{ром}}$); $L_{я}$ – індуктивність якірного електричного кола двигуна.

1.3.5. Електропривод змінного струму

Значна частина машин та механізмів обладнана асинхронним двигуном із короткозамкненим ротором. У пазах статора розміщена обмотка, що утворює фазні зони, зсунуті в просторі на 120 електричних градусів. При підключенні обмотки статора до трифазної мережі, напруги фаз якої зсунуті на 120°, виникає магнітне поле, що обертається у статорі з кутовою швидкістю:

$$\dot{x}_0 = \frac{2\pi f_1}{p}, \quad (1.71)$$

де \dot{x}_0 – швидкість ідеального холостого ходу двигуна; f_1 – частота мережі; p – число пар полюсів. У пазах короткозамкненого ротора закладені металеві стержні (обмотка ротора), з'єднані по кінцях, вони утворюють „білячу клітку”. При обертанні ротора зі швидкістю поля $\dot{x} = \dot{x}_0$ (ідеальний холостий хід) у його стержнях не наводиться ЕРС, не протікає струм, не створюється електромагнітний момент. Прикладена до обмоток напруга, врівноважується ЕРС самоіндукції. Якщо на вал двигуна прикласти зовнішній момент навантаження Q_c ротор починає відставати від обертового поля статора, тобто $\dot{x} \neq \dot{x}_0$, у його стержнях наводиться ЕРС і протікає струм, що, взаємодіючи з магнітним полем статора, створює електромагнітний момент Q , який врівноважує момент навантаження Q_c [8].

Механічна характеристика асинхронного двигуна є нелінійною, вона описується рівнянням Клосса [7]:

$$Q = \frac{2M_{\max}(1 + s_{кр}a)}{\frac{\dot{x}_0 - \dot{x}}{s_{кр}\dot{x}_0} + \frac{s_{кр}\dot{x}_0}{\dot{x}_0 - \dot{x}} + 2s_{кр}a}, \quad (1.72)$$

де M_{\max} – максимальний момент двигуна; $s_{кр}$ – критичне ковзання, при якому настає максимальний момент; a – безрозмірний параметр ($a = \frac{R_1}{R'_2}$);

R_1 , R'_2 – активний опір статора та приведений до статора опір ротора відповідно. Якщо потужність двигуна більше 5 кВт, то можна прийняти $R_1 \approx 0$ і рівняння (1.72) спрощується:

$$Q = \frac{2M_{\max}}{\frac{\dot{x}_0 - \dot{x}}{s_{кр}\dot{x}_0} + \frac{s_{кр}\dot{x}_0}{\dot{x}_0 - \dot{x}}}. \quad (1.73)$$

На рис. 1.14. суцільною лінією показана механічна характеристика асинхронного двигуна. Штрихова лінія показує провал моменту при ковзанні $s \approx 0,85$ (це мінімальний момент двигуна). Виникнення провалу функції моменту на графіку (рис. 1.14) є наслідком впливу моментів створюваних вищими непарними гармоніками в магнітному полі обмоток. Якщо прийняти припущення, що двигун працює на лінійній ділянці механічної характеристики, тобто $\dot{x}_0 \geq \dot{x} \geq \dot{x}_0(1 - s_{кр})$, то можна записати динамічну механічну характеристику асинхронного двигуна, яка співпадає із аналогічною характеристикою двигуна постійного струму з точністю до коефіцієнтів (для асинхронного двигуна справедливі такі рівності

$$T = \frac{1}{2\pi f_1 s_{кр}}, \quad \beta = \frac{2M_{\max}P}{2\pi f_1 s_{кр}}).$$

Зображена на рис. 1.14 механічна характеристика є статичною оскільки вона не враховує коливання моменту, які виникають під час електромагнітних перехідних процесів у двигуні. Для того, щоб врахувати електромагнітні перехідні процеси необхідно розглянути математичну

модель асинхронного двигуна, на основі якої можна побудувати динамічну механічну характеристику двигуна.

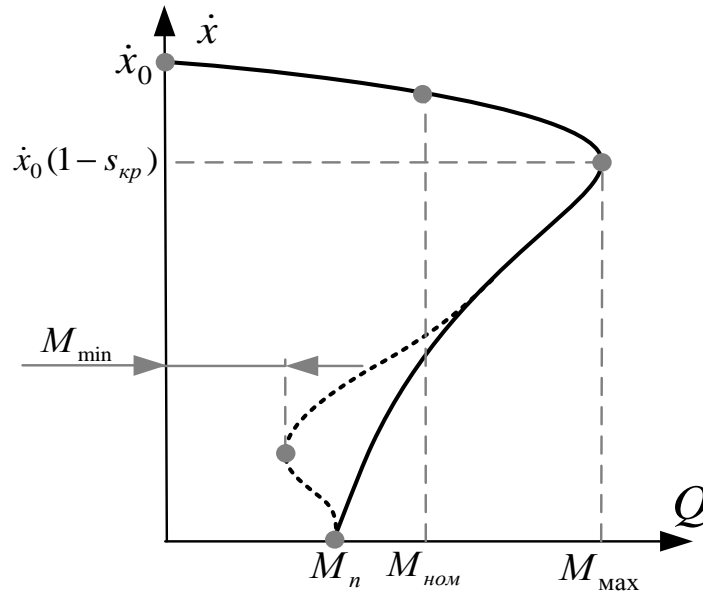


Рис. 1.14. Механічна характеристика асинхронного двигуна

Диференціальні рівняння, які описують асинхронний двигун у формі рівнянь Коші представляються у такому вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_{1u}}{dt} = -\frac{R_1}{L_1\delta}\psi_{1u} + \frac{R_1L_m}{L_1L_2\delta}\psi_{2u} + 2\pi f_1\psi_{1v} + U_1; \\ \frac{d\psi_{1v}}{dt} = -\frac{R_1}{L_1\delta}\psi_{1v} + \frac{R_1L_m}{L_1L_2\delta}\psi_{2v} - 2\pi f_1\psi_{1u}; \\ \frac{d\psi_{2u}}{dt} = -\frac{R_2}{L_2\delta}\psi_{2u} + \frac{R_2L_m}{L_1L_2\delta}\psi_{2u} + (2\pi f_1 - \dot{x})\psi_{2v}; \\ \frac{d\psi_{2v}}{dt} = -\frac{R_2}{L_2\delta}\psi_{2v} + \frac{R_2L_m}{L_1L_2\delta}\psi_{1u} - (2\pi f_1 - \dot{x})\psi_{2u}; \\ Q = \frac{3}{2}p \frac{L_m}{L_1L_2\delta}(\psi_{1v}\psi_{2u} - \psi_{1u}\psi_{2v}), \end{array} \right. \quad (1.74)$$

де ψ_{1u} , ψ_{1v} – потокозчеплення статора у координатах $(u-v)$; ψ_{2u} , ψ_{2v} – потокозчеплення ротора у координатах $(u-v)$; R_1 , R_2 – активний опір статора та приведений до статора опір ротора; L_1 , L_2 – індуктивності статорної та роторної обмоток; L_m – взаєміндукція; δ – коефіцієнт розсіювання; U_1 – напруга, яка підводиться до статора двигуна. На основі системи рівнянь

(1.74) побудовано динамічну механічну характеристику асинхронного двигуна (рис. 1.15).

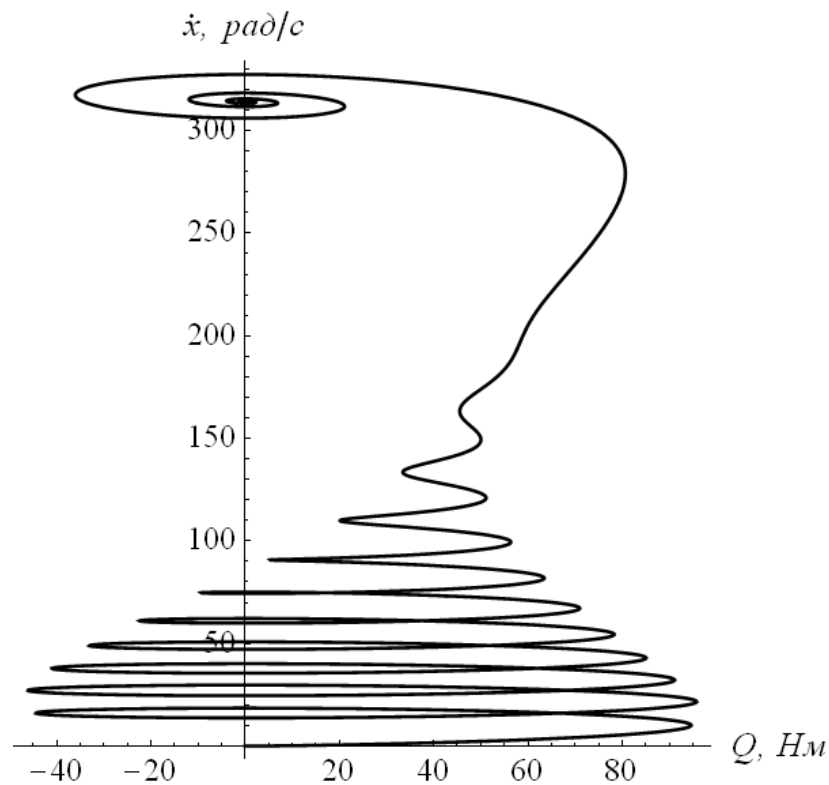


Рис. 1.15. Динамічна механічна характеристика асинхронного двигуна

1.4. Сили опору робочих машин

Виконання робочих процесів завжди супроводжується виникненням робочих навантажень – активних сил, що діють на робочі органи машини. Вивчаючи властивості робочих процесів, можна виявити залежності між величиною робочого навантаження і кінематичними параметрами, що визначають координати, швидкості та прискорення точок робочих органів, а в ряді випадків і явну залежність сили від часу. Відповідна функція

$$P_{on} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (1.75)$$

називається **характеристикою робочого процесу**.

Відзначимо, що залежність робочих навантажень від прискорень робочих органів машини виникає в тих випадках, коли машина виконує транспортні операції або коли технологічний процес, що виконується машиною, пов'язаний з переміщенням оброблюваної сировини (наприклад, перемішуванням).

Вивчення робочих процесів і їх характеристик є завданням відповідних спеціальних наукових дисциплін і виходить за рамки загальної теорії динаміки машин. Так, характеристики сил різання, що виникають при обробці металів на верстатах, вивчаються в теорії різання, характеристики сил, що діють на ротор генератора – у теорії електричних машин, характеристики сил, що діють на поршень компресора – у теорії пневматичних систем тощо. Тому тут обмежимося розглядом лише деяких характерних прикладів.

1. Постійна сила опору. Активною силою, що діє на робочий орган підйомника є сила ваги вантажу, що піднімається. Ця сила не залежить ні від швидкості підйому, ні від положення вантажу, ні від часу, тобто вона завжди залишається постійною протягом усього процесу підйому. Таким чином, у цьому випадку

$$P_{on} = const. \quad (1.76)$$

Таку характеристику робочого процесу мають механізми підйому вантажу та переміщення вантажопідйомних кранів, ліфти, лебідки тощо.

2. Сила (момент) опору лінійно залежить від швидкості. На рис. 1.16 показана схема підключення генератора постійного струму, який працює на незмінне зовнішнє електричне навантаження $R_{нав}$. Момент опору на валу генератора прямопропорційний швидкості його обертання:

$$M_{on} = \frac{(R_{я} + R_{нав})}{k^2 \Phi^2} \omega \cdot \text{sign}(\omega), \quad (1.77)$$

$sign(\omega)$ - сінгнум-функція (функція знаку), яка враховує напрямок обертання робочої машини.

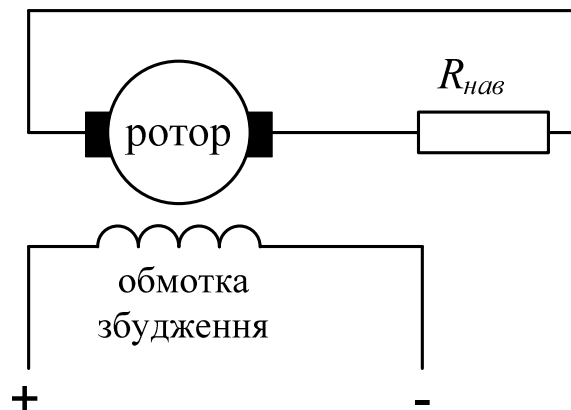


Рис. 1.16. Схема підключення генератора постійного струму

3. Сила (момент) опору квадратично залежить від швидкості. Активні сили, що діють на ротор обертового вентилятора, мають аеродинамічне походження. Отже, момент опору вентилятора залежить від кутової швидкості ротора. В аналітичній формі ця залежність може бути приблизно представлена в наступному виді:

$$M_{on} = a\omega^2 sign(\omega), \quad (1.78)$$

де a - коефіцієнт; ω - кутова швидкість вентилятора. Характеристику (1.78) мають відцентрові насоси, гребні гвинти та інші машини.

4. Сила (момент) опору оберненопропорційно залежить від швидкості. Для деяких металообробних верстатів (токарних, розточних, фрезерних та інших) споживана потужність під час зміни швидкості їх обертання залишається постійною. У цьому випадку момент опору робочої машини можна представити такою формулою:

$$M_{on} = \frac{N_{спож}}{\omega} sign(\omega), \quad (1.79)$$

де $N_{спож}$ - споживана робочою машиною потужність ($N_{спож} = const$).

У формулах (1.77)-(1.79) множник $sign(\omega)$ показує, що при зміні напрямку обертання робочої машини момент опору на її валу також змінює свій знак.

5. Сила (момент) опору залежна від положення. Розглянемо робочий процес, що відбувається в циліндрі поршневого компресора (рис. 1.17, а). Тут робочий орган – поршень 1 робить зворотно-поступальний рух. При його робочому ході (вправо) повітря в циліндрі стискується, тиск росте до тих пір, поки не відкривається випускний клапан 2. Потім починається витікання повітря через клапан, при якому тиск у камері залишається близьким до постійного. При зворотному ході відбувається засмоктування повітря через впускний клапан 3; при цьому тиск у циліндрі стає трохи нижчим за атмосферний. Приблизна форма індикаторної діаграми компресора, що виражає залежність тиску, а отже, і активної сили P_{on} , яка рівна добутку тиску на площу поршня, від координати x , показана на рис. 1.17, б.

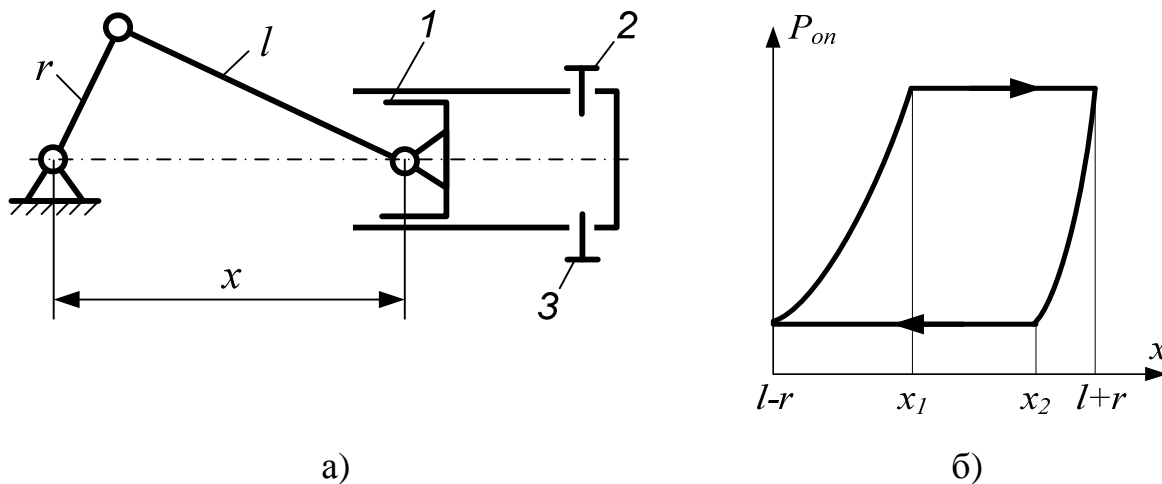


Рис. 1.17. Схема поршневого компресора (а) та його індикаторна діаграма (б)

У ряді машин вплив сил робочого процесу на робочі органи машини є короткочасним і здійснюється лише на малій ділянці траєкторії робочого органа. Це має місце, наприклад, у кувальних пресах, відбійних молотках, машинах для забивання палів тощо. Робочі процеси такого роду називають ударними або імпульсними. Типова характеристика ударного процесу для

штампувального верстату показана на рис. 1.18 (тут x_{max} - максимальне переміщення робочого органу; Δ - положення робочого органу, при якому виникає ударне навантаження).

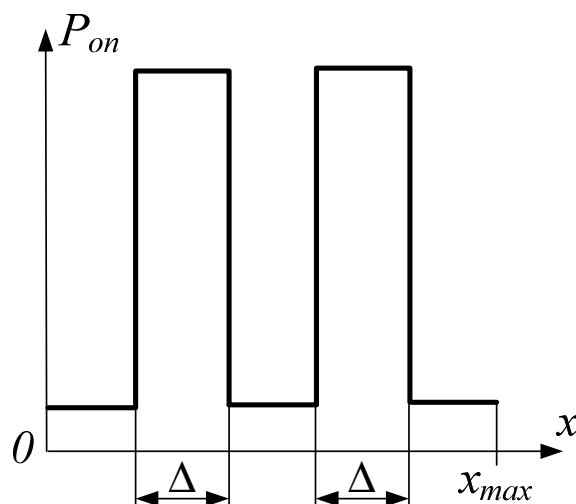


Рис. 1.18. Робоча характеристика штампувального верстату

Для обох механізмів (компресора та штампувального верстату) справедливою є рівність:

$$P_{on} = f(x). \quad (1.80)$$

У всіх розглянутих прикладах сили (моменти) опору є постійними або залежать від швидкості або координати робочого органу машини. Явна залежність характеристик робочих процесів від часу й прискорень робочих органів зустрічається порівняно рідко.

1.5. Сухе та в'язке тертя

Перші дослідження законів тертя проводив Леонардо да Вінчі, який установив, що сила тертя, що виникає при контакті тіл, спрямована проти напрямку руху, пропорційна силі, що стискає поверхні, і не залежить від площі контакту цих поверхонь. Сила сухого тертя F_T пов'язана з

нормальною силою, що притискає поверхні P (або рівною їй силою нормальної реакції), і коефіцієнтом тертя μ_1 законом Амонтона - Кулона:

$$F_T \leq \mu_1 P, \quad (1.81)$$

де μ_1 – коефіцієнт сухого тертя; P – нормальна сила, що притискає поверхні. Сила тертя направлена завжди проти дії сили, яка намагається зрушити тіло (тертя спокою), або проти сили, яка рухає тіло.

Для того щоб зрозуміти основи трибології (науки про тертя), необхідно звернутися до топографії поверхонь контактуючих між собою частин реальних механізмів. Ці поверхні ніколи не є ідеально плоскими, вони мають мікронерівності. Місця виступів на одній поверхні не збігаються з місцями виступів на іншій. Однак, при стиску „гострі” виступи поверхонь пластично деформуються й площа контакту збільшується пропорційно прикладеній силі. Саме опір відносному зрушенню цих контактних зон і є основним джерелом тертя руху. Сам опір зрушенню при ідеальному контакті визначається міжмолекулярною взаємодією, що залежать від природи контактуючих матеріалів. Таким чином, пояснюється вплив двох головних факторів, що визначають силу тертя: сили притискання поверхонь P і властивостей матеріалів (враховується коефіцієнтом тертя μ_1). Загалом, після прикладання повздовжньої сили, що прагне зрушити тіла одне відносно одного, можуть виникнути наступні чотири основні режими [9]:

- 1) режим пружних мікропереміщень одного тіла відносно іншого (пружна деформація мікронерівностей на поверхнях тіл);
- 2) режим ковзання по площадках контактів м'якого поверхневого шару (окісних плівок);
- 3) режим, коли при більшій швидкості рідка олива, що видавлюється, створює піднімальну силу, що порушує більшу частину прямих контактів мікронерівностей поверхонь і тим самим знижує силу тертя;

- 4) режим, коли прямі контакти взагалі зникають, одне тіло „пливе” над іншим в шарі оливи і при збільшенні швидкості відносного руху зростає в’язкий опір.

Цим режимам відповідає графік залежності сили тертя від швидкості відносного руху двох тіл $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$, представлений на рис. 1.19.

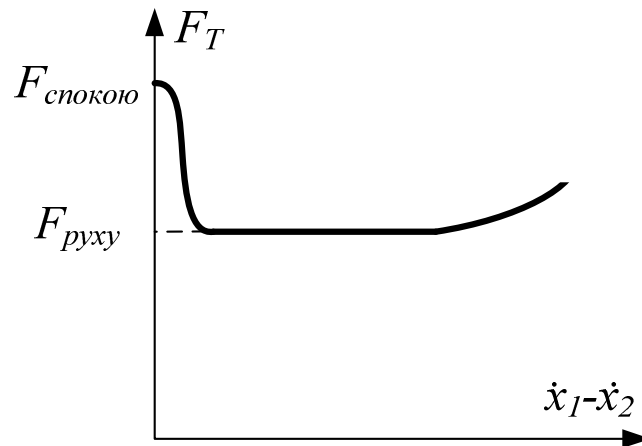


Рис. 1.19. Залежність сили тертя від відносної швидкості руху двох тіл

Відмітимо, що зона спадання коефіцієнта тертя (зона штрибек-ефекту) звичайно дуже мала, порядку мм/с. Якщо ж мащення не вводиться штучно, то збільшення тертя з ростом відносної швидкості ($\dot{x}_1 - \dot{x}_2$) майже непомітне й ми повертаємося до закону Амонтона-Кулона (1.81), за винятком зони дуже малих швидкостей.

Серед багатьох нових моделей тертя одна відрізняється найбільшою простотою, дозволяючи при цьому пояснити основні експериментальні факти. Основна ідея цієї моделі [10] проста: сила тертя визначається пружнов’язким опором деформації виступів на нерівностях поверхонь, а сама середня швидкість деформації нерівностей залежить від швидкості їх відносного руху. Формально це записується у такому вигляді:

$$F_T = -c_0 z + c_1 \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \frac{c_0 z}{F(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)} |\dot{x}_1 - \dot{x}_2| \right), \quad (1.82)$$

де $F(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ - залежність, яка відповідає графіку на рис. 1.19; c_0 - жорсткість мікроступів на поверхнях; z - величина деформації мікроступів на поверхнях.

Загалом у задачах динаміки машин найчастіше користуються законом Амонтона – Кулона (1.81) при відсутності відносного переміщення тіл (тертя спокою) і наступною прощеною формулою при наявності відносного переміщення тіл:

$$F_T = \mu_1 P + \mu_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad (1.83)$$

де μ_2 - коефіцієнт в'язкого тертя.

Другий доданок у правій частині виразу (1.83) визначає в'язке тертя. Тертя називається в'язким, якщо воно існує між поверхнею твердого тіла й рідиною або газоподібним середовищем, яке його оточує і в якому воно рухається. Крім того, в'язке тертя виникає між різними шарами такого середовища. Зазначимо, що при великій швидкості відносного руху $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ лінійна залежність в'язкого тертя перетворюється у квадратичну.

Сили тертя призводять до дисипації (втрати) енергії у механічній системі. Вони можуть бути як корисними (наприклад, призводять до зменшення амплітуди коливання при резонансі), так і шкідливими (виникнення фрикційних автоколивань), тому їх необхідно враховувати при динамічних розрахунках машин та механізмів.

1.6. Зв'язки у машинах та їх класифікація

Зв'язками називаються обмеження, що накладаються на положення й швидкості окремих точок або системи матеріальних точок, якими моделюється машина чи механізм. Нагадаємо, що фізично зв'язок здійснюється у вигляді різних тіл - поверхонь, стержнів, шарнірів, балок

тощо. З іншої сторони будь-який зв'язок можна описати математичними виразом.

Класифікація зв'язків проводиться по виду математичних виразів, що описують зв'язки, причому, матеріальні системи називають по виду зв'язків у системі.

Зв'язки розділяються на **утримуючі** й **неутримуючі**. Якщо зв'язок описується нерівністю, то він називається неутримуючим. Приведемо приклад: прийемо, що у першому наближенні канат, який з'єднує маси візків (рис. 1.20) має нескінченну жорсткість.

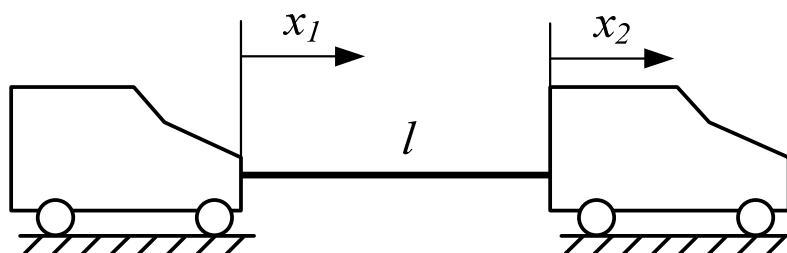


Рис. 1.20. Динамічна модель транспортного поїзду

У цьому випадку справедлива рівність:

$$x_1 - x_2 \leq l, \quad (1.84)$$

де l – довжина гнучкого канату; x_1 та x_2 – положення візків. Візки не можуть віддалитись один від одного більше аніж довжина канату. Однак вони можуть наблизитись, при цьому канат буде провисати. Якщо гнучкий канат замінити на жорстке зчеплення, то нерівність у виразі (1.84) перетворюється у рівність і зв'язок буде вже утримуючим. Необхідно зробити певне зауваження: утримуючі та неутримуючі зв'язки можна використовувати при аналізі динаміки машин лише у першому наближенні. Дійсно, не існує матеріалів які б мали нескінченну жорсткість і тому нерівність (1.84) може порушуватись.

Математичне вираз, що описує утримуючий зв'язок, є рівнянням зв'язку. У загальному випадку рівняння зв'язку, що накладається на деяку точку системи, записується у вигляді:

$$f(x, \dot{x}, t) = 0. \quad (1.85)$$

Залежно від виду рівняння (1.85) зв'язки класифікуються так:

- 1) геометричні й кінематичні (диференціальні);
- 2) стаціонарні (склерономні) й нестаціонарні (реономні);
- 3) голономні й неголономні.

До **геометричних** відносяться зв'язки, у рівняннях яких входять тільки координати точки й, можливо час, тобто: $f(x, t) = 0$.

Кінематичними або **диференціальними** називаються зв'язки, рівняння яких крім координат містять і перші похідні від цих координат і, можливо, час. Прикладом такого зв'язку може бути зв'язок, накладений на колесо, яке котиться без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 1.21).

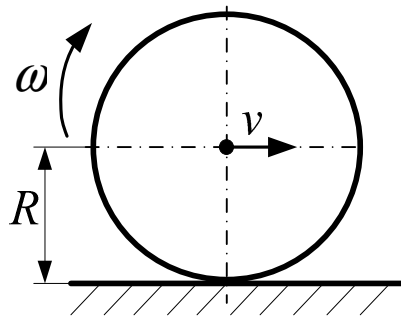


Рис. 1.21. Колесо, що котиться по нерухомій поверхні

У цьому випадку швидкість геометричного центра колеса і його кутова швидкість зв'язані між собою залежністю, що є рівнянням цьому зв'язку:

$$v - R\omega = 0, \quad (1.86)$$

де v – лінійна швидкість переміщення геометричного центра колеса; R – радіус колеса; ω – кутова швидкість колеса.

Зв'язки, у рівняння яких явно не входить час, називаються **стаціонарними (склерономними)**. Розглянуті вище зв'язки є стаціонарними. Якщо час явно входить у рівняння зв'язку, то такий зв'язок називається **нестаціонарним (реономним)**.

Механічна система називається склерономною, якщо на неї накладені тільки стаціонарні зв'язки, в іншому випадку вона називається реономною.

До **голономних** відносяться всі геометричні зв'язки, а також ті кінематичні (диференціальні) зв'язки, які шляхом інтегрування рівняння зв'язку можуть бути зведені до геометричних. Так, наприклад, кінематичний зв'язок, накладний на колесо (рис. 1.21) є голономним оскільки рівняння (1.86), яким він описується, можна проінтегрувати і звести до геометричного:

$$v - R\omega = \frac{dx}{dt} - R \frac{d\varphi}{dt} = dx - R d\varphi = \int dx - R \int d\varphi = x - R\varphi + C = 0, \quad (1.87)$$

де x – лінійна координата геометричного центра колеса; φ – кут повороту колеса; C – постійна інтегрування. Кінематичні або диференціальні зв'язки, рівняння яких не можуть бути проінтегровані, називаються **неголономними**.

Механічна система називається голономною, якщо всі її зв'язки голономні, і неголономною, якщо хоча б один з її зв'язків є неголономним.

1.7. Типові елементи машин, що описуються нелінійними залежностями

При розв'язуванні задач динаміки машин часто виявляється, що елементи, які входять у конструкцію машини мають динамічні характеристики, що описуються нелінійними залежностями. Це ускладнює проведення динамічного аналізу. У деяких випадках вдається знайти аналітичний розв'язок задачі, в інших – лише наближений або чисельний. Складність досліджень нелінійних механічних систем полягає у тому, що в

них не виконується принцип суперпозиції (у цьому головна відмінність властивостей нелінійних систем від властивостей лінійних). Наприклад, результат (відгук) одночасної дії двох збуджуючих сил не дорівнює сумі результатів (відгуків) дії цих сил, які викликані кожною з них окремо. Крім того, зміна величини збурення (величини сили) не приводить до пропорційної зміни величини відгуку (переміщення чи швидкості механізму або машини). Цю властивість можна використовувати в якості критерію при експериментальній перевірці лінійності конкретної механічної системи.

Найбільш істотні особливості нелінійних коливних систем такі: можливість існування декількох положень рівноваги; неізохронність вільних коливань; неоднозначність залежності амплітуди вимушених коливань від частоти гармонічної збуджуючої сили; виникнення супер- і субгармонічних коливань; можливість існування автоколивальних режимів тощо [11].

1.7.1. Момент інерції (маса)

Розглянемо машину, яка складається із механізмів із жорсткими ланками, яка приводиться в рух одним двигуном. Її механічна система має одну ступінь вільності. У якості узагальненої координати вибираємо координату вихідної ланки двигуна φ . Кінетична енергія машини, яка складається із N точок із масами $m_1, \dots, m_k, \dots, m_N$, на рух яких накладені голономні стаціонарні зв'язки (вони обумовлені жорсткістю ланок і наявністю кінематичних пар) знаходиться за формулою:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2), \quad (1.88)$$

де x_k, y_k, z_k – декартові координати k -тої матеріальної точки. В системі з одним ступенем вільності координати всіх точок можуть бути представлені як функції узагальненої координати:

$$\begin{cases} x_k = x_k(\varphi); \\ y_k = y_k(\varphi); \\ z_k = z_k(\varphi). \end{cases} \quad (1.89)$$

Диференціюючи вирази (1.89) за часом, знаходимо:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \frac{dx_k(\varphi)}{dt} = \frac{\partial x_k(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial x_k(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}; \\ \dot{y}_k = \frac{dy_k(\varphi)}{dt} = \frac{\partial y_k(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial y_k(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}; \\ \dot{z}_k = \frac{dz_k(\varphi)}{dt} = \frac{\partial z_k(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial z_k(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (1.90)$$

Підставляючи вирази (1.89) та (1.90) у формулу (1.88) отримаємо

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\left(\frac{\partial x_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial y_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial z_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 \right) = \\ &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\left(\frac{\partial x_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \right) = A(\varphi) \frac{\dot{\varphi}^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

де $A(\varphi)$ – приведена маса (у випадку лінійної узагальненої координати) або приведений момент інерції (для кутової узагальненої координати). Як видно із виразу (1.91) приведена маса залежить від узагальненої координати, яка в свою чергу змінюється в часі відповідно до прикладеної сили та приведеної маси. Таким чином, рівняння руху механізму є нелінійним.

Для прикладу знайдемо приведений момент інерції кривошипно-повзунного механізму, який показано на рис. 1.22.

Для цього запишемо вираз його кінетичної енергії:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 \dot{x}_2^2 + J_2 \dot{\psi}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2, \quad (1.92)$$

де T_1 , T_2 , T_3 – кінетичні енергії кривошипа 1, шатуна 2 та повзуна 3 відповідно; φ_1 – кутова координата повороту кривошипа; x_2 , ψ_2 – лінійна координата центра мас шатуна та кутова координата його повороту; x_3 – лінійна координата повзуна; J_1 – момент інерції кривошипа відносно осі

обертання; J_2 – момент інерції шатуна відносно осі, яка проходить через його цент мас; m_2 – маса шатуна; m_3 – маса повзуна.

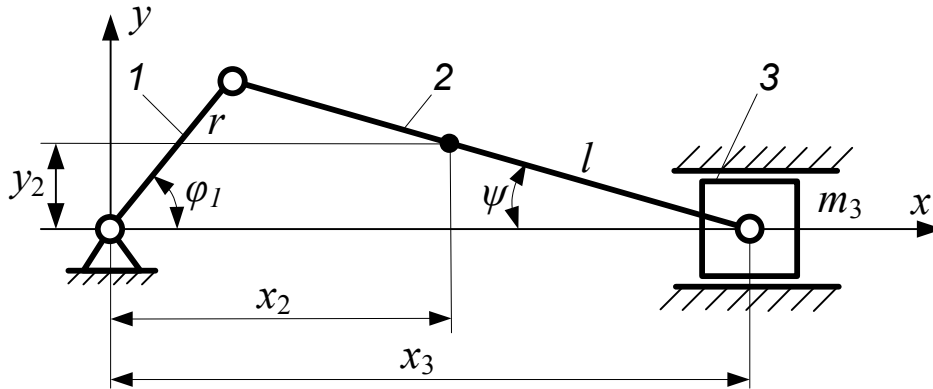


Рис. 1.22. Схема кривошипно-повзунного механізму

Для того, щоб записати остаточно вираз для кінетичної енергії необхідно знайти виразити, які дають змогу перейти від швидкостей \dot{x}_2 , $\dot{\psi}_2$ та \dot{x}_3 до кутової швидкості кривошипа $\dot{\varphi}_1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_2^2 = \dot{\varphi}_1^2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right]; \\ \dot{\psi}_2^2 = \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} \right)^2; \\ \dot{x}_3^2 = \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} \right)^2. \end{cases} \quad (1.93)$$

Підставивши вирази (1.92) у формулу (1.91), остаточно знаходимо:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 \dot{\varphi}_1^2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right] + J_2 \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} m_3 \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 = \\ &= \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \left(J_1 + m_2 \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right] + J_2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 \right) = J(\varphi_1) \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Похідні по φ від функцій положення можна знайти, використовуючи при цьому певні геометричні співвідношення:

$$\begin{cases} x_3 = r \cos \varphi_1 + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}; \\ \psi_2 = \arcsin\left(\frac{r}{l} \sin \varphi_1\right); \\ x_2 = r \cos \varphi_1 + \frac{a}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}; \\ y_2 = r \sin \varphi_1 \left(1 - \frac{a}{l}\right), \end{cases} \quad (1.95)$$

де a – відстань між центром мас шатуна та шарніром, що поєднує шатун і кривошип. Знайдемо частинні похідні (передаточні функції першого порядку):

$$\begin{cases} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} = -r \sin \varphi_1 \left(1 + \frac{r \cos \varphi_1}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}}\right); \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi_1} = \frac{r \cos \varphi_1}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}}; \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} = -r \sin \varphi_1 \left(1 + \frac{ar}{l} \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi_1}}\right); \\ \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} = r \cos \varphi_1 \left(1 - \frac{a}{l}\right). \end{cases} \quad (1.96)$$

На рис. 1.23 побудований графік залежності $J(\varphi_1)$ для таких параметрів механізму: $r=0,065$ м; $l=0,26$ м; $a_2=0,091$ м; $J_1=0,5$ кгм²; $J_2=0,0138$ кгм²; $m_2=1,8$ кг; $m_3=15$ кг.

Аналізуючи вираз для $J(\varphi_1)$ можемо вказати, що у загальному випадку момент інерції має постійну та періодичну складові:

$$J = J_{\text{const}} + J(\varphi_1). \quad (1.97)$$

де J_{const} – постійна складова моменту інерції; $J(\varphi_1)$ – складова моменту інерції, яка залежить від узагальненої координати машини чи механізму (вона, наприклад, може бути періодичною функцією із періодом 2π) [6].

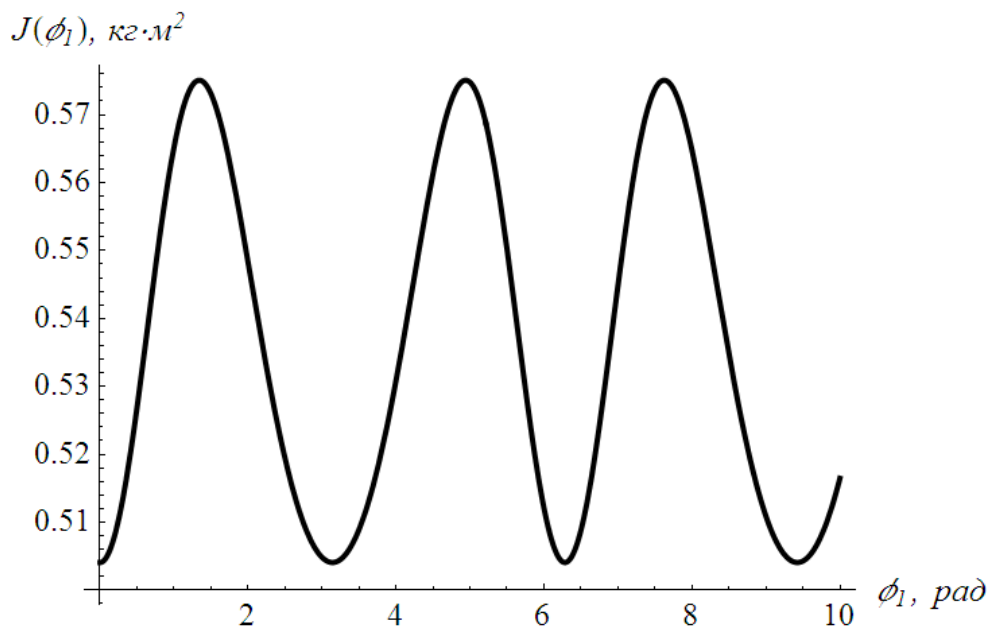


Рис. 1.23. Залежність моменту інерції кривошипно-повзунного механізму від узагальненої координати механізму (кута повороту кривошипа)

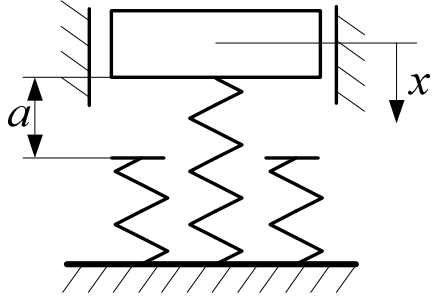
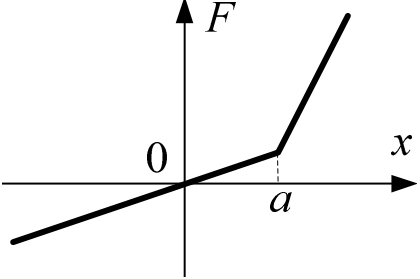
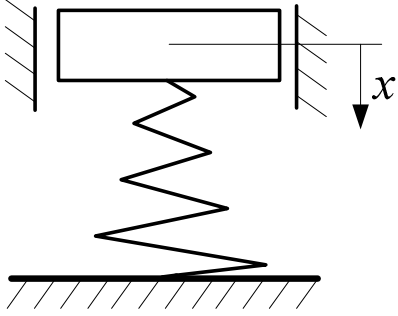
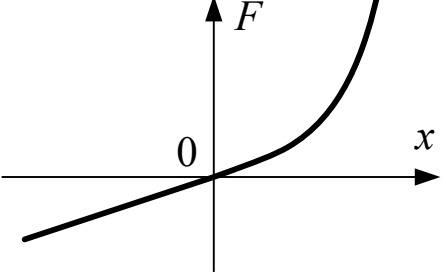
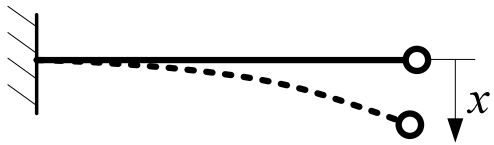
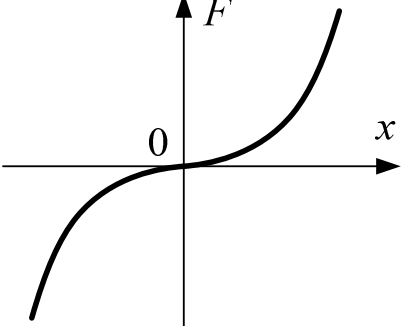
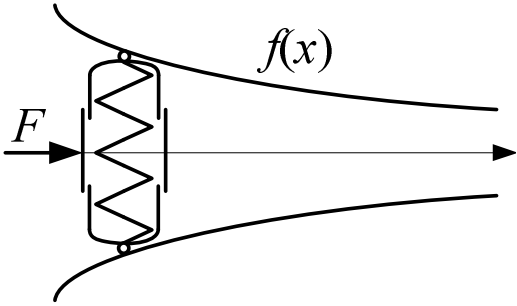
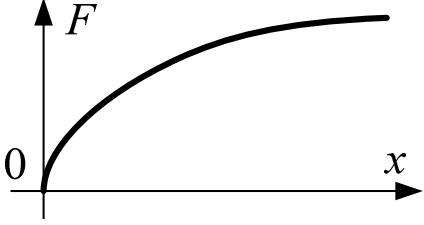
1.7.2. Жорсткість

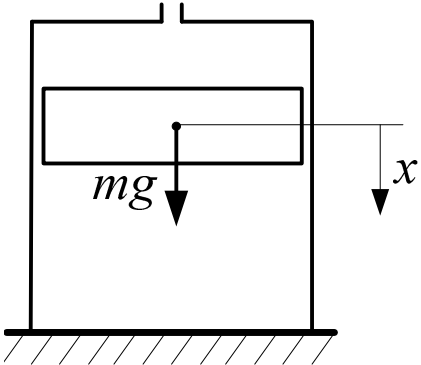
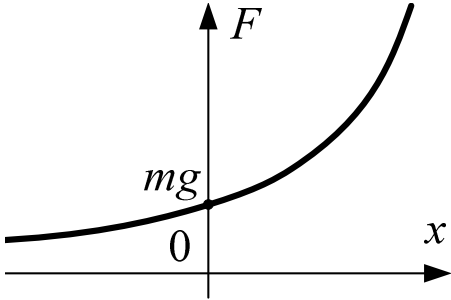
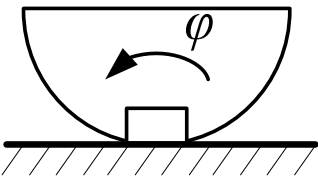
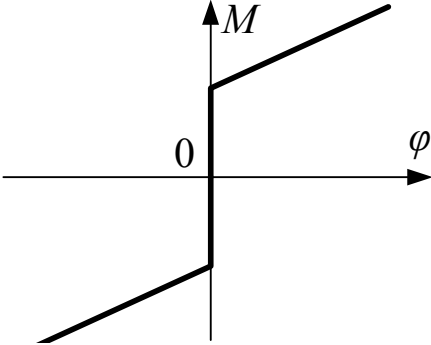
Механічну систему називають нелінійною, якщо співвідношення, що описують процеси її руху, є нелійними, зокрема, якщо хоча б одна з узагальнених сил нелінійно пов'язана з узагальненими координатами й (або) узагальненими швидкостями. Хоча всяка реальна механічна система тією чи іншою мірою нелінійна, у ряді випадків впливом нелінійності можна знехтувати, тоді для опису таких систем можна користуватися спрощеними лінійними моделями й відповідними їм лінійними теоріями.

У найпростіших випадках нелінійність механічної системи пов'язана з нелійними залежностями позиційних сил від узагальнених координат або сил опору від узагальнених швидкостей (1.83).

Для прикладу приведемо таблицю 1.1, в яку занесемо найбільш поширені нелінійні жорсткості та їх характеристики.

Характеристики найпоширеніших нелінійних жорсткостей

Схема системи	Графічна залежність $F(x)$
<p>Вантаж на ресорі з підресорником</p> 	
<p>Вантаж на конічній пружині</p> 	
<p>Гнучка пружна балка</p> 	
<p>Пружний поршень в каналі, що звужується</p> 	 $F = 4c \int_0^x [f(x)]^2 dx,$ <p>де c – коефіцієнт жорсткості лінійної пружини</p>

<p>Вантаж, який підтримується газом у замкнутому циліндрі</p> 	
<p>Важкий півциліндр з повздожньою канавкою</p> 	

Похідну $\frac{dF}{dx}$ називають квазіпружним коефіцієнтом, або, якщо F - це сила пружності, то коефіцієнтом жорсткості. У нелінійних системах цей коефіцієнт залежить від узагальненої координати. Якщо зі зростанням координати x він збільшується при $x > 0$ (або зменшується при $x < 0$), то характеристику називають жорсткою. У протилежному випадку характеристику називають м'якою. Характеристики можуть бути твердими в одних проміжках значень x і м'якими в інших.

В усіх наведених випадках нелінійність жорсткості проявляється лише при великих відхиленнях системи від положення рівноваги; при малих відхиленнях ці системи можна вважати лінійними (межі таких відхилень встановлюються додатковим дослідженням, вони залежать від характеру досліджуваної задачі й вимог точності). Можливі також протилежні випадки: нелінійність у механічній системі проявляється при як завгодно малих

відхиленнях системи від положення рівноваги; часто нелінійні властивості таких систем особливо помітні саме при малих відхиленнях [11].

1.7.3. Дисипація

Найчастіше сили опору, що є дисипативними силами у машинах та механізмах, описуються нелінійними функціями швидкостей, однак у практичних розрахунках ці функції іноді можна лінеаризувати, вважаючи опір лінійно-в'язким. Звичайно, підставою для лінеаризації сил опору служить не стільки слабка нелінійність дійсних залежностей (у дійсності вона може бути сильною), оскільки малий вплив сил опору на деякі динамічні (наприклад, коливні) властивості й процеси. Так, у більшості випадків для розрахунків частот вільних коливань досить використовувати лінеаризовані характеристики сил тертя, а іноді навіть повністю знехтувати опорами. Силами тертя часто можна знехтувати й при обчисленні амплітуд вимушених коливань у режимах, які знаходяться далеко від резонансу.

Лінеаризація сил опору й тим більше нехтування ними не завжди є правомірним. Можливу нелінійність сил опору слід враховувати при аналізі вільних загасаючих коливань і при обчисленні резонансних амплітуд вимушених коливань (при відсутності опору амплітуда коливань в резонансному режимі збільшується необмежено). Особливо важливо враховувати нелінійні дисипативні сили при знаходженні стаціонарних режимів автоколивань і кінцевих амплітуд коливань при параметричному резонансі, а також при дослідженні перехідних процесів в автоколивних системах [11].

1.8. Питання та завдання для самоперевірки

1. Що таке ступінь вільності механічної системи?
2. Які є способи вибору кількості ступенів вільності реальних механічних систем?
3. Прокоментуйте кожний етап у процесі моделювання машини.
4. Яким вимогам повинна задовольняти динамічна модель машини?
5. За якими умовами виконується приведення мас (моментів інерції), жорсткостей та сил (моментів)?
6. Які три методи синтезу математичних моделей машин вам відомі?
7. За методами рівноваги і можливих переміщень синтезуйте математичну модель динамічної системи, що показана на рис. 1.24, а.
8. Використовуючи принцип Гамільтона-Остроградського і рівняння Лагранжа другого роду, побудуйте математичну модель руху для системи на рис. 1.24, б.

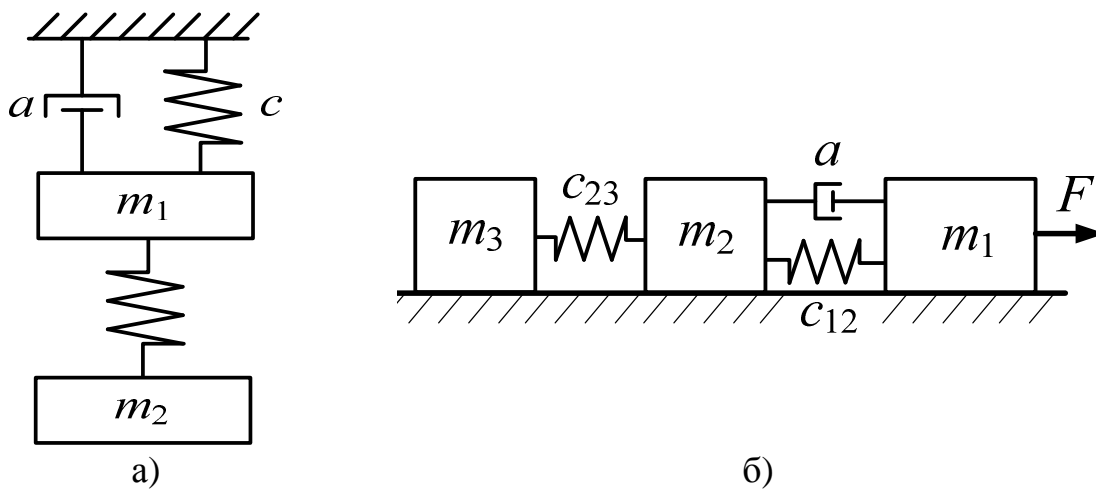


Рис. 1.24. Динамічні моделі: а) двомасова; б) тримасова

9. Що таке ідеальна силова та ідеальна кінематична характеристики приводу машини?
10. У чому різниця між статичною та динамічною механічними характеристиками двигунів?

11. Поясніть принцип дії гідравлічних двигунів об'ємного і дросельного регулювання та прокоментуйте їх механічні характеристики.
12. Від чого залежить приводне зусилля пневматичного двигуна?
13. Поясніть принцип виникнення електромагнітного моменту у двигуні постійного струму.
14. Проаналізуйте статичну та динамічну механічну характеристику асинхронного двигуна та вкажіть випадки доцільності використання цих характеристик при динамічному аналізі машини.
15. Дайте пояснення виникненню сил опору робочих машин (лебідки, вентилятора, поршневого компресора, штампувального верстату).
16. Що таке сухе та в'язке тертя та якими законами вони описуються?
17. За якими параметрами проводять класифікацію зв'язків у машинах?
18. Чому момент інерції кривошипо-повзунного механізму залежить від кута повороту кривошипа? Приведіть приклади механізмів, моменти інерції (маси) яких залежать від узагальнених координат машини.
19. Чим викликані нелінійні залежності жорсткості від узагальнених координат реальних механізмів?
20. У яких випадках необхідно враховувати нелінійність сил опору?

РОЗДІЛ 2

КОЛИВАННЯ У МАШИНАХ ТА МЕХАНІЗМАХ

При вивченні динаміки машин та механізмів виявляється, що положення їх елементів змінюються з часом, отже, координати елементів є функціями часу. **Основна задача динаміки** полягає у визначенні цих функцій або, як кажуть, у визначенні законів руху системи. Після цього по відомих формулах опору матеріалів визначаються внутрішні зусилля, напруження й деформації в елементах механізмів та машин [1]. Дуже часто рух елементів механізмів та машин є коливним, тому при вивченні динаміки машин необхідно знати основні положення теорії коливань та методи їх дослідження.

2.1. Класифікація коливань

За способом збудження коливань розрізняють коливання: вільні, вимушені, параметричні та автоколивання.

- 1. Вільні (власні) коливання** обумовлені початковими відхиленнями елементів коливної системи від положення рівноваги. Один з багатьох прикладів (рис. 2.1, а) - маятник, який характеризується тим, що кут відхилення φ або/і кутова швидкість $\dot{\varphi}$ у початковий момент часу $t=0$ не рівні нулю.
- 2. Вимушені коливання** обумовлені дією зовнішньої (наприклад, періодичної) сили (рис. 2.1, б).
- 3. Параметричні коливання** обумовлені зміною яких-небудь параметрів системи. Приклад наведено на рис. 2.1, в. Зміна довжини гнучкого підвісу, призводить до зміни частоти власних коливань системи (маятника). Параметричні коливання, як і вимушені, пов'язані з дією на систему зовнішньої сили. Однак параметричні коливання виникають

тоді, коли дія зовнішньої сили веде до зміни параметрів системи, а не до безпосередніх відхилень від положення рівноваги.

- 4. Автоколивання** відбуваються в нелінійних неконсервативних автономних системах. Їхнє існування, амплітуда, період і форма визначаються конструкцією установки, її параметрами, але не початковими умовами. На рис. 2.1, г представлений приклад автоколивань, коли енергія до коливної системи (вантаж на пружині) підводиться через гнучку стрічку. Коливання виникають внаслідок тертя між поверхнями стрічки та вантажу.

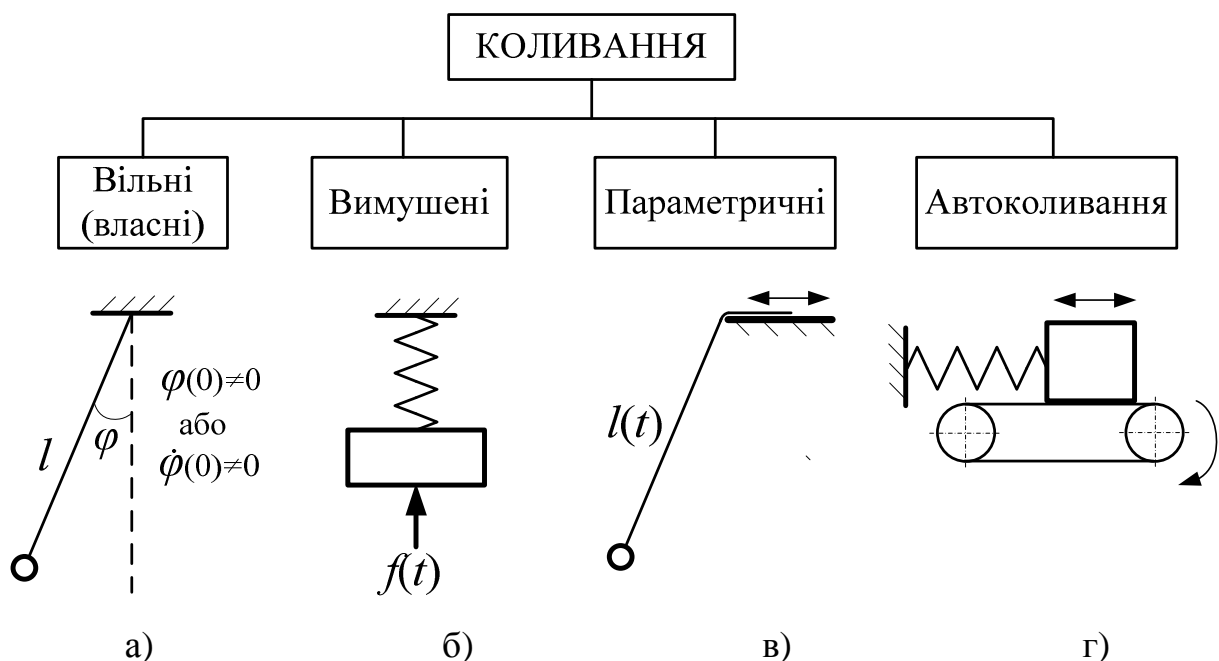


Рис. 2.1. Класифікація коливань

У практичних задачах динаміки становлять інтерес комбінації різних типів коливань. Приведемо деякі з таких комбінацій:

- 4 + 2** - на автоколивну систему діє періодична зовнішня сила;
- 4 + 4** - відбуваються коливання у взаємозалежних автоколивних системах;
- 3 + 4** - в автоколивній системі за періодичним законом змінюються один або кілька параметрів;
- 3 + 2** - на систему зі змінними параметрами діють періодичні зовнішні сили;

2 + 3 + 4 - на автоколивну систему діють безпосередньо періодичні зовнішні сили й одночасно відбувається періодична зміна її параметрів [12].

Класифікацію коливань проводять також за видом деформації, що виникає в елементах коливної системи. Зокрема, стосовно до стержневих систем розрізняють **поздовжні, поперечні (згинні) і крутильні** коливання.

Відповідно до закону, за яким величина, що характеризує коливальний процес, змінюється в часі, розрізняють **періодичні й неперіодичні** коливання. Періодичні коливання підкоряються закону:

$$f(t+T) = f(t), \quad (2.1)$$

де T – період коливань. Крім того, є широкий проміжний клас **майже періодичних коливань**, для яких

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \leq \varepsilon, \quad (2.2)$$

де τ – майже період; ε – мала величина.

Найпростішими та найпоширенішими є **гармонічні коливання**, які описуються рівнянням:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.3)$$

де A – амплітуда коливань; ω – кругова (циклічна або кутова) частота ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) коливань; $\omega t + \varphi$ – фаза коливань; φ – зміщення фази.

Часто зустрічаються періодичні, але негармонічні коливання (рис. 2.2). Їх завжди можна розглядати як суму простих гармонічних коливань. Процес розкладання періодичних негармонічних коливань на прості гармонічні складові (гармоніки) називається **гармонічним аналізом** і виконується за допомогою рядів Фур'є.

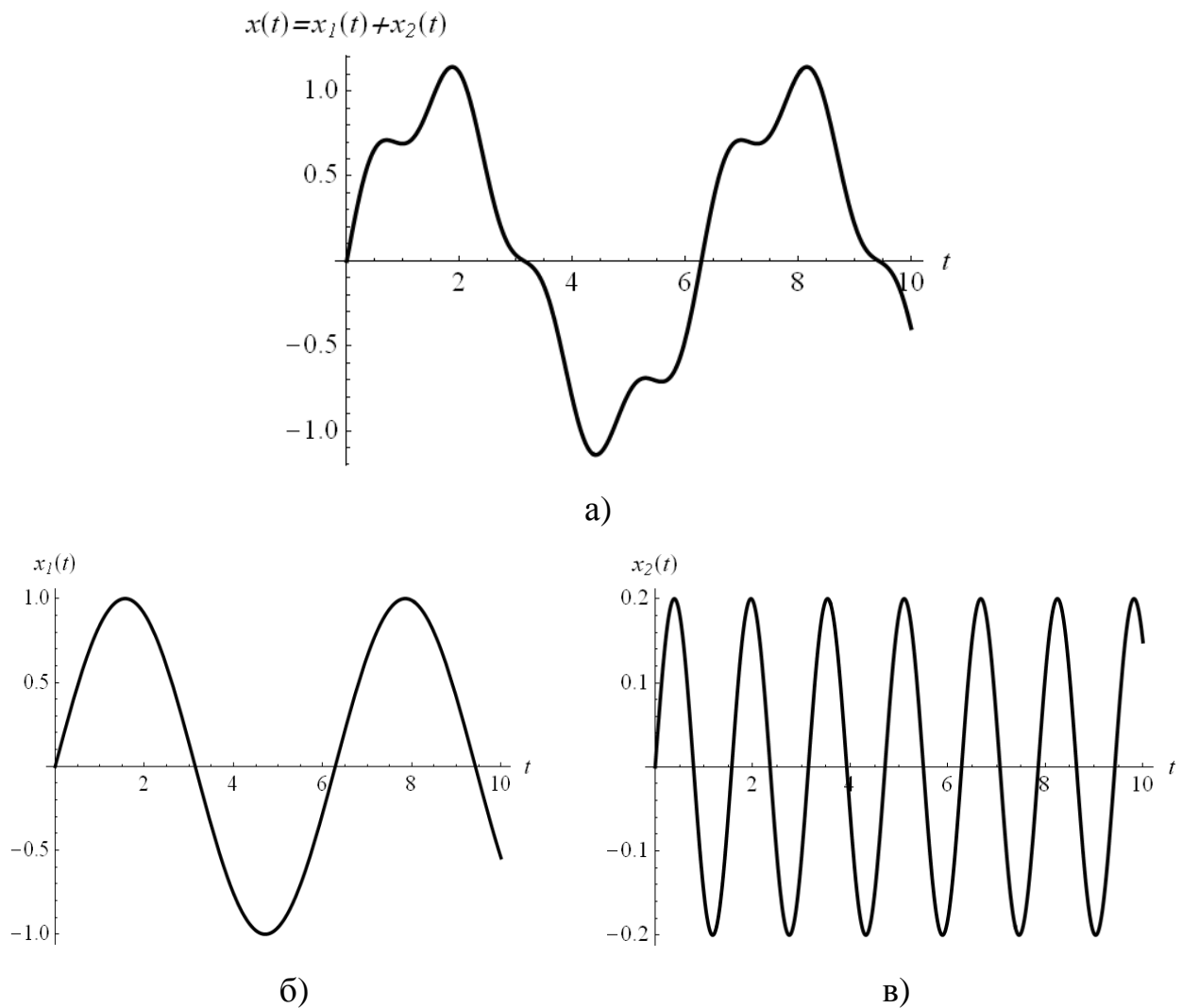


Рис. 2.2. Представлення періодичного негармонічного коливання у вигляді суми двох гармонік: а) періодичне негармонічне коливання; б) перша гармоніка; в) друга гармоніка

Крім того, часто зустрічаються наступні види коливань: **загасаючі** (їх амплітуда поступово зменшується), **наростаючі** (амплітуда цих коливань поступово збільшується). Можливі також коливання зі змінною частотою й постійною амплітудою або змінними частотою й амплітудою [1].

2.3. Фазові траєкторії та фазовий портрет коливань

Одним із методів дослідження коливань (і взагалі руху динамічної системи) є аналіз її фазового портрету. Фазовий портрет коливання будують

таким чином: швидкість руху \dot{x} відкладається по осі ординат, а відхилення x – по осі абсцис фазової площини. Кожному руху в момент часу t відповідає зображуючи точка на вказаній площині координат $\dot{x} - x$, що однозначно відповідає миттєвим значенням координати x та швидкості \dot{x} . Зображуюча точка з плином часу переміщується, описуючи фазову траєкторію. Час відіграє роль параметра оскільки рівняння фазової траєкторії задане залежністю між координатою й швидкістю $\dot{x} = f(x)$.

Недоліком фазового портрета є неможливість безпосереднього представлення процесу в часі, але цей недолік компенсується великою перевагою: тут із чисто геометричного представлення фазової траєкторії або сімейства фазових траєкторій можна зробити важливі висновки про властивості коливань. Це насамперед відноситься до коливань, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Для таких коливань може виявитися, що єдино можливим методом їх дослідження є метод фазової площини.

Розглянемо насамперед простий приклад: визначимо фазову траєкторію гармонічного коливання, яке описується рівнянням (2.3). Виконаємо певні математичні перетворення цього виразу. Спочатку знайдемо його першу похідну за часом:

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.4)$$

Вирази (2.3) та (2.4) піднесемо до квадрату та поділимо на певні коефіцієнти (вираз (2.3) на коефіцієнт A^2 , а вираз (2.4) на коефіцієнт $A^2\omega^2$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} = \sin(\omega t - \varphi)^2, \\ \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \cos(\omega t - \varphi)^2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Додамо обидва рівняння із системи рівнянь (2.5) в результаті чого отримаємо:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \sin(\omega t - \varphi)^2 + \cos(\omega t - \varphi)^2 \quad (2.6)$$

або

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1. \quad (2.7)$$

На фазовій площині таке рівняння описує еліпс із півсями A та $A\omega$ (рис. 2.3). У випадку $\omega=1$ цей еліпс перетворюється в коло. Однак коло можна одержати й для будь-якої частоти ω , змінивши масштаб по осі ординат і відкладаючи по ній не \dot{x} , а \dot{x} / ω .

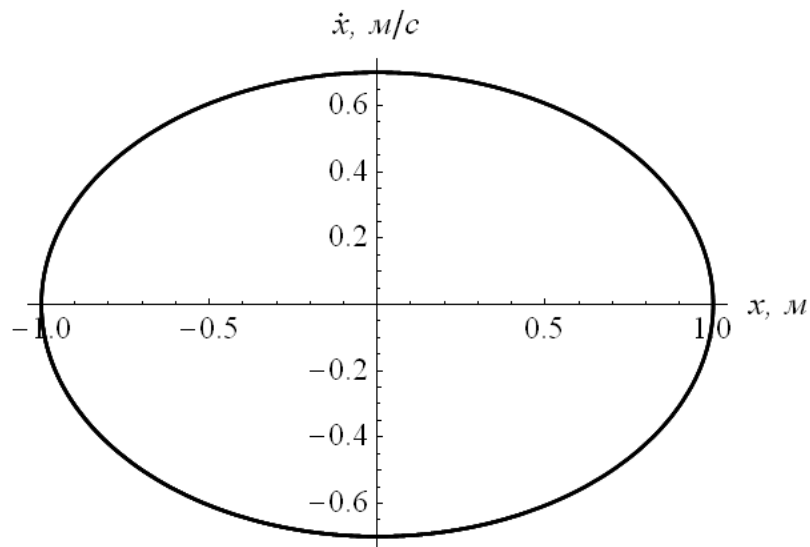


Рис. 2.3. Фазова траєкторія гармонічного коливання

Розглянемо тепер деякі загальні властивості фазових траєкторій. Безпосередньо видно, що кожна зображуюча точка рухається за годинниковою стрілкою. У точках, в яких фазова траєкторія перетинає вісь абсцис усі фазові траєкторії мають вертикальні дотичні. Це впливає з того, що точка перетину з віссю абсцис характеризується значенням швидкості, рівним нулю. Крім того, у цих же точках значення положення приймають

амплітудні значення. У точці перетину із віссю ординат навпаки: положення є нульовим, а швидкість приймає амплітудне значення. Звідси випливає, що в жодній точці верхньої або нижньої півплощини фазова траєкторія не може мати вертикальну дотичну, оскільки в кожній точці, де дотична є вертикальною, швидкість повинна бути рівною нулю. Можливі виключення, коли певні вироджені фазові траєкторії перетинають абсцису не вертикально, але тоді точка перетину завжди є так званою особливою точкою. Докладніше про це буде сказано нижче.

Окрема фазова траєкторія представляє окремі визначені коливання. Якщо потрібне загальне представлення про всі можливі рухи коливної системи, то зображується сімейство фазових траєкторій. Таке сімейство траєкторій називається фазовим портретом системи. Подібно тому як портрет людини дозволяє скласти певне уявлення про неї, фазовий портрет показує фахівцеві важливі властивості динамічної системи.

Положення рівноваги коливної системи завжди представляється особливою точкою фазової площини. Легко бачити, що така точка може лежати тільки на осі x , оскільки лише в цьому випадку можливий стан спокою. По виду фазових траєкторій, що оточують особливі точки, розрізняють наступні типи цих точок: **центр**, **фокус**, **вузол** і **сідло**. Ці поняття, запозичені з теорії диференціальних рівнянь [13], виявилися дуже корисними для опису поведінки коливної системи.

На рис. 2.4, а показана особлива точка типу центр. Вона характерна для незатухаючих коливань, які проходять поблизу положення рівноваги (на рис. 2.4, а чи більший еліпс, тим більшою є енергія коливань). При наявності демпфування кожний еліпс переходить у спіраль (рис. 2.4, б), а особлива точка на початку координат стає фокусом. Якщо демпфування слабке, то спіраль складається з великого числа близько розташованих витків. Чим сильніше демпфування, тем далі витки знаходяться один від одного. При дуже сильному демпфуванні фазовий портрет якісно змінюється, приймаючи вид, показаний на рис. 2.4, в. Тут початок координат є вузлом. В особливій

точці всі фазові траєкторії дотикаються до прямої $a-a$ (штрихова лінія), яка проходить через початок координат. Вздовж цієї прямої фазові траєкторії стягуються в особливу точку (на рис. 2.4, в показані лише дві фазові траєкторії чорного та сірого кольору).

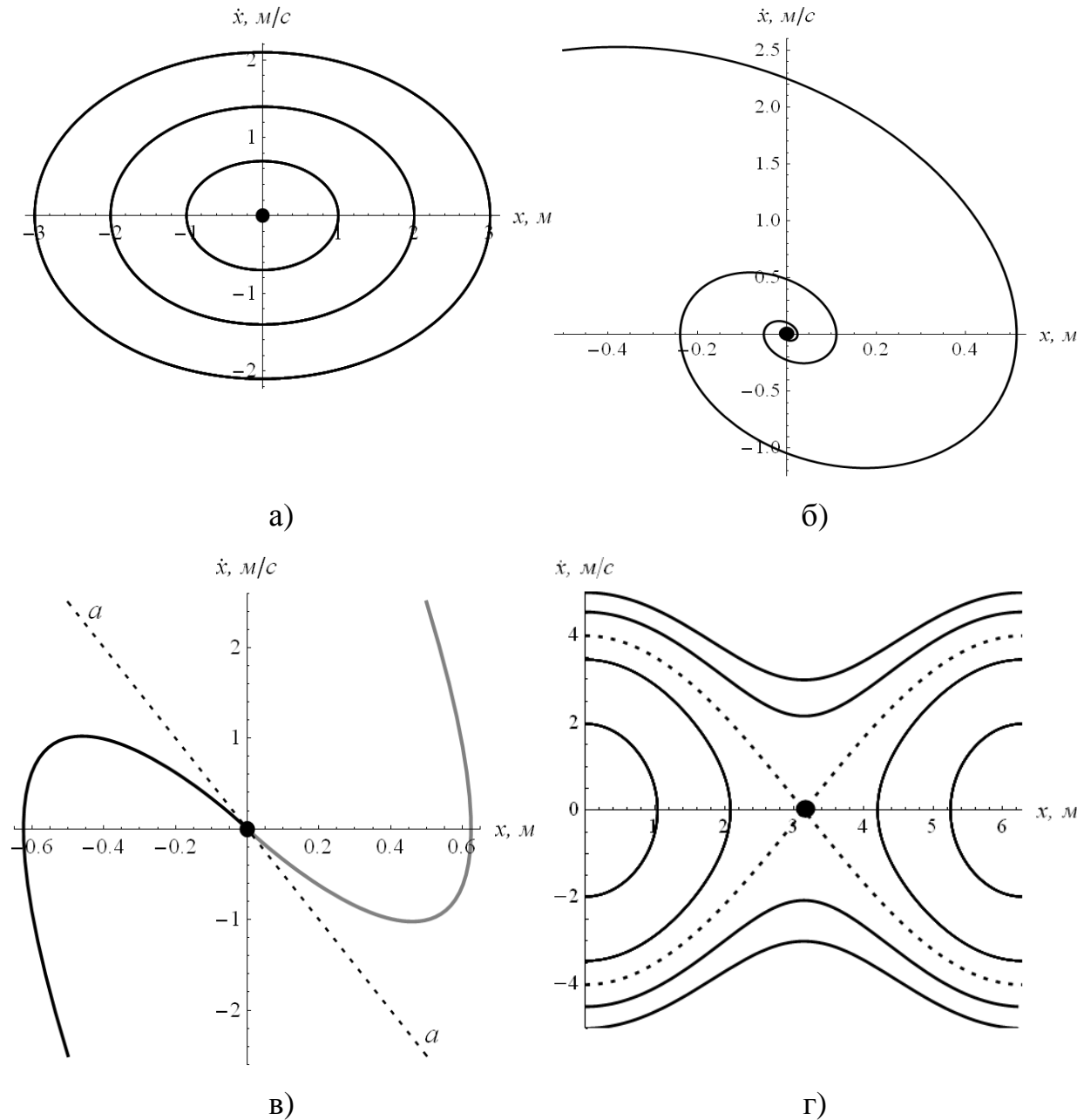


Рис. 2.4. Фазові траєкторії різних коливних систем: а) гармонічна коливна система; б) гармонічна коливна система із демпфуванням; в) гармонічна коливна система із сильним демпфуванням; г) фазовий портрет з особливою точкою типу сідло

На рис. 2.4, г представлений фазовий портрет системи з особливою точкою типу сідло. Він характеризується тим, що через особливу точку проходять дві вироджені фазові траєкторії – сепаратиси (показані штриховими лініями), а інші траєкторії схожі на гіперболи. Особлива точка такого типу відповідає нестійкому положенню рівноваги коливної системи (наприклад, для математичного маятника це верхнє положення).

Наведені тут фазові портрети є „стандартними блоками”, з яких будуються фазові портрети реальних коливних систем, якими є механізми та машини [14]. Слід також відмітити, що можна застосовувати модифіковані фазові площини. Щоб одержати фазові траєкторії більш простого виду, іноді доцільно відкладати по осі ординат замість швидкості її деяку функцію, а по осі абсцис – деяку функцію від x відповідно. Крім того, використовуються тривимірні (некласичні) фазові портрети, які мають більшу загальність у порівнянні із розглянутими та дають змогу оцінювати зміну одночасно трьох фазових координат протягом руху системи. На рис. 2.5 показана некласична фазова траєкторія руху фазової точки у тривимірному просторі, яка побудована для коливної системи, що описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} - 0,01\dot{x} + \sin(x) = -0,5\cos(t)$ (сіра точка на рис. 2.5 показує початок координат).

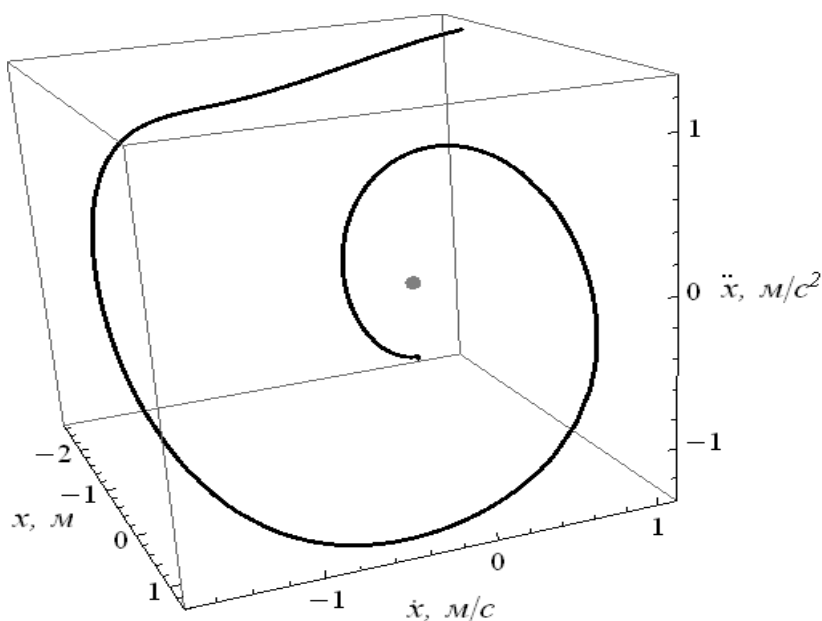


Рис. 2.5. Некласична фазова траєкторія у тривимірному просторі

2.4. Вимушені коливання механізмів. Механічний резонанс

2.4.1. Коливна система „двигун-фундамент”

Розглянемо коливну систему, що складається з двигуна і має незбалансований ротор, який закріплений на фундаменті (рис. 2.6, а). Ротор двигуна обертається із постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = \text{const}$. Якщо не враховувати горизонтальну складову відцентрової сили, то дана коливна система може бути представлена у вигляді динамічної моделі, яка показана на рис. 2.6, б.

Математична модель динаміки руху наведеної на рис. 2.6, б моделі представляється у вигляді диференціального рівняння:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t), \quad (2.8)$$

де F – вертикальна складова відцентрової сили, що діє на фундамент двигуна ($F = F_{\text{max}} \sin(\omega_0 t)$); F_{max} – амплітуда вертикальної складової відцентрової сили, що діє на фундамент.

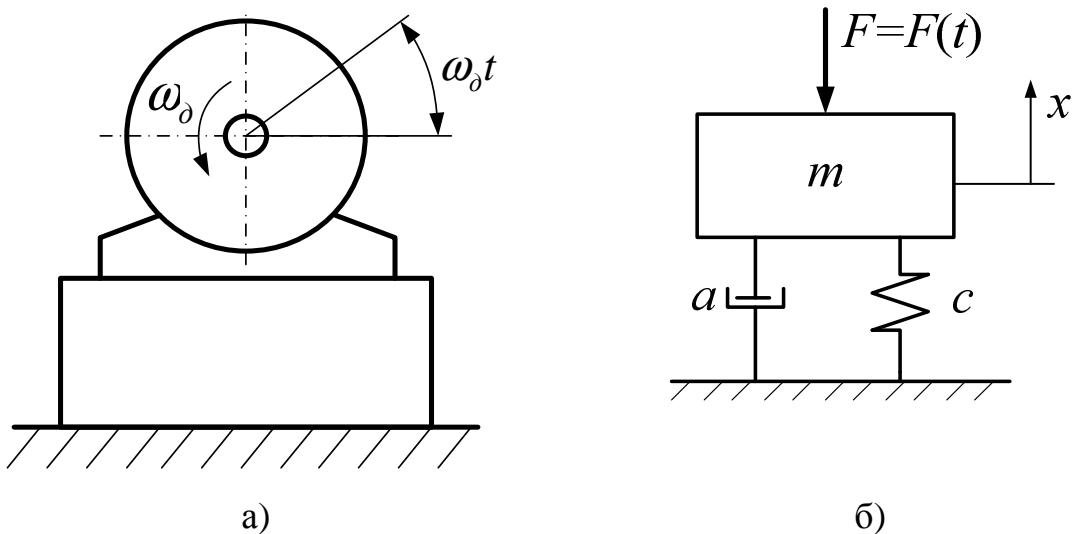


Рис. 2.6. Коливна система: а) двигун із незбалансованим ротором на фундаменті; б) динамічна модель приведеної коливної системи

Розділивши праву і ліву частину рівняння (2.8) на приведену масу

двигуна m та ввівши позначення $\lambda = \frac{k}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $f_{\max} = \frac{F_{\max}}{m}$

отримаємо рівняння:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_{\max} \sin(\omega_\delta t), \quad (2.9)$$

де λ – логарифмічний декремент затухання коливань; ω_0 – частота власних коливань динамічної системи „двигун-фундамент”. Частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (2.9) має такий вигляд [15]:

$$x = x_A \sin(\omega_\delta t - \gamma), \quad (2.10)$$

де x_A – амплітуда вимушених коливань; γ – кут зсуву фаз збурюючої дії та вимушених коливань. Величина x_A знаходиться таким чином:

$$x_A = \frac{F_{\max}}{c \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_\delta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega_\delta^2 \lambda^2}{\omega_0^2}}}. \quad (2.11)$$

Величина γ визначається залежністю:

$$\gamma = \arctg\left(\frac{2\omega_\delta \lambda}{\omega_0^2 - \omega_\delta^2}\right). \quad (2.12)$$

Залежність амплітуди коливань від частоти збурюючої дії являє собою амплітудно-частотну характеристику системи. Введемо показник - **коефіцієнт динамічності**, який буде визначати наскільки амплітуда вимушених коливань більша за статичне відхилення маси m від положення рівноваги під дією постійної сили F_{\max} :

$$\mu = \frac{a}{x_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_\delta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega_\delta^2 \lambda^2}{\omega_0^2}}}. \quad (2.13)$$

Відмітимо, що величина показника μ не перетворюється в нескінченність ні при яких значеннях частоти збурення. Цим знайдений результат суттєво відрізняється від розв'язку для коливної системи (2.9) без врахування демпфування ($\lambda = 0$). На рис. 2.7 показані графічні залежності $\mu = \mu\left(\frac{\omega_\partial}{\omega_0}\right)$ при різних значеннях коефіцієнта λ . Максимум коефіцієнта динамічності трохи зміщений убік від абсциси $\frac{\omega_\partial}{\omega_0} = 1$, але цей зсув малий і можна приблизно прийняти $\mu_{\max} = \frac{\omega_0}{2\lambda}$, підставляючи у формулу (2.13) вираз $\omega_\partial = \omega_0$. Таким чином, максимум коефіцієнта динамічності обернено пропорційний коефіцієнту λ . Із графіків приведених на рис. 2.7 видно, що сили в'язкого опору мають помітний вплив лише в білярезонансній області. Це дозволяє в режимах коливань, які далекі від резонансу приймати для μ криву, побудовану без врахування в'язкого опору, а у всій білярезонансній області приймати $\mu = \mu_{\max}$.

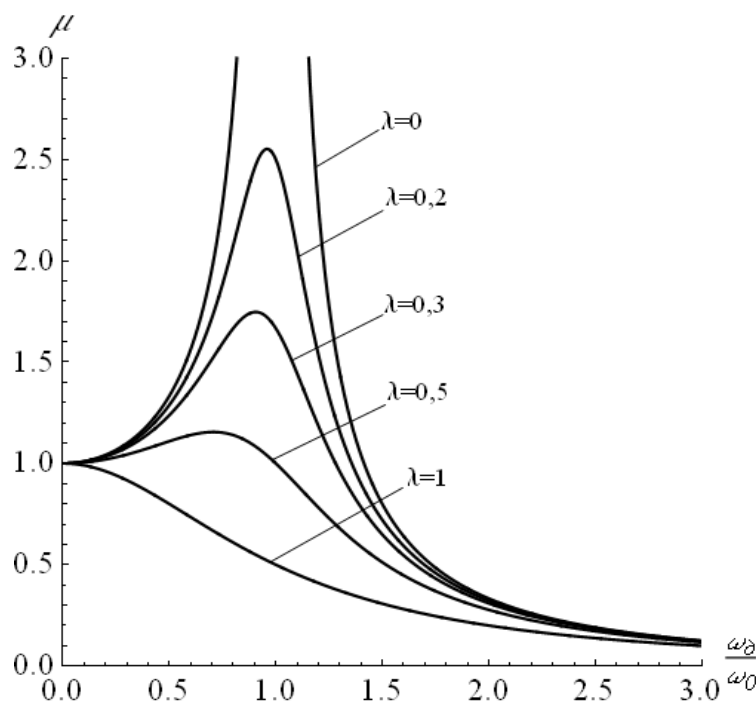


Рис. 2.7. Графічні залежності $\mu = \mu\left(\frac{\omega_\partial}{\omega_0}\right)$ при різних значеннях декременту затухання коливань

З виразу (2.10) видно, що переміщення коливної системи відбувається із частотою збурюючої сили, але вони відстають від зміни сили по фазі. Це відставання характеризується кутом γ , який визначається формулою 2.12 і залежить від відношення частот $\frac{\omega_\delta}{\omega_0}$: при малих частотах ω_δ кут γ невеликий; при резонансі ($\omega_\delta = \omega_0$) фазовий кут рівний $\pi/2$, тобто в ті моменти, коли сила максимальна, переміщення дорівнює нулю; при досить високих частотах фазовий кут близький до π , тобто максимуму сили відповідає мінімум переміщення.

В'язкий опір істотно впливає на загальну силу, що передається від коливної системи „двигун-фундамент” на підлогу. Ця сила складається із двох доданків, що відповідають пружному та в'язкому зв'язкам:

$$N = cx + k\dot{x}, \quad (2.14)$$

де N - сила, що передається підлозі. Підставляючи у вираз (2.14) значення переміщення та швидкості приведеної маси:

$$x = \mu x_{cm} \sin(\omega_\delta t - \gamma); \quad (2.15)$$

$$\dot{x} = \mu x_{cm} \omega_\delta \cos(\omega_\delta t - \gamma), \quad (2.16)$$

отримаємо

$$N = c\mu x_{cm} \left[\sin(\omega_\delta t - \gamma) + \frac{2\lambda\omega_\delta}{\omega_0^2} \cos(\omega_\delta t - \gamma) \right]. \quad (2.17)$$

Для максимального значення N знайдемо:

$$N_{\max} = \mu F_{\max} \sqrt{1 + \left(\frac{2\lambda\omega_\delta}{\omega_0^2} \right)^2} = F_{\max} \tilde{\mu}, \quad (2.18)$$

де $\tilde{\mu}$ - коефіцієнт підсилення ($\tilde{\mu} = \mu \sqrt{1 + \left(\frac{2\lambda\omega_\delta}{\omega_0^2}\right)^2}$).

На рис. 2.8 показана зміна цього коефіцієнта залежно від відношення частот $\frac{\omega_\delta}{\omega_0}$ при різних значеннях λ . Усі криві проходять через ту саму точку, абсциса якої рівна $\sqrt{2}$, а ордината 1. В області $\frac{\omega_\delta}{\omega_0} < \sqrt{2}$ загасання корисне, оскільки знижує передачу сили на підлогу; в області $\frac{\omega_\delta}{\omega_0} > \sqrt{2}$ зі збільшенням демпфування збільшується сила, що діє на підлогу. Тому, у випадках, коли режим роботи знаходиться в зарезонансній області, сила, що передається підлозі, зростає внаслідок демпфування. Фізичний зміст цього явища пов'язаний з тим, що при коливаннях підлозі передаються дві сили – через пружний та в'язкий елементи. При високій частоті збурюючої сили мають місце відносно великі швидкості й відповідно виникає більша сила в'язкого опору.

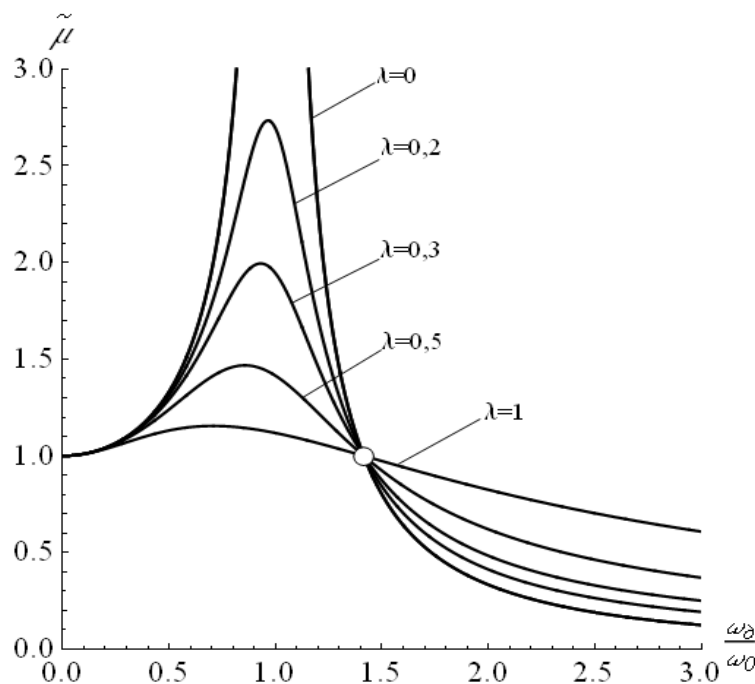
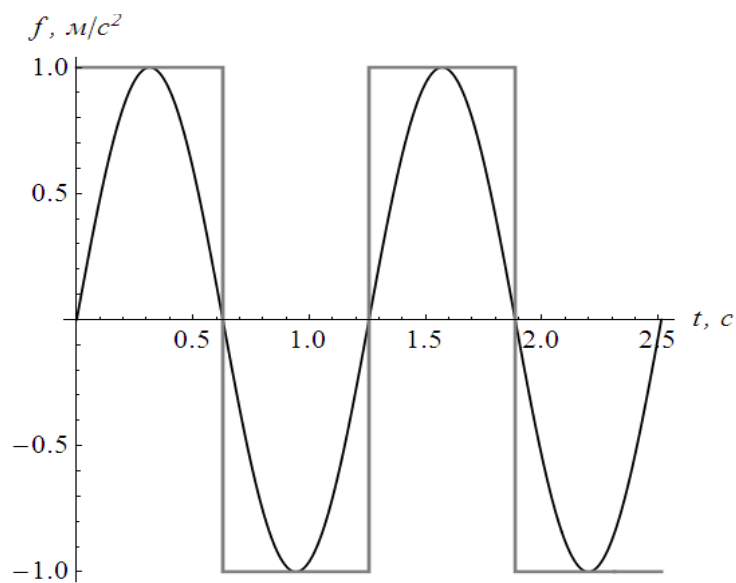


Рис. 2.7. Графічні залежності $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}\left(\frac{\omega_\delta}{\omega_0}\right)$ при різних значеннях декременту затування коливань

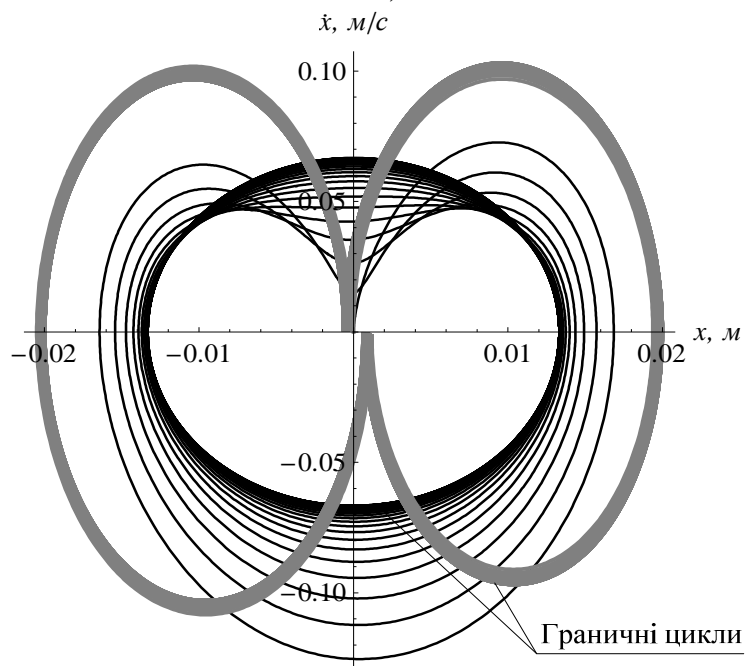
З'ясуємо, який вплив на динамічну систему „двигун-фундамент” справляє збурення, яке описується такою функцією:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_{\max} \text{sign}[\sin(\omega_0 t)]. \quad (2.19)$$

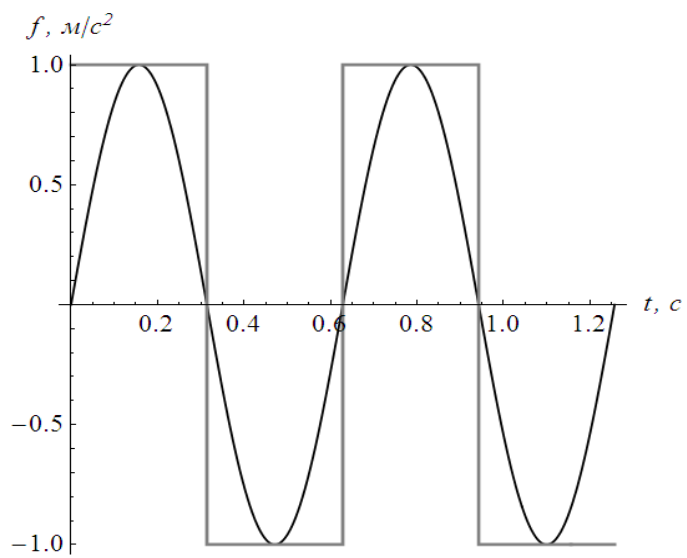
Проведемо аналіз вимушених коливань динамічної системи „двигун-фундамент”, використовуючи метод фазової площини. На рис. 2.9 показані графіки різних збурюючих функцій (2.9), (2.19) та відповідні їм фазові траєкторії.



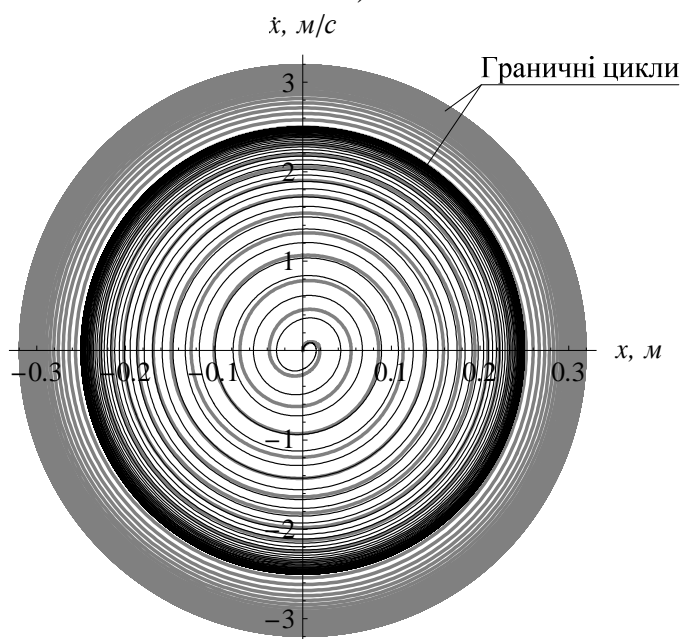
а)



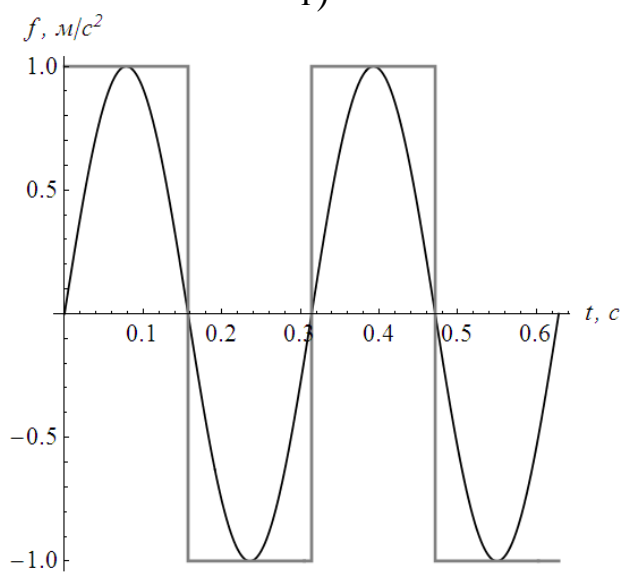
б)



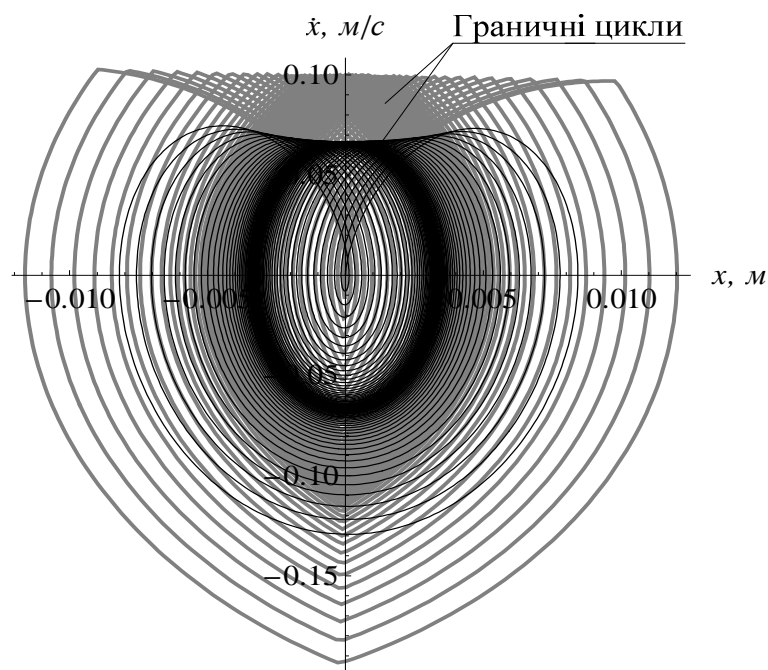
В)



Г)



Д)



е)

Рис. 2.9. Графіки функцій, що характеризують коливання динамічної системи „двигун-фундамент”: а) збурюючі дії при $\omega_0 = 0,5\omega_0$ (дорезонансний режим); б) фазові портрети дорезонансного режиму коливань; в) збурюючі дії при $\omega_0 = \omega_0$ (резонансний режим); г) фазові портрети резонансного режиму коливань; г) збурюючі дії при $\omega_0 = 2\omega_0$ (зарезонансний режим); д) фазові портрети зарезонансного режиму коливань

Приведені графіки побудовані при наступних параметрах: $\lambda = 0,2$; $f_{\max} = 1$; $\omega_0 = 10$. На рис. 2.9 сірою лінією показані характеристики, які відносяться до збурення (2.9).

Для того, щоб провести аналіз графіків приведених на рис. 2.9 необхідно ввести поняття граничного циклу. Граничний цикл – це замкнена фазова траєкторія, до якої асимптотично ($t \rightarrow +\infty$) наближаються всі інші фазові траєкторії [16]. Це означає, що при будь-яких початкових умовах у коливній системі виникнуть незатухаючі періодичні коливання.

Із приведених графіків видно, що для всіх режимів коливань при дії збурення (2.19) віддаленість кривої граничного циклу від початку координат

є більшою ніж при тих самих умовах коли діє збурення (2.9). Це означає, що енергія коливань при дії збурення (2.19) є більшою.

2.4.2. Коливна система „гнучкий вал”

Якщо відстань між опорами вала значно більша його діаметра, то при визначенні допустимих дисбалансів необхідно враховувати деформацію (прогин) вала. Для встановлення основних співвідношень між деформацією вала й дисбалансом розглянемо найпростіший випадок вертикального вала, на якому закріплений диск масою m (рис. 2.10).

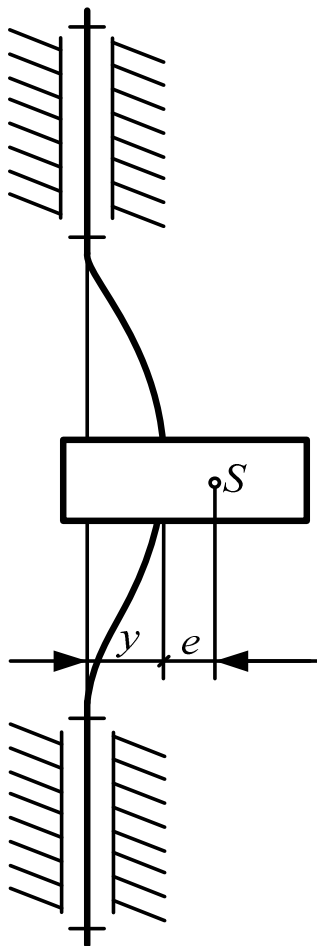


Рис. 2.10. Динамічна модель вертикального гнучкого вала з дисбалансом

Центр мас S зміщений від осі вала на величину e . Масою вала нехтуємо. При обертанні вала з кутовою швидкістю ω відцентрова сила інерції диска викликає деформацію (прогин) вала. Позначимо через y прогин вала в перерізі, де закріплений диск. Цей прогин пов'язаний з модулем сили інерції $F_i = m(e + y)\omega^2$ співвідношенням:

$$y = \delta_1 m(e + y)\omega^2, \quad (2.20)$$

де δ_1 – прогин вала від одиничної сили в даному перерізі. Звідси:

$$y = \frac{\omega^2 e}{\frac{1}{\delta_1 m} - \omega^2}. \quad (2.21)$$

Кутова швидкість вала, при якій знаменник виразу (2.21) перетворюється в нуль, а отже, прогин $y \rightarrow \infty$, називається **критичною кутовою**

швидкістю:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{\delta_1 m}}. \quad (2.22)$$

Критичну кутову швидкість обертання вала можна розглядати, як власну частоту системи „вал – диск”, а стан вала при $\omega = \omega_k$ вважати резонансним. Якщо врахувати сили опору, то при критичній кутовій швидкості прогин y не прямує до нескінченності, а має хоча й велику, але скінченну величину. Поділивши чисельник і знаменник правої частини виразу (2.20) на ω^2 будемо мати:

$$y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - 1}. \quad (2.23)$$

Звідси видно, що при $\omega < \omega_k$ (докритичний або дорезонансний режим) $y > 0$, а при $\omega > \omega_k$ (закритичний або зарезонансний режим) $y < 0$, тобто в закритичному режимі прогин y є від’ємним. Отже, зсув фаз між збудовуючою силою і власними коливаннями рівний π . У закритичному режимі прогин y зменшується зі збільшенням кутової швидкості ω й при $\omega \rightarrow \infty$ вона перетворюється у величину зсуву e . Відцентрова сила інерції в закритичному режимі визначається співвідношенням:

$$F_i = m(e - y)\omega^2, \quad (2.24)$$

тобто дисбаланс зменшується зі збільшенням кутової швидкості.

Вал, що працює при кутовій швидкості, яка менша за критичну, прийнято називати **жорстким**, а при кутовій швидкості, яка більша ніж критична – **гнучким**. Якщо на валу закріплено кілька дисків, то коливна система „вал – диски” має кілька ступенів вільності і тоді повинно бути декілька критичних (резонансних) кутових швидкостей. Найменша із цих швидкостей називається першою резонансною.

2.5. Коливання в механізмі з пружною муфтою

2.5.1. Рівняння руху механізму з пружною муфтою

На рис. 2.11, а показана одна з конструкцій пружної муфти, у якій напівмуфти 1 і 2 з'єднані пружними елементами 3, що допускають відносний кутовий зсув напівмуфт. У першому наближенні характеристику сил пружності в муфті можна вважати лінійною:

$$M_{\varphi} = c\varphi, \quad (2.25)$$

де M_{φ} – момент сил пружності; c – коефіцієнт жорсткості, φ – кутовий зсув напівмуфт ($\varphi = \varphi_{\partial} - \varphi_{\mathcal{M}}$). При деформації пружних елементів відбувається розсіювання (дисипація) енергії в муфті, яке залежить від швидкості деформації. Для малих кутових зсувів момент дисипативних сил M_m пропорційний величині $\dot{\varphi}$:

$$M_m = -b\dot{\varphi}. \quad (2.26)$$

де b – коефіцієнт дисипації. На рис. 2.11, б із застосуванням умовних позначень пружної муфти показана динамічна модель механізму.

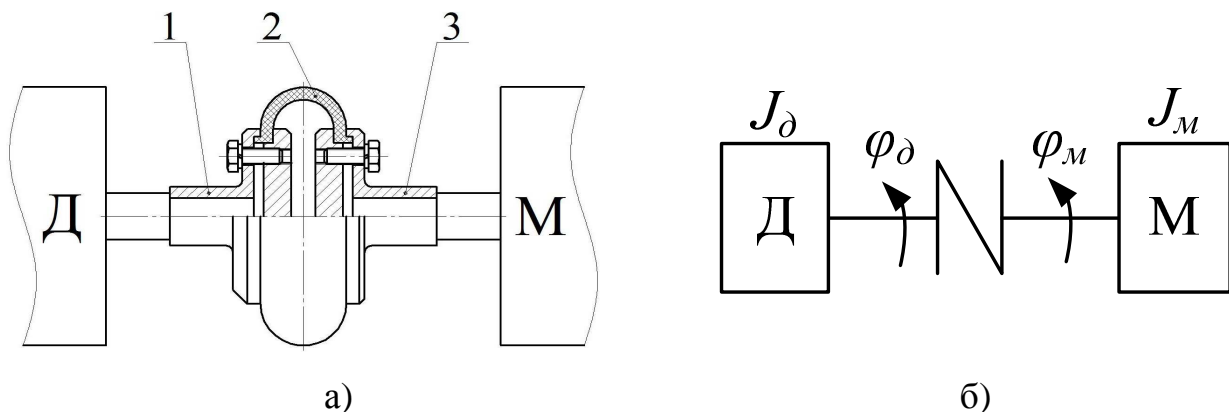


Рис. 2.11. Механізм із пружною муфтою: а) креслення муфти; б) динамічна модель механізму із пружною муфтою

На рис. 2.11, а показано, що вал двигуна Д з'єднаний через пружну муфту з валом робочої машини М. Кути повороту вала двигуна й вала машини позначені відповідно через φ_D і φ_M . Приведений до вала робочої машини момент інерції J_M і момент інерції рухомих частин двигуна J_D вважаємо постійними. Число ступенів вільності механізму рівно двом, тому що кожна пружна ланка збільшує загальне число ступенів вільності механізму на одиницю.

Позначимо через M_D приведений до вала двигуна момент рушійних сил і через M_c – модуль моменту сил опору, приведених до вхідного вала машини. Тоді рівняння руху при узагальнених координатах φ_D і φ_M мають вигляд:

$$\begin{cases} J_D \ddot{\varphi}_D = M_D - c\varphi - b\dot{\varphi}; \\ J_M \ddot{\varphi}_M = c\varphi + b\dot{\varphi} - M_c. \end{cases} \quad (2.27)$$

При досить великій потужності двигуна закон руху його ротора $\varphi_D(t)$ може вважатися не залежним від зміни M_c і J_M . Тоді при відомій залежності $\varphi_D(t)$ рівняння (2.27) записується у вигляді

$$J_M \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = M_c + J_D \ddot{\varphi}_D, \quad (2.28)$$

тобто може бути розв'язане відносно кутового зсуву φ незалежно від першого рівняння системи (2.27), яке в цьому випадку служить для визначення рушійного моменту M_D , відповідно до прийнятої залежності $\varphi_D(t)$.

Для двигунів із жорсткою механічною характеристикою, у яких кутова швидкість ротора мало змінюється при зміні навантаження, часто вважають кутову швидкість $\dot{\varphi}_D$ постійною. Тоді рівняння руху механізму з лінійною пружною муфтою має вигляд:

$$J_M \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = M_c. \quad (2.29)$$

У цьому випадку рух ланки з приведеним моментом інерції J_m можна розглядати як суму рухів: основного з постійною кутовою швидкістю $\dot{\phi}_0$ і додаткового руху зі швидкістю $\dot{\phi}$, яка, звичайно, має коливний характер. Іноді говорять, що динамічна модель має один коливний ступінь вільності, оскільки другий ступінь вільності визначає рух усіх частин системи з однією і тією ж кутовою швидкістю.

2.5.2. Коливання в механізмах з лінійною пружною муфтою

Припустимо, що модуль приведенного моменту сил опору змінюється за законом:

$$M_c = M_1 + H \sin(\omega t), \quad (2.30)$$

де M_1 – середнє значення M_c , H – амплітуда його коливань відносно середнього значення. Для загального випадку зміни приведенного моменту сил вираз (2.30) можна розглядати як наближений, що отриманий при врахуванні лише перших двох членів розкладу в ряд Фур'є.

Підставимо M_c у рівняння руху (2.29) і зробимо заміну змінних $\varphi = y + \frac{M_1}{c}$. Тоді рівняння руху (2.29) перетвориться до виду рівняння коливного типу:

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = k_1 \sin(\omega t), \quad (2.31)$$

де $\lambda = \frac{b}{2J_m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{J_m}$, $k_1 = \frac{H}{J_m}$. Рівняння (2.31) з точністю до позначень співпадає із відомим рівнянням (2.9). Отже всі відомі результати, що отримані у п.п. 2.4.1 можуть бути використані для коливань лінійної пружної муфти. Різниця полягає лише у тому, при постійній кутовій швидкості

двигуна $\dot{\varphi}_0$ кут повороту вхідного вала машини φ_m представляється різницею $\varphi_m = \dot{\varphi}_0 t - \varphi$, де кутовий зсув напівмуфт φ характеризується коливаннями відносно положення $\varphi_c = \frac{M_1}{c}$. У режимі розгону крім вимушених коливань із кутовою частотою ω спостерігаються вільні коливання з кутовою частотою $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ які із часом загасають. У режимі усталеного руху залишаються тільки вимушені коливання, що називаються стаціонарними, оскільки їх амплітуда і кутова частота не залежать від часу:

$$\varphi = \frac{M_1}{c} + A \sin(\omega t - \gamma^*), \quad (2.32)$$

де γ^* - кут зсуву між вимушеними коливаннями напівмуфт та частотою збурення, яке у даному випадку є силою опору; показник γ^* за фізичною сутністю є аналогом показника з виразу (2.10).

2.5.3. Коливання в механізмах з нелінійною пружною муфтою

Особливості динаміки механізма з нелінійною пружною муфтою пояснимо на прикладі дослідження муфти, для якої коефіцієнт жорсткості представлений виразом:

$$c = c_0 + c_1 \varphi^2. \quad (2.33)$$

Тоді рівняння руху (2.29) при $b = 0$ і $M_c = M_1 + H \sin(\omega t)$ має вигляд:

$$J_m \ddot{\varphi} + (c_0 + c_1 \varphi^2) \varphi = M_1 + H \sin(\omega t). \quad (2.34)$$

Лінеаризацію виразу (2.34) на відрізку $(-A; A)$ виконаємо по **методу Чебишева** з умови рівності граничних відхилень зі знаками, що чергуються (рис. 2.12).

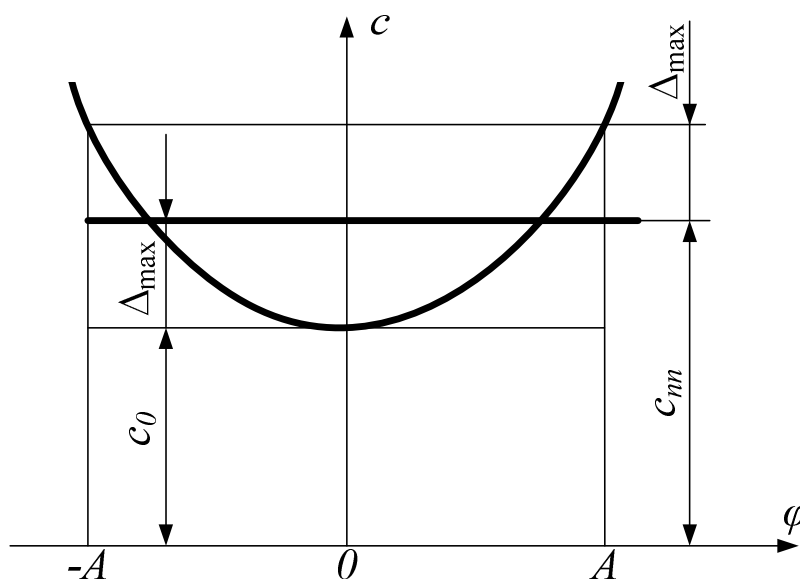


Рис. 2.12. Графічна інтерпретація лінеаризації виразу (2.34)

Тоді ордината шуканої прямої c_{mn} і відхилення Δ_{\max} можуть бути знайдені із системи рівнянь:

$$\begin{cases} c_{mn} = c_0 + \Delta_{\max}; \\ c_{mn} + \Delta_{\max} = c_0 + c_1 A^2. \end{cases} \quad (2.35)$$

Звідси

$$c_{mn} = c_0 + 0,5c_1 A^2. \quad (2.36)$$

Підстановка наближеного виразу коефіцієнта жорсткості (2.36) у рівняння руху (2.34) дає:

$$J_{\mu} \ddot{\varphi} + (c_0 + 0,5c_1 A^2) \varphi = M_1 + H \sin(\omega t). \quad (2.37)$$

Після заміни змінних за умовою $\varphi = y + \frac{M_1}{c_{nn}}$ приводимо рівняння руху

(2.37) до виду лінійного рівняння:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \frac{H}{J_m} \sin(\omega t), \quad (2.38)$$

де

$$\omega_n^2 = \frac{c_0 + 0,5c_1 A^2}{J_m}. \quad (2.39)$$

Амплітуда вимушених коливань, що описуються рівнянням (2.38) при $\omega \neq \omega_n$, має такий вигляд:

$$A = \frac{H}{J_m |\omega_n^2 - \omega^2|}. \quad (2.40)$$

Підстановка значення ω_n (2.39) при $\omega < \omega_n$ приводить до алгебраїчного рівняння третього степеня для визначення амплітуди A :

$$A(c_0 + 0,5c_1 A^2 - \omega^2 J_m) = H. \quad (2.41)$$

Отже, якщо шукати розв'язок рівняння (2.38) у вигляді $y = A \sin(\omega t)$ то можливе одержання трьох різних амплітуд при одній і тій же частоті ω . Можливість виникнення декількох періодичних режимів при одній і тій збурювальній силі є характерною рисою нелінійних систем.

На рис. 2.13, а показана залежність амплітуди A від частоти ω , або амплітудно-частотна характеристика для випадку, коли коефіцієнт жорсткості збільшується при збільшенні сили. Штриховою лінією показана **кістякова крива** – графік залежності між частотою й амплітудою вільних коливань. Порівняння отриманої амплітудно-частотної характеристики з тією ж характеристикою при лінійній пружній ланці показує, що

нелінійність пружної ланки приводить до виникнення коливань із великою амплітудою при частотах збурюючої сили, що перевищують власну частоту (затягування резонансу в область високих частот).

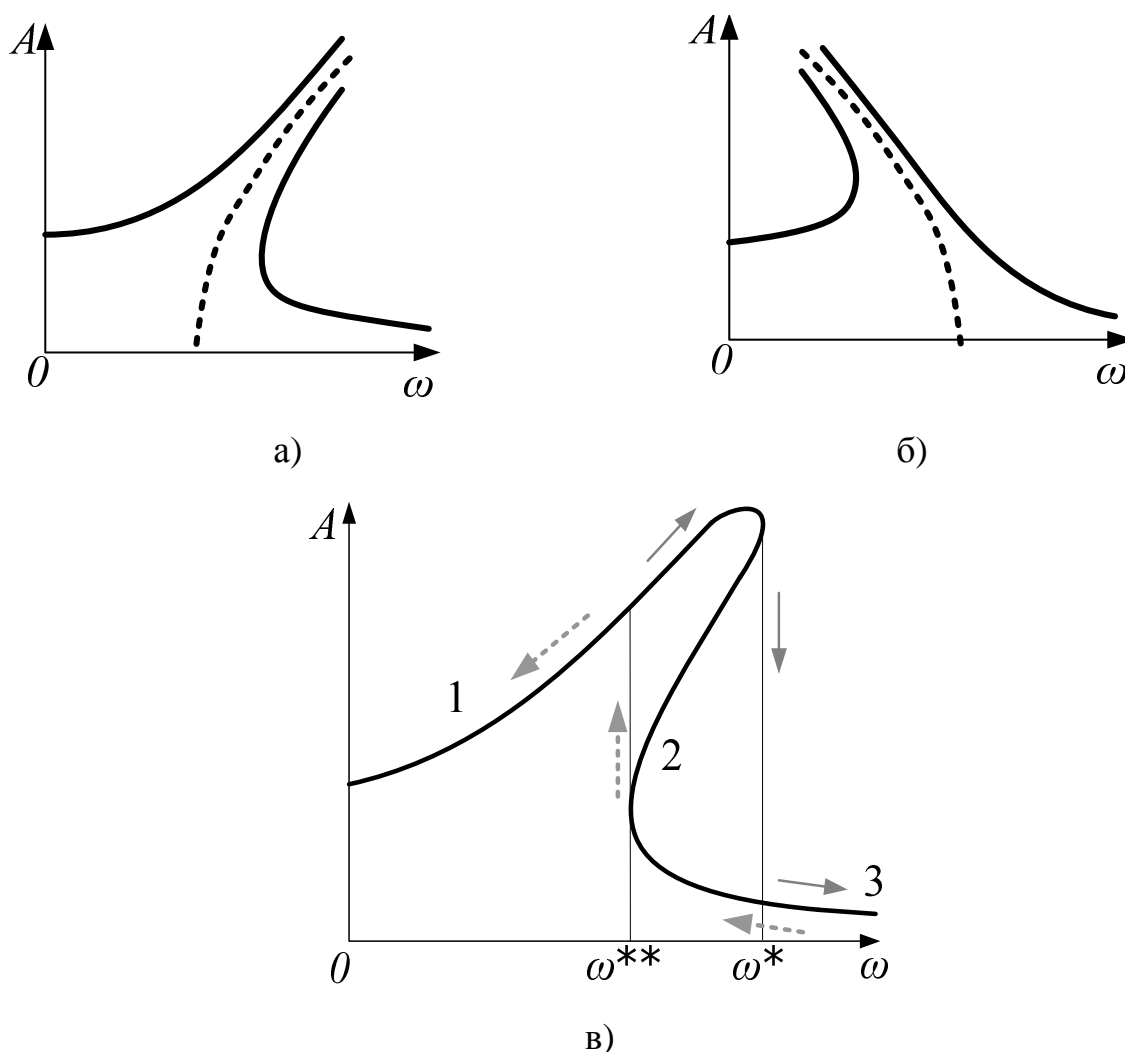


Рис. 2.13. Амплітудно-частотні характеристики нелінійної пружної муфти: а) коефіцієнт жорсткості збільшується при збільшенні сили; б) коефіцієнт жорсткості зменшується при збільшенні сили; в) враховується тертя в кінематичних парах

Якщо коефіцієнт жорсткості зменшується зі збільшенням сили, то нахил кістякової кривої і амплітудно-частотної характеристики направлений до осі A (рис. 2.13, б), що приводить до затягування резонансу в область низьких частот. При врахуванні тертя в кінематичних парах амплітуда

коливань при резонансі має скінченну величину й обидві вітки амплітудно-частотної характеристики замикаються (рис. 2.12, в).

З нахилом амплітудно-частотної характеристики й можливістю існування декількох режимів руху пов'язана інша особливість нелінійних систем – зрив амплітуди. Представимо, що частота ω збільшується починаючи від деякого значення, розташованого на вітці 1 (рис. 2.12, в). Частота може збільшуватися до значення $\omega=\omega^*$. При цьому значенні частоти відбувається зрив амплітуди й перехід на вітку 3. Якщо частота ω зменшується від деякого значення, що відповідає вітці 3, то зрив амплітуди й перехід на гілку 1 відбуваються при значенні $\omega=\omega^{**}$. Звідси випливає, що вітка 2 відповідає нестійким режимам.

Крім розглянутих коливних режимів із частотою, що рівна частоті збурюючої сили ω , у нелінійних системах можливе виникнення режимів із частотами, кратними ω . Коливання з вищими частотами (2ω , 3ω , ...) називаються **супергармонійними**, коливання з нижчими частотами ($2/\omega$, $3/\omega$, ...) – **субгармонійними**, коливання із частотою ω – **основними**. Дослідження супергармонійних і субгармонійних коливань проводиться звичайно із застосуванням наближених методів, заснованих на розкладанні періодичних функцій у ряд Фур'є.

2.6. Віброізоляція при ударному впливі

У загальному випадку під ударним впливом розуміється вплив нескінченно великої сили протягом нескінченно малого інтервалу часу. При цьому кількість руху (імпульс) системи змінюється на деяку скінченну величину. Мірою ударного впливу вважається миттєвий імпульс сили:

$$S = \lim_{t_y \rightarrow 0} Ft_y, \quad (2.42)$$

де t_y – тривалість удару.

При дослідженні ударних впливів на віброізолятор в першому наближенні нехтують демпфуванням, а коефіцієнт жорсткості вважають постійним. Динамічна модель, яка представляє об'єкт, що підлягає захисту від вібрацій разом із віброізолятором зображена на рис. 2.5, а із врахуванням того, що сила F змінюється не за періодичним законом, а має імпульсний характер.

Рівняння руху об'єкта, що підлягає захисту від вібрації, можна представити у вигляді:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}. \quad (2.43)$$

Нехай у момент $t=\xi$ до системи, яка знаходиться у стані спокою прикладений миттєвий імпульс S .

Після прикладання імпульсу система здійснює вільні коливання, які описуються рівнянням:

$$x = C_1 \sin(\omega_0(t - \xi)) + C_2 \cos(\omega_0(t - \xi)), \quad (2.44)$$

де C_1, C_2 – постійні інтегрування.

У початковий момент часу переміщення $x=0$, а швидкість \dot{x} знаходиться по теоремі про зміну кількості руху $m\dot{x} = S$. З врахуванням початкових умов отримаємо: $C_2=0$, $C_1=S/(m\omega_0)$. Отже, вільні коливання об'єкта, що підлягає захисту від вібрації, після ударного впливу в розглянутому випадку відбуваються за гармонійним законом

$$x = \frac{S}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - \xi)) = R(t, \xi)S, \quad (2.45)$$

де $R(t, \xi)$ – функція, яка описує рух, що викликаний одиничним імпульсом (імпульсна реакція системи).

Максимальна величина сили, яка передається на підлогу:

$$Q_{\max} = c \frac{S}{m\omega_0} = \omega_0 S, \quad (2.46)$$

тобто для зменшення Q_{\max} треба зменшувати власну частоту. Однак при цьому згідно виразу (2.45) збільшується амплітуда коливань.

Ударним впливом при розрахунках віброізоляторів вважається не тільки миттєвий імпульс, але й вплив порівняно великої сили за кінцевий проміжок часу t_y , який називається **тривалістю удару**. Залежність сили F , яка діє на об'єкт, що підлягає захисту від вібрації, від часу t_y при ударі називають **формою удару**. Цю залежність можна представити як нескінченну послідовність елементарних імпульсів $F(\xi)d\xi$. Підставивши у вираз (2.45) $dS=F(\xi)d\xi$, одержимо переміщення, яке викликане дією одного елементарного імпульсу:

$$dx = \frac{F(\xi)}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - \xi))d\xi. \quad (2.47)$$

Підсумовуючи вплив усіх елементарних імпульсів на ділянці від 0 до t , одержуємо:

$$x = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t - \xi))d\xi. \quad (2.48)$$

Усі основні особливості динаміки віброізолятора проявляються при найпростішій формі удару, яка називається **прямокутною формою**:

$$F = \begin{cases} F_m = const, & \text{нпу } t \leq t_y; \\ 0, & \text{нпу } t > t_y. \end{cases} \quad (2.49)$$

При $t \leq t_y$ інтегрування виразу (2.48) дає:

$$x = \frac{F_m}{m\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t - \xi))d\xi = \frac{F_m}{m\omega_0^2} \sin(\omega_0(t - \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=t}. \quad (2.50)$$

Звідси:

$$x = \frac{F_m}{c} (1 - \cos(\omega_0 t)). \quad (2.51)$$

При $t > t_y$ розбиваючи проміжок часу на дві частини, одержимо:

$$x = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^{t_y} F(\xi) \sin(\omega_0(t - \xi)) d\xi + \frac{1}{m\omega_0} \int_{t_y}^t F(\xi) \sin(\omega_0(t - \xi)) d\xi. \quad (2.52)$$

Другий інтеграл перетворюється в нуль, оскільки $F(t)=0$ при $t > t_y$, перший інтеграл дає:

$$x = \frac{F_m}{m\omega_0^2} \cos(\omega_0(t - \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=t_y}. \quad (2.53)$$

Звідси

$$x = \frac{F_m}{c} (\cos(\omega_0(t - \xi)) - \cos(\omega_0 t)). \quad (2.54)$$

Силу пружності віброізолятора, яка передається на підлогу, отримаємо після множення на коефіцієнт жорсткості c переміщення x , яке визначено за формулами (2.51) та (2.54):

$$Q = \begin{cases} F_m(1 - \cos(\omega_0 t)), & \text{при } t \leq t_y, \\ F_m(\cos(\omega_0(t - \xi)) - \cos(\omega_0 t)), & \text{при } t > t_y. \end{cases} \quad (2.55)$$

Якщо $\omega_0 t_y \geq \pi$, то максимум сили Q , рівний $2F_m$, досягається при $\omega_0 t_y = \pi$. Якщо ж $\omega_0 t_y < \pi$, то максимум сили Q досягається при $\omega_0 t = (\pi + \omega_0 t_y) / 2$ і його величина знаходиться за виразом:

$$Q_{\max} = 2F_m \sin \frac{\omega_0 t_y}{2}. \quad (2.56)$$

Відношення максимального значення сили, яка передається на підлогу, до максимального значення сили удару F_{max} називається коефіцієнтом динамічності при ударі:

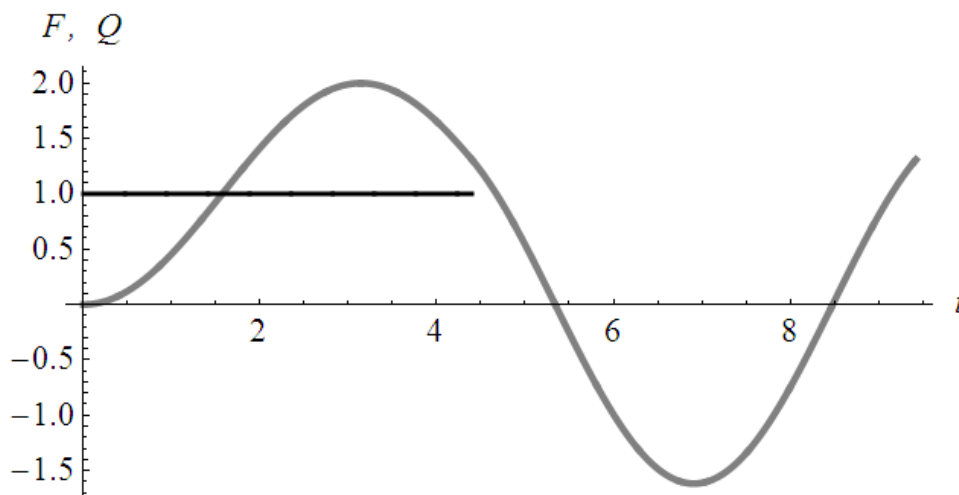
$$K_y = \frac{Q_{max}}{F_{max}}. \quad (2.57)$$

Для удару прямокутної форми:

$$K_y = \begin{cases} 2, & \text{при } \omega_0 t_y \geq \pi, \\ 2 \sin \frac{\omega_0 t_y}{2}, & \text{при } \omega_0 t_y < \pi. \end{cases} \quad (2.58)$$

Параметри віброізолятора повинні бути підібрані так, щоб коефіцієнт динамічності при ударі був менше одиниці. З (2.58) випливає, що ця умова забезпечується при $\omega_0 t_y < \pi/3$, тобто власну частоту ω_0 для зменшення сили Q_{max} треба зменшувати, як і при дії миттєвого імпульсу.

На рис. 2.14, а показані графіки сил F (чорна пряма) і Q (сіра крива) для випадку, коли $\omega_0 t_y \geq \pi$ (**тривалий удар**) і максимум сили пружності досягається при $\omega_0 t_y = \pi$. На рис. 2.14, б ті ж графіки показані для випадку, коли $\omega_0 t_y < \pi$ (**короткий удар**), але коефіцієнт динамічності все-таки залишається більше одиниці. Нарешті, на рис. 2.14, в показані графіки F і Q для випадку $\omega_0 t_y < \pi/3$ і коефіцієнт динамічності менше одиниці.



а)

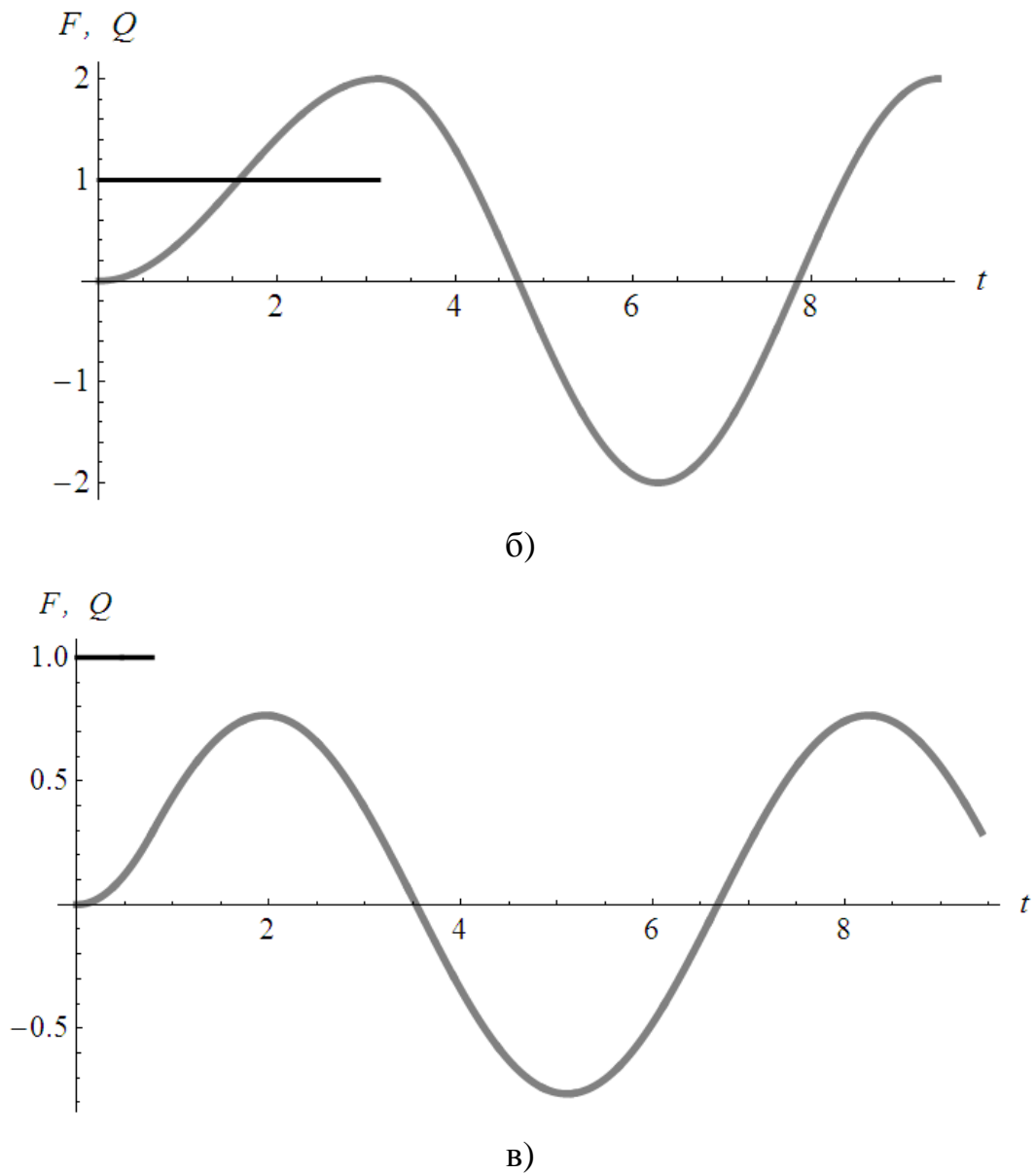


Рис. 2.14. Графіки прикладання імпульсної сили та сили, що передається на підлогу: а) при $\omega_0 t_y = \pi$; б) при $\omega_0 t_y < \pi$; в) при $\omega_0 t_y < \pi/3$

2.7. Захист від дії коливань

Розглянемо задачу дослідження режиму вимушених коливань механічного осцилятора з двома пружно-з'єднаними масами. Нехай розглядається коливання маси m під дією вимушеної сили $F(t)=F_{\max}\sin(\omega t)$ (рис. 2.15).

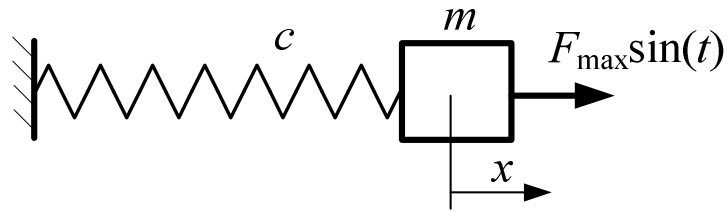


Рис. 2.15. Динамічна модель пружних коливань одномасової системи

Неважко показати, що математична модель руху маси m без врахування впливу тертя являє собою диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} + cx = F_{\max} \sin(\omega t), \quad (2.59)$$

де x - координата маси m ; c – коефіцієнт жорсткості пружного елемента; F_{\max} – амплітуда вимушеної сили, яка збуджується з частотою ω . Зазначимо, що рівняння (2.59) можна отримати з відомого рівняння (2.8), якщо покласти $k=0$, тобто розглядувана динамічна система не враховує дисипацію енергії під час коливань.

Для усталеного режиму коливань розв'язок рівняння (2.59) має вигляд:

$$x = \frac{F_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t), \quad (2.60)$$

де ω_0 - власна частота коливань одномасового осцилятора ($\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$). Із залежності (2.60) знаходимо, що амплітуда коливань визначається із співвідношення:

$$x_{\max} = \frac{F_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.61)$$

Тепер розглянемо, як впливає на процес коливань маси m приєднання до неї іншої маси m_1 через пружний елемент із жорсткістю c_1 (рис. 2.16).

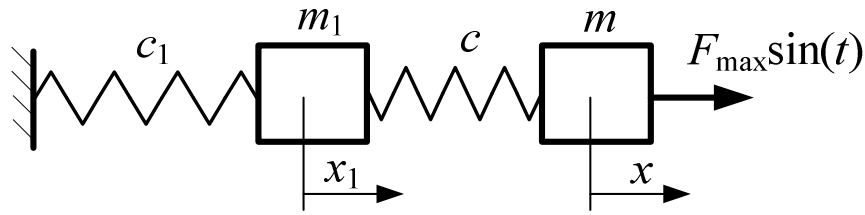


Рис. 2.16. Динамічна модель пружних коливань двомасової системи

Диференціальні рівняння коливань цієї системи без урахування сили тертя можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c(x - x_1) = F_{\max} \sin(\omega t); \\ m_1\ddot{x}_1 + c(x - x_1) + cx_1 = 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо амплітуди сталих коливань для кожної з мас:

для маси m

$$x_{\max.2\text{мас}} = \frac{F_{\max}}{m \left| \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega^2 c_1}{\omega_{10}^2 - \omega_0^2} \right|}. \quad (2.63)$$

для маси m_1

$$x_{1.\max.2\text{мас}} = \frac{F_{\max}}{m_1 \left| (\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_{10}^2 - \omega^2) \frac{m}{c_1} - \omega^2 \right|}. \quad (2.64)$$

де ω_{10} - власна частота коливань приєднаного одномасового осцилятора

$$(\omega_{10} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}).$$

Порівнюючи значення амплітуд коливань $x_{\max.2\text{мас}}$ та $x_{1.\max.2\text{мас}}$ (до і після приєднання маси m_1), можна показати, що при виборі певних значень параметрів c_1 і m_1 приєднаної маси можна добитися значного зменшення амплітуди $x_{\max.2\text{мас}}$.

Знайдемо умову, при якій $x_{\max.2\text{мас}} < x_{\max}$, тобто в результаті приєднання маси m_1 , амплітуда коливань маси m зменшиться. Ця умова запишеться у вигляді:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_{10}^2 - \omega_0^2) < 0. \quad (2.65)$$

Умову (2.65) отримано в результаті аналізу залежностей (2.61) і (2.63).

Нерівність (2.65) означає, якщо власна частота ω_0 початкового (одномасового) осцилятора більша вимушеної частоти, то власна частота ω_{10} приєднаного осцилятора повинна бути менша ніж ω і навпаки. Більше того, амплітуда $x_{\max.2\text{мас}}$ може бути шляхом відповідного підбору значень c_1 і m_1 як завгодно зменшена, а при $\omega_{10} - \omega \rightarrow 0$ вона прямує до нуля.

Таким чином, приходимо до висновку, який на перший погляд зовсім неочевидний і навіть може бути сприйнятий як парадоксальний: при певних співвідношеннях параметрів приєднаного осцилятора (його власна частота повинна дорівнювати частоті ω) маса, до якої прикладена вимушена сила, залишається в спокої, а розкачується інша маса, до якої сила безпосередньо не прикладена. Аналогічний висновок можна отримати й для осцилятора з демпфуванням, однак умова, при якій $x_{\max.2\text{мас}} < x_{\max}$, буде знаходитися з моделі процесу з урахуванням впливу тертя.

Цей результат підказує ідею конструкції пристроїв для гасіння вимувених коливань (динамічних погашувачів коливань), які базуються на пружному приєднанні до коливальної системи допоміжних мас, що сприймають розкачування на себе. Галузь застосування таких пристроїв досить широка – це машини, в яких необхідно усунути шкідливі коливання.

Однак приєднана маса m_1 не повинна бути досить малою, бо із залежності (2.78) для амплітуди її коливання $x_{1.\max.2\text{мас}}$ випливає, що при $\omega_{10} = \omega$ величина $x_{1.\max.2\text{мас}} = F_{\max} / (m_1 \omega^2)$ буде значно зростати при малих m_1 . Крім того, коливання мас m і m_1 обмежені розмірами конструкції.

2.8. Питання та завдання для самоперевірки

1. За якими показниками класифікують механічні коливання?
2. Який метод дає змогу аналізувати періодичні негармонічні коливання?
3. Що таке фазовий портрет динамічної системи та які переваги під час динамічного аналізу він дає?
4. Що таке особливі точки фазової траєкторії?
5. Які переваги дає використання неklasичного фазового портрету динамічної системи у тривимірному просторі?
6. Що таке сепаратриса?
7. Побудуйте фазові траєкторії для таких математичних моделей
($m=150$ кг; $a=90$ Нс/м; $c=100$ Н/м; $A=30$ Н; $x(0)=1$ м; $\dot{x}(0)=-1,2$ м/с):
 - 1) $m\ddot{x} + a\dot{x} + cx = 0$; 5) $m\ddot{x} + a\dot{x} + c \cdot \sin(x) = 0$;
 - 2) $m\ddot{x} + a\dot{x}^2 + cx = 0$; 6) $\ddot{x} + a\dot{x} + cx = A \sin(t\sqrt{c/m})$;
 - 3) $m\ddot{x} + a\dot{x} + cx^3 = 0$; 7) $\ddot{x} + a\dot{x} + cx = A \operatorname{sign}[\sin(t\sqrt{c/m})]$;
 - 4) $m\ddot{x} + t \cdot \dot{x} + cx = 0$; 8) $\ddot{x} + a\dot{x} + cx = A \sin(t\sqrt{c/m}) + A \sin(20t\sqrt{c/m})$.
8. Прокоментуйте характер зміни коефіцієнта динамічності в залежності від співвідношення частоти зовнішнього періодичного збурення та частоти власних коливань динамічної системи.
9. Що таке граничний цикл коливань?
10. Розрахуйте критичну швидкість обертання гнучкого вала для таких параметрів системи:
 - 1) $m=10$ кг, $\delta_1=0,01$ м; 5) $m=510$ кг, $\delta_1=0,015$ м;
 - 2) $m=20$ кг, $\delta_1=0,02$ м; 6) $m=320$ кг, $\delta_1=0,05$ м;
 - 3) $m=100$ кг, $\delta_1=0,1$ м; 7) $m=2100$ кг, $\delta_1=0,01$ м;
 - 4) $m=1000$ кг, $\delta_1=0,01$ м; 8) $m=1000$ кг, $\delta_1=0,001$ м
11. Як називається вал, що працює при кутовій швидкості більшій, ніж критична?
12. Запишіть та прокоментуйте рівняння, що описує рух пружної муфти.

13. Які коливання виникають у пружній лінійній муфті при розгоні двигуна? Які коливання муфти залишаються після закінчення перехідного процесу розгону системи „двигун-робоча машина”.
14. Який метод дає можливість виконати лінеаризацію нелінійних характеристик пружних муфт?
15. Що таке зрив амплітуди при нелінійних коливаннях?
16. Що таке тривалість та форма удару?
17. При якій тривалості удару у коливній системі досягається максимальне значення сили, яка передається на підлогу?
18. Яка умова повинна виконуватись для того, щоб досягти погашення небажаних коливань у коливній системі, яка зображена на рис. 2.16?

РОЗДІЛ 3

ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКИ МАШИН

3.1. Перехідні процеси у машині при ідеальній характеристиці двигуна

3.1.1. Виведення рівнянь руху

Перехідні процеси в машині із пружним передавальним механізмом будемо досліджувати при наступних припущеннях:

- закон руху ротора двигуна вважаємо заданим, що відповідає ідеальній механічній характеристиці двигуна;
- приведений момент інерції вважаємо постійним.

При цих припущеннях приходимо до динамічної моделі агрегату, яка показана на рис. 3.1.

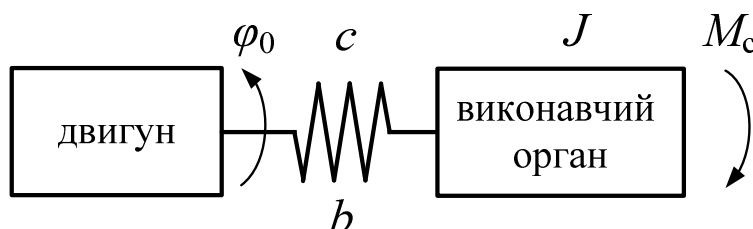


Рис. 3.1. Динамічна модель машини для дослідження перехідних процесів

Рівняння руху системи може бути записане у вигляді:

$$J\ddot{\varphi}_1 = -b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) - c(\varphi_1 - \varphi_0) + M_c(\varphi_1, \dot{\varphi}_1), \quad (3.1)$$

де J – момент інерції робочої машини; b – коефіцієнт демпфування передавального механізму; c – жорсткість передавального механізму; φ_0 та φ_1 – кутові координати руху вала двигуна та виконавчого органа відповідно.

Введемо нову функцію $\theta = \varphi_1 - \varphi_0$. Тоді рівняння (3.1) запишеться у формі:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\theta = -J\ddot{\varphi}_0 + M_c(\varphi_0(t) + \theta, \dot{\varphi}_0(t) + \dot{\theta}). \quad (3.2)$$

Розглянемо спочатку перехідні процеси при відсутності сил опору, тобто при $M_c=0$. Рівняння руху в цьому випадку

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + k^2\theta = -\ddot{\varphi}_0, \quad (3.3)$$

де $k^2 = \frac{c}{J}$, $2n = \frac{b}{J}$.

3.1.2. Вибір закону руху вихідної ланки двигуна

Закон зміни кутового прискорення ротора двигуна залежить від характеру перехідного процесу. При розгоні машини закон руху ротора повинен задовольняти умовам:

$$\begin{cases} \varphi_0(0) = 0, \dot{\varphi}_0(0) = 0; \\ \dot{\varphi}_0(t_p) = \omega_{ном}, \end{cases} \quad (3.4)$$

де $\omega_{ном}$ – кутова швидкість усталеного руху; t_p – час розгону. На рис. 3.2 показано два можливі варіанти закону зміни кутового прискорення, що задовольняють сформульованим умовам. Закон, показаний на рис. 3.2, а, відповідає розгону ротора з постійним кутовим прискоренням $\ddot{\varphi}_0(t_p) = \varepsilon = \frac{\omega_{ном}}{t_p}$. При синусоїдальному законі $\ddot{\varphi}_0(t_p) = \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{t_p}\right)$ (рис. 3.2, б)

максимальне кутове прискорення визначається з умови:

$$\int_0^{t_p} \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{t_p}\right) dt = -\frac{t_p}{\pi} \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{t_p}\right) \Big|_{t=0}^{t=t_p} = \frac{2t_p \varepsilon}{\pi} = \omega_{ном}. \quad (3.5)$$

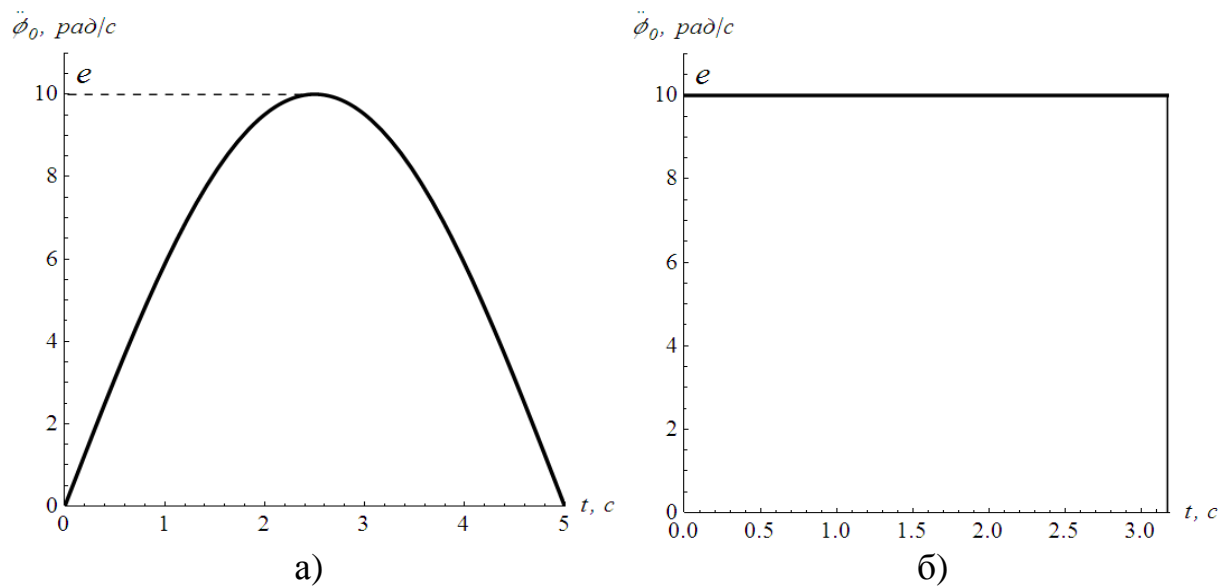


Рис. 3.2. Закони зміни кутового прискорення при розгоні:
а) синусоїдальний (половина періоду); б) постійний

У випадку позиціонування закон руху ротора повинен задовольняти умовам:

$$\begin{cases} \varphi_0(0) = 0, \dot{\varphi}_0(0) = 0; \\ \varphi_0(t_n) = \varphi_{кін}, \end{cases} \quad (3.6)$$

де $\varphi_{кін}$ – кут повороту ротора за час позиціонування; t_n – час позиціонування.

Два можливі закони зміни кутового прискорення $\ddot{\varphi}_0$ показані на рис. 3.2.

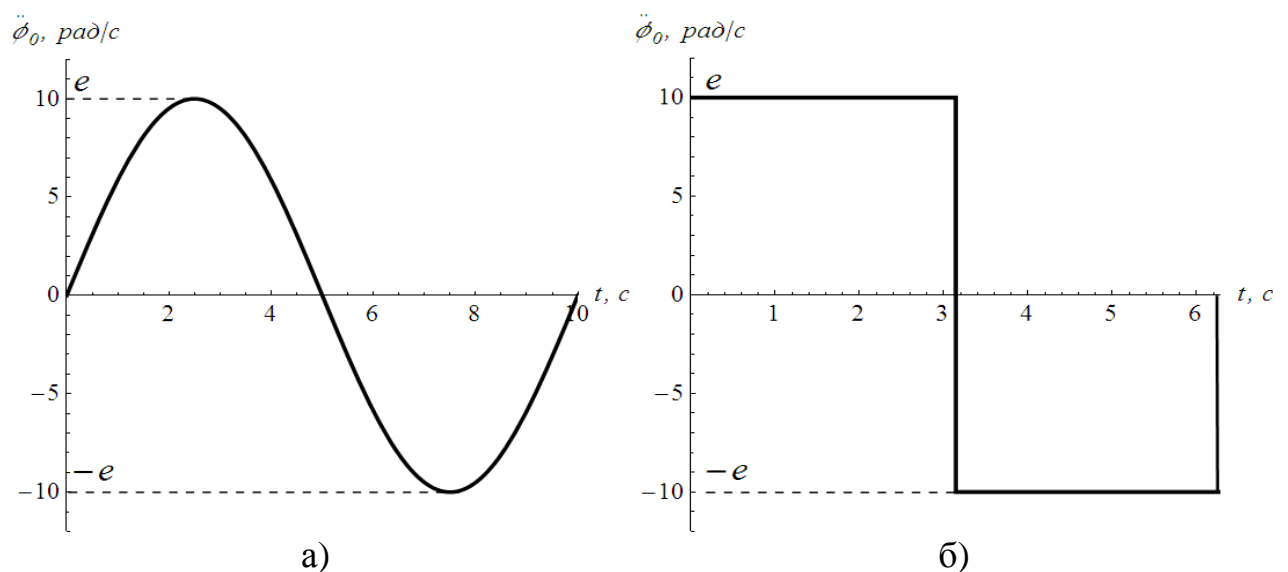


Рис. 3.3. Закони зміни кутового прискорення при позиціюванні:
а) синусоїдальний; б) релейний

Для першого закону (рис. 3.3, а) очевидно, що $\varepsilon = \frac{4\varphi_{кін}}{t_n^2}$, а для другого,

синусоїдального закону (рис. 3.3, б) $\ddot{\varphi}_0(t_p) = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi}{t_n}\right)$. Тоді:

$$\dot{\varphi}_0(t) = \int_0^{t_p} \ddot{\varphi}_0(t) dt = -\frac{\varepsilon t_n}{2\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{t_n}\right)t \right); \quad (3.7)$$

$$\varphi_0(t) = \int_0^{t_p} \dot{\varphi}_0(t) dt = \frac{\varepsilon t_n}{2\pi} \left(t - \frac{t_n}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{t_n}\right)t \right). \quad (3.8)$$

$$\text{Звідси } \varphi_{кін} = \frac{\varepsilon t_n^2}{2\pi}, \quad \varepsilon = \frac{2\pi\varphi_{кін}}{t_n^2}.$$

3.1.3. Розв'язок рівняння руху

Перейдемо тепер до інтегрування рівняння (3.3). Його розв'язок, що відповідає початковим умовам $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, може бути представлений, як відомо, у вигляді інтеграла Дюамеля [18]:

$$\theta(t) = -\int_0^t \exp[-n(t-\tau)] \sin(k_1)(t-\tau)\ddot{\varphi}_0(\tau) d\tau, \quad (3.9)$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Однак дослідження розв'язку, представленого у вигляді (3.9), виявляється складним. Спробуємо шукати розв'язок $\theta(t)$ у вигляді:

$$\theta = \frac{-\ddot{\varphi}_0(t)}{k^2} + \eta, \quad (3.10)$$

де η – нова невідома функція. Підставляючи (3.10) в (3.3), маємо:

$$\ddot{\eta} + 2n\dot{\eta} + k^2\eta = \frac{\varphi_0(t) + 2n\ddot{\varphi}_0(t)}{k^2}. \quad (3.11)$$

Зміст перетворення (3.10) полягає у виділенні „квазістатичної” компоненти розв’язку. Справа в тому, що час перехідного процесу звичайно суттєво перевищує період вільних коливань $2\pi k_1$, тому прискорення $\ddot{\varphi}_0(t)$, що стоїть в правій частині рівняння (3.3), „повільно” змінюється і його вплив на коливальну систему носить квазістатичний характер.

Розв’язок рівняння (3.11) потрібно шукати при початкових умовах:

$$\begin{cases} \eta(0) = \theta(0) + \frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2} = \frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2}; \\ \dot{\eta}(0) = \frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2}, \end{cases} \quad (3.13)$$

що випливає із (3.10) при початкових $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

Знайдемо розв’язок рівняння (3.11) у випадку розгону машини з постійним кутовим прискоренням ротора двигуна. При цьому $\ddot{\varphi}_0(t) = \varepsilon = const$, $\ddot{\varphi}_0(t) = 0$ і права частина рівняння (3.11) перетворюється в нуль. Загальний розв’язок однорідного рівняння, яке при цьому отримане, записується у вигляді:

$$\begin{cases} \eta = A \exp(-nt) \sin(k_1 t + \alpha); \\ \dot{\eta} = A \exp(-nt) [-n \sin(k_1 t + \alpha) + k_1 \cos(k_1 t + \alpha)], \end{cases} \quad (3.14)$$

де A і α – деякі коефіцієнти, що повинні визначатися з початкових умов $\eta(0) = \frac{\varepsilon}{k^2}$, $\dot{\eta}(0) = 0$. Підставляючи ці умови в (3.14), одержуємо:

$$\begin{cases} A = \frac{\varepsilon}{kk_1}; \\ \alpha = \arctg \frac{k_1}{n}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Якщо підставити знайдений розв’язок в (3.10), то при $0 < t < t_p$ будемо мати:

$$\theta(t) = -\frac{\varepsilon}{k^2} + \frac{\varepsilon}{kk_1} \sin(k_1 t + \alpha) \exp(-nt). \quad (3.16)$$

Таким чином, розгін супроводжується загасаючим коливним процесом. Швидкість загасання коливань визначається множником $\exp(-nt)$. Легко бачити, що зменшення амплітуди в 20 разів відбувається за час $t_* = \frac{3}{n}$ (оскільки $\ln(0,05) = -3$). Звичайно в механічній системі відношення $\frac{n}{k_1}$ лежить у межах 0,03-0,1 і час загасання $t_* = \frac{(30 \dots 100)}{k_1}$, що відповідає 16-5 періодам вільних коливань.

Коливний процес у системі не закінчується після завершення розгону. Стрибок кутового прискорення при $t=t_p$ знову збуджує коливання. Якщо вважати, що до моменту $t=t_p$ вільні коливання, викликані стрибком прискорення при $t=0$, встигнули загаснути, то наприкінці розгону маємо $\theta(t_p) = \frac{-\varepsilon}{k^2}$, $\dot{\theta}(t_p) = 0$ оскільки після закінчення розгону $\ddot{\varphi}_0(t_p) = 0$, можна безпосередньо визначити $\theta(t)$, інтегруючи рівняння (3.3). Отриманий при цьому розв'язок буде лише знаком і початком відліку часу відрізнятися від (3.16). Таким чином, при $t < t_p$ можемо отримати:

$$\theta(t) = -\frac{\varepsilon}{kk_1} \sin(k_1(t-t_p) + \alpha) \exp(-n(t-t_p)). \quad (3.17)$$

Закон зміни деформації $\theta(t)$ у процесі розгону показаний на рис. 3.3, а.

Дослідимо тепер розгін при синусоїдальному законі зміни прискорення, показаному на рис. 3.4, а. Визначаючи праву частину рівняння (3.11), маємо:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_0(t) = \frac{\varepsilon\pi}{t_p} \cos\left(\frac{\pi t}{t_p}\right); \\ \varphi_0(t) = -\frac{\varepsilon\pi^2}{t_p^2} \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right). \end{cases} \quad (3.18)$$

Рівняння для η набуває наступного виду:

$$\ddot{\eta} + 2n\dot{\eta} + k^2\eta = \frac{\varepsilon}{k^2 t_p} \left(-\frac{\pi}{t_p^2} \sin\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) + 2n\pi \cos\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) \right) \quad (3.19)$$

Як ми вже відзначали, час розгону t_p звичайно значно перевершує період вільних коливань $\frac{2\pi}{k}$. Вважаючи, що $t_p \geq \frac{20\pi}{k}$, тоді маємо:

$$\left(\frac{\pi}{k t_p} \right)^2 \leq 0,0025; \quad \frac{\pi}{k t_p} \leq 0,05. \quad (3.20)$$

Оскільки в механічній системі зі слабкою дисипацією звичайно $\frac{2n}{k} \leq 0,2$ легко бачити, що амплітуди прискорень (права частина виразу (3.19)) в 100-400 раз менше, ніж ε . Звідси випливає, що квазістатична добавка, викликана „дією” правої частини, буде настільки малою, що нею можна знехтувати, а η шукати з однорідного рівняння:

$$\ddot{\eta} + 2n\dot{\eta} + k^2\eta = 0. \quad (3.21)$$

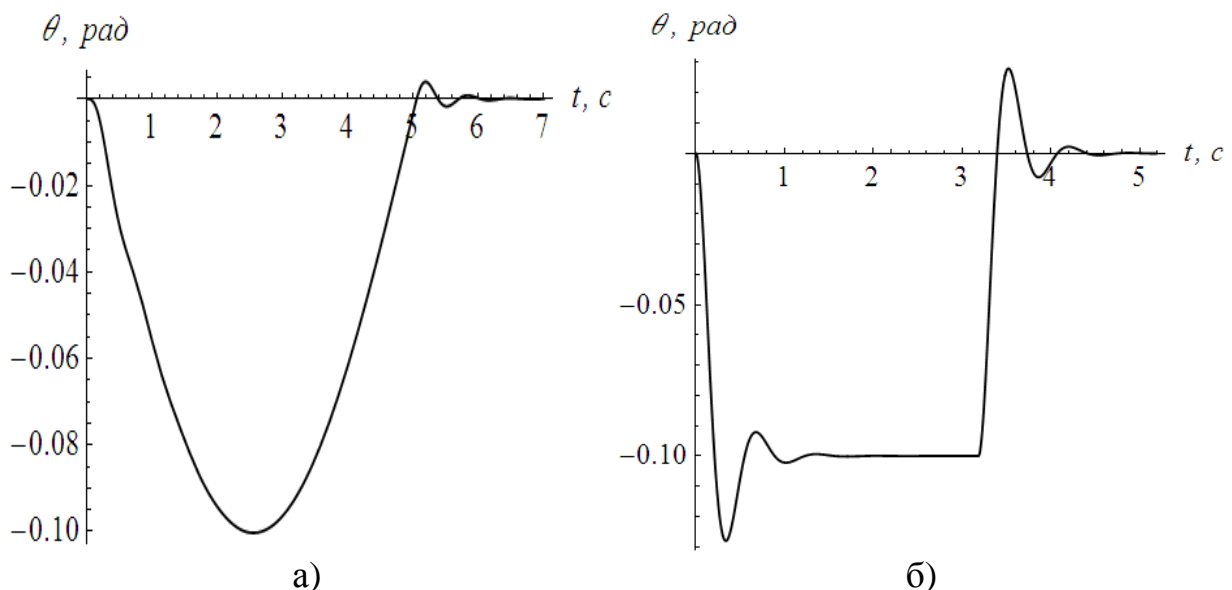


Рис. 3.4. Коливання, що виникають в машині при розгоні для законів $\ddot{\varphi}_0(t)$: а) синусоїдального (половина періоду коливань); б) релейного

Початкові умови (3.13) у цьому випадку такі:

$$\begin{cases} \eta(0) = \frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2} = 0; \\ \dot{\eta}(0) = \frac{\ddot{\varphi}_0(0)}{k^2} = \frac{\pi\varepsilon}{k^2 t_p}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Відшуковуючи розв'язок цього рівняння у вигляді (3.14), отримаємо:

$$\eta(t) = \frac{\pi\varepsilon}{k^2 k_1 t_p} \sin(k_1 t) \cdot \exp(-nt) \quad (3.33)$$

і отже

$$\theta = -\frac{\varepsilon}{k^2} \sin\left(\frac{k_1}{t_p} t\right) + \frac{\pi\varepsilon}{k^2 k_1 t_p} \exp(-nt) \sin(k_1 t). \quad (3.34)$$

Порівнюючи вирази (3.17) та (3.34) і враховуючи, що в другому випадку значення ε в $\pi/2$ раз більше, ніж у першому, зауважимо, що амплітуда коливань із частотою k_1 при синусоїдальному законі зміни прискорення в $\frac{2kt_p}{\pi^2} = 13$ раз менше, ніж при постійному прискоренні. Це – наслідок відсутності стрибка прискорення при $t=0$. Коливання такої ж малої амплітуди, викликані стрибком третьої похідної кута повороту ротора, виникнуть і після закінчення процесу розгону (рис. 3.4, б).

Аналогічно можна визначити коливання, що виникають у системі при позиціонуванні. У цьому випадку при релейному законі зміни $\ddot{\varphi}_0(0)$ будуть виникати загасаючі коливання з частотою k_1 у початковий момент, у момент $t = \frac{t_n}{2}$ (при стрибку прискорення від ε до $-\varepsilon$) і після закінчення процесу позиціонування. При синусоїдальному законі зміни прискорення коливання, що виникають на початку й кінці процесу, мають суттєво меншу амплітуду. Таким чином, вибір програмного закону руху, що відпрацьовується двигуном, може досить суттєво впливати на точність позиціонування.

3.1.4. Дослідження перехідного процесу при дії сил опору

Припустимо тепер, що перехідний процес відбувається при дії на систему моменту сил опору, що лінійно залежить від кутової швидкості робочого органу:

$$M_c = -M_0 - v\dot{\varphi}_1, \quad (3.35)$$

де M_0 – момент сухого тертя (початковий момент опору); v – деякий коефіцієнт; $\dot{\varphi}_1$ - кутова швидкість руху робочого органу машини.

Підставляючи (3.35) в (3.2), одержуємо:

$$J\ddot{\theta} + (b + v)\dot{\theta} + c\theta = -J\ddot{\varphi}_0 - M_0 - v\dot{\varphi}_0 \quad (3.36)$$

або

$$\ddot{\theta} + (n + n_1)\dot{\theta} + k^2\theta = -\ddot{\varphi}_0(t) - 2n_1\dot{\varphi}_0(t) - \frac{M_0}{J}, \quad (3.37)$$

де $2n_1 = \frac{v}{J}$.

В цьому випадку також можна виділити повільну квазістатичну компоненту в процесі $\theta(t)$, поклавши:

$$\theta = -\frac{\ddot{\varphi}_0(t)}{k^2} - \frac{\dot{\varphi}_0(t)}{v/c} - \frac{M_0}{c} + \eta(t) = \theta_*(t) + \eta, \quad (3.38)$$

де $\theta_*(t)$ - квазістатична складова.

Для змінної η одержуємо рівняння:

$$\ddot{\eta} + 2(n + n_1)\dot{\eta} + k^2\eta = k^{-2}[\varphi_0 + 2(n + 2n_1)\ddot{\varphi}_0 + 4(n + 2n_1)n_1\dot{\varphi}_0]. \quad (3.39)$$

При малих значеннях виразів $\frac{n}{k}$ та $\frac{n_1}{k}$ частинний розв'язок цього неоднорідного рівняння дає незначну добавку до квазістатичної компоненти й тому в більшості випадків може не враховуватися. Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$\ddot{\eta} + 2(n + n_1)\dot{\eta} + k^2\eta = 0, \quad (3.40)$$

що визначає високочастотні коливання.

Розглянемо випадок розгону машини при синусоїдальному законі зміни $\dot{\varphi}_0$. Початкові умови визначаємо з (3.38). Враховуючи, що $\dot{\varphi}_0(0) = \ddot{\varphi}_0(0) = 0$, маємо:

$$\begin{cases} \eta(0) = -\theta_*(0) = \frac{M_0}{c}; \\ \dot{\eta}(0) = -\dot{\theta}_*(0) = \frac{\pi\varepsilon}{k_2 t_p}. \end{cases} \quad (3.41)$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді:

$$\begin{cases} \eta = A \exp(-(n + n_1)t) \sin(k_* t + \alpha); \\ \dot{\eta} = A \exp(-(n + n_1)t) [-(n + n_1) \sin(k_* t + \alpha) + k_* \cos(k_* t + \alpha)], \end{cases} \quad (3.42)$$

де $k_* = \sqrt{k^2 - (n + n_1)^2}$.

Підставляючи цей розв'язок в (3.41) отримаємо:

$$\begin{cases} A \sin(\alpha) = \frac{M_0}{c}; \\ -(n + n_1)A \sin(\alpha) + k_* A \cos(\alpha) = \frac{\pi\varepsilon}{k^2 t_p}, \end{cases} \quad (3.43)$$

звідки

$$\begin{cases} A = \sqrt{\left(\frac{M_0}{c}\right)^2 (1 + (n + n_1)^2) + 2 \frac{\pi\varepsilon M_0}{k^2 t_p c} + \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{k^4 t_p^2}}; \\ \alpha = \arctg \left(\frac{M_0}{c} \left(\frac{\pi\varepsilon}{k^2 t_p} + (n + n_1) \frac{M_0}{c} \right)^{-1} \right). \end{cases} \quad (3.44)$$

На відміну від раніше розглянутого розгону при відсутності сили опору, тут амплітуда коливань зростає приблизно на величину M_0/c . Ця добавка викликана тим, що в момент $t=0$ пружний елемент є недеформованим і повинен у процесі розгону одержати статичну деформацію, рівну M_0/c .

3.1.5. Методи зменшення динамічної похибки

Звернувшись знову до формул (3.17) та (3.34), зауважимо, що амплітуда коливної компоненти динамічної похибки пропорційна величині $\frac{\varepsilon}{kk_1}$. При слабкій дисипації можна вважати, що $k \approx k_1$ і тоді вираз для амплітуди представляється у такому вигляді:

$$A = \frac{\xi \varepsilon}{k^2}, \quad (3.45)$$

де ξ – коефіцієнт, величина якого залежить від форми закону програмного прискорення.

У свою чергу, для ε справедливі співвідношення:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\beta \omega_{ном}}{t_p}, & \text{при розгоні;} \\ \frac{\gamma \varphi_{кін}}{t_n^2}, & \text{при позиціюванні,} \end{cases} \quad (3.46)$$

де β , γ – коефіцієнти, обумовлені видом закону зміни програмного прискорення.

З (3.45) і (3.46) одержуємо у випадку розгону:

$$A = \frac{\xi \beta \omega_{ном}}{k^2 t_p}, \quad (3.47)$$

для позиціонування:

$$A = \frac{\xi \gamma \varphi_{\text{кін}}}{(kt_n)^2}. \quad (3.48)$$

Із формул (3.47) та (3.48) видно, що існують три способи зменшення динамічної похибки при перехідному процесі [4]:

1. зміна закону програмного прискорення (бажано вибирати плавні закони прискорень, без стрибків);
2. збільшення часу перехідного процесу (чим більше t_p або t_n , тем менше похибка; таким чином, збільшення продуктивності машини за рахунок зменшення часу перехідних процесів приводить до збільшення динамічних похибок);
3. збільшення власної частоти системи (цей шлях є найбільш раціональним; щоб збільшити власну частоту, потрібно або збільшити жорсткість передавального механізму, або зменшити приведений момент інерції рухомих частин системи).

3.2. Аналіз режиму пуску механізмів представлених одномасовою моделлю

Розглянемо процес пуску на прикладі механізму пересування вантажопідйомного крана. Приймемо одномасову динамічну модель механізму, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m\ddot{x} = F - W, \quad (3.49)$$

де m – приведена до поступального руху маса кранового механізму; x – узагальнена координата кранового механізму; F – сила, що створюється приводним двигуном (рушійна сила); W – сила опору переміщенню маси m (у тому числі технологічного характеру), яка у даному дослідженні є незмінною

(наприклад, у випадку підйому вантажу вантажопідйомним механізмом це сила опору переміщенню, яка рівна вазі вантажу). Точка над символом означає диференціювання за часом.

Розглянемо випадок, коли приводним двигуном механізму є асинхронний із короткозамкненим ротором. Для отримання аналітичного розв'язку задачі апроксимуємо механічну характеристику прямою, яка проходить через дві точки: точку, яка відповідає пусковому моменту (точка 1) та точку із нульовим моментом (точка 3) (рис. 3.4). На рис. 3.4 показані вказані точки та точка 2 із координатами, які відповідають номінальному моменту та номінальній кутовій швидкості двигуна. Дана апроксимація не досить коректно відображає реальну статичну механічну характеристику двигуна, тому її можна використовувати лише у першому наближенні. У приведених розрахунках використані дані для двигуна МТКФ011-6:

$$P_{ном} = 1,7 \text{ кВт}, n_{ном} = 835 \text{ об/хв}, \frac{M_{пуск}}{M_{ном}} = \frac{M_{max}}{M_{ном}} = 2,3 \text{ [19]}.$$

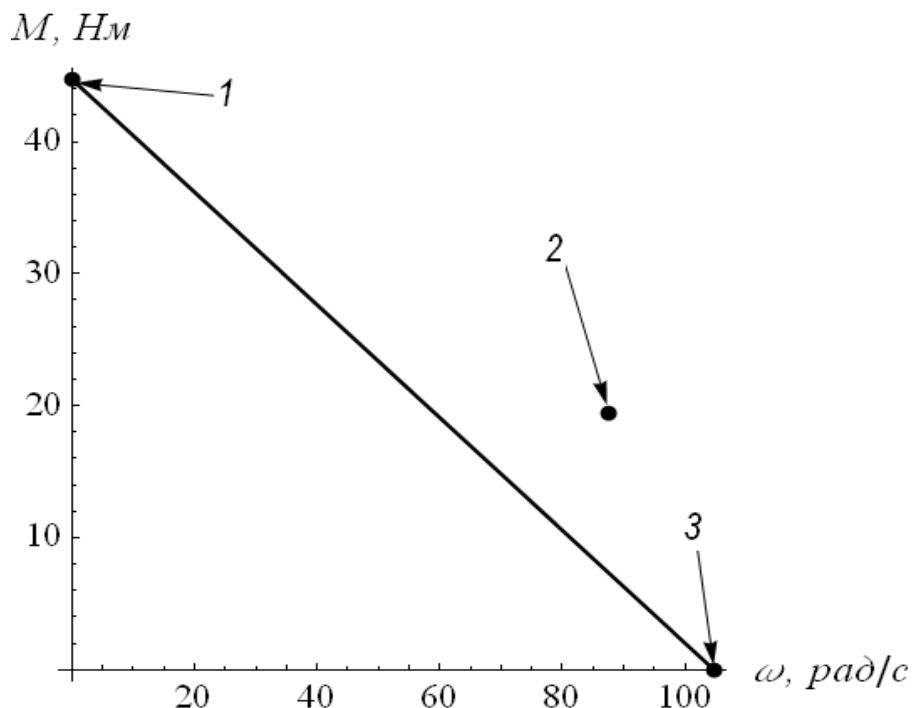


Рис. 3.4. Апроксимація механічної характеристики двигуна прямою

Підставляючи відповідні значення, можемо сформулювати задачу Коші: знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$\ddot{x} + \dot{x} \frac{M_{\text{нук}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} - \frac{M_{\text{нук}} i \eta}{m r} + \frac{W}{m} = 0, \quad (3.50)$$

де ω_0 - швидкість ідеального холостого хода електродвигуна; при початкових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Розв'язок даної задачі Коші представляється у такому вигляді:

$$x = \frac{\omega_0^2 m^2 r^4}{M_{\text{нук}}^2 i^4 \eta^2} \left(\frac{M_{\text{нук}} i \eta}{m r} - \frac{W}{m} \right) \left(e^{-t \left(\frac{M_{\text{нук}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} \right)} + t \frac{M_{\text{нук}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} - 1 \right). \quad (3.52)$$

Диференціюючи вираз за часом, отримаємо функцію швидкості системи:

$$\dot{x} = \left(\frac{r}{r i} - \frac{W r^2}{i^2 \eta M_{\text{нук}}} \right) \left(1 - e^{-t \left(\frac{M_{\text{нук}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} \right)} \right). \quad (3.53)$$

Для знаходження тривалості розгону системи до деякої швидкості необхідно розв'язати наступне рівняння:

$$\dot{x} = v^* \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}, \quad (3.54)$$

де v^* – відносна швидкість усталеного руху. Розв'язок рівняння (3.54) представляється таким чином:

$$t = \frac{\lg \frac{1}{1 - v^*}}{M_{\text{нук}} i^2 \eta} m r^2 \omega_0. \quad (3.55)$$

Побудуємо графіки функцій (3.52), (3.53), які представлені на рис. 3.5 та рис. 3.6.

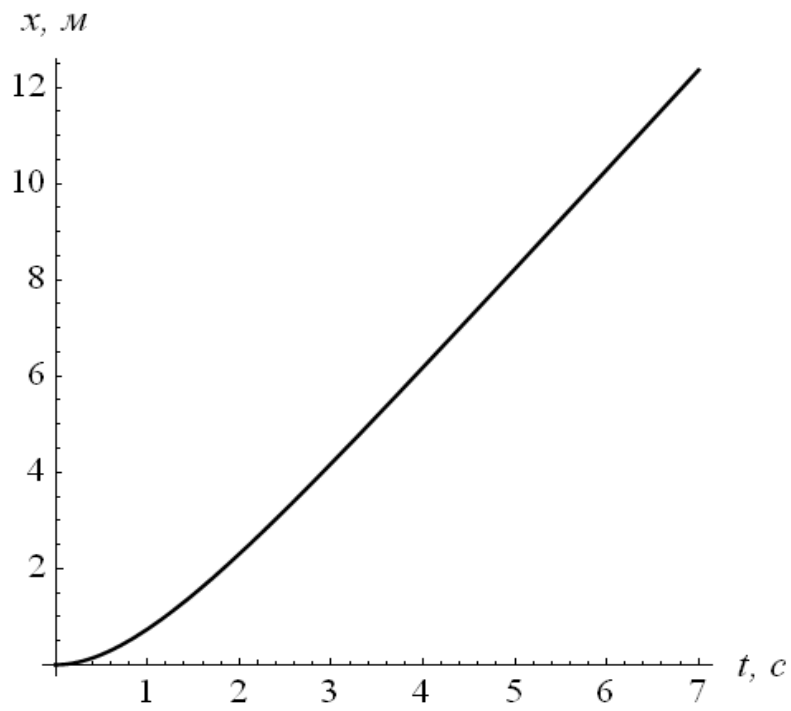


Рис. 3.5. Графік функції переміщення механізму

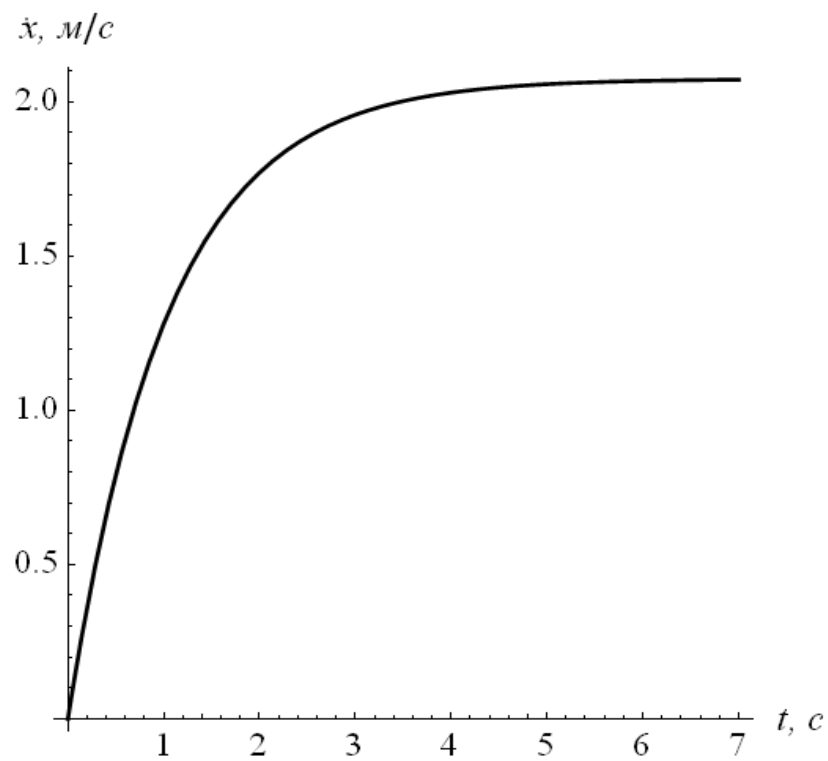


Рис. 3.6. Графік функції швидкості механізму

Крім того, приведемо графік функції прискорення механізму (рис. 3.7).

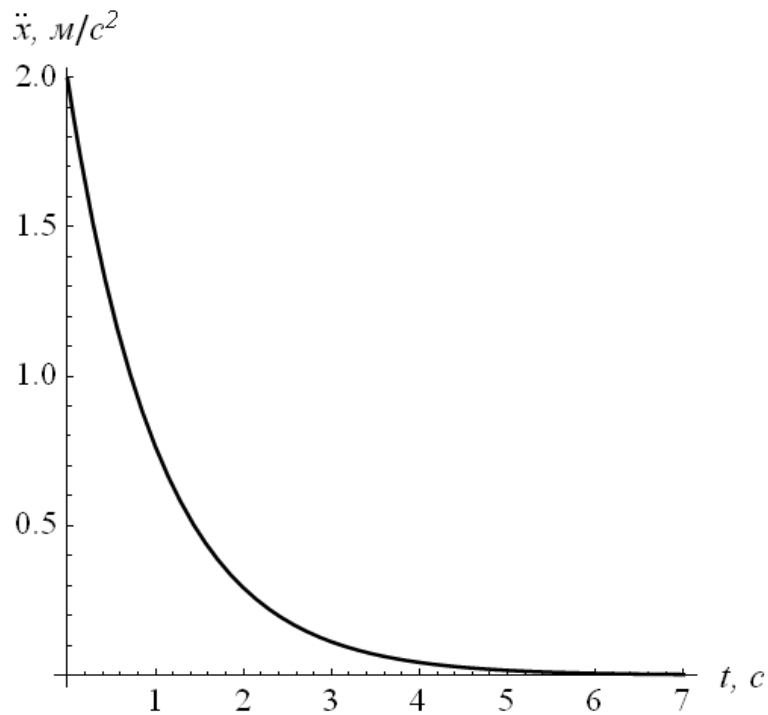


Рис. 3.7. Графік функції прискорення механізму

Для того, щоб врахувати всі заявлені виробником дані двигуна, використаємо апроксимацію його механічної характеристики у вигляді полінома:

$$M = \sum_{i=0}^n A_i \omega^i, \quad (3.56)$$

де A_i – невідомі коефіцієнти, які необхідно певним чином підібрати; ω – кутова швидкість електродвигуна; n – степінь полінома. Поліном (3.56) повинен задовольняти наступні умови:

$$\begin{cases} M(0) = M_{\text{пуск}}; \\ \frac{\partial M}{\partial \omega}(0) = 0; \\ M(\omega_{\text{ном}}) = M_{\text{ном}}; \\ M(\omega_0) = 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

де $\omega_{\text{ном}}$ – номінальна швидкість руху електроприводу; $M_{\text{ном}}$ – номінальний момент на валу двигуна. Оскільки умов чотири, то $n=3$. Із системи (3.57)

можна знайти невідомі коефіцієнти A_i . Для цього сформуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} A_0 = M_{\text{пуск}}; \\ A_1 = 0; \\ A_0 + A_1\omega_{\text{ном}} + A_2\omega_{\text{ном}}^2 + A_3\omega_{\text{ном}}^3 = M_{\text{ном}}; \\ A_0 + A_1\omega_0 + A_2\omega_0^2 + A_3\omega_0^3 = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Запишемо вирази для коефіцієнтів A_2 та A_3 :

$$A_2 = \frac{(M_{\text{ном}} - M_{\text{пуск}})\omega_0^3 + M_{\text{пуск}}\omega_{\text{ном}}^3}{\omega_0^2(\omega_0 - \omega_{\text{ном}})\omega_{\text{ном}}^2}; \quad (3.59)$$

$$A_3 = \frac{-M_{\text{ном}}\omega_0^2 + M_{\text{пуск}}(\omega_0^2 - \omega_{\text{ном}}^2)}{\omega_0^2(\omega_0 - \omega_{\text{ном}})\omega_{\text{ном}}^2}. \quad (3.60)$$

Підставляючи знайдені залежності у формулу (3.56), отримаємо вираз, який описує статичну механічну характеристику асинхронного електродвигуна. Побудуємо графік цієї характеристики (рис. 3.8).

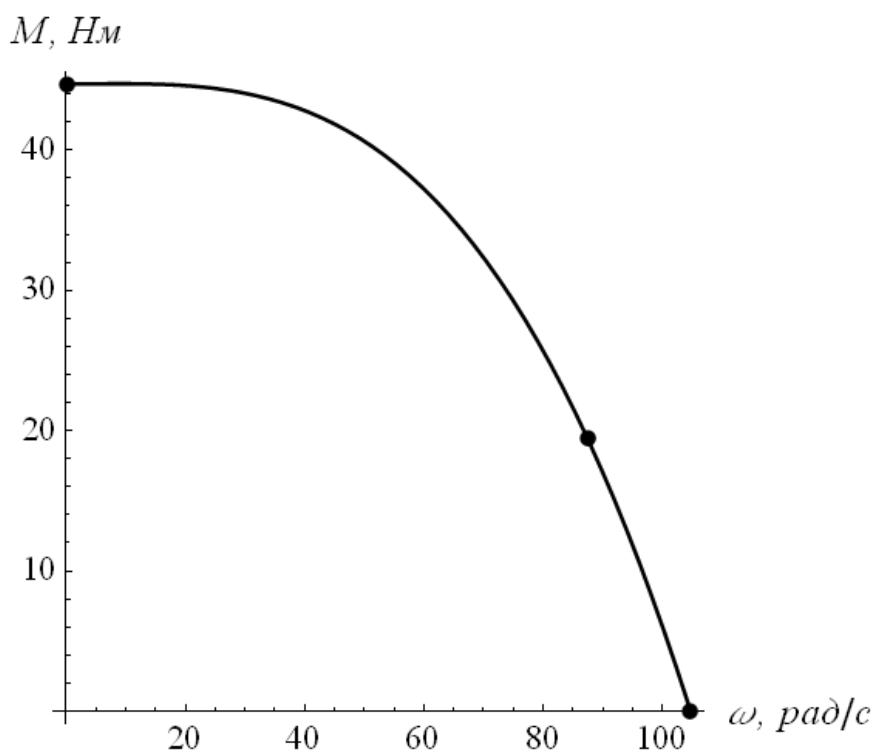


Рис. 3.8. Графік апроксимованої механічної характеристики асинхронного двигуна МТКФ011-6

Враховуючи вирази (3.59)-(3.60), рівняння руху (3.49) можна переписати таким чином:

$$\ddot{x} = \frac{F - W}{m} = N_3 \dot{x}^3 + N_2 \dot{x}^2 + N_1 \dot{x} + N_0, \quad (3.61)$$

де N_3, N_2, N_1, N_0 – певні коефіцієнти, які визначаються із наступних виразів:

$$N_3 = \frac{A_3 i^4 \eta}{mr^4}, \quad N_2 = \frac{A_2 i^3 \eta}{mr^3}, \quad N_1 = \frac{A_1 i^2 \eta}{mr^2}, \quad N_0 = \frac{A_0 i \eta}{mr} - \frac{W}{m}. \text{ Вводячи позначення:}$$

$\dot{x} = v$, рівняння (3.61) запишемо таким чином:

$$\dot{v} = N_3 v^3 + N_2 v^2 + N_0. \quad (3.62)$$

Рівняння (3.62) є нелінійним диференціальним рівнянням Абеля із постійними коефіцієнтними [20]. Для знаходження розв'язку рівняння (3.62) необхідно знайти розв'язки кубічного алгебраїчного рівняння:

$$v^3 + \frac{N_2}{N_3} v^2 + \frac{N_0}{N_3} = 0. \quad (3.63)$$

Для визначення коренів рівняння (3.63) його необхідно звести до „неповного” виду [21]. Це робиться шляхом введення заміни: $\gamma = v + \frac{N_2}{3N_3}$. У результаті рівняння (3.63) представляється у такому виді:

$$\gamma^3 + \gamma \frac{N_2^2}{3N_3^2} + \left(\frac{2N_2^3}{27N_3^3} + \frac{N_0}{N_3} \right) = 0. \quad (3.64)$$

Корені „неповного” кубічного рівняння (3.64) знаходяться за такими виразами:

$$\begin{cases} \gamma_1 = A + B; \\ \gamma_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm \sqrt[3]{\frac{A-B}{2} \sqrt{3}}, \quad \Delta = -1, \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\text{де } A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}}, \quad B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}}, \quad D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad p = \frac{N_2^2}{3N_3^2},$$

$$q = \frac{2N_2^3}{27N_3^3} + \frac{N_0}{N_3}.$$

Для подальшого аналізу необхідно встановити знак дискримінанта D . Враховуючи введені вище позначення можемо записати вираз для дискримінанту:

$$D = \frac{r^6 \omega_{\text{НОМ}}^4 \omega_0^4 (rW - iM_{\text{НОМ}} \eta \lambda)^2 (\omega_0 - \omega_{\text{НОМ}})^2}{4i^8 M_{\text{НОМ}}^2 \eta^2 (\omega_0^2 (\lambda - 1) - \lambda \omega_{\text{НОМ}}^2)^2}. \quad (3.66)$$

Аналіз виразу (3.66) показує, що завжди $D > 0$. Отже, рівняння (3.66) буде мати один дійсний корінь та два комплексно-спряжені.

Тепер можемо записати розв'язок рівняння (3.64) у неявному вигляді:

$$\int \frac{dv}{\left(v - \gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3}\right) \left(v - \gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3}\right) \left(v - \gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3}\right)} = tN_3 + \lg C_1, \quad (3.67)$$

де C_1 – постійна інтегрування.

Після інтегрування лівої частини виразу (3.67) його можна переписати у такому вигляді:

$$\lg \left(v - \gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_1} + \lg \left(v - \gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_2} + \lg \left(v - \gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_3} = tN_3 + \lg C_1, \quad (3.68)$$

$$\text{де } G_1 = \frac{(\gamma_2 - \gamma_3)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)}, \quad G_2 = \frac{(\gamma_3 - \gamma_1)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)},$$

$$G_3 = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)}.$$

Надалі необхідно знайти постійну інтегрування C_1 , яка входить у вираз (3.68). Для цього потрібно задатись початковою умовою: $v(0) = 0$. Із врахуванням цієї умови можемо знайти вираз для постійної інтегрування C_1 :

$$C_1 = \left(-\gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3} \right)^{G_1} \left(-\gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3} \right)^{G_2} \left(-\gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3} \right)^{G_3}. \quad (3.69)$$

Таким чином, ми знайшли залежність $t = f(v)$. Цю залежність також можна трактувати як неявну залежність $v = f(t)$. Для знаходження явної залежності $v = f(t)$ необхідно розв'язати рівняння (3.69), причому представляє інтерес саме аналітичний розв'язок, який знайти досить складно. Можна шукати розв'язок рівняння (3.69) при відомих параметрах, які в нього входять. Але навіть при умові, що всі параметри відомі розв'язування рівняння (3.69) може бути досить складним. Звичайно використання наближених (наприклад, ітераційних) методів розв'язку дозволяє знаходити певні наближення до точного розв'язку. Це не універсальний результат, тому він не представляє інтересу з точки зору проведення загального аналізу процесу розгону механізму. Однак, для даних параметрів механізму можна отримати графічну залежність швидкості від часу. Для цього побудуємо графік функції $t = f(v)$ та „повернемо” його на 90 градусів. Отриманий графік показаний на рис. 3.9 штриховою лінією. Для перевірки правильності проведених розрахунків проведемо чисельне інтегрування диференціального рівняння (3.61). У результаті отримаємо інтерполяційну функцію $x = f(t)$. Графіки вищих похідних інтерполяційної функції $x = f(t)$ показано на рис. 3.9 та рис. 3.10.

На рис. 3.9 побудовано графіки при чисельному інтегруванні рівняння (3.61) та функція $t = f(v)$ повернута на 90 градусів. Графіки даних функцій мають абсолютний збіг, що свідчить про правильність проведених аналітичних розрахунків.

Причиною складнощів при розв'язуванні задачі знаходження аналітичного виразу, що описує рух механізму, є вид диференціального рівняння (3.62), яке у свою чергу є „продуктом” апроксимаційної функції (3.56). Тому доцільно апроксимаційну функцію представляти у іншому

вигляді, наприклад, у вигляді квадратичного полінома (при $n=2$). Однак, при цьому не виконуються усі умови (3.58). Тому механічну характеристику асинхронного двигуна необхідно шукати у вигляді сплайна [22], який складається з двох квадратичних поліномів і які „зшиваються” у точці з координатами $(M_{ном}, \omega_{ном})$.

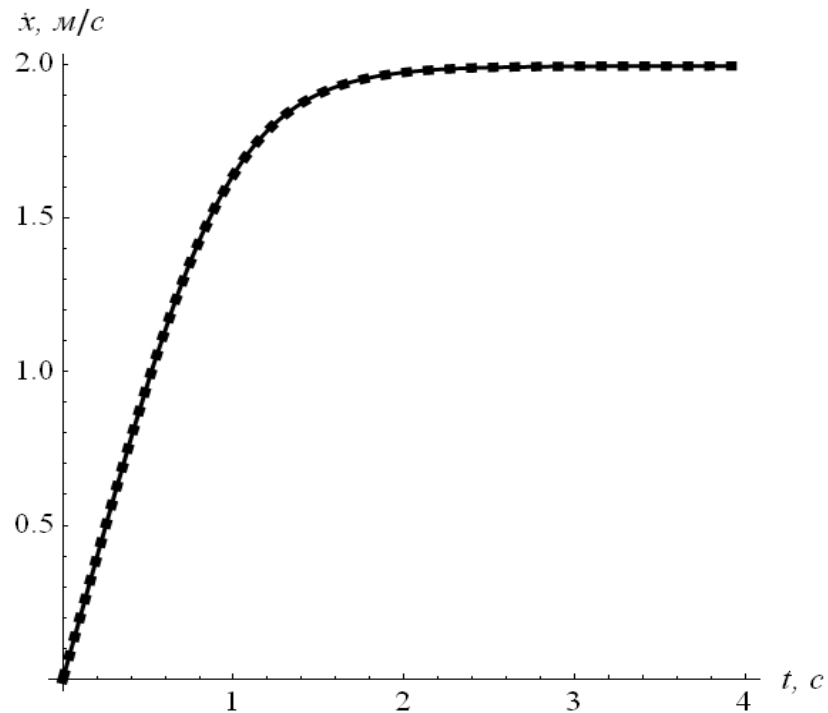


Рис. 3.9. Графік функції швидкості механізму

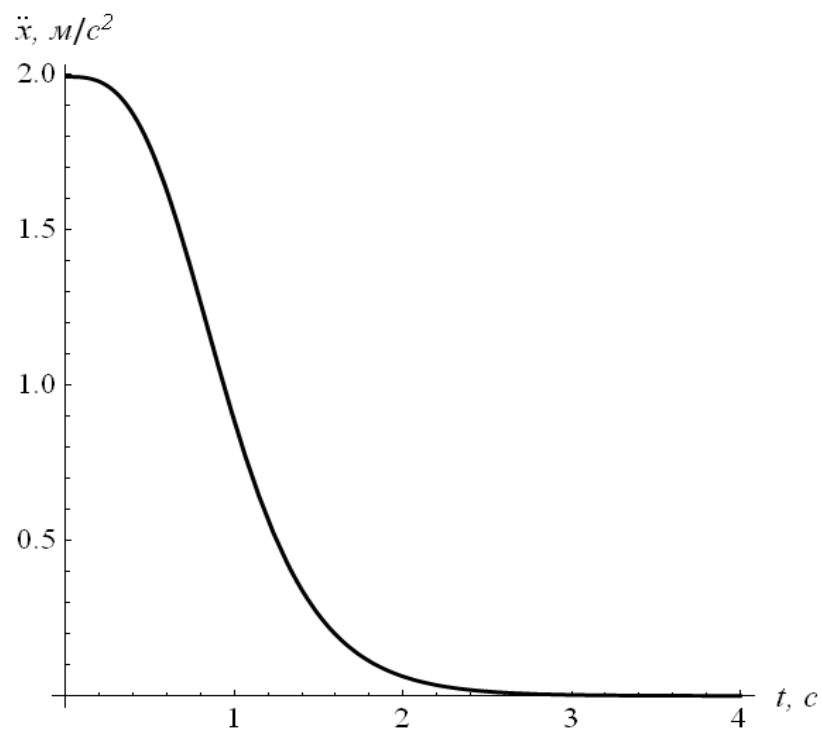


Рис. 3.10. Графік функції прискорення механізму

3.3. Аналітичний розв'язок рівнянь руху одномасових механізмів

Велика кількість механізмів може бути представлена у вигляді одномасової динамічної моделі. Таке представлення базується на певних припущеннях: маса механізму вважається зосередженою, жорсткість та демпфування у рухомих елементах механізму не враховуються тощо. Необхідно зробити таке зауваження: вже перше наближення (одномасова модель) для вивчення та аналізу процесів у багатьох механізмах може бути достатньо точним. У цьому випадку отримані результати аналітичного характеру можуть бути цінним матеріалом для використання у практичних цілях.

У приведених нижче розрахунках використані дані для двигуна МТКФ011-6: $P_{ном}=1,7$ кВт, $n_{ном}=835$ об/хв, $\frac{M_{пуск}}{M_{ном}} = \frac{M_{max}}{M_{ном}} = 2,3$ [19]. Таким чином, можна сформулювати вимоги до апроксимаційної функції, яка описує механічну характеристику асинхронного двигуна (3.58). У попередньому пункті встановлено, що у випадку апроксимації механічної характеристики асинхронного двигуна поліномом необхідно обрати кубічний поліном. Однак при цьому диференціальне рівняння (3.62), яке дає змогу отримати кінематичні функції руху механізму, перетворюється у нелінійне рівняння Абеля із постійними коефіцієнтами, яке неможливо розв'язати аналітично [23]. Тому прийmemo для апроксимації механічної характеристики сплайново-квадратичну функцію [22]:

$$M = \begin{cases} A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ B_0 + B_1\omega + B_2\omega^2, & \text{при } \omega \in [\omega_{ном}, \omega_0], \end{cases} \quad (3.70)$$

де $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити. Таким чином, можна записати умови для знаходження невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ з урахуванням умов (3.70):

$$\begin{cases} A_0 = M_{\text{пуск}}; \\ A_1 = 0; \\ A_0 + A_1 \omega_{\text{ном}} + A_2 \omega_{\text{ном}}^2 = M_{\text{ном}}; \\ B_0 + B_1 \omega_{\text{ном}} + B_2 \omega_{\text{ном}}^2 = M_{\text{ном}}; \\ B_0 + B_1 \omega_0 + B_2 \omega_0^2 = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Система (3.71) дозволяє знайти невідомі коефіцієнти окрім одного – це один із коефіцієнтів B_0, B_1, B_2 . Для того, щоб усі коефіцієнти були визначені необхідно задатись ще однією умовою – умовою плавного сполучення квадратичних поліномів у точці $\omega = \omega_{\text{ном}}$, що еквівалентно рівнянню:

$$\left. \frac{\partial(A_0 + A_1 \omega + A_2 \omega^2)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\text{ном}}} = \left. \frac{\partial(B_0 + B_1 \omega + B_2 \omega^2)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\text{ном}}} \quad (3.72)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (3.71) та (3.72), отримаємо всі невідомі коефіцієнти:

$$\begin{cases} A_2 = \frac{M_{\text{ном}} - M_{\text{пуск}}}{\omega_{\text{ном}}^2}; \\ B_0 = \frac{\omega_0 (M_{\text{ном}} \omega_0 + 2M_{\text{пуск}} (\omega_{\text{ном}} - \omega_0))}{(\omega_0 - \omega_{\text{ном}})^2}; \\ B_1 = \frac{2(M_{\text{ном}} - M_{\text{пуск}}) \omega_0^2 + 2M_{\text{пуск}} \omega_{\text{ном}}^2}{(\omega_0 - \omega_{\text{ном}})^2 \omega_{\text{ном}}}; \\ B_2 = \frac{2M_{\text{пуск}} (\omega_0 - \omega_{\text{ном}}) + M_{\text{ном}} (\omega_{\text{ном}} - 2\omega_0)}{(\omega_0 - \omega_{\text{ном}})^2 \omega_{\text{ном}}}. \end{cases} \quad (3.73)$$

Побудуємо графіки, які відповідають виразу (3.70) та рівнянню Клосса для прийнятого двигуна (рис. 3.11).

На рис. 3.11 штриховою лінією показано графік, який відповідає формулі Клосса. Як видно із приведених графіків (рис. 3.11) вираз (3.70) краще описує механічну характеристику двигуна, оскільки його графік проходить через всі точки 1, 2 та 3. Ці точки характеризують заявлені виробником електродвигуна дані: точка 1 має координати $(0, M_{\text{пуск}})$, точка 2 – $(\omega_{\text{ном}}, M_{\text{ном}})$, точка 3 – $(\omega_0, 0)$. Із рис. 3.11 видно, що графік побудований за

формулою Клосса не містить точку 2, тобто тут присутнє деяке розходження із практичними даними.

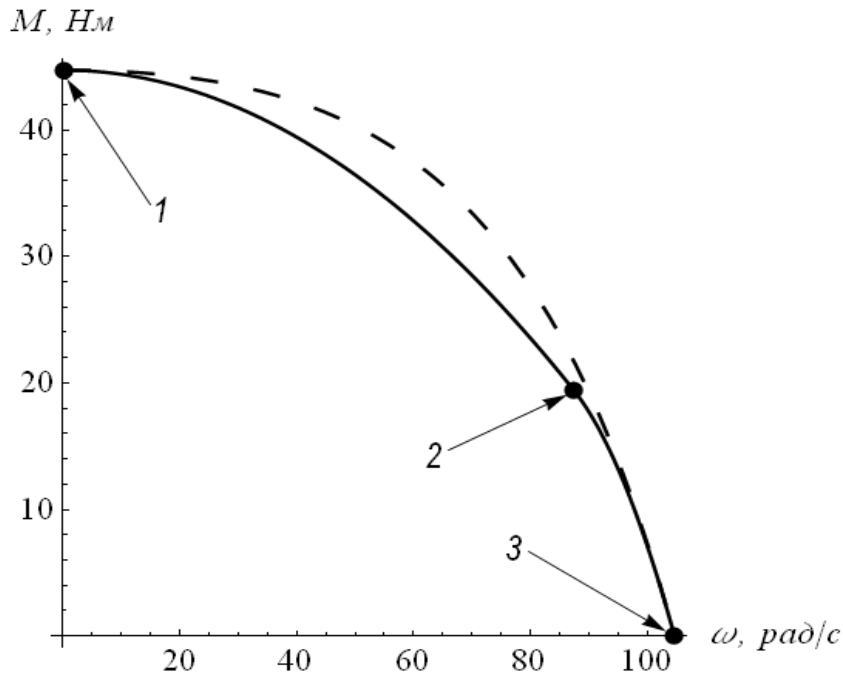


Рис. 3.11. Графіки механічних характеристик побудовані за виразом (3.70) і за формулою Клосса

Із врахуванням виразів (3.70) та (3.73) рівняння руху механізму можна представити у такому вигляді:

$$\ddot{x} = \frac{F - W}{m} = N_2 \dot{x}^2 + N_1 \dot{x} + N_0, \quad (3.74)$$

де N_2, N_1, N_0 – певні коефіцієнти, які визначаються із наступних виразів:

$$N_2 = \begin{cases} \frac{A_2 i^3 \eta}{mr^3}, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ \frac{B_2 i^3 \eta}{mr^3}, & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{ном}]; \end{cases}$$

$$N_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ \frac{B_1 i^2 \eta}{mr^2}, & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{ном}]; \end{cases} \quad (3.75)$$

$$N_0 = \begin{cases} \frac{A_0 i \eta}{mr} - \frac{W}{m}, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ \frac{B_0 i \eta}{mr} - \frac{W}{m}, & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{ном}]. \end{cases}$$

Вводячи позначення: $\dot{x} = v$, рівняння (3.75) запишемо таким чином:

$$\dot{v} = N_2 v^2 + N_1 v + N_0. \quad (3.76)$$

Рівняння (3.76) є нелінійним диференціальним рівнянням Рікатті із постійними коефіцієнтними [23]. Розв'язок даного виду рівняння Рікатті знаходиться із такого співвідношення [23]:

$$\frac{v - v_1}{v - v_2} = \frac{v_1 - v_0}{v_2 - v_0} e^{N_2(t-t_0)}, \quad (3.77)$$

де v_0 – початкова швидкість руху кранового механізму; t_0 – початковий момент часу, який відповідає початковій швидкості v_0 (початкова умова така $v(t_0) = v_0$); v_1 та v_2 – корені квадратного рівняння:

$$N_2 v^2 + N_1 v + N_0 = 0. \quad (3.78)$$

Із виразу (3.78) можемо виразити шукане v . У результаті отримаємо:

$$v = \frac{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)}(v_0 - v_1)v_2 + v_1(v_2 - v_0)}{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)}(v_0 - v_1) + v_2 - v_0}. \quad (3.79)$$

Тепер знайдемо корені квадратного рівняння (3.78):

$$v_{1,2} = \frac{-N_1 \pm \sqrt{N_1^2 - 4N_0N_2}}{2N_2}. \quad (3.80)$$

Таким чином, отримана перша похідна розв'язку рівняння (3.74) за часом, тобто функція зміни швидкості механізму. Диференціювання виразу (3.79) за часом дає функцію прискорення механізму:

$$\dot{v} = \ddot{x} = \frac{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} N_2 (v_1 - v_0)(v_1 - v_2)^2 (v_2 - v_0)}{(e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)}(v_0 - v_1) + v_2 - v_0)^2}. \quad (3.81)$$

Для того, щоб знайти функцію переміщення механізму у часі необхідно проінтегрувати вираз (3.79). У результаті отримаємо:

$$\int v dt = x = \frac{\lg(v_2 - v_0 + e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)}(v_0 - v_1))}{N_2} + tv_1 + C_1. \quad (3.82)$$

де C_1 – постійна інтегрування. Поставимо початкову умову:

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.83)$$

яка дасть змогу знайти невідому постійну інтегрування C_1 . Умова (3.83) у розгорнутому вигляді представляється у вигляді рівняння, з якого просто виразити шукану постійну інтегрування:

$$C_1 = x_0 - t_0 v_1 + \frac{\lg(v_2 - v_1)}{N_2}. \quad (3.84)$$

Розв'язок (3.84) є універсальним результатом, який описує рух механізму на обох ділянках механічної характеристики двигуна: від точки 1 до 2 ($\omega \in [0, \omega_{\text{м}}]$) та від точки 2 до 3 ($\omega \in [\omega_{\text{ном}}, \omega_0]$). Вирази для ділянок механічної характеристики двигуна 1-2 та 2-3 відрізняються лише початковими умовами: кінцеві умови для розв'язку на ділянці 1-2 будуть початковими для розв'язку на ділянці 2-3.

Крім того, необхідно зазначити, що у випадку коли виконується умова $W \geq \frac{M_{\text{ном}} i \eta}{r}$ електропривод працює лише на ділянці 1-2 механічної характеристики і виконувати сполучення розв'язків для ділянок механічних характеристик 1-2 та 2-3 не потрібно.

Прийmemo, що $W \leq \frac{M_{\text{ном}} i \eta}{r}$, тоді необхідно знайти момент часу, при якому розв'язки сполучаються. Це такий момент часу, при якому виконується умова:

$$v = v_{ном}, \quad (3.85)$$

або у розгорнутому вигляді:

$$v_2 + \frac{v_2(v_2 - v_1)}{e^{N_2 t(v_1 - v_2)} v_1 - v_2} = \frac{\omega_{ном} r}{i}. \quad (3.86)$$

Запишемо вираз для шуканого моменту часу:

$$t_{ном} = \frac{\lg\left(\frac{v_2(v_2 - v_1)i}{(\omega_{ном} r - v_2 i)v_1} + \frac{v_2}{v_1}\right)}{N_2(v_1 - v_2)}. \quad (3.87)$$

Приведемо графічну інтерпретацію отриманих результатів. Для цього подубуємо графіки переміщення (рис. 3.12), швидкості (рис. 3.13) та прискорення (рис. 3.14) механізму. Графіки побудовані при таких параметрах: $i=5$, $\eta=0,85$, $m=1000\text{кг}$, $W=0,8M_{ном}$.

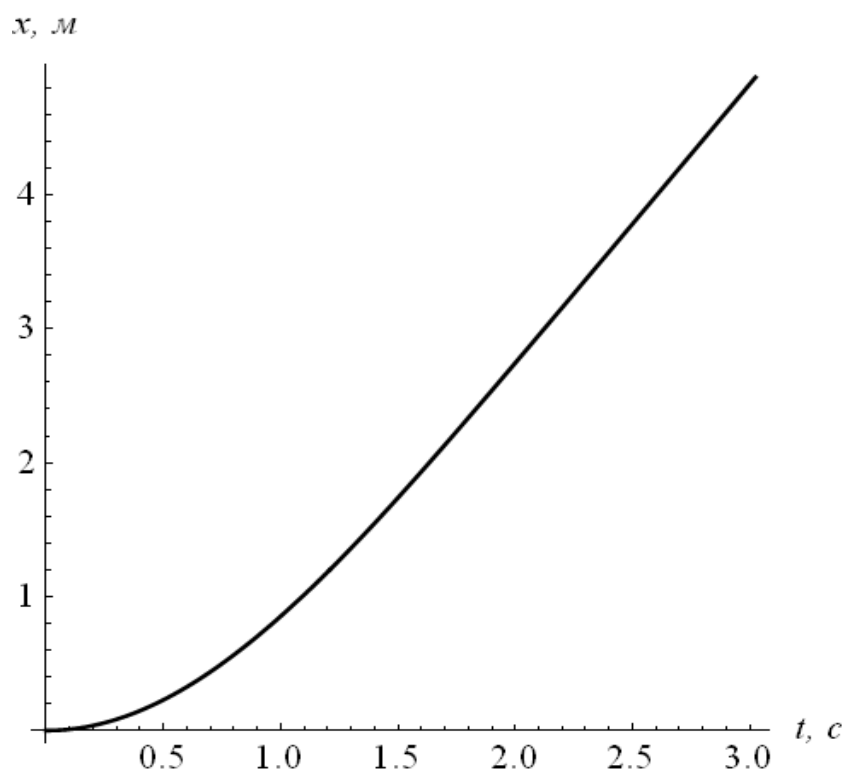


Рис. 3.12. Графік функції переміщення механізму

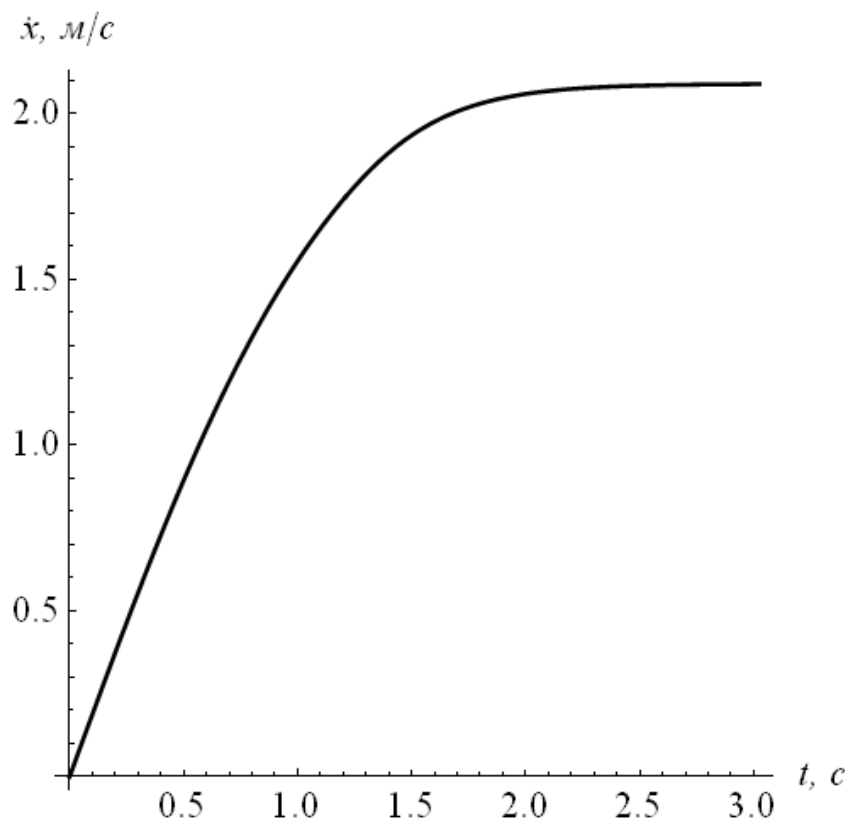


Рис. 3.13. Графік функції швидкості механізму

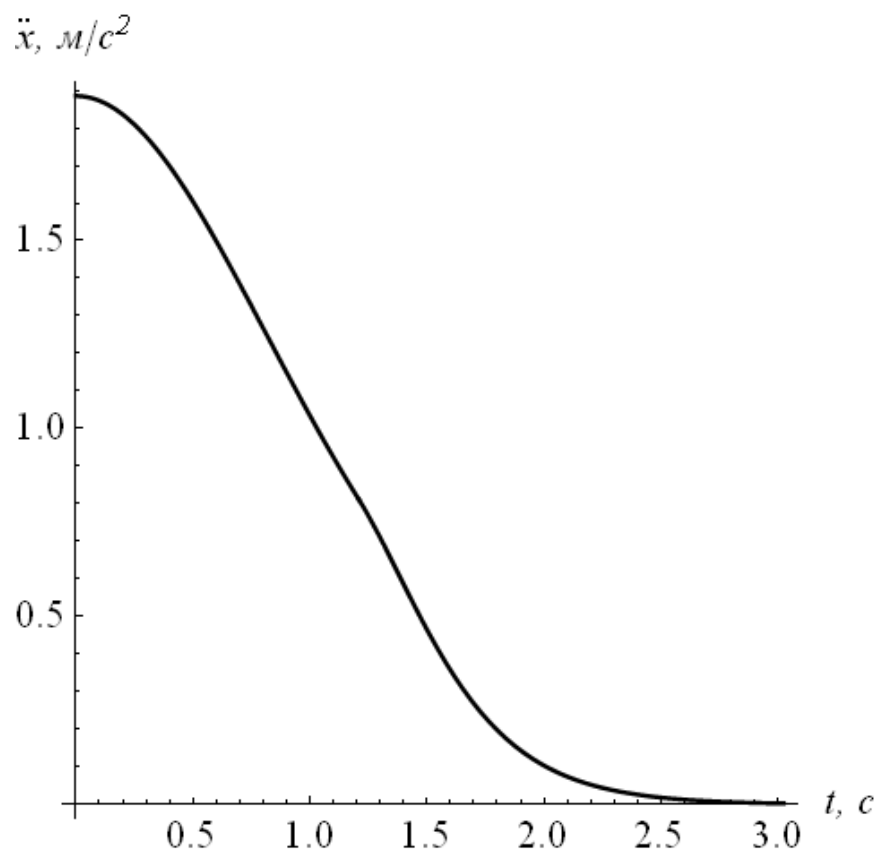


Рис. 3.14. Графік функції прискорення механізму

Виконаємо дослідження отриманого результату для знаходження додаткових кінематичних параметрів, які можуть бути використані у практичних розрахунках механізмів. Передусім встановимо максимальне прискорення механізму. Очевидно, максимальне прискорення механізму буде у початковий момент, тобто при $t=0$, оскільки максимальний момент рівний пусковому. Запишемо вираз максимального прискорення:

$$\ddot{x}_{\max} = \frac{F_{\max} - W}{m} = \frac{\frac{M_{\max} i \eta}{r} - W}{m} = \frac{\frac{M_{\text{пуск}} i \eta}{r} - W}{m}. \quad (3.88)$$

Надалі знайдемо усталену швидкість при умові $W \geq \frac{M_{\text{ном}} i \eta}{r}$, для цього необхідно виконати дослідження швидкості на граничне значення:

$$v_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{x}) = v_1. \quad (3.89)$$

Дана рівність впливає з аналізу формули (3.81). Справді, вираз $N_2(v_1 - v_2)$, який входить у показник степеня числа Ейлера завжди від'ємний, тому при $t \rightarrow \infty$ вираз $e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} \rightarrow 0$. Для прийнятих параметрів механізму та його приводу маємо $v_{\text{уст}}=2,092$ м/с (при $W = \frac{1,1M_{\text{ном}} i \eta}{r}$). Таке чисельне значення $v_{\text{уст}}$ можна отримати підставивши всі параметри у формулу:

$$v_{\text{уст}} = [-r(i^2 M_{\text{ном}} \eta (\omega_0^2 (\lambda - 1) + \lambda \omega_{\text{ном}}^2) + mr^2 (\omega_0 - \omega_{\text{ном}})^2 \omega_{\text{ном}} (i^3 M_{\text{ном}} \eta (r W \omega_{\text{ном}} \times \\ \times (2(\lambda - 1)\omega_0 + \omega_{\text{ном}} - 2\lambda \omega_{\text{ном}}) + i M_{\text{ном}} \eta (\omega_0 - \lambda \omega_0 + \lambda \omega_{\text{ном}})^2))^{\frac{1}{2}} (mr^2 (\omega_0 - \omega_{\text{ном}}) \times \\ \times \omega_{\text{ном}})^{-1})] [i^3 M_{\text{ном}} \eta (2(\lambda - 1)\omega_0 + \omega_{\text{ном}} - 2\lambda \omega_{\text{ном}})], \quad (3.90)$$

де λ – перевантажувальна здатність двигуна ($\lambda = \frac{M_{\max}}{M_{\text{ном}}}$). Знайдемо вираз для тривалості руху, при якому швидкість механізму досягає певного значення, яке виражене у відносних одиницях. Для цього знайдемо розв'язок рівняння:

$$v(t_\gamma) = v_{уст} \gamma, \quad (3.91)$$

де γ – відносна швидкість руху механізму ($\gamma = \frac{\dot{x}}{v_{уст}}$). Таким чином, формула (3.91) показує тривалість руху, при якому швидкість механізму досягає $\mathcal{W}_{уст}$.

У практичних розрахунках механізмів можна прийняти $\gamma = 0,95$. Запишемо розв'язок рівняння (3.91):

$$t_{\gamma(1-2)} = \frac{\lg\left(-\frac{v_2(\gamma-1)}{v_2-\gamma}\right)}{N_2(v_1-v_2)}. \quad (3.92)$$

Приведені вище залежності (3.90), (3.92) справедливі для випадку $W \geq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$. Якщо ж $W \leq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$, то необхідно шукати відповідні залежності із врахуванням зміни крутного моменту двигуна на ділянці 2-3 його механічної характеристики (рис. 3.11). Із рівняння, аналогічного (3.91), але складеного для нових умов руху механізму отримаємо тривалість розгону до швидкості $\mathcal{W}_{уст}$:

$$t_{\gamma(1-3)} = \frac{\lg\left(-\frac{\mathcal{W}_1 v_2 - \mathcal{W}_0 v_1 - v_1(v_2 - v_0)}{(v_0 - v_1)v_2 - \mathcal{W}_1(v_0 - v_1)}\right)}{N_2(v_1 - v_2)} + t_{ном}. \quad (3.93)$$

Зазначимо, що при умові $v_0 = 0$ вираз (3.93) перетворюється у формулу (3.92). Для отриманого виразу початкове значення швидкості рівне номінальній швидкості, тобто швидкості, яка відповідає номінальному моменту двигуна. Отже, $v_0 = v_{ном} = \frac{\omega_{ном} r}{i}$.

3.4. Визначення раціональних законів руху машин

3.4.1. Двомасова динамічна модель

Велику кількість машин та механізмів можна представити у вигляді двомасової динамічної моделі [24-27]. Таке представлення необхідне для того, щоб провести динамічний аналіз руху цих машин, що дає змогу оцінити величину та характер зміни динамічних навантажень у їх ланках. Це, у свою чергу, дозволяє розрахувати елементи машини чи механізму за діючими навантаженнями.

Виникнення та еволюція динамічних навантажень пов'язана із структурою машини, її параметрами (коефіцієнти жорсткості та дисипації, маси та моменти інерції окремих елементів тощо) та зовнішніми впливами. Під зовнішніми впливами слід розуміти всі діючі на машину зусилля та моменти. Джерелами зовнішніх впливів є зовнішнє (технологічне) середовище та приводні сили (моменти) від їх двигунів. Вибір раціональних шляхів зміни зовнішніх впливів від приводного механізму є актуальною задачею, оскільки дозволяє значно зменшити динамічні навантаження у елементах машини, що, у свою чергу, підвищує її надійність та довговічність.

Для зменшення динамічних навантажень у механізмах машин природно використати потужний математичний апарат оптимального керування [28-35]. Такий підхід є науково обґрунтованим, оскільки дозволяє оптимально, найвигідніше із деяких позицій, синтезувати режим руху системи. Якщо критерій оптимальності відображає динамічні показники руху системи, то при цьому її рух відбувається із якнайменшими динамічними навантаженнями. Однак, для проведення процедури оптимізації необхідно мати детерміновану математичну модель машини. Це вимагає параметричної ідентифікації об'єкта дослідження (машини чи механізму) із наступним дослідженням адекватності математичної моделі [36, 37]. Звичайно, такі дослідження не можуть бути проведені для всіх машин, оскільки вимагають

значних ресурсів та часу. Крім того, навіть незначне конструктивне вдосконалення машини змінює параметри моделі, яка їй відповідає. У практичних розрахунках можна лише приблизно оцінити параметри моделі, тобто встановити деякий інтервал, в який величини параметрів входять із заданою вірогідністю. Зазначимо, що відомі розрахунки [38], які подібні приведеним у даному підпункті. Однак, на відміну від роботи [38] у даному підпункті використовуються суто „кінематичне” задання зовнішнього збурення, тобто задається швидкість веденої маси (у роботі [38] зовнішнім збуренням виступає момент прикладений до ведучого колеса). Таке задання швидкості можна здійснити шляхом керування приводом машини.

Для досліджень прийємо динамічну модель, яка показана на рис. 3.15.

Якщо прийняти, що $c = \frac{m_2 g}{l}$ (тут m_2 – маса вантажу, g – прискорення вільного падіння, l – довжина гнучкого підвісу, на якому закріплена маса вантажу), то приведена на рис. 3.15 схема описує рух математичного рухомого маятника [39].

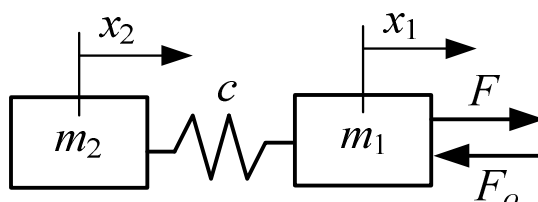


Рис. 3.15. Двомасова динамічна модель руху машини

Прийнята динамічна модель описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = F - F_0; \\ m_2 \ddot{x}_2 = c(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (3.94)$$

де m_1 – ведуча маса; m_2 – ведена маса; x_1, x_2 – координати центрів відповідних мас, F – приводне (тягове або гальмівне) зусилля, що діє на ведучу масу; F_0 –

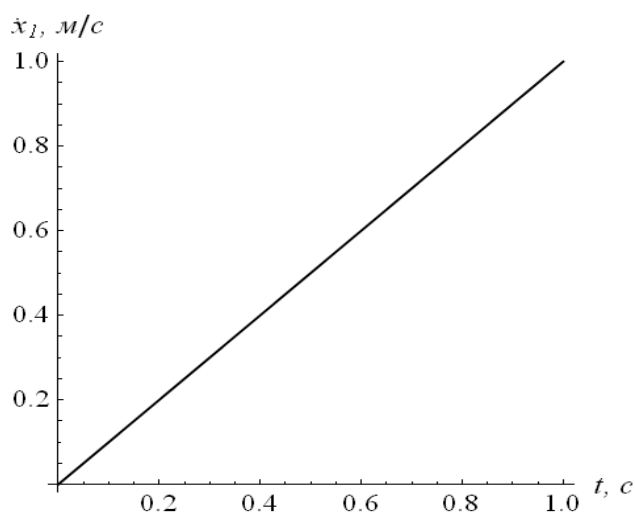
сила опору переміщенню, що діє на ведучу масу, c – жорсткість зв'язку, який поєднує ведену і ведучу маси.

Друге рівняння системи рівнянь (3.94) можна подати у такому вигляді:

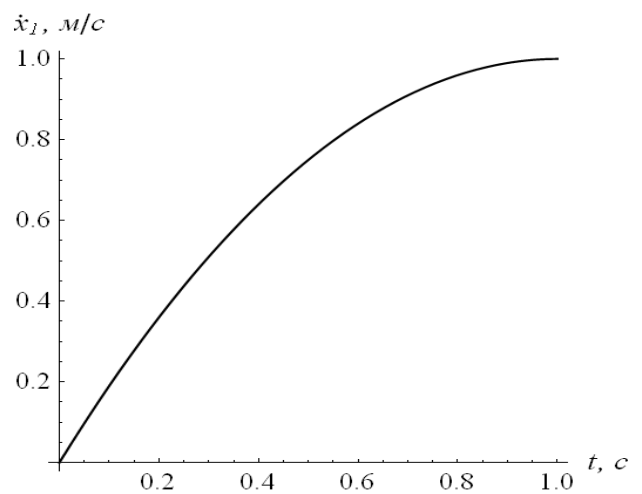
$$x_1 = x_2 + \Omega_0^{-2} \ddot{x}_2, \quad (3.95)$$

де Ω_0 - частота власних коливань динамічної системи ($\Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$).

Будемо розглядати режим розгону машини. Крім того, приймемо для подальших досліджень такі основні (базові) закони зміни швидкості руху машини (рис. 3.16). Необхідно зробити таке зауваження: у даному дослідженні прийнято припущення щодо „ідеальності” відпрацювання швидкості веденої маси. У першому наближенні таке припущення можна використовувати. Для більш точного аналізу динаміки руху динамічної системи це припущення потребує обґрунтування. Сучасні приводи машин дозволяють достатньо точно відпрацьовувати задання швидкості, однак якщо для динамічної системи справедлива нерівність $m_2 \gg m_1$ і динамічні характеристики приводу невисокі, то відпрацювання законів швидкості приведених на рис. 3.16 може мати певні похибки.



а)



б)

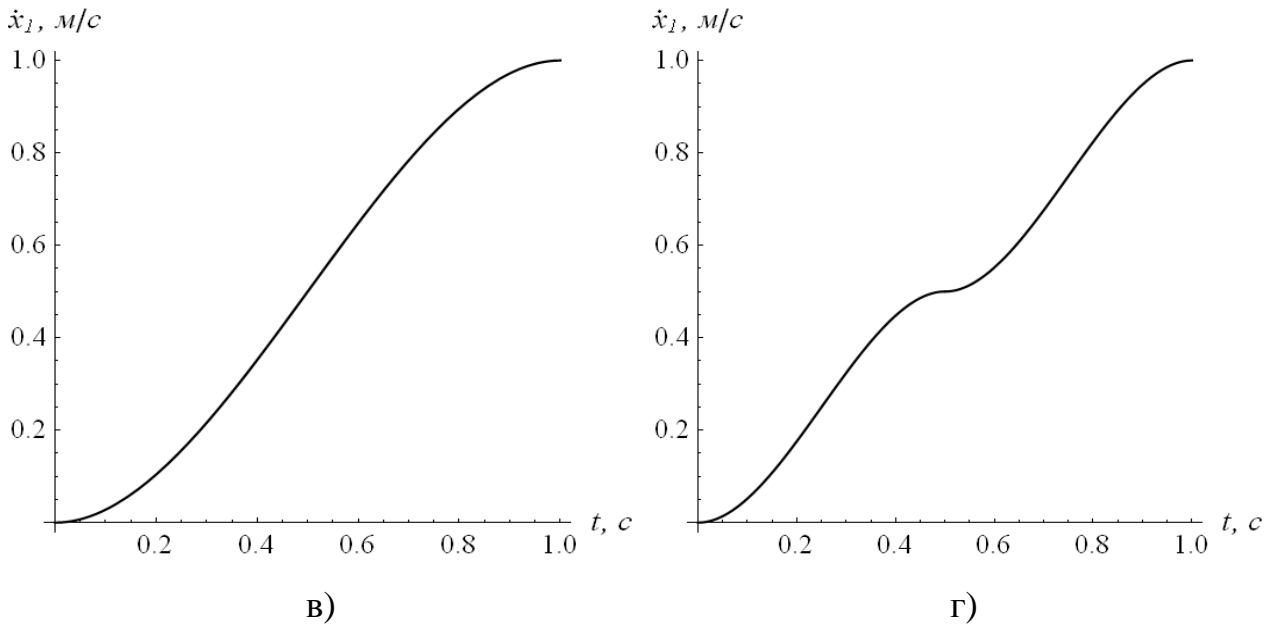


Рис. 3.16. Базові закони зміни швидкості ведучої маси при її розгоні:
 а) лінійний, б) U-подібний, в) S – подібний, г) подвійний S – подібний

Приведені на рис. 3.6 закони зміни швидкості ведучої маси при розгоні динамічної системи описуються такими функціями:

$$\dot{x}_1 = \frac{vt}{T} - \quad (3.96)$$

для лінійного закону;

$$\dot{x}_1 = \frac{vt}{T^2}(2T - t) - \quad (3.97)$$

для U-подібного закону;

$$\dot{x}_1 = \frac{vt^2}{T^3}(3T - 2t) - \quad (3.98)$$

для S – подібного закону;

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} \frac{v_1 t^2}{T_1^3}(3T_1 - 2t), \text{ при } t \in [0, T_1]; \\ \frac{v_1(2t - 2T_1 + T)(T_1 + T - t)^2 - v(t - T_1)^2(2t - 2T_1 - 3T)}{T^3}, \text{ при } t \in [T_1, T], \end{cases} - \quad (3.99)$$

для подвійного S – подібного закону; тут T – тривалість процесу розгону до швидкості v ; T_1 – тривалість розгону до швидкості v_1 ; v – усталена швидкість руху ведучої маси; v_1 – „проміжна” швидкість руху ведучої маси; t – час.

Оцінку „раціональності” того чи іншого закону руху динамічної системи будемо виконувати за показником питомої енергії залишкових коливань веденої маси, яка визначається таким чином:

$$\tilde{E}(T) = \frac{E_{\text{кін}}(T) + E_{\text{ном}}(T)}{E_{\text{кін.уст.}m_2}}, \quad (3.100)$$

де $E_{\text{кін}}(T)$ - кінетична енергія коливань маси m_2 в момент часу T ; $E_{\text{ном}}(T)$ - потенціальна енергія пружного елемента c в момент часу T ; $E_{\text{кін.уст.}m_2}$ - кінетична енергія руху маси m_2 при її усталеній швидкості v . Вирази для $E_{\text{кін}}(T)$, $E_{\text{ном}}(T)$ та $E_{\text{кін.уст.}m_2}$ мають такий вигляд:

$$E_{\text{кін}}(T) = \frac{m_2(v - \dot{x}_2(T))^2}{2}; \quad (3.101)$$

$$E_{\text{ном}}(T) = \frac{c(x_1(T) - x_2(T))^2}{2}; \quad (3.102)$$

$$E_{\text{кін.уст.}m_2} = \frac{m_2 v^2}{2}. \quad (3.103)$$

Пояснимо вибір показника (3.100) для оцінки якості того чи іншого закону руху динамічної системи. Величину залишкових коливань необхідно оцінювати за їх енергією або положенням зображуючої точки у фазовому просторі. Перший показник дає змогу оцінити кількісну картину коливань, а другий – якісну. Використаємо енергетичну характеристику для оцінки величини залишкових коливань веденої маси.

Чисельник правої частини виразу (3.100) показує повну енергію коливань маси m_2 у момент часу T : вона є різницею повної енергії руху маси m_2 та її кінетичної енергії при швидкості v або це сума потенціальної та

кінетичної енергій коливань. Знаменник правої частини виразу (3.100) дає змогу привести енергетичну оцінку до безрозмірного вигляду, оскільки для всіх законів руху динамічної системи справедлива рівність:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \tilde{E}(T) = E_{\text{кін.уст.}m_2}. \quad (3.104)$$

Для того, щоб знайти показник (3.100) для кожного із законів руху (3.96)-(3.99) необхідно розв'язати задачу Коші (неоднорідне диференціальне рівняння (3.95) із початковими умовами). Ліва частина рівняння (3.95) змінюється для кожного закону. Початкові умови для розв'язування задачі Коші приймаємо нульовими. Для кусочного закону (3.99) розв'язувати рівняння (3.95) необхідно двічі: для проміжку $t \in [0, T_1]$ та для проміжку $t \in [T_1, T]$, причому для другого проміжку $t \in [T_1, T]$ початкові умови є ненульовими – це кінцеві умови для проміжку $t \in [0, T_1]$ (таким чином відбувається „зшивка” розв'язків).

Не будемо зупинятись на методиці розв'язання. Запишемо отримані результати. Для лінійного закону (рис. 3.16, а) показник (3.100) рівний:

$$\tilde{E}_{\text{лін}}(T) = \frac{m_2(\cos(T\Omega_0) - 1)}{cT^2}. \quad (3.105)$$

Для U-подібного закону (рис. 3.16, б) цей показник визначається залежністю:

$$\tilde{E}_U(T) = \frac{(2m_2 + cT^2 - 2m_2(\cos(T\Omega_0) + \Omega_0 T \sin(T\Omega_0)))}{c^2 T^4}. \quad (3.106)$$

Для S-подібного закону (рис. 3.16, в) маємо:

$$\tilde{E}_S(T) = \frac{72m_2^2 \left(\sqrt{c}T \cos\left(\frac{T\Omega_0}{2}\right) - 2\sqrt{m_2} \sin\left(\frac{T\Omega_0}{2}\right) \right)^2}{c^3 T^6}. \quad (3.107)$$

Для подвійного S-подібного закону (рис. 3.16, г) вираз для показника (3.55) досить громіздкий, тому не будемо його приводити.

Вирази (3.105)-(3.107) та вираз показника (3.100) для подвійного S-подібного закону необхідно проаналізувати для того, щоб встановити раціональний параметр T , який можна налаштовувати при реалізації руху машини. Для цього побудуємо графіки отриманих функцій у одній площині (рис. 3.17).

На рис. 3.17: закону (3.96) відповідає штрихова товста лінія, закону (3.97) – штрихова тонка лінія, закону (3.98) – суцільна тонка лінія, закону (3.99) – суцільна сіра товста лінія (для побудови цього графіка прийнято, що $T_1 = 0,5T$ і $v_1 = 0,5v$). Точками на рис. 3.17 позначені величини часу T , які є кратними до тривалості періоду власних коливань динамічної системи.

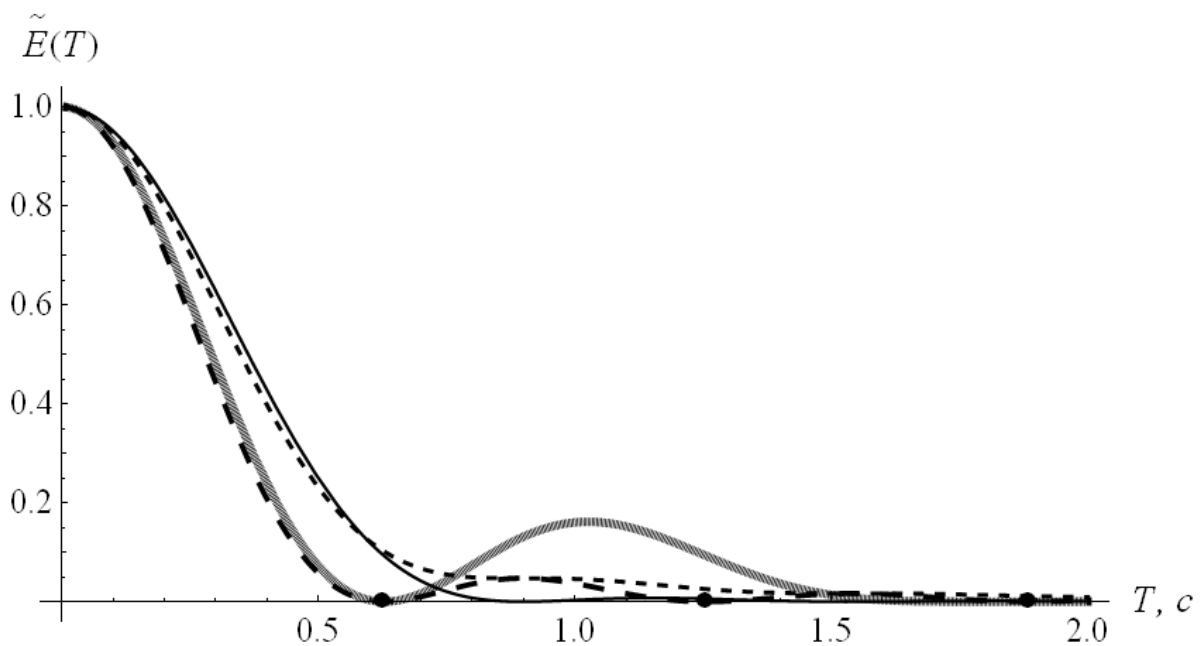


Рис. 3.17. Графіки енергії залишкових коливань веденої маси m_2 при різних законах зміни швидкості ведучої маси m_1

Тепер по-черзі проведемо аналіз графічних залежностей на рис. 3.17. Величина питомої енергії залишкових коливань для закону (3.96) стає рівною нулю у моменти часу, які кратні періоду власних коливань динамічної системи. Цей висновок вже відомий у науковій літературі [26]. Якщо

прийняти $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{4\pi}{\Omega_0}$, то коливання веденої маси залишаються, але амплітуда цих коливань є невеликою. При подальшому збільшенні тривалості розгону маси $\frac{4\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ залишкові коливання продовжують зменшуватись. Однак, надмірне збільшення тривалості перехідного процесу може викликати зменшення продуктивності роботи машини та перевантаження приводу. Якщо невідома величина частоти власних коливань динамічної системи, то використання цього закону є небажаним, за винятком тих випадків, коли тривалість перехідного процесу не є визначальним фактором якості технологічного процесу.

Для закону (3.97) відсутність коливань досягається при $T \rightarrow \infty$, що, звичайно, не є фізичним. Однак, при збільшенні тривалості перехідного процесу залишкові коливання зменшуються значно. Можна зробити висновок: використовувати закон (3.97) для розгону двомасової динамічної системи не рекомендується. Виняток може становити лише випадок значної тривалості розгону.

Закон розгону динамічної двомасової системи (3.98) має цінні властивості з позицій зниження коливань веденої маси у кінці розгону. У моменти часу:

$$T_i = \frac{2\pi\sqrt{2i}}{\Omega_0}, \quad i = 1, 3, 6, 10, 15, 21... \quad (3.108)$$

коливання веденої маси взагалі усуваються. Після моменту часу $T > \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Omega_0}$ коливання веденої маси залишаються, але їх енергія є дуже малою. Таким чином, можна зробити висновок: для динамічних систем, власна частота коливань яких не може бути визначена точно, а лише є приблизна їх оцінка, їх розгін і гальмування необхідно виконувати за законом зміни швидкості

(3.98). При цьому тривалість розгону та гальмування необхідно апріорі встановлювати згідно виразу:

$$T \geq \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Omega_{0\min}}, \quad (3.109)$$

де $\Omega_{0\min}$ - найменше значення оцінки частоти власних коливань динамічної системи. Таке налаштування буде гарантувати значне зменшення залишкових коливань веденої маси у кінці розгону та гальмування.

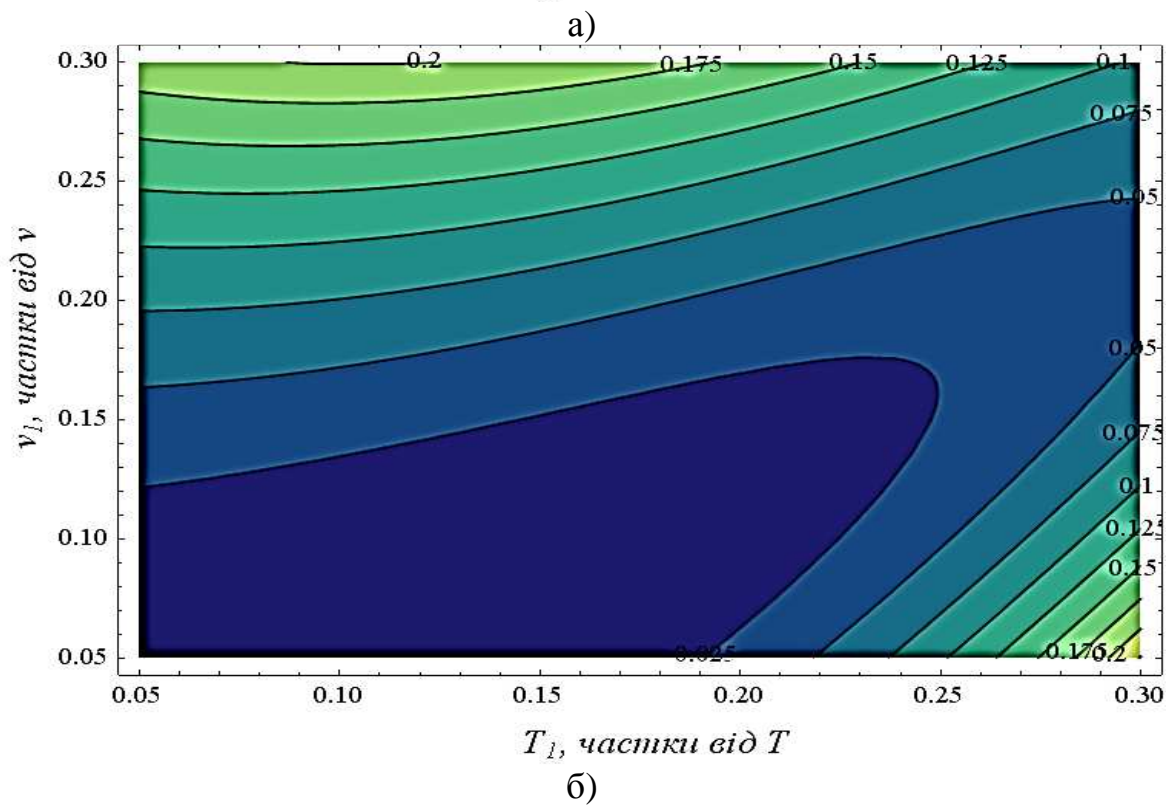
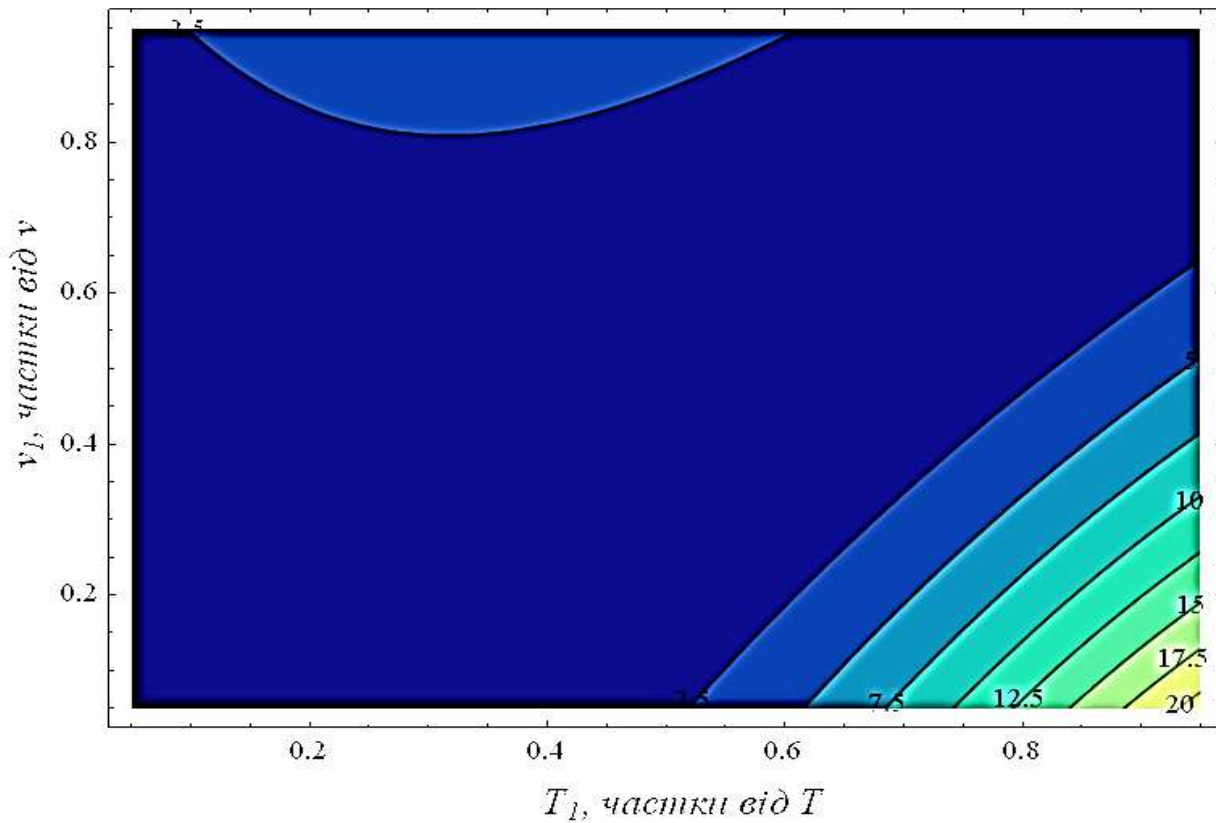
Закон руху динамічної системи, який відповідає подвійному S-подібному характеру зміни швидкості ведучої маси має такі властивості: коливання веденої маси припиняються у моменти часу:

$$T_j = \frac{j\pi}{\Omega_0}, \quad j = 2, 6, 10, 14... \quad (3.110)$$

Зазначимо, що при $j = 2$ коливання веденої маси усуваються – в цьому цей закон подібний до лінійного закону зміни швидкості (3.96). Однак, при $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ залишкові коливання веденої маси мають значну енергію. Це є серйозним недоліком цього закону, тому його використання потребує обґрунтування, наприклад, виходячи із деяких технологічних аспектів. Однак, необхідно пам'ятати про те, що графік побудований на рис. 3.17 справедливий для випадку коли $T_1 = 0,5T$ і $v_1 = 0,5v$. Якщо ж змінити коефіцієнти біля величин T та v відповідно зміняться і властивості закону. На рис. 3.18 показано, як змінюється залишкова питома енергія коливань веденої маси в залежності від тривалості першого етапу T_1 та від величини проміжної швидкості v_1 .

Лінії на рис. 3.18 із відповідними числовими позначками показують енергію залишкових коливань веденої маси. Аналізуючи отримані графіки,

можна прийти до висновку про те, що існують певні комбінації T_1 та ν_1 , за яких енергія коливань веденої маси є невеликою.



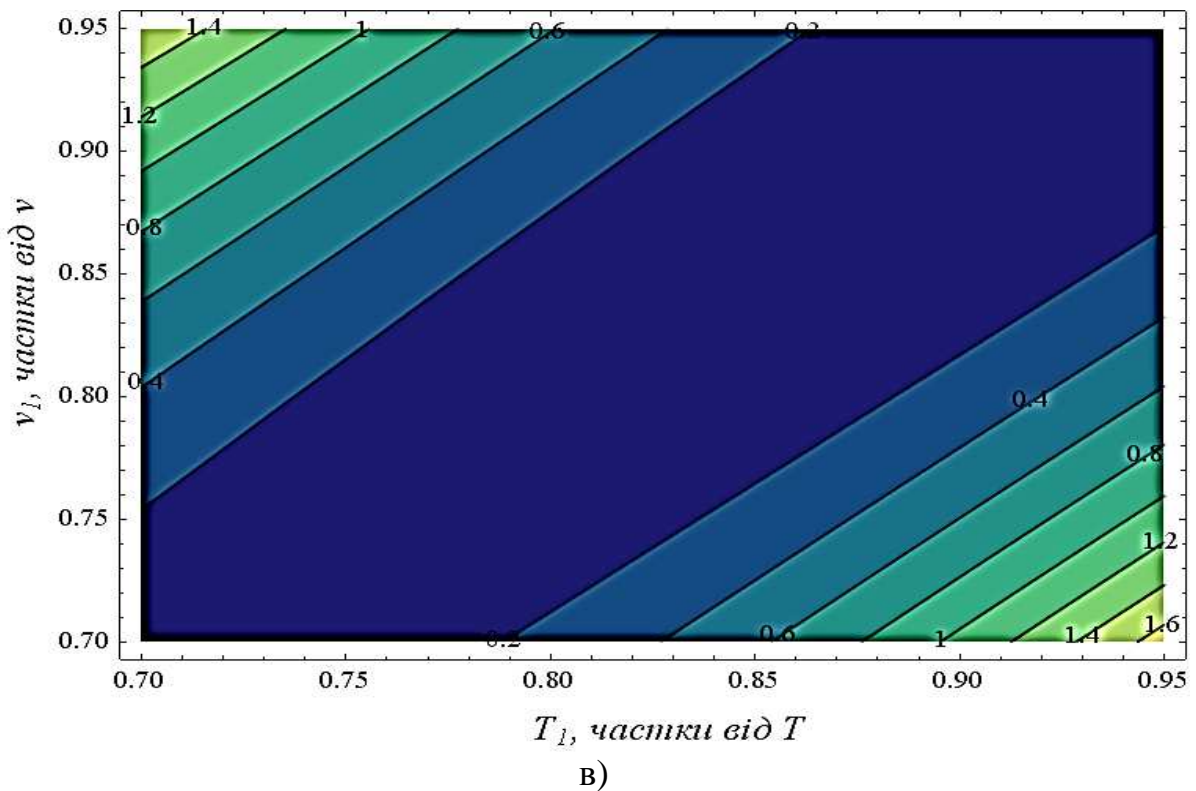


Рис. 3.18. Графіки функції залишкової питомої енергії коливань веденої маси в залежності від параметрів T_1 і ν_1 : а) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,05T; 0,95T]$ та $\nu_1 \in [0,05\nu; 0,95\nu]$; б) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,05T; 0,5T]$ та $\nu_1 \in [0,05\nu; 0,5\nu]$; в) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,7T; 0,95T]$ та $\nu_1 \in [0,7\nu; 0,95\nu]$

Таким чином, попередній висновок щодо значної величини енергії залишкових коливань веденої маси при $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ є лише частинним.

Отже, дати однозначну відповідь про те, які параметри необхідно налаштувати для даного закону руху досить важко. Можна порекомендувати скористатись графічними залежностями приведеними на рис. 3.18.

3.4.2. Тримасова динамічна модель

Для досліджень приймемо динамічну модель руху машини, яка показана на рис. 3.19.

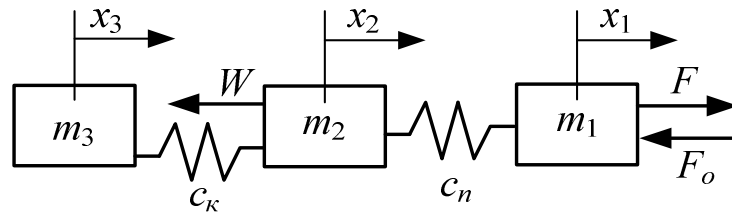


Рис. 3.19. Тримасова динамічна модель руху машини

Така динамічна модель представляє рух машини із врахуванням динамічних процесів, які виникають у механічній частині її приводу. Прийнята динамічна модель описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_n(x_1 - x_2) + F_0 = F; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_k(x_2 - x_3) + W = c_n(x_1 - x_2); \\ m_3 \ddot{x}_3 = c_k(x_2 - x_3), \end{cases} \quad (3.111)$$

де m_1 – приведена до поступального руху маса ротора двигуна; m_2 – приведена до поступального руху маса передавального механізму; m_3 – приведена до поступального руху маса робочого органу машини; x_1, x_2, x_3 – координати центрів відповідних мас, F – приведені приводне (тягове або гальмівне) зусилля двигуна; F_0 – приведена сила сухого тертя у двигуні; W – сила опору переміщенню робочого органу машини; c_n – приведена жорсткість муфти, яка з'єднує вали двигуна і передавального механізму; c_k – приведена жорсткість муфти, яка з'єднує вали передавального механізму і робочого органу.

Параметром, який задає рух у системі є зусилля F . Однак, будемо досліджувати динаміку системи при заданні швидкості маси m_1 .

Для оцінки руху машини необхідно знайти вираз $x_3 = x_3(x_1)$. Пояснимо чому саме таку функцію необхідно шукати. Якщо буде відома функція x_3 , то функцію x_2 неважко буде знайти із третього рівняння системи (3.111). Для цього подамо третє рівняння системи (3.111) у такому вигляді:

$$x_2 = x_3 + \frac{m_3}{c_k} \ddot{x}_3. \quad (3.112)$$

Отже, знайшовши залежність $x_3 = x_3(x_1)$, можна легко записати всі функції x_1 , x_2 та x_3 . Залежність $x_3 = x_3(x_1)$ представляється у вигляді диференціального рівняння, яке можна отримати із системи рівнянь (3.111):

$${}^{IV}x_3 + \ddot{x}_3 A_1 + x_3 A_2 = x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3, \quad (3.113)$$

де A_1 , A_2 , A_3 - коефіцієнти, що залежать від параметрів системи

$$(A_1 = \frac{\left(\frac{m_3}{c_k} + \frac{m_3}{c_n} + \frac{m_2}{c_n}\right) c_n c_k}{m_2 m_3}, A_2 = \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}, A_3 = -W \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}).$$

Диференціальне рівняння (3.113) є неоднорідним. Його розв'язок є сумою загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Перший доданок завжди буде один і той самий:

$$x_3^* = C_1 e^{t \sqrt{\frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_2 e^{-t \sqrt{\frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_3 e^{t \sqrt{\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_4 e^{-t \sqrt{\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}}, \quad (3.114)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – постійні інтегрування. Другий доданок буде залежати від виду функції x_1 : $x_3^{**} = x_3^{**}(x_1)$. Будемо задавати базові закони руху машини (3.96)-(3.99).

Крім того, оцінимо динаміку руху машини для такого закону:

$$\dot{x}_1 = \frac{t^3}{T_1^5} v (6t^2 - 15Tt + 10T^2). \quad (3.115)$$

Закон (3.115) умовно назвемо S-подібним плавним. На рис. 3.20 показано графік функції (3.115) при $v = 1 \text{ м/с}$ та $T = 1 \text{ с}$.

Розв'язок диференціального рівняння (3.113) включає чотири постійні інтегрування. Для їх знаходження необхідно задати початкові умови.

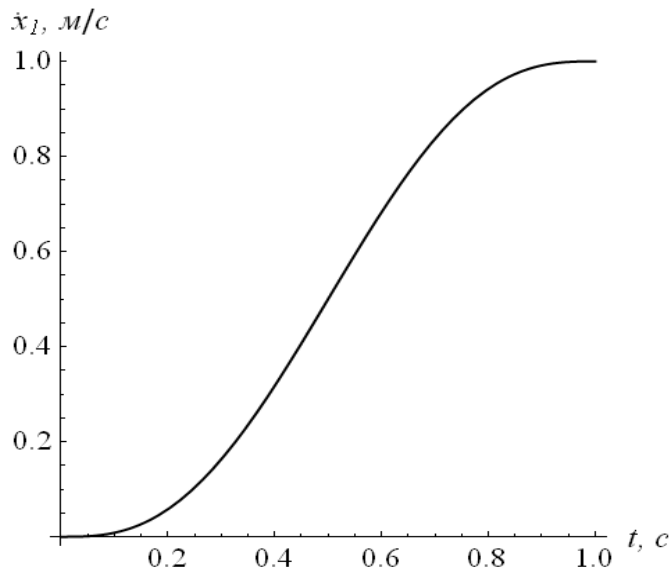


Рис. 3.20. Графік S – подібного плавного закону зміни швидкості маси m_1 при розгоні

Будемо розглядати рух машини протягом розгону. Тоді початковими умовами для всіх фазових координат є нульові:

$$\begin{cases} x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0; \\ x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0; \\ x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0. \end{cases} \quad (3.116)$$

Із умов (3.116) можна записати початкові умови руху маси m_3 :

$$x_3(0) = \dot{x}_3(0) = \ddot{x}_3(0) = \dddot{x}_3(0) = 0. \quad (3.117)$$

Тепер запишемо праві частини диференціального рівняння (3.113) для законів руху (3.96)-(3.99), (3.115). Для лінійного закону (3.96):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^2 B_1 + A_3, \quad (3.118)$$

де B_1 – коефіцієнт ($B_1 = \frac{v}{2T} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$). Для U-подібного закону (3.97):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^3 D_1 + t^2 D_2 + A_3, \quad (3.119)$$

де D_1, D_2 – коефіцієнти ($D_1 = \frac{-v}{3T^2} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $D_2 = \frac{v}{T} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$). Для S-подібного закону (3.98):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^4 E_1 + t^3 E_2 + A_3, \quad (3.120)$$

де E_1, E_2 – коефіцієнти ($E_1 = \frac{-v}{3T^3} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $E_2 = \frac{v}{T^2} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$). Для S-подібного плавного закону (3.99):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^6 G_1 + t^5 G_2 + t^4 G_3 + A_3, \quad (3.121)$$

де G_1, G_2, G_3 – коефіцієнти ($G_1 = \frac{v}{T^5} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $G_2 = \frac{-3v}{T^4} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $G_3 = \frac{5v}{2T^3} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$).

Тепер необхідно задатись показником, за яким будемо проводити оцінку динаміки руху машини. Таким показником оберемо відносну енергію залишкових коливань елементів машини, який аналогічний тому, що використовувався у попередньому підпункті (3.100). Залишкова потенціальна енергія у машині, при якій небажані коливання його елементів будуть присутні, знаходиться за таким виразом:

$$E_{nom}(T) = \frac{c_n}{2} \left(x_1(T) - x_2(T) - \frac{W}{c_n} \right)^2 + \frac{c_k}{2} (x_2(T) - x_3(T))^2. \quad (3.122)$$

Такий вираз означає суму потенціальних енергій у пружних елементах c_n та c_k , причому для подолання опору руху W пружний зв'язок c_n повинен бути навантажений, а отже повинен мати певну енергію. Ця енергія повинна залишатись при усталеному русі, тобто коли коливання елементів машини відсутні, тому у виразі (3.122) у перших дужках міститься доданок $-\frac{W}{c_n}$.

Залишкова кінетична енергія у машині, при якій небажані коливання його елементів будуть присутні, знаходиться за таким виразом:

$$E_{кин}(T) = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2(T) - v)^2 + \frac{m_3}{2} (\dot{x}_3(T) - v)^2. \quad (3.123)$$

Вираз (3.123) означає суму кінетичних енергій коливань мас m_2 та m_3 відносно маси m_1 у кінці розгону машини.

Подальший аналіз показує, що для всіх законів справедлива рівність:

$$E(T)_{T \rightarrow 0} = \lim_{T \rightarrow 0} (E_{ном}(T) + E_{кин}(T)) = \frac{1}{2} \left((m_2 + m_3)v^2 + \frac{W^2}{c_n} \right). \quad (3.124)$$

Тому будемо проводити оцінку динаміки руху машини за таким показником:

$$\tilde{E}(T) = \frac{E_{кин}(T) + E_{ном}(T)}{E(T)_{T \rightarrow 0}}. \quad (3.125)$$

Таким чином, показник (3.125) дає змогу оцінити відносну енергію залишкових небажаних коливань у приводі машини та коливань робочого органа в залежності від тривалості розгону машини. Даний показник є безрозмірним, оскільки чисельник і знаменник мають однакові розмірності (Джоуль). Надалі для кожної правої частини (3.118)-(3.121) диференціального рівняння (3.113) необхідно знайти частинний розв'язок. Сумуючи загальний розв'язок (3.113) однорідного диференціального рівняння та знайдені частинні неоднорідні розв'язки, отримаємо функції переміщення маси m_3 для різних законів руху маси m_1 (3.96)-(3.99), (3.115). Не будемо зупинятись на описі вказаних розрахунків та не будемо приводити остаточні результати для показника (3.125), оскільки вони мають значний об'єм. Приведемо лише графічну інтерпретацію отриманих результатів (рис. 3.21). На рис. 3.21: закону (3.96) відповідає штрихова товста лінія, закону (3.97) – суцільна тонка лінія, закону (3.98) – штрихова тонка лінія, закону

(3.115) – суцільна сіра товста лінія. Точками на рис. 3.21 позначені величини часу T , які є кратними до тривалості періоду власних коливань динамічної двомасової системи:

$$T = i\pi \sqrt{\frac{m_3}{c_k}}, \quad i = 2, 4, 6... \quad (3.126)$$

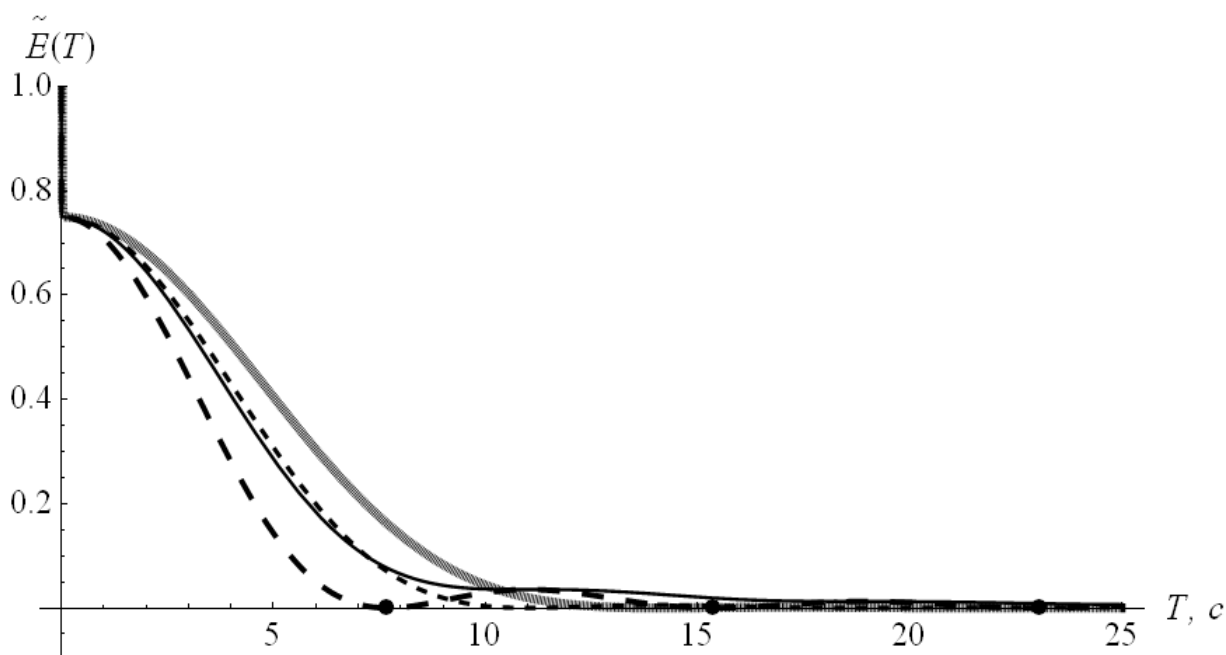


Рис. 3.20. Графіки відносної залишкової енергії коливань елементів машини при різних законах зміни швидкості маси m_1

Із графіків на рис. 3.21 видно, що енергія залишкових коливань зі збільшенням тривалості перехідного процесу зменшується. Цікавим є те, що на початку графіків йде стрибок відносної енергії (показника (3.125)). Для з'ясування природи цього стрибка графіка приведемо аналогічний рисунок, але для значно меншої тривалості розгону (рис. 3.22).

Через значні осциляції графік функції (3.125) для S-подібного плавного закону ми не приводимо. Аналіз приведених графіків показує, що вже незначна (фізично нереалізована) тривалість розгону дає значне зменшення енергії коливань. Це відбувається за рахунок зменшення енергії коливань маси m_2 , яка становить частину $\frac{m_2}{m_2 + m_3}$ від всієї енергії коливань.

Для побудови графіків використовувались такі параметри: $m_1 = 100 \text{ кг}$, $m_2 = 500 \text{ кг}$, $m_3 = 1500 \text{ кг}$, $c_n = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$, $c_k = 10^3 \text{ Н/м}$, $W = 0,2 \cdot m_2 g$ (при таких параметрах частота коливань у приводі рівна 100 Гц, а робочого органу відносно точки його закріплення 0,8 Гц). Тому одна четверта енергії коливань елементів системи „зникає” вже при незначній тривалості розгону машини.

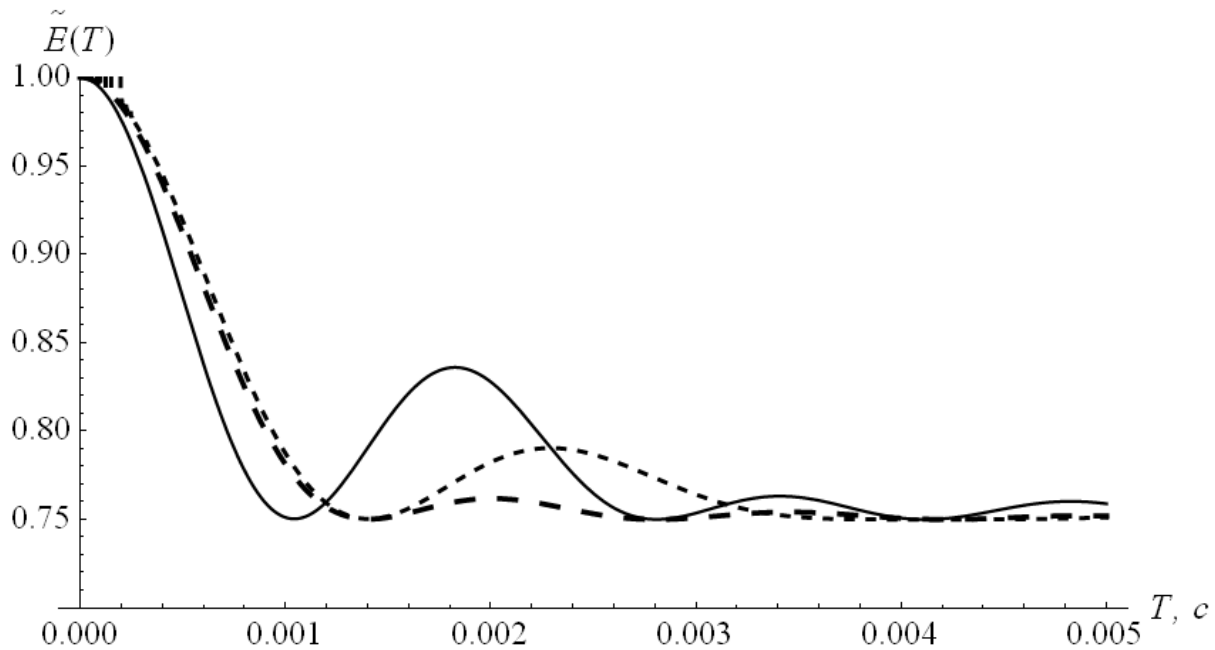


Рис. 3.22. Графіки енергії залишкових коливань елементів машини при різних законах зміни швидкості маси m_1 для невеликої тривалості розгону цієї маси

Отже, фізично реалізовані тривалості перехідних процесів (одиниці секунд) машини дають змогу усунути високочастотні коливання у його приводі. Даний висновок також можна „підкріпити” таким чином: у моделі (3.111) не враховане в’язке тертя у приводі. Якщо його врахувати, то отримаємо ще швидше затухання енергії коливань. Аналіз графіка для закону (3.96) на рис. 3.22 показує, що енергія коливань перетворюється у нуль при (3.126). Якщо наперед невідомі значення m_3 та c_k , то використовувати цей закон не рекомендується. При такій ситуації (m_1 та c_k невідомі) варто використовувати закон (3.98) або (3.115). В останньому випадку необхідно збільшувати тривалість перехідного процесу, щоб досягти значного

зменшення енергії коливань. Закон (3.97) також не рекомендується використовувати, оскільки енергія залишкових коливань є відносно значною навіть при значній тривалості розгону.

Загалом, висновки щодо отриманих графіків (рис. 3.21) можна перенести із дослідження двомасової динамічної машини, в якій не враховується приведена пружність приводу. Приведемо графіки на рис. 3.23 у іншому масштабі – це дозволить проаналізувати залишкову величину показника (3.125) для значної тривалості перехідного процесу.

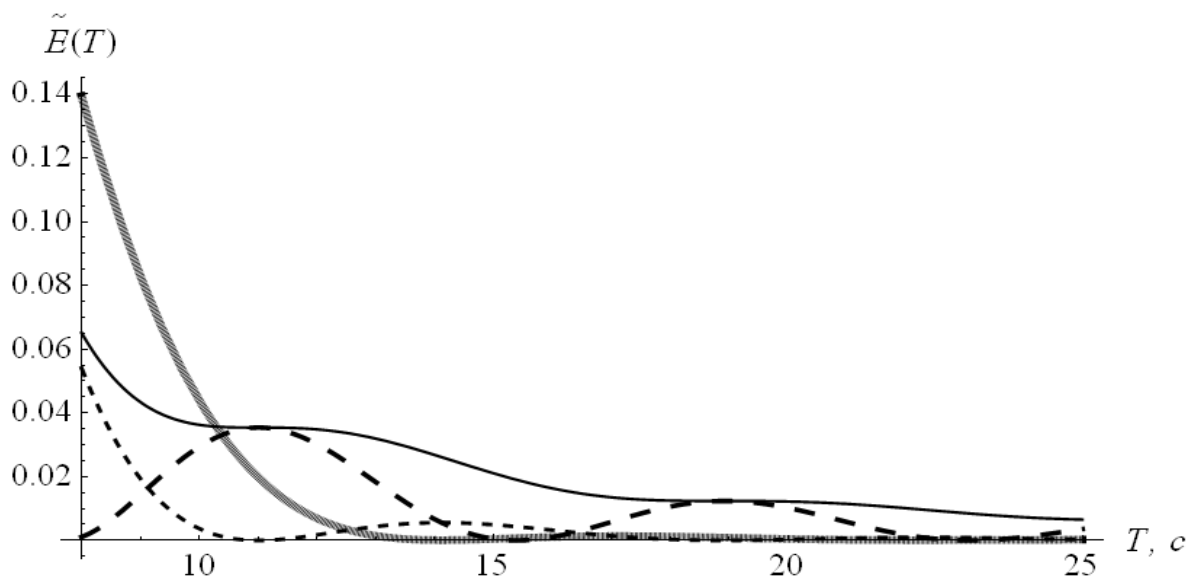


Рис. 3.23. Графіки енергії залишкових коливань елементів машини при різних законах зміни швидкості маси m_1 для значної тривалості розгону

Із рис. 3.23 можна зробити висновок: збільшення тривалості перехідного процесу дозволяє зменшити показник (3.125) – для всіх законів (3.96)-(3.99), (3.115). Крім того, збільшення плавності руху приводу зумовлює певні зміни у динаміці машини. Ці зміни полягають у тому, що зі збільшенням плавності руху необхідно збільшувати тривалість перехідного процесу для досягнення практичної відсутності енергії залишкових коливань елементів машини.

3.5. Питання та завдання для самоперевірки

1. У чому полягає зміст перетворення (3.10), яке виконано для розв'язування диференціального рівняння (3.3)?
2. Прокоментуйте графіки, які показані на рис. 3.4 та поясніть, чому у першому випадку (рис. 3.4, а) амплітуда коливань менша ніж у другому (рис. 3.4, б).
3. Вкажіть основні методи зменшення динамічної похибки при виконанні руху динамічної системи (рис. 3.1).
4. Якою функцією описується швидкість руху одномасової динамічної системи при лінійній механічній характеристиці приводного двигуна?
5. Назвіть переваги та недоліки поліноміальної апроксимації механічної характеристики асинхронного двигуна.
6. Яку головну перевагу при динамічних розрахунках машин дає використання сплайнової апроксимації механічної характеристики двигуна?
7. Як називається рівняння, до якого зводиться інтегрування рівняння руху одномасової динамічної системи при використанні сплайнової моделі механічної характеристики приводного двигуна?
8. Вкажіть показник, за яким проведена оцінка „базових” законів руху двомасової динамічної системи.
9. Використовуючи графіки, що приведені на рис. 3.17 та приймаючи значення тривалостей розгону двомасової динамічної системи рівними $\frac{\pi}{\Omega_0}$, $\frac{2\pi}{\Omega_0}$, $\frac{2,5\pi}{\Omega_0}$ та $\frac{4\pi}{\Omega_0}$, вкажіть найкращий за показником питомої енергії залишкових коливань веденої маси „базовий” закон руху.
10. Використовуючи динамічну модель представлену на рис. 3.19, поясніть форму запису диференціальних рівнянь, які їй відповідають.
11. На яку частку зменшується енергія коливань тримасової динамічної системи навіть при незначній тривалості її розгону?

РОЗДІЛ 4

ДИНАМІКА МАШИН СІЛЬСЬКО- ТА ЛІСОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

4.1. Дослідження динаміки руху гвинтового кормозмішувача

В реальних механічних системах має місце незворотне перетворення механічної енергії в теплову. Втрати на нагрів обмоток ротора й статора, механічні втрати в підшипниках, розсіювання магнітної енергії поля ротора – все це дисипація електромеханічної енергії. Величина дисипації енергії коливань характеризується коефіцієнтом дисипації і має значний вплив на динаміку руху машин і механізмів, зокрема на кормозмішувач гвинтового типу.

Для дослідження динаміки руху кормозмішувача гвинтового типу з урахуванням дисипації в перехідних режимах руху розроблено його динамічну модель у вигляді багатомасової пружно-коливальної системи із зосередженими масами і невагомими пружними ланками та дисипативними елементами (рис. 4.1). Приводний механізм представлений зосередженою масою, яка за допомогою пружного та дисипативного елементів з'єднана з гвинтовим валом, який в свою чергу, також змодельований зосередженими масами, що з'єднані між собою пружними та дисипативними елементами.

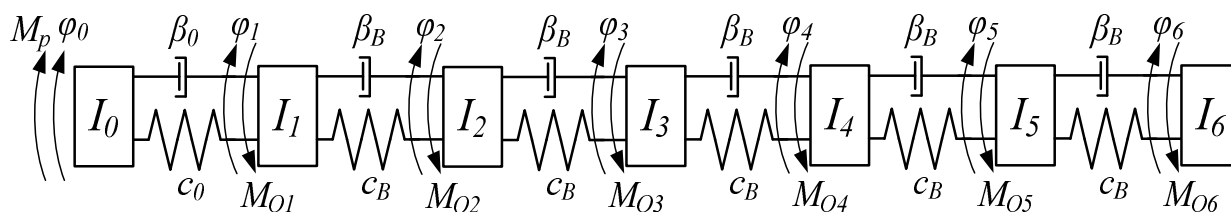


Рис. 4.1. Динамічна модель гвинтового кормозмішувача

На рис. 4.1 прийняті такі позначення: $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ – відповідно моменти інерції ланок приводного механізму та елементів гвинтового валу з

вантажом, що транспортується, які приведені до осі гвинта; $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ – узагальнені кутові координати повороту зосереджених мас відповідно приводного механізму та гвинтового валу з вантажем; M_p – рушійний момент на валу електродвигуна, приведений до осі гвинтового вала; $M_{O1}, M_{O2}, M_{O3}, M_{O4}, M_{O5}, M_{O6}$ – моменти сил опору переміщенню вантажу на ділянках гвинтового вала; C_0, C_B – відповідно приведені до осі гвинтового валу коефіцієнти жорсткості ланок приводного механізму та ділянки гвинтового вала, яка представлена відокремленим елементом; β_0, β_B – відповідно приведені до осі гвинтового валу коефіцієнти дисипації ланок приводного механізму та відокремленої ділянки гвинтового вала.

Динаміку руху розглянутої багатомасової моделі описує система диференціальних рівнянь, яка отримана на основі принципу д'Аламбера:

$$\begin{cases} I_0 \ddot{\varphi}_0 = M_p (\dot{\varphi}_0) - C_0 (\varphi_0 - \varphi_1) - \beta_0 (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1); \\ I_1 \ddot{\varphi}_1 = C_0 (\varphi_0 - \varphi_1) + \beta_0 (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1) - C_B (\varphi_1 - \varphi_2) - \beta_B (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - M_{O1} (\dot{\varphi}_1); \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 = C_B (\varphi_1 - \varphi_2) + \beta_B (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - C_B (\varphi_2 - \varphi_3) - \beta_B (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) - M_{O2} (\dot{\varphi}_2); \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 = C_B (\varphi_2 - \varphi_3) + \beta_B (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) - C_B (\varphi_3 - \varphi_4) - \beta_B (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4) - M_{O3} (\dot{\varphi}_3); \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 = C_B (\varphi_3 - \varphi_4) + \beta_B (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4) - C_B (\varphi_4 - \varphi_5) - \beta_B (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_5) - M_{O4} (\dot{\varphi}_4); \\ I_5 \ddot{\varphi}_5 = C_B (\varphi_4 - \varphi_5) + \beta_B (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_5) - C_B (\varphi_5 - \varphi_6) - \beta_B (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_6) - M_{O5} (\dot{\varphi}_5); \\ I_6 \ddot{\varphi}_6 = C_B (\varphi_5 - \varphi_6) + \beta_B (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_6) - M_{O6} (\dot{\varphi}_6). \end{cases} \quad (4.1)$$

Для розв'язування системи рівнянь (4.1) визначаємо моменти інерції приводу, моменти інерції зосереджених мас гвинтового вала, значення рушійного моменту з урахування формули Клосса, змінні моменти сил опору на різних відрізках, величину дисипації приводу β_0 і гвинтового вала β_B .

Якщо коефіцієнт дисипації β_0 вибрати „занадто маленьким”, то при моделюванні руху розглядуваної динамічної системи можуть з'явитися практично незатухаючі високочастотні коливання (вібрації). Якщо коефіцієнт дисипації β_0 вибрати великим, то рівняння руху будуть дуже жорсткими і це призведе до уповільнення затухання коливань.

Для визначення коефіцієнта дисипації приводного механізму β_0 рекомендується використовувати таку залежність [40]:

$$\beta_0 = \frac{2 \cdot M_{кр} \cdot u_{ред} \cdot \eta}{S_{кр} \cdot \omega_0}, \quad (4.2)$$

де $M_{кр}$ – критичний момент на валу електродвигуна, Н·м; $u_{ред}$ – передаточне число редуктора; η – ККД приводного механізму; $S_{кр}$ – критичне ковзання, за якого досягається критичний крутний момент; ω_0 – синхронна швидкість двигуна, приведена до осі повороту гвинтового вала, рад/с.

Моменти сил опору переміщенню елементів гвинтового вала визначаються залежністю [41]:

$$M_{оп} = M_{max} - 2 \left(\frac{M_{max} - M_n}{\omega_n} \right) \omega + \left(\frac{M_{max} - M_n}{\omega_n^2} \right) \cdot \omega^2, \quad (4.3)$$

де $M_{оп}$ – момент сил опору; M_n , M_{max} – відповідно номінальне та максимальне значення моменту сил опору; ω_n – номінальна кутова швидкість обертання гвинтового вала; ω – кутова швидкість обертання гвинтового вала.

Рушійний момент на валу електродвигуна визначається за формулою Клосса. Підставивши всі одержані значення в систему рівнянь (4.1), отримаємо диференціальні рівняння руху, які є нелінійними рівняннями другого порядку. Розв'язуємо їх за допомогою чисельного методу Рунге-Кутта (інформація про чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь наведена у Додатку).

Для гвинтового кормозмішувача, представленого багатомасовою динамічною моделлю (рис. 4.1), результати розв'язку системи рівнянь (4.1) представлені у вигляді графіків на рис.4.2-4.4.8 при таких вихідних параметрах:

$$I_0 = 4,44 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = 0,32 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad u = 22,5; \quad \eta = 0,73;$$

$$M_k = 32,56 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad C_0 = 108591 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; \quad C = 32880 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; \quad \omega_0 = 148,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \omega_K = 105,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\beta_0 = 655 \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{рад}}; \quad \beta = 5 \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{рад}}.$$

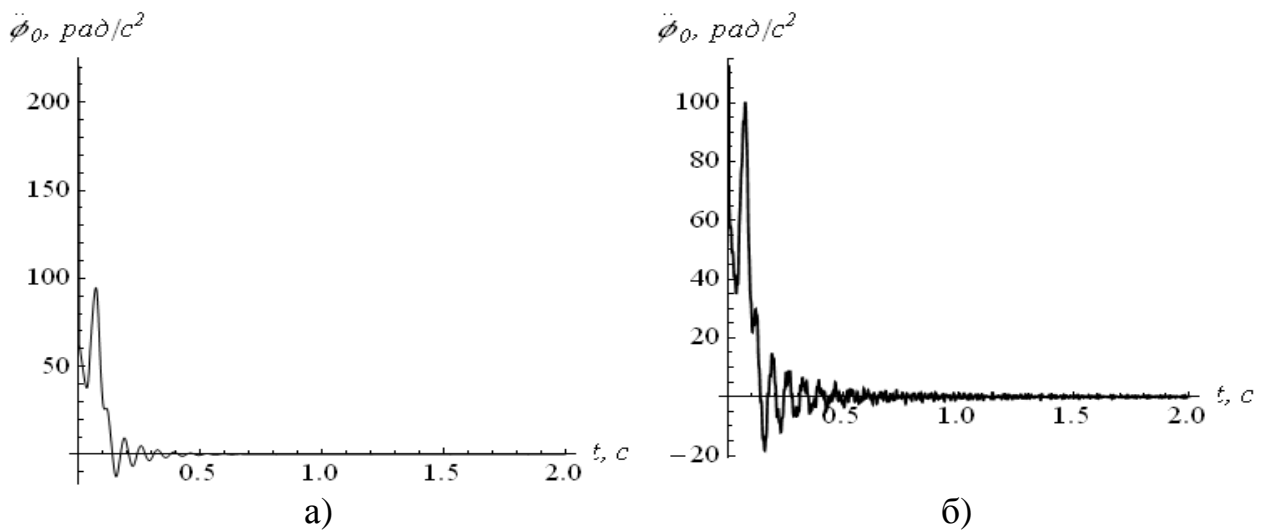


Рис. 4.2. Графіки кутового прискорення $\ddot{\phi}_0$: а) з врахуванням дисипації; б) без врахування дисипації

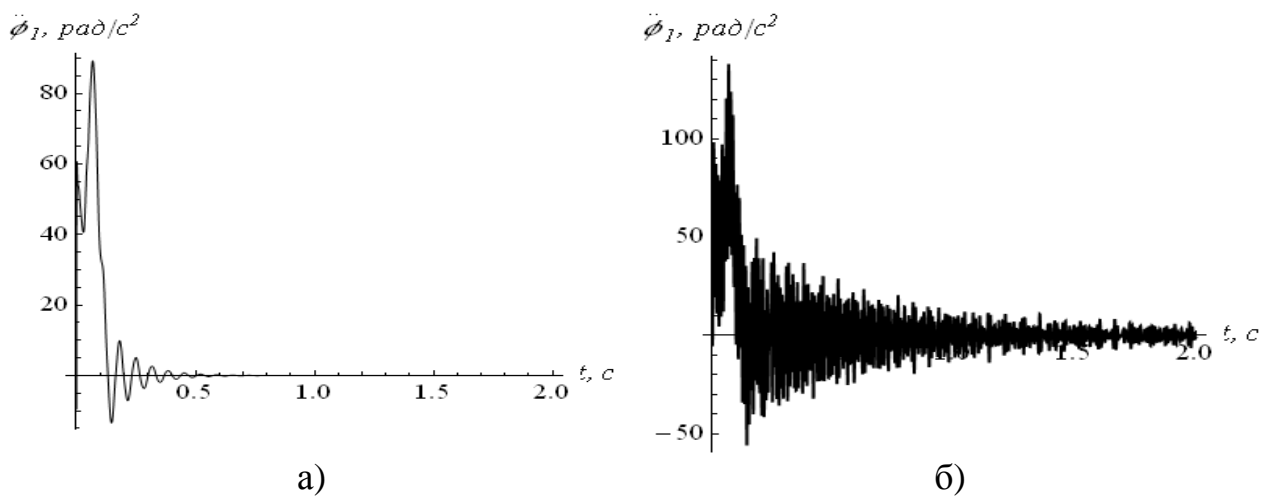


Рис. 4.3. Графіки кутового прискорення $\ddot{\phi}_1$: а) з врахуванням дисипації; б) без врахування дисипації

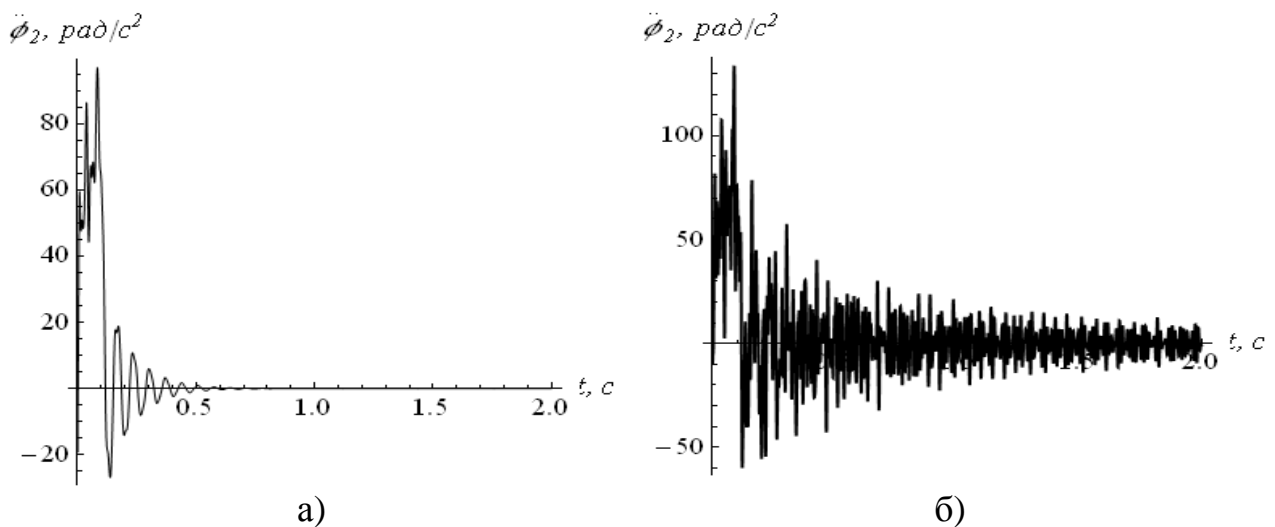


Рис. 4.4. Графіки кутового прискорення $\ddot{\phi}_2$: а) з врахуванням дисипації; б) без врахування дисипації

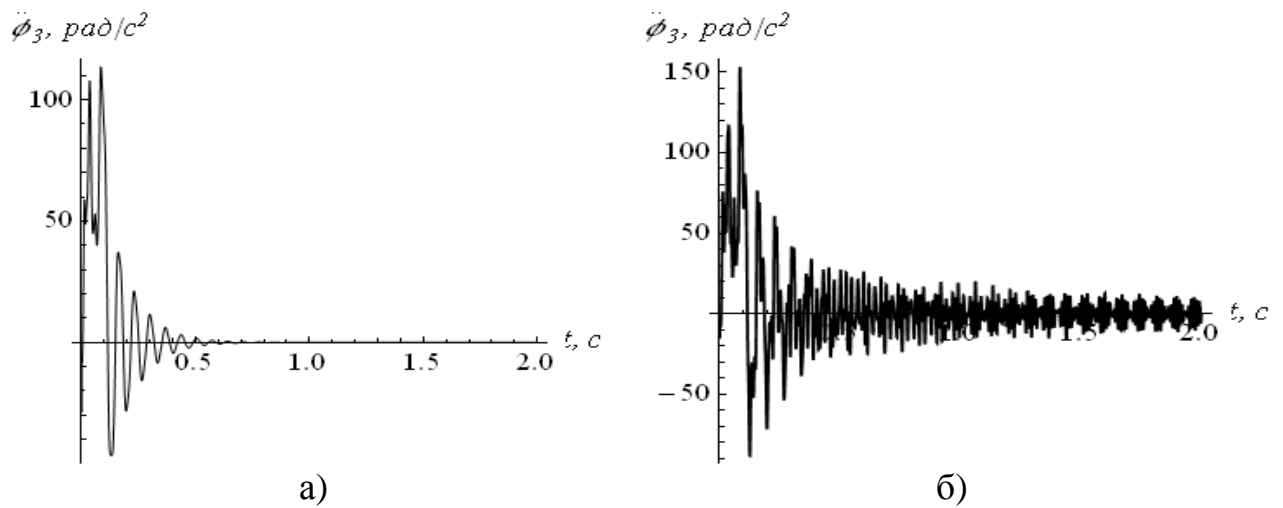


Рис. 4.5. Графіки кутового прискорення $\ddot{\phi}_3$: а) з врахуванням дисипації; б) без врахування дисипації

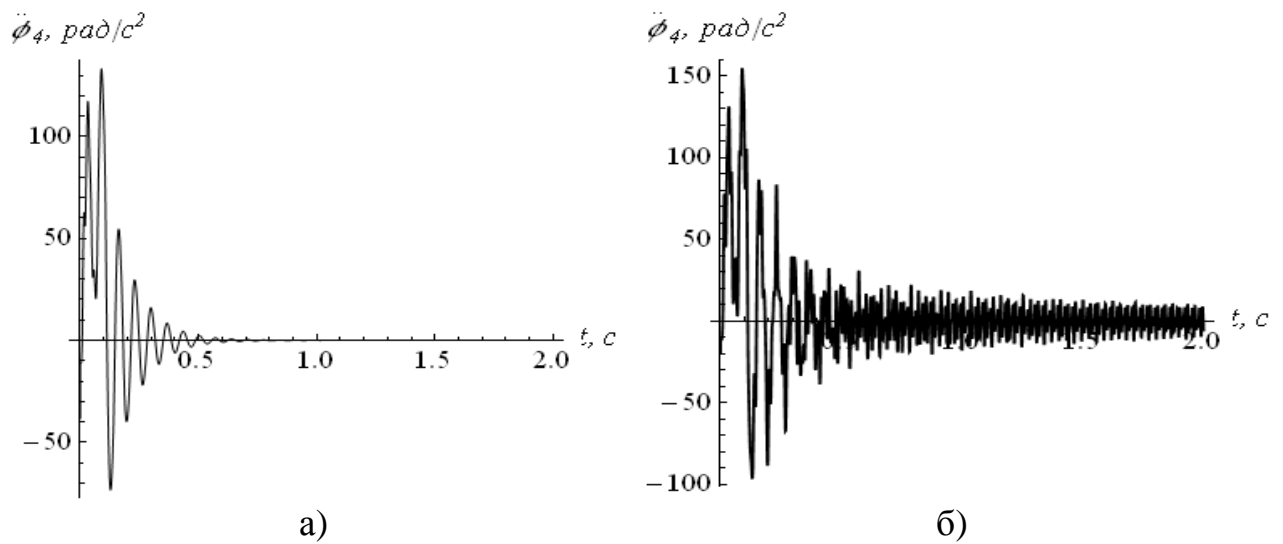


Рис. 4.6. Графіки кутового прискорення $\ddot{\phi}_4$: а) з врахуванням дисипації; б) без врахування дисипації

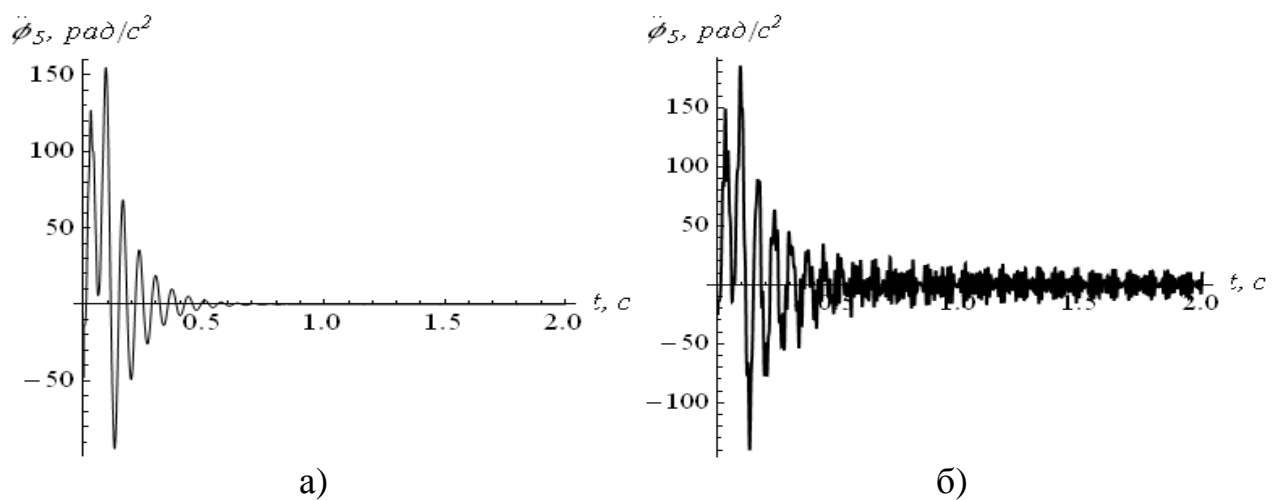


Рис. 4.7. Графіки кутового прискорення $\ddot{\phi}_5$: а) з врахуванням дисипації; б) без врахування дисипації

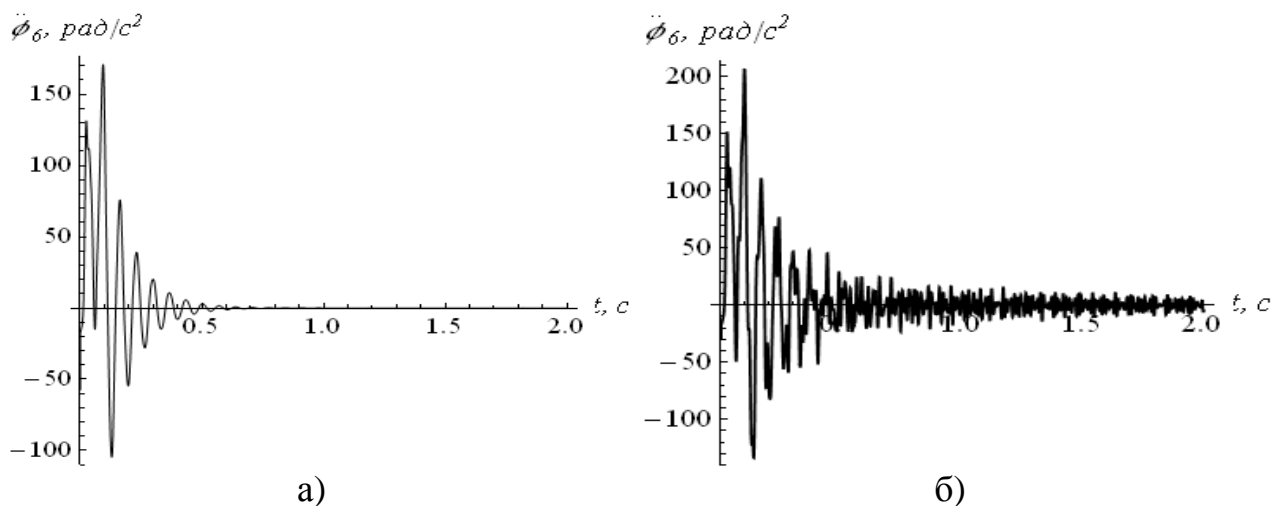


Рис. 4.8. Графіки кутового прискорення $\ddot{\phi}_6$: а) з врахуванням дисипації; б) без врахування дисипації

Аналізуючи графіки зміни прискорень, які показані на рис. 4.2-4.8, відмітимо, що коливання при відсутності демпфування мають більш виражений характер, вони зберігаються після досягнення гвинтовим конвеєром номінальної швидкості.

Таким чином, при аналізі динаміки руху гвинтового конвеєра необхідно враховувати дисипативні характеристики його елементів, у тому числі і приводного механізму.

4.2. Дослідження динаміки пуску скребкового конвеєра зі змінним навантаженням

Відомо, що для дослідження динамічних навантажень, які діють на елементи тягового органу і приводу, механічну систему представляють у першому наближенні у вигляді двомасової динамічної моделі, в якій усі ділянки валів вважаються жорсткими, а тяговий орган – пружним; усі маси елементів конвеєра та приводного механізму приводяться до віток тягового органу конвеєра [2].

Разом з тим, виникає потреба побудови більш повної адекватної математичної моделі динаміки руху скребкових конвеєрів, для отримання

точніших результатів дослідження динамічних навантажень, які діють на елементи тягового органу і приводний механізм.

Для розробки динамічної моделі скребкового конвеєра вважаємо, що всі елементи скребкового конвеєра є абсолютно жорсткими тілами, окрім елементів передавального механізму та тягового органу, які володіють пружними властивостями (рис. 4.9). При цьому корпус приводу конвеєра та вали тягових зірочок закріплені абсолютно жорстко.

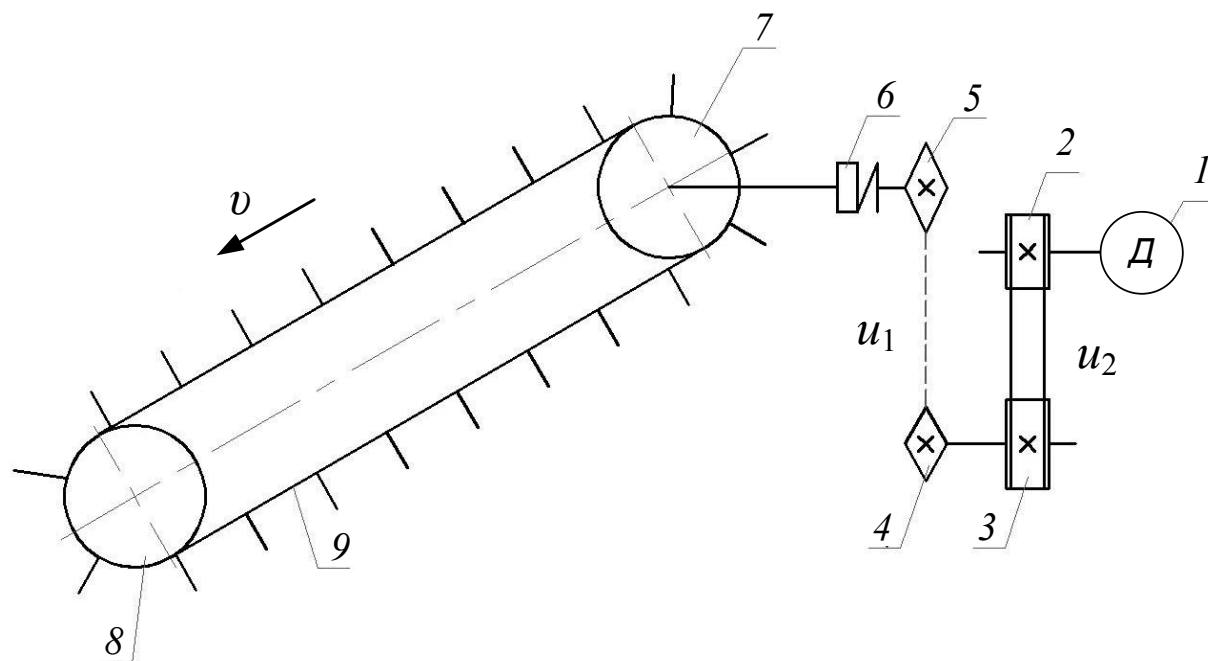


Рис. 4.9. Кінематична схема скребкового конвеєра: 1 – двигун; 2, 3 – шків пасової передачі; 4, 5 – зірочки ланцюгової передачі; 6 – муфта; 7 – привідна зірочка; 8 – привідна зірочка скребкового конвеєра; 9 – ланцюг зі скребками

На основі кінематичної схеми скребкового конвеєра (рис. 4.9) розроблена її динамічна модель (рис. 4.10), яка складається з трьох ділянок безінерційного вала, кожна з яких обертається з кутовими швидкостями $\dot{\phi}_0, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$, а також безінерційного тягового ланцюга, що рухається зі швидкістю v . Моменти інерції елементів приводного механізму I_0 зведено до осі приводного валу, а моменти інерції приводного I_1 та натяжного I_2 валів конвеєра розглядаються відносно власних осей обертання.

вала; c_p, c_x – коефіцієнти жорсткості тягового ланцюга відповідно робочої та холостої віток конвеєра; M_p – рушійний момент приводу, зведений до осі повороту приводного валу; M_{o_2} – момент опору від зачерпування скребками вантажу, зведений до осі повороту натяжного валу; F_p, F_x – сили опору переміщенню відповідно робочої та холостої віток конвеєра; R_1, R_2 – радіуси відповідно приводної і натяжної зірочок.

За узагальнені координати прийнято: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ – кутові координати переміщення відповідно приводного механізму, приводної та натяжної зірочок конвеєра; x_p, x_x – координати центрів мас робочої та холостої віток конвеєра.

Система диференціальних рівнянь, що описує динамічні процеси в скребковому конвеєрі, складена на основі принципу д'Аламбера і має такий вигляд:

$$\begin{cases} I_0 \cdot \ddot{\varphi}_0 = M_p - c_0 \cdot (\varphi_0 - \varphi_1); \\ I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = c_0 \cdot (\varphi_0 - \varphi_1) - c_p \cdot (\varphi_1 \cdot R_1 - x_p) \cdot R_1 + c_x \cdot (x_x - \varphi_1 \cdot R_1) \cdot R_1; \\ m_p \cdot \ddot{x}_p = c_p \cdot (\varphi_1 \cdot R_1 - x_p) + c_p \cdot (x_p - \varphi_2 \cdot R_2) - F_p; \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = c_p \cdot (x_p - \varphi_2 \cdot R_2) \cdot R_2 - c_x \cdot (\varphi_2 \cdot R_2 - x_x) \cdot R_2 - M_{o_2}; \\ m_x \cdot \ddot{x}_x = c_x \cdot (\varphi_2 \cdot R_2 - x_x) - c_x \cdot (x_x - \varphi_1 \cdot R_1) - F_x. \end{cases} \quad (4.6)$$

Рушійний момент M_p визначається за виразом:

$$M_p = M \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \eta_{заг}, \quad (4.7)$$

де M – момент на валу двигуна; $\eta_{заг}$ – загальний ККД приводу; u_1 – передаточне число ланцюгової передачі; u_2 – передаточне число пасової передачі. Виразимо момент на валу асинхронного двигуна через формулу Клосса:

$$M = \frac{2M_K}{\frac{s}{s_K} + \frac{s_K}{s}}, \quad (4.8)$$

де M_K - критичний момент на валу електродвигуна; s - ковзання ($s = 1 - \omega / \omega_o$); s_K - критичне ковзання ($s_K = 1 - \omega_K / \omega_o$); ω_o – синхронна кутова швидкість вала двигуна; ω_K – критична кутова швидкість вала двигуна; $\omega = \dot{\phi}_0 \cdot u_1 \cdot u_2$ - кутова швидкість конвеєра.

Для визначення рушійного моменту приводного механізму, необхідно в формулу (4.7) підставити вираз (4.8).

Відомо, що сила опору переміщенню тягового органу і вантажу залежить від швидкості руху тягового органу [42]:

$$F_{op}(\dot{x}_p) = m_p \cdot g \cdot (\tilde{\omega}_1(\dot{x}_p) \cdot \cos \beta + \sin \beta), \quad (4.9)$$

де $F_{op}(\dot{x}_p)$ – сила опору руху робочої вітки конвеєра; β – кут нахилу конвеєра до горизонту; $\tilde{\omega}_1(\dot{x}_p)$ – узагальнений коефіцієнт опору переміщенню вантажу і тягового органу;

$$F_{ox}(\dot{x}_x) = m_x \cdot g \cdot (\tilde{\omega}_2(\dot{x}_x) \cdot \cos \beta - \sin \beta), \quad (4.10)$$

де $F_{ox}(\dot{x}_x)$ – сила опору руху холостої вітки конвеєра; $\tilde{\omega}_2(\dot{x}_x)$ – коефіцієнт опору переміщенню тягового органу.

Залежність сили опору від швидкості транспортування вантажу представимо у вигляді кривої третього порядку:

$$F_o = A_0 + A_1 \cdot v + A_2 \cdot v^2 + A_3 \cdot v^3, \quad (4.11)$$

$$F'_o = A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot v + 3 \cdot A_3 \cdot v^2, \quad (4.12)$$

де A_0, A_1, A_2, A_3 – постійні коефіцієнти, які знаходяться з крайових умов руху:

$$\text{при } v=0: F_o = F_{o\max}; F'_o = 0,$$

$$\text{при } v=v_y: F_o = F_y; F'_o = 0,$$

де $F_{o\max}$ – максимальне значення сили опору; v_y – усталена швидкість руху тягового органу (ланцюга); F_y – усталене значення сили опору, що досягається при усталеній швидкості і визначається за формулами (4.10), (4.11).

Визначивши коефіцієнти A_0, A_1, A_2, A_3 та підставивши їх в формулу (4.12), отримаємо вираз для визначення сили опору залежно від швидкості руху тягового органу:

$$F_o = F_{o\max} - 3 \cdot \left(\frac{F_{o\max} - F_y}{v_y^2} \right) \cdot v^2 + 2 \cdot \left(\frac{F_{o\max} - F_y}{v_y^3} \right) \cdot v^3. \quad (4.13)$$

На початку руху значення сили опору має максимальне значення. Після зрушення вантажу з місця, тобто при $v \neq 0$, значення сили опору зменшується (при розгоні до усталеної швидкості руху конвеєра вона досягає усталеного розрахункового значення).

Диференціальні рівняння системи (4.6) є нелінійними рівняннями другого порядку, тому їх не вдається проінтегрувати аналітично. Для їх розв'язку використовуємо чисельний метод. З отриманих рівнянь визначаємо характеристики швидкості та прискорення, які представлено на графіках (рис. 4.11-4.15). Графіки побудовано для таких розрахункових параметрів: $m_p=86$ кг, $m_x=22$ кг, $c_0=7378$ Нм/рад, $c_p=c_x=1,5 \cdot 10^6$ Н/м, $I_0=0,8435$ кгм², $I_1=I_2=0,00171$ кгм², $R_1=R_2=0,0535$ м, $\omega_0=157$ рад/с, $\omega_k=100,2$ рад/с, $M_k=45$ Нм, $u_1=2$, $u_2=2,6$, $M_{o2}=4$ Нм, $F_{o,max,роб}=2400$ Н, $F_{y,роб}=1240$ Н, $F_{o,max,хол}=44$ Н, $F_{y,хол}=22$ Н.

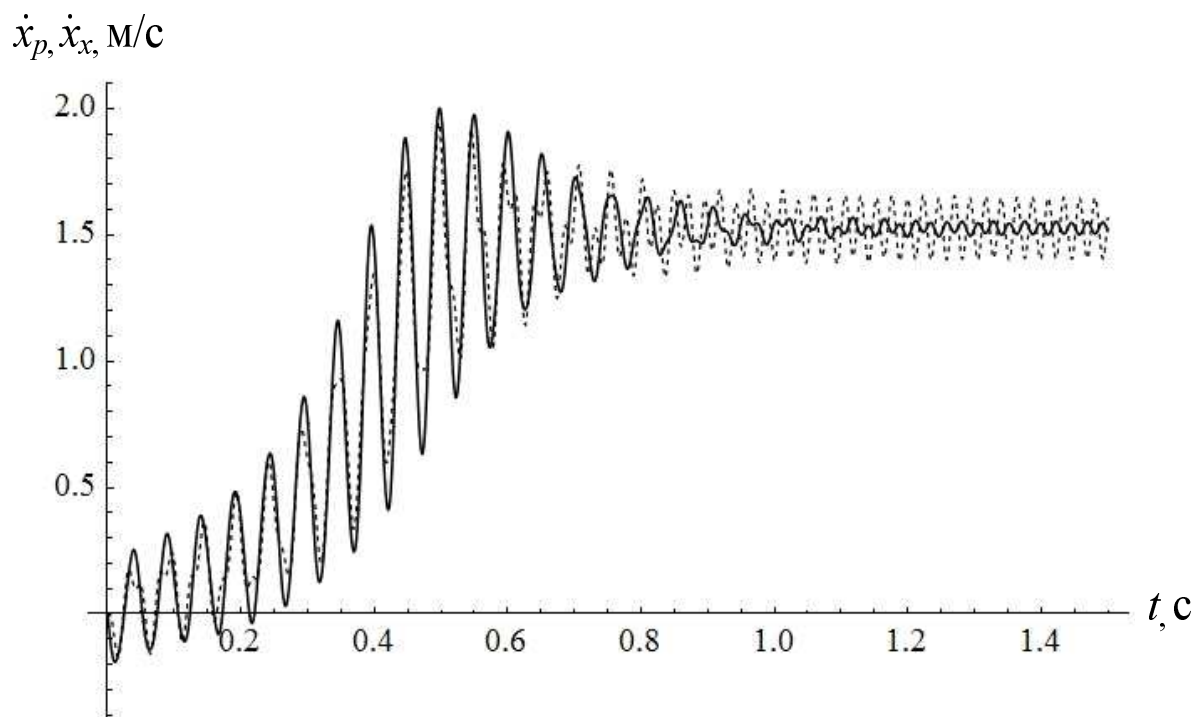


Рис. 4.11. Графіки зміни лінійної швидкості робочої \dot{x}_p (суцільна лінія) та холостої \dot{x}_x (штрихова лінія) віток конвеєра

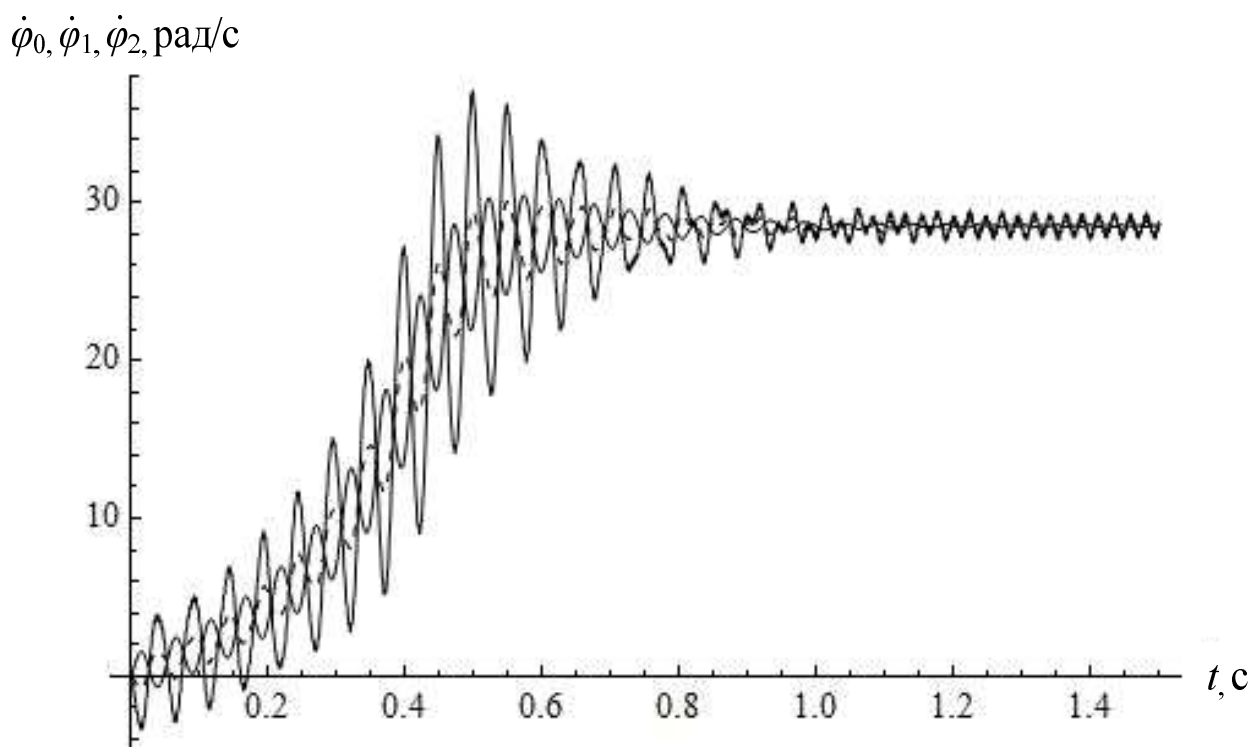


Рис. 4.12. Графіки зміни кутової швидкості приводу $\dot{\phi}_0$ (суцільна товста лінія), приводної $\dot{\phi}_1$ (штрихова тонка лінія) та натяжної зірочок $\dot{\phi}_2$ (суцільна тонка лінія)

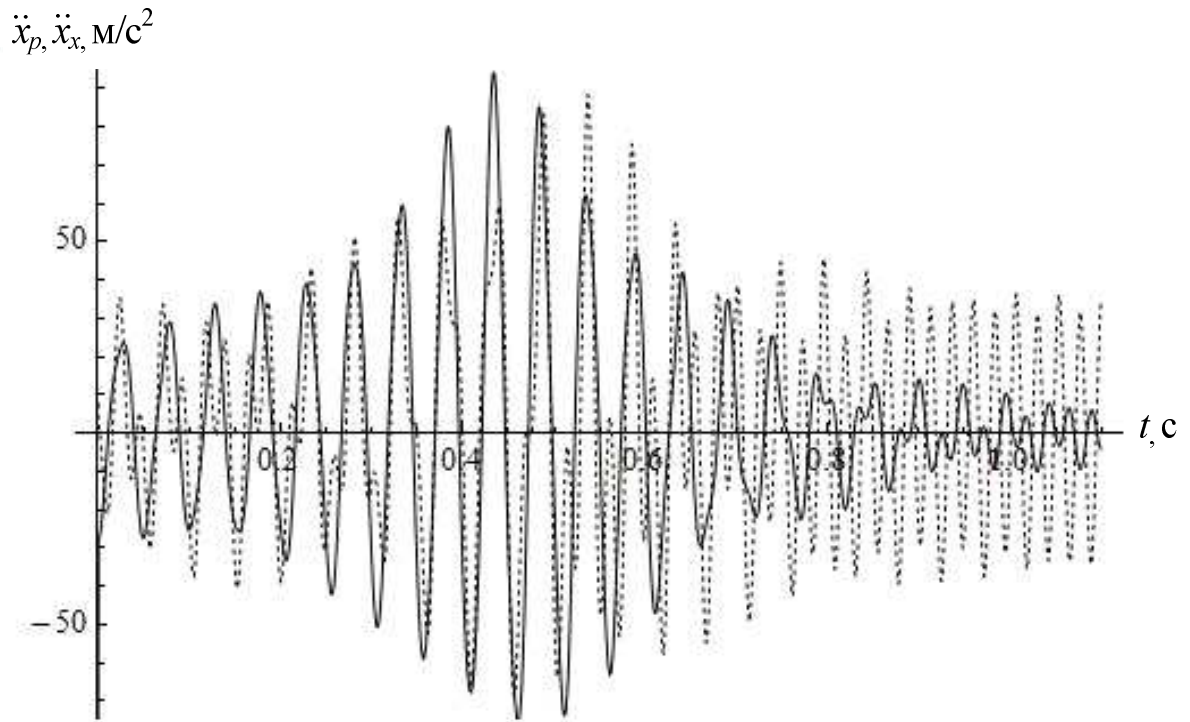


Рис.4.13. Графіки зміни лінійних прискорень робочої \ddot{x}_p (суцільна лінія) та холостої \ddot{x}_x (штрихова лінія) віток конвеєра

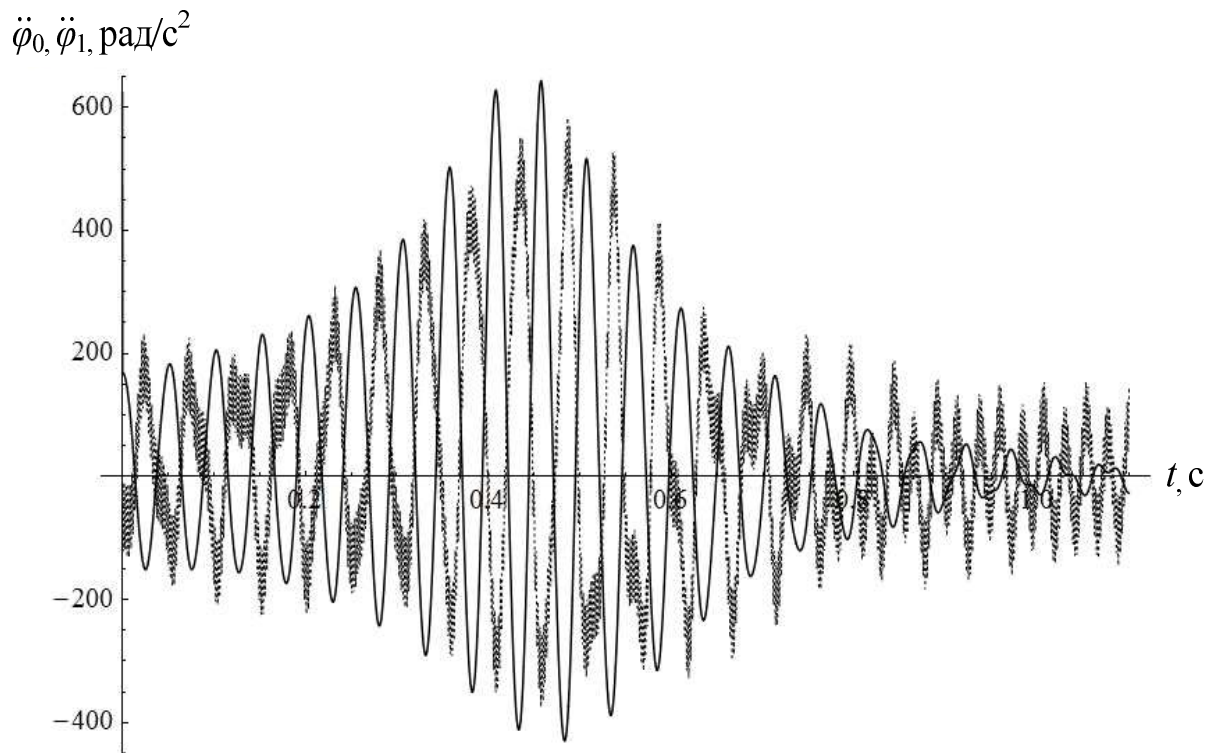


Рис. 4.14. Графіки зміни кутового прискорення приводу $\ddot{\varphi}_0$ (суцільна лінія) та приводної зірочки конвеєра $\ddot{\varphi}_1$ (штрихова лінія)

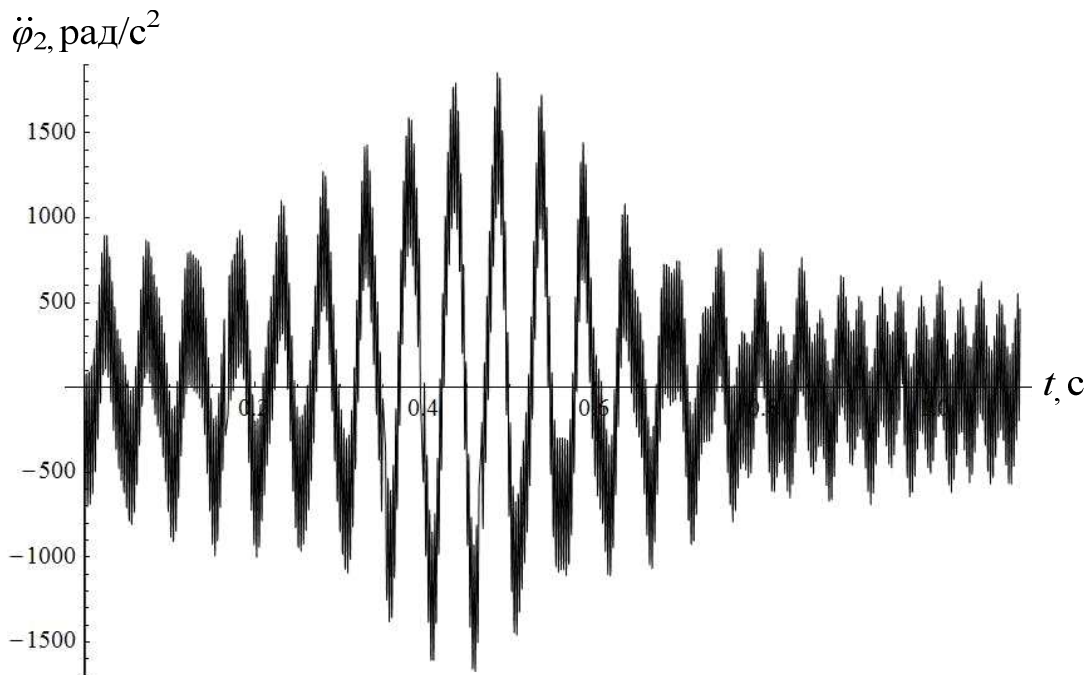


Рис.4.15. Графік зміни прискорення натяжної зірочки конвеєра $\ddot{\varphi}_2$

Аналізуючи отримані графіки видно, що в тяговому елементі скребкового конвеєра виникає коливальний процес зі значною зміною швидкості і прискорення. Графіки зміни швидкості (рис 4.11, 4.12) показують, що коливання, які виникають в період пуску конвеєра, після його виходу на усталений режим руху поступово затухають. Аналізуючи графіки зміни прискорення (рис 4.13-4.15) видно, що коливальний процес в тяговому елементі має інтенсивний характер і навіть після виходу конвеєра на усталений режим руху повністю не затухає. Такий коливальний процес спричиняє виникнення суттєвих динамічних навантажень в тяговому органі конвеєра і, як наслідок, – призводить до передчасного руйнування і зниження надійності роботи конструкції [43].

4.3. Динамічний аналіз роботи зерноочисної машини з рекуперативним приводом

Решітні механізми очистки зерноочисних машин мають в основному однакову технологічну схему з одним або двома решітними станами,

ексцентриковим приводом та механізмом очистки решіт [44]. Ці механізми очистки прості за конструкцією, універсальні при очищенні різних зернових культур та надійні в експлуатації.

В існуючих конструкціях решітні стани приводяться в дію ексцентриками, які жорстко закріплені на приводному валу, через шатуни. Ексцентрики закріплені на приводному валу під кутом $\Delta\varphi$, що становить 180° (2π). На лівому кінці вала жорстко закріплений шків, який приводиться в рух клинопасовою передачею. При обертанні вала решітні стани рухаються в протилежні напрямки, тобто елементи механізму решітної очистки здійснюють безперервні зворотно-поступальні рухи [45], причому, максимум прискорення решітних станів, а одночасно і зусилля в приводі приходиться одночасно в обох решітних станах, а мінімум навантажень також приходиться одночасно на обидва решітних стани. У цьому випадку енергоємність привода є значною, а робота здатність – мала, бо він працює у режимі, що має вдвічі більше навантаження, ніж для сепаратора з одним решітним станом.

При безперервному зворотно-поступальному русі елементів механізму очистки у зерноочисних машинах необхідно витратити енергію на їх розгін та гальмування. З відомих режимів руху найменші енергетичні витрати має режим з постійною швидкістю руху. Проте їх можна значно зменшити за рахунок накопичення (передачі) енергії при гальмуванні з подальшою її віддачею (передачею) при розгоні. Такими накопичувачами енергії можуть служити пружні елементи (пружини). Але пристрої приводів зворотно-поступального руху рухомого елемента з пружними накопичувачами енергії мають багато недоліків. Серед них слід зазначити великі втрати енергії в пружних елементах (іноді ці втрати складають до 50% загальної енергії, що передається), швидке втомне зношування пружних елементів і вихід їх з ладу, значний шум через внутрішнє тертя в пружних елементах тощо.

Найпрогресивнішими слід визнати пристрої, в яких при зворотно-поступальному русі кінетична енергія рухомого елемента перетворюється в

кінетичну енергію іншого рухомого елемента. Ці пристрої усувають перераховані недоліки накопичувачів енергії з пружними елементами [46].

На рис. 4.16 показана схема механізму приводу решітних станів зерноочисних машин, в якому при зміні напрямку руху решітних станів відбувається передача кінетичної енергії від одного решітного стану до іншого.

Механізм приводу складається з двох однакових решітних станів 1 і 2, кожен з яких приводиться в рух від одного приводу, що містять два кривошипно-шатунні механізми, де кривошипи 3 і 4 жорстко закріплені на одному приводному валу і зміщені один відносно одного на кут $\Delta\varphi$, який становить $90^\circ (\pi/2)$. Шатуни 5 і 6 сполучені відповідно з решітними станами 1 і 2. Наявність єдиного приводу дозволяє зменшити енергетичні витрати за рахунок безпосередньої передачі кінетичної енергії від одного решітного стану до іншого при постійних пуско-гальмівних режимах руху.

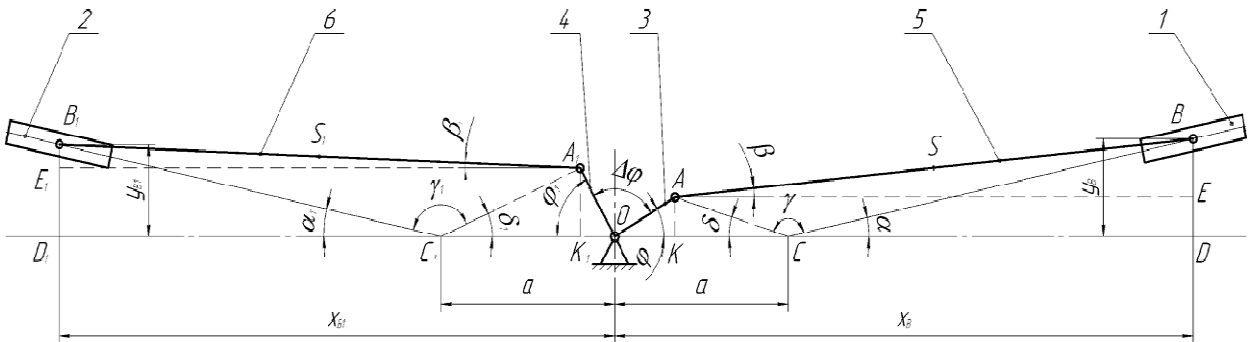


Рис. 4.16. Кінематична схема приводу механізму решітної очистки зерноочисних машин, що мають два решітні стани

Для наведеної вище кінематичної схеми (рис. 4.16) проведено дослідження кінематики руху робочих органів.

Спочатку визначимо координати центрів мас решітних станів:

$$\begin{cases} x_B = r \cos \varphi + l \cos \beta, \\ y_B = r \sin \varphi + l \sin \beta; \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} x_{B1} = r \cos(\varphi + \Delta\varphi) - l \cos \beta_1, \\ y_{B1} = r \sin(\varphi + \Delta\varphi) + l \sin \beta_1, \end{cases} \quad (4.15)$$

де $r = OA = OA_1$ – величина зміщення ексцентриків 3 і 4; $l = AB = A_1B_1$ – довжина шатунів 5 і 6; φ – кут повороту ексцентрика 3; $\Delta\varphi$ – кут зміщення ексцентриків 3 і 4.

Далі дослідимо механізм приводу одного, а потім іншого решітних станів. Згідно з теореми косинусів запишемо:

$$l^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \gamma. \quad (4.16)$$

Тут кут γ і довжина відрізка AC визначаються наступними залежностями:

$$\gamma = \pi - \alpha - \delta = \pi - \alpha - \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{a - r \cos \varphi}, \quad (4.17)$$

$$AC = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}. \quad (4.18)$$

Приймаємо $BC = u$, тоді вираз (4.16) набуде вигляду:

$$l^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi + u^2 - 2u\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi} \cdot \cos \gamma. \quad (4.19)$$

Звідси маємо квадратне рівняння:

$$u^2 + 2u\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi} \cos \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{a - r \cos \varphi} \right) + a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi - l^2 = 0. \quad (4.20)$$

Розв'язуючи рівняння (4.20), знайдемо його корені:

$$u_{1,2} = -\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi} \cos \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{a - r \cos \varphi} \right) \pm \sqrt{l^2 - (a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi) \sin^2 \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{a - r \cos \varphi} \right)}. \quad (4.21)$$

Використовуючи залежність (4.21), знаходимо ординату точки B :
 $BD = u \sin \alpha$, тоді:

$$BE = BD - DE = u \sin \alpha - r \sin \varphi. \quad (4.22)$$

Враховуючи, що $\frac{BE}{l} = \sin \beta$ маємо:

$$\beta = \arcsin \frac{u \sin \alpha - r \sin \varphi}{l}. \quad (4.23)$$

Аналогічно досліджуємо механізм приводу іншого решітного стану, в результаті чого будемо мати такі вирази:

$$\varphi_1 = \pi - \varphi - \Delta\varphi; \quad (4.24)$$

$$A_1C_1 = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi_1}; \quad (4.25)$$

$$\gamma_1 = \pi - \alpha - \delta_1 = \pi - \alpha - \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi_1}{a - r \cos \varphi_1}; \quad (4.26)$$

$$l^2 = (A_1C_1)^2 + (B_1C_1)^2 - 2 \cdot A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cos \gamma_1. \quad (4.27)$$

Нехай $B_1C_1 = u_1$. Тоді, склавши аналогічне до попереднього квадратне рівняння і розв'язавши його, одержимо наступні корені:

$$u_{1,2} = -\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi_1} \cos \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi_1}{a - r \cos \varphi_1} \right) \pm \sqrt{l^2 - (a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi_1) \sin^2 \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi_1}{a - r \cos \varphi_1} \right)}. \quad (4.28)$$

Враховавши, що $\varphi_1 = \pi - \varphi - \Delta\varphi$, вираз (4.28) матиме вигляд:

$$u_{1,2} = -\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi + \Delta\varphi)} \cos\left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin(\varphi + \Delta\varphi)}{a - r \cos(\varphi + \Delta\varphi)}\right) \pm \sqrt{l^2 - (a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi + \Delta\varphi)) \sin^2\left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin(\varphi + \Delta\varphi)}{a - r \cos(\varphi + \Delta\varphi)}\right)}. \quad (4.29)$$

Шукаємо ординату точки B_1 : $B_1D_1 = u_1 \sin \alpha$, звідси:

$$B_1E_1 = B_1D_1 - D_1E_1 = u_1 \sin \alpha - r \sin(\varphi + \Delta\varphi); \quad (4.30)$$

$$\beta_1 = \arcsin \frac{u_1 \sin \alpha - r \sin(\varphi + \Delta\varphi)}{l}. \quad (4.31)$$

Знайдемо координати центрів мас шатунів 5 та 6:

$$\begin{cases} x_S = r \cos \varphi + l_S \cos \beta, \\ y_S = r \sin \varphi + l_S \sin \beta; \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} x_{S1} = r \cos(\varphi + \Delta\varphi) - l_{S1} \cos \beta_1, \\ y_{S1} = r \sin(\varphi + \Delta\varphi) + l_{S1} \sin \beta_1. \end{cases} \quad (4.33)$$

Для складання диференціальних рівнянь руху зерноочисної машин з рекупераційним приводом використаємо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad (4.34)$$

де T , Π – відповідно кінетична та потенціальна енергія системи; φ – узагальнена координата системи; Q_φ – узагальнена сила, яка відповідає узагальненій координаті φ . Визначимо кінетичну енергію зерноочисної машини, кінематична схема якої представлена на рис. 4.16:

$$T = \frac{1}{2} J_P \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_K \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_S \left(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 \right) + \frac{1}{2} m_B \left(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 \right) + \frac{1}{2} m_{S1} \left(\dot{x}_{S1}^2 + \dot{y}_{S1}^2 \right) + \frac{1}{2} m_{B1} \left(\dot{x}_{B1}^2 + \dot{y}_{B1}^2 \right) + \frac{1}{2} J_S \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} J_{S1} \left(\dot{\beta}_1 \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ J_P i^2 \dot{\varphi}^2 + J_K \dot{\varphi}^2 + m_S \dot{\varphi}^2 \left[\left(\frac{\partial x_S}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \right. \\
&+ m_B \dot{\varphi}^2 \left[\left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_B}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + m_{S1} \dot{\varphi}^2 \left[\left(\frac{\partial x_{S1}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{S1}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \\
&\left. + m_{B1} \dot{\varphi}^2 \left[\left(\frac{\partial x_{B1}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{B1}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + J_S \dot{\varphi}^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right)^2 + J_{S1} \dot{\varphi}^2 \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} \right)^2 \right\}, \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Після перетворень вираз кінетичної енергії системи набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left\{ J_P i^2 + J_K + m_S \left[\left(\frac{\partial x_S}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + m_B \left[\left(\frac{\partial x_B}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_B}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \right. \\
\left. + m_{S1} \left[\left(\frac{\partial x_{S1}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{S1}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + m_{B1} \left[\left(\frac{\partial x_{B1}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_{B1}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + J_S \left(\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right)^2 + J_{S1} \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} \right)^2 \right\}. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Тут прийняті такі позначення: J_P , J_K – моменти інерції відповідно ротора електродвигуна і кривошипного вала відносно власних осей обертання; J_S , J_{S1} – моменти інерції шатунів відносно центрів мас; m_S , m_{S1} – маси шатунів; m_B , m_{B1} – маси решітних станів; $\dot{x}_S, \dot{y}_S, \dot{x}_{S1}, \dot{y}_{S1}$ – швидкості центрів мас шатунів; $\dot{x}_B, \dot{y}_B, \dot{x}_{B1}, \dot{y}_{B1}$ – швидкості центрів мас решітних станів; i – передаточне відношення приводного механізму.

Врахувавши, що вираз у фігурних дужках залежності (4.36) дорівнює $J_{np}(\varphi)$,

то останній вираз переписеться таким чином $T = \frac{1}{2} J_{np}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2$, де $J_{np}(\varphi)$ – приведений до осі повороту кривошипа момент інерції всієї системи зерноочисної машини. Знайдемо складові рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{np}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}; \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{np}(\varphi) \cdot \ddot{\varphi} + \frac{\partial J_{np}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \dot{\varphi}^2; \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_{np}(\phi)}{\partial \phi} \cdot \dot{\phi}^2. \quad (4.39)$$

Потенціальна енергія системи визначається залежністю:

$$\Pi = m_S g y_S + m_B g y_B + m_{S1} g y_{S1} + m_{B1} g y_{B1}. \quad (4.40)$$

Взявши похідну по узагальненій координаті ϕ від виразу (4.40) отримаємо:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = \left(m_S \frac{\partial y_S}{\partial \phi} + m_B \frac{\partial y_B}{\partial \phi} + m_{S1} \frac{\partial y_{S1}}{\partial \phi} + m_{B1} \frac{\partial y_{B1}}{\partial \phi} \right) g. \quad (4.41)$$

Узагальнена сила становить $Q_\phi = M_{\partial \phi} \cdot i$ (тут $M_{\partial \phi}$ – рушійний момент на валу електродвигуна).

Після підстановки залежностей (4.39), (4.40) і (4.41), а також виразу узагальненої сили Q_ϕ в рівняння (4.34), будемо мати:

$$J_{np}(\phi) \ddot{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{np}(\phi)}{\partial \phi} \cdot \dot{\phi}^2 = M_{\partial \phi} \cdot i - \left(m_S \frac{\partial y_S}{\partial \phi} + m_B \frac{\partial y_B}{\partial \phi} + m_{S1} \frac{\partial y_{S1}}{\partial \phi} + m_{B1} \frac{\partial y_{B1}}{\partial \phi} \right) g. \quad (4.42)$$

Покладемо $\dot{\phi} = \omega$, $\ddot{\phi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\phi}$, в результаті чого рівняння

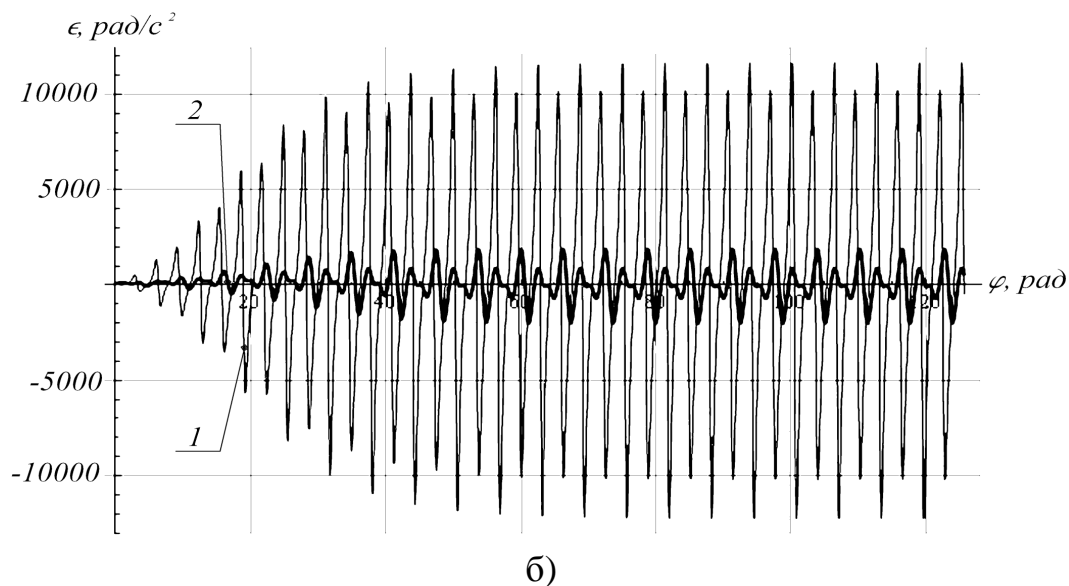
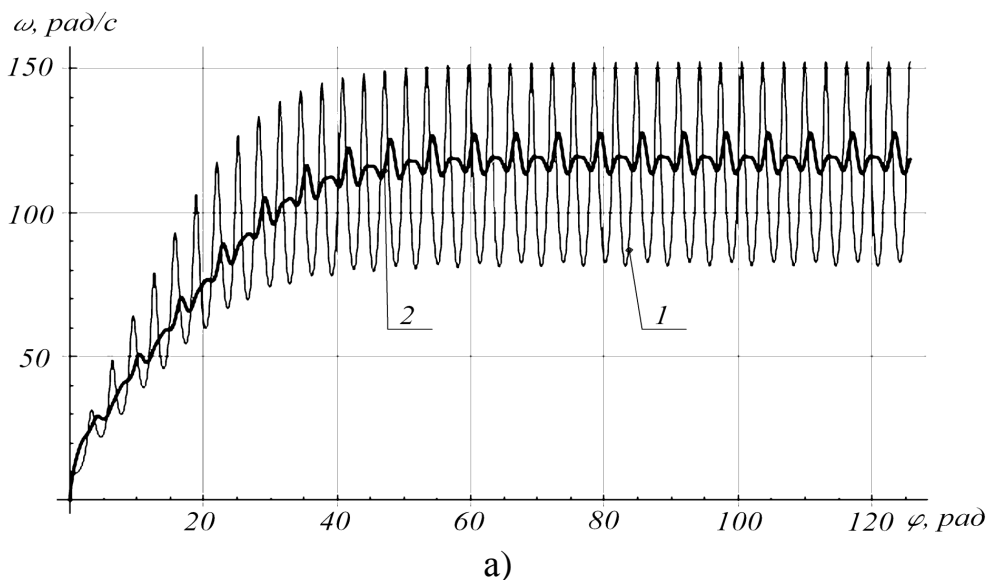
(4.42) набуде вигляду:

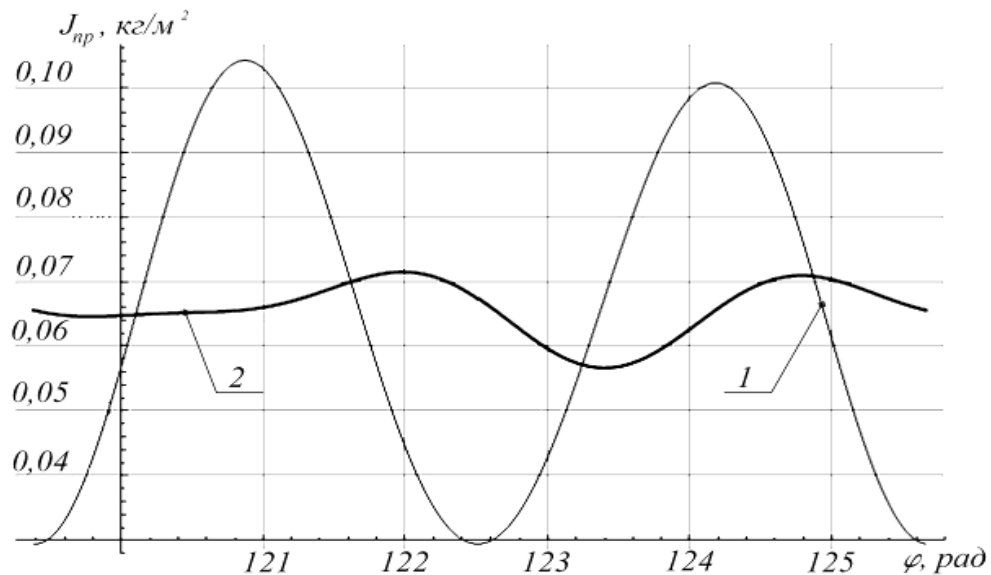
$$J_{np}(\phi) \omega \frac{d\omega}{d\phi} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{np}(\phi)}{d\phi} \cdot \omega^2 = M_{\partial \phi} \cdot i - \left(m_S \frac{\partial y_S}{\partial \phi} + m_B \frac{\partial y_B}{\partial \phi} + m_{S1} \frac{\partial y_{S1}}{\partial \phi} + m_{B1} \frac{\partial y_{B1}}{\partial \phi} \right) g. \quad (4.43)$$

Рушійний момент на валу електродвигуна визначається за формулою Клосса.

Рівняння (4.43) являє собою нелінійне диференціальне рівняння, яке не вдається проінтегрувати аналітично. Тому для його розв'язку використаємо чисельний метод. Розрахунки проводимо для таких числових параметрів зерноочисної машини: момент інерції ротора електродвигуна $J_p = 0,0006 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;

момент інерції на кривошипному валу $J_k=0,0257$ кг·м²; передаточне відношення приводного механізму $i=2,4$; маси шатунів $m_S=m_{SI}=0,02$ кг; маси решітних станів $m_B=m_{BI}=110$ кг; моменти інерції шатунів відносно осі обертання $J_S=J_{SI}=0,000066$ кг·м²; радіус кривошипа $r=0,018$ м; критичний момент на валу електродвигуна $M_{кр}=29,49$ Н·м; довжина шатуна $l=0,2$ м; центр мас шатунів $l_S=0,5 \cdot l$ м; кут нахилу решітних станів до горизонту $\alpha=0,14$ рад; параметр $a=0,1$ м; синхронна кутова швидкість обертання ротора електродвигуна $\omega_o=314$ рад/с; номінальна кутова швидкість обертання ротора електродвигуна $\omega_n=298,5$ рад/с; критична кутова швидкість обертання ротора електродвигуна $\omega_k=209$ рад/с. Результати чисельного інтегрування диференціального рівняння (4.43) показані на рис. 4.17. Графіки побудовані для двох випадків: при $\Delta\varphi = 180^\circ$ – 1 та при $\Delta\varphi = 90^\circ$ – 2.





в)

Рис. 4.17. Графіки функцій: а) кутової швидкості; б) кутового прискорення; в) приведенного моменту інерції

Аналізуючи графіки приведені на рис. 4.17 можна сказати, що використання рекуперативного приводу зменшує нерівномірність руху решітних станів та приведеного моменту інерції всієї системи в порівнянні з існуючим приводним механізмом. Крім того, при незмінних параметрах зерноочисної машини, кінетична енергія системи буде більшою в машинах з рекуперативним приводом в порівнянні з існуючим приводом, що дасть змогу системі працювати з більшою кутовою швидкістю та зменшеними затратами енергії на її привід [47].

4.4. Моделювання та аналіз руху мобільної трелювальної лебідки

Для дослідження роботи безпосередньо мобільних трелювальних лебідок доцільно побудувати динамічну модель її руху. Трелювальну лебідку, з достатньою для інженерних розрахунків точністю, можна представити, як механічну систему з трьома ступенями вільності (рис. 4.18) [48]. За узагальнені координати прийнято лінійні координати положення

візка x_1 і вантажу x_2 , а також кутову координату φ повороту канатного барабана.

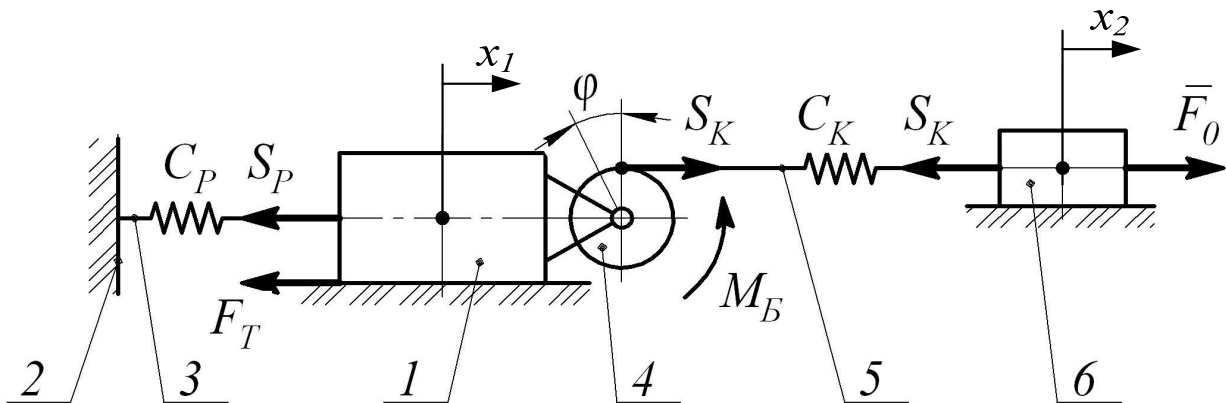


Рис. 4.18. Динамічна модель трельовальної лебідки з вантажем

В наведеній динамічній моделі **візок 1** (трактор, мобільний енергозасіб) кріпиться до нерухомої **основи 2** (дерева, пенька тощо) за допомогою **розтяжок 3**, які мають жорсткість C_P . На **візку 1** розміщена приводна станція, що приводить в рух **барабан 4**, на який намотується **тяговий канат 5**, що трелює **вантаж 6** (умовно зображений у вигляді прямокутника).

З боку приводного двигуна на **барабан 4** діє крутний момент M_B , величина якого в загальному випадку є змінною і залежить від механічних характеристик двигуна та урухомника. На візок також діє сила тертя F_T , яка залежить від зчеплення рушіїв із ґрунтом, а на дерево, що трелюється – сила опору F_0 , яка в загальному випадку є змінною величиною, і характер її зміни підлягає дослідженню для кожного випадку окремо.

Процес роботи лебідки можна представити у чотири етапи.

I етап – холостий хід, при якому обертова маса елементів урухомника з приведеним до осі барабана моментом інерції J_P під дією крутного моменту M_B , що приведений також до осі барабана, вибирає сумарний зазор Δx в приводі та від провисання канату, при цьому рух канатного барабана описується диференціальним рівнянням:

$$J_p \cdot \ddot{\varphi} = M_{\sigma} - m_k \cdot g \cdot \frac{D}{2}; \quad (4.44)$$

Початкові умови для руху барабана на першому етапі:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0; \\ \dot{\varphi}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.45)$$

II етап – зростання в тяговому канаті навантажень S_K до зусилля рівного силі F_T , але меншого за силу опору F_0 . Маса візка m_1 та дерева m_2 знаходяться в стані спокою, рухається лише маса J_P :

$$J_p \cdot \ddot{\varphi} = M_b - C_k \cdot (\varphi - \varphi_1) \cdot \frac{D^2}{4}. \quad (4.46)$$

Початкові умови для другого етапу такі:

$$\begin{cases} \varphi(t_1) = \varphi_1; \\ \dot{\varphi}(t_1) = \dot{\varphi}_1, \end{cases} \quad (4.47)$$

де t_1 – тривалість першого етапу; φ_1 та $\dot{\varphi}_1$ – відповідно кутова координата та кутова швидкість канатного барабану у кінці першого етапу.

III етап – розвиток в тяговому канаті навантажень S_K до зусилля, що перевищує зусилля F_T , але меншого за силу опору F_0 . Маса дерева m_2 знаходяться в стані спокою, рухаються лише маси m_1 та J_P . Математична модель руху системи на цьому етапі описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} J_p \ddot{\varphi} = M_b - C_k \left(\varphi - \varphi_1 - \frac{2x_1}{D} \right) \frac{D^2}{4}; \\ m_1 \ddot{x}_1 = C_k \left(\varphi - \varphi_1 - \frac{2x_1}{D} \right) \frac{D}{2} - C_p x_1 - F_T. \end{cases} \quad (4.48)$$

Початковими умовами для третього етапу є кінцеві умови для другого:

$$\begin{cases} \varphi(t_2) = \varphi_2; \\ \dot{\varphi}(t_2) = \dot{\varphi}_2; \\ x_1(t_2) = 0; \\ \dot{x}_1(t_2) = 0, \end{cases} \quad (4.49)$$

де t_2 – момент часу закінчення другого етапу; φ_2 та $\dot{\varphi}_2$ – відповідно кутова координата та кутова швидкість канатного барабану у кінці другого етапу.

IV етап – зростання навантажень S_K в тяговому канаті до зусилля, що перевищує силу опору F_0 . Рухаються всі маси системи, тому математична модель системи на цьому етапі включає три диференціальні рівняння:

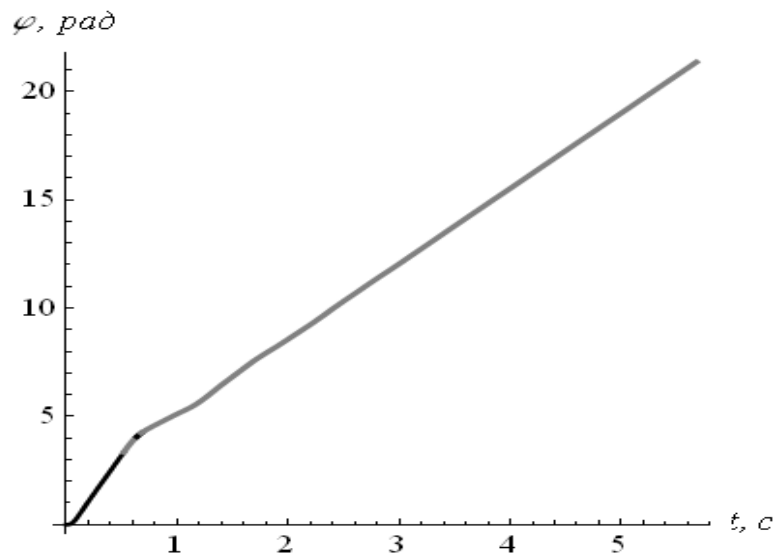
$$\begin{cases} J_P \ddot{\varphi} = M_B - C_K \left(\varphi - \varphi_1 - \frac{2(x_1 - x_2)}{D} \right) \frac{D^2}{4}; \\ m_1 \ddot{x}_1 = C_K \left(\varphi - \varphi_1 - \frac{2(x_1 - x_2)}{D} \right) \frac{D}{2} - C_P x_1 - F_T \\ -m_2 \ddot{x}_2 = C_K \left(\varphi - \varphi_1 - \frac{2(x_1 - x_2)}{D} \right) \frac{D}{2} - F_0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Початковими умовами для цього етапу є такі:

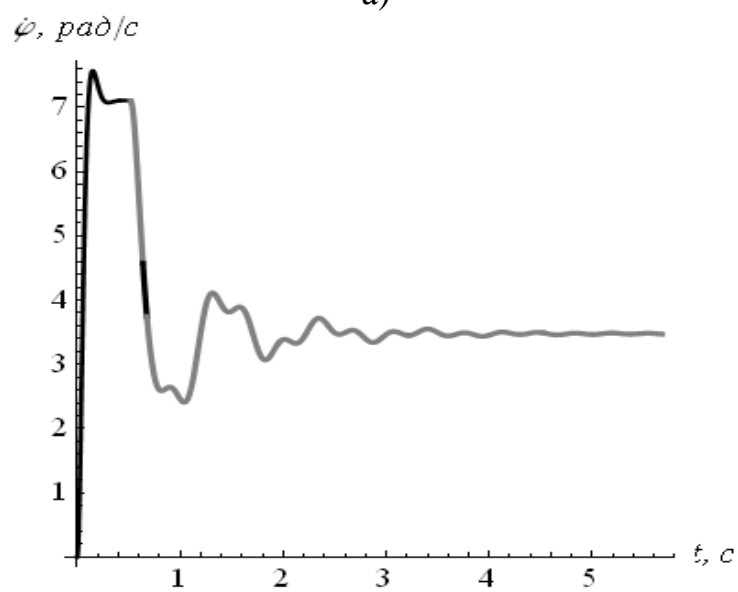
$$\begin{cases} \varphi(t_3) = \varphi_3; \\ \dot{\varphi}(t_3) = \dot{\varphi}_3; \\ x_1(t_3) = x_{13}; \\ \dot{x}_1(t_3) = \dot{x}_{13}; \\ x_2(t_3) = 0; \\ \dot{x}_2(t_3) = 0, \end{cases} \quad (4.51)$$

де t_3 – момент часу закінчення третього етапу; φ_3 та $\dot{\varphi}_3$ – відповідно кутова координата канатного барабану у кінці третього етапу; x_{13} та \dot{x}_{13} – відповідно координата та швидкість руху візка у кінці третього етапу.

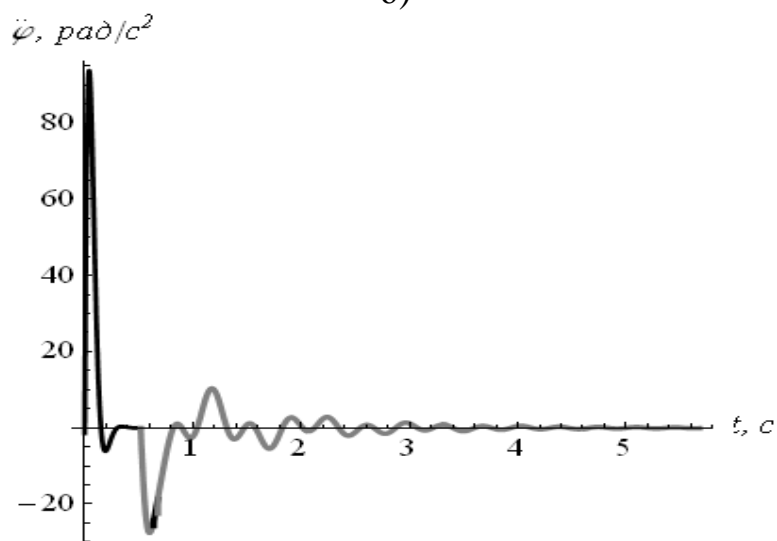
Для приводу лебідки використовується гідравлічний двигун об'ємного регулювання. Динамічна характеристика такого двигуна представляється рівнянням (1.62). Проведемо чисельне інтегрування систем диференціальних рівнянь (4.44), (4.46), (4.48), (4.50) із врахуванням початкових умов (4.45), (4.47), (4.49), (4.51) та рівняння (1.62). У результаті отримаємо графіки функцій, які представлені на рис. 4.19-4.23 (графіки побудовані таким чином, що їх окремі ділянки, які відповідають різним етапам руху системи, зображені різними кольорами: сірим та чорним).



а)

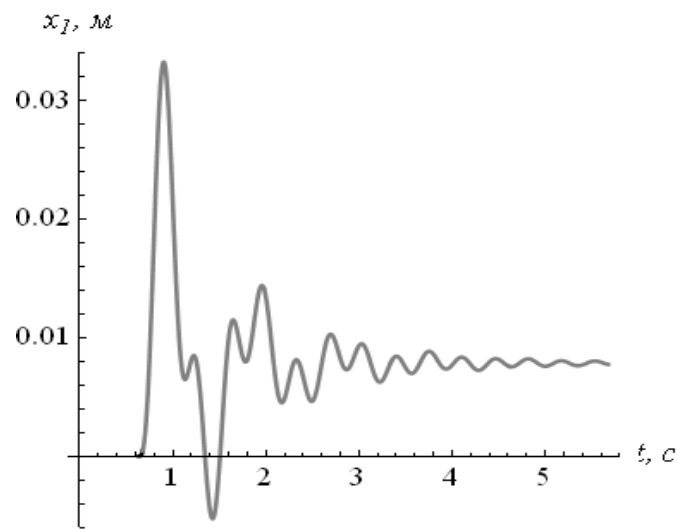


б)

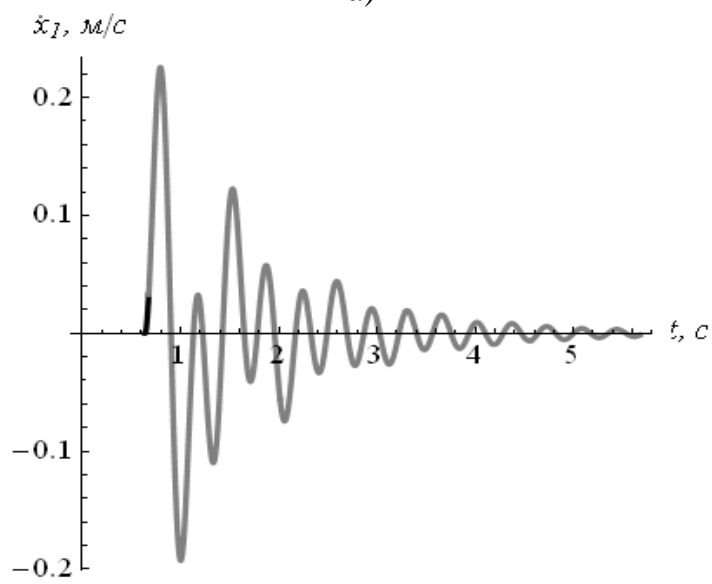


в)

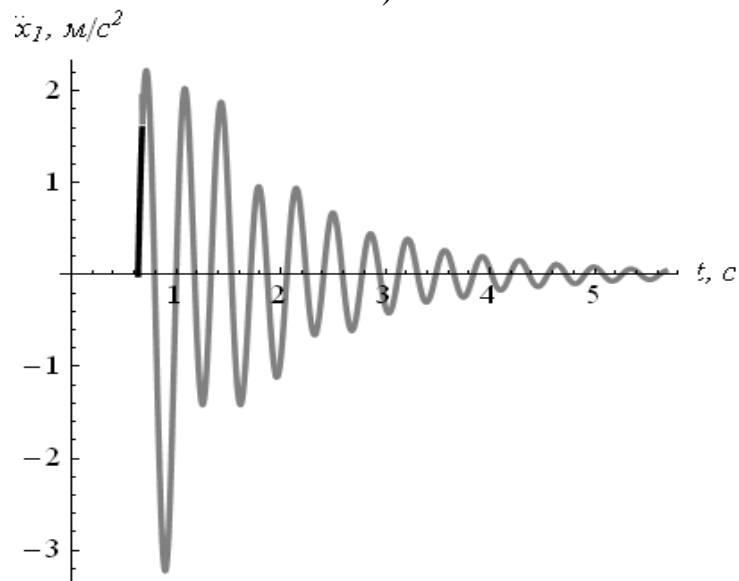
Рис. 4.19. Графіки кінематичних функцій канатного барабана:
а) кутова координата; б) кутова швидкість; в) кутове прискорення



а)

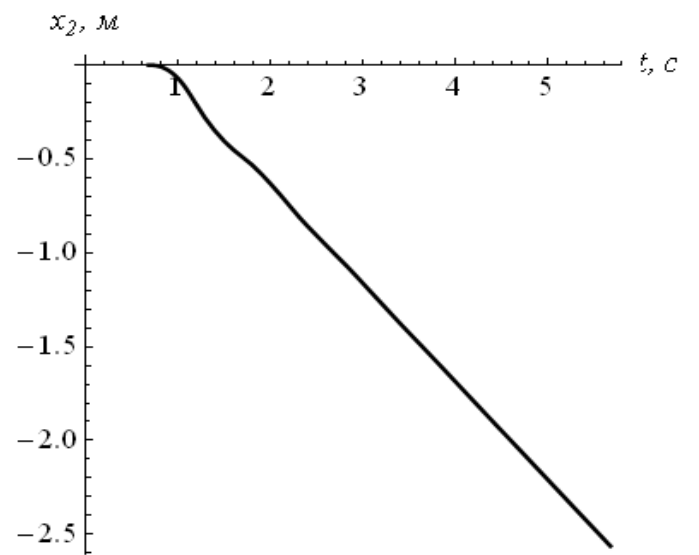


б)

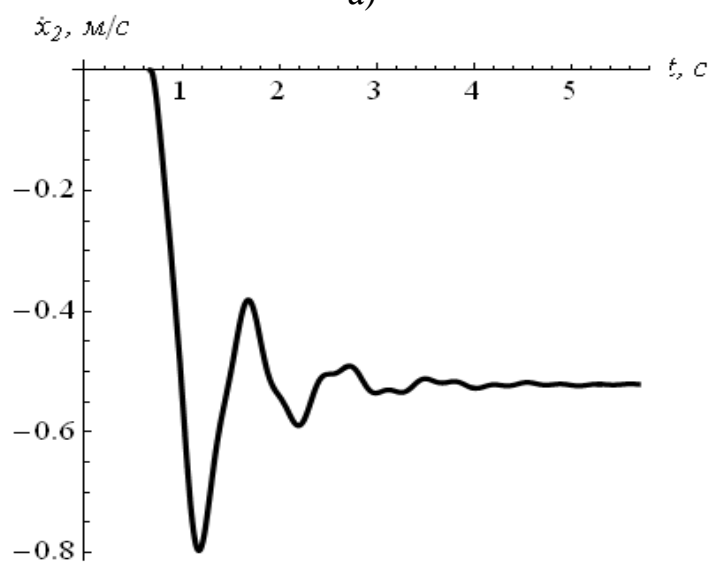


в)

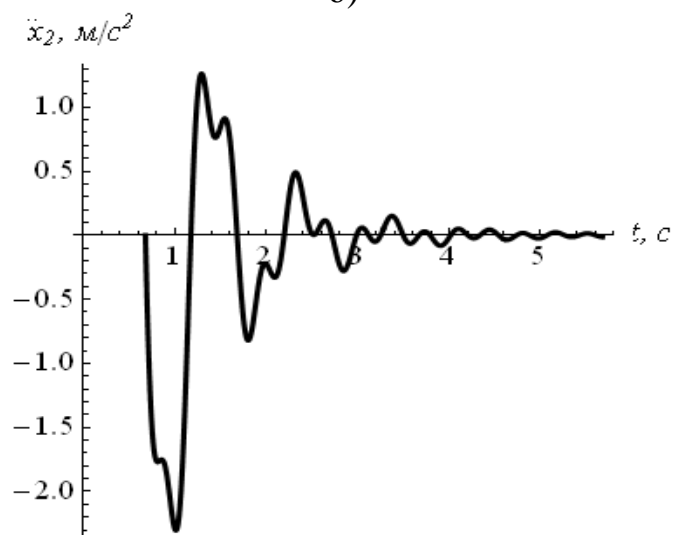
Рис. 4.20. Графіки кінематичних функцій візка:
а) переміщення; б) швидкість; в) прискорення



a)



б)



в)

Рис. 4.21. Графіки кінематичних функцій вантажу:

а) переміщення; б) швидкість; в) прискорення

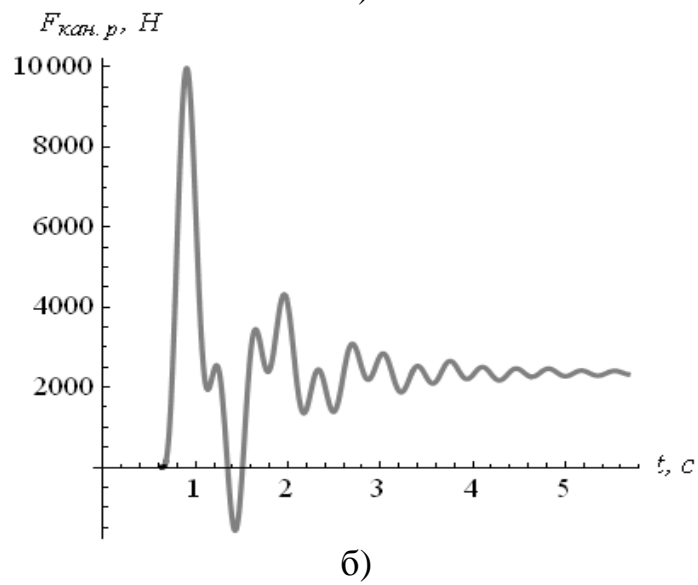
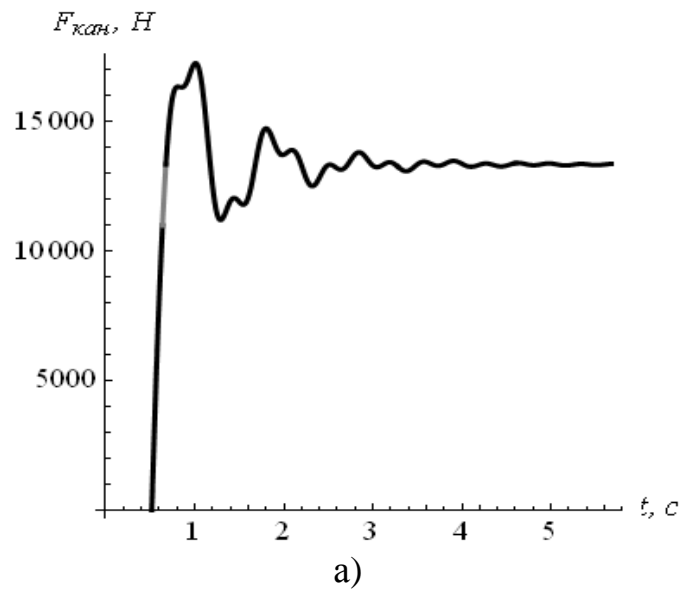


Рис. 4.22. Графіки зусиль у канатах: а) тяговий канат; б) розтяжка

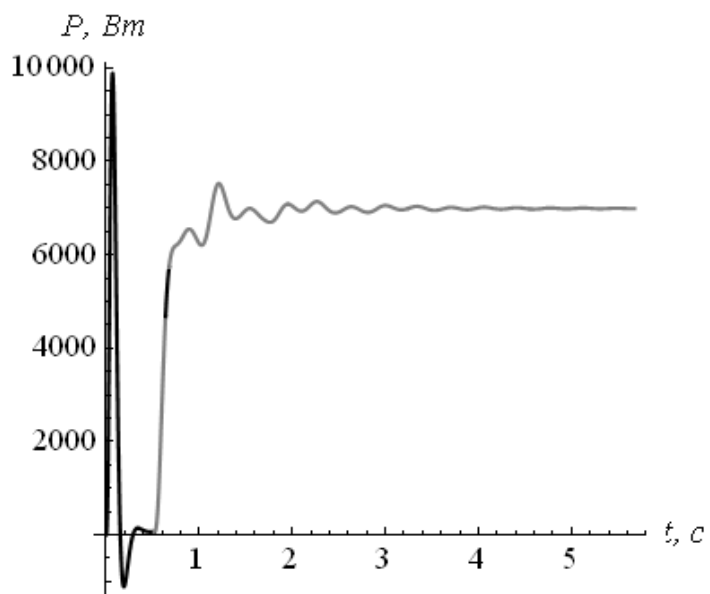


Рис. 4.23. Графік потужності на катаному барабані

Як видно з приведених на рис. 4.19-4.23 графіків, процес виходу на усталену швидкість руху динамічної системи „мобільна трелювальна лебідка - вантаж” супроводжується коливаннями її елементів, що є небажаним. Варто звернути увагу на рис. 4.22, б з якого видно, що максимальне зусилля у розтяжці значно перевищує зусилля при усталеному русі вантажу. Це вимагає підвищеної уваги до міцності канату, оскільки при пікових динамічних навантаженнях можливий розрив канату, що призводить до негативних наслідків: зниження продуктивності роботи, необхідності заміни канату, підвищенню рівня виробничого травматизму тощо.

4.5. Дослідження динаміки руху ківшового елеватора

При роботі вертикального стрічкового ківшового елеватора в його елементах, і в першу чергу у тяговому органі, виникають значні динамічні навантаження, які під час неусталених процесів можуть перевищувати статичні. Такі навантаження виникають внаслідок особливостей зовнішніх активних та внутрішніх реактивних сил і в'язей, що визначають і водночас обмежують рух конвеєра. Крім того, величина динамічних навантажень залежить від інерційних, жорсткісних і дисипативних властивостей елементів ківшового елеватора. Для встановлення причин виникнення, а також зниження динамічних навантажень необхідно дослідити динаміку руху ківшового елеватора в найбільш навантаженому стані, а саме при завантажених ковшах робочої гілки в режимі пуску. Вирішення такої задачі забезпечить отримання на етапі проектування достовірних вихідних даних для подальшого розрахунку елементів конструкції елеватора, що дозволить підвищити його технічний рівень.

Для динамічних технічних систем, тобто систем, які змінюють свій стан з часом, необхідно розробити динамічну модель. Відомо, що при переході від реальної механічної системи (машини) до її динамічної моделі

нехтують тими фізичними факторами, які не суттєві для даного дослідження [2]. Отже, при розробці використано такі припущення:

- ківшовий елеватор представлено як детерміновану динамічну систему з голономними в'язями;
- ковші вважаються абсолютно жорсткими тілами і мають можливість за допомогою пружних елементів кріплення з коефіцієнтами жорсткості c_a повертатись навколо осей $O_{p1}, O_{p2}, \dots, O_{pn}, O_{x1}, O_{x2}, \dots, O_{xk}$, які прийнято за точки кріплення ковшів до стрічки;
- вага стрічки конвеєра розподілена між ковшами на цій стрічці;
- стрічка розділена між точками кріплення ковшів на окремі пружно-дисипативні елементи з коефіцієнтом жорсткості c та коефіцієнтом демпфування β ;
- вважаємо, що поперечні переміщення стрічки є незначними, тому їх не враховуємо;
- приводний механізм має пружні та дисипативні властивості, які представлені коефіцієнтом жорсткості c_0 та коефіцієнтом демпфування β_0 ;
- корпуси електродвигуна, редуктора та осі приводного та натяжного барабанів закріплені абсолютно жорстко.

Динамічна модель ківшового елеватора для загального випадку з довільною кількістю мас (n_p і n_x робочої та холостої гілки відповідно) і з врахуванням прийнятих припущень показана на рис. 4.24. На схемі прийняті наступні позначення: J_0 – зведений до осі обертання барабана момент інерції електродвигуна, редуктора, муфти; J_1 – момент інерції приводного барабана; J_2 – момент інерції натяжного барабана; J_p – момент інерції завантаженого ковша відносно його центра мас; J_x – момент інерції розвантаженого ковша відносно його центра мас; M_p – зведений до осі обертання приводного барабана рушійний момент приводного механізму; M_o – зведений до осі обертання натяжного барабана момент сил опору переміщенню стрічки з ковшами та вантажем; m_p, m_x – зведені до тягового органа маси ковша з

вантажом і без вантажу відповідно з урахуванням маси стрічки між ковшами; c_0, β_0 – коефіцієнти жорсткості і демпфування приводного механізму; c, β – коефіцієнти жорсткості і демпфування стрічки, довжиною рівною крокові між ковшами; c_α – крутильна жорсткість повороту ковшів; R_1, R_2 – радіус приводного і натяжного барабана відповідно; a_p, a_x – відстані від точок кріплення завантаженого і порожнього ковшів до їх центрів мас відповідно; g – прискорення вільного падіння.

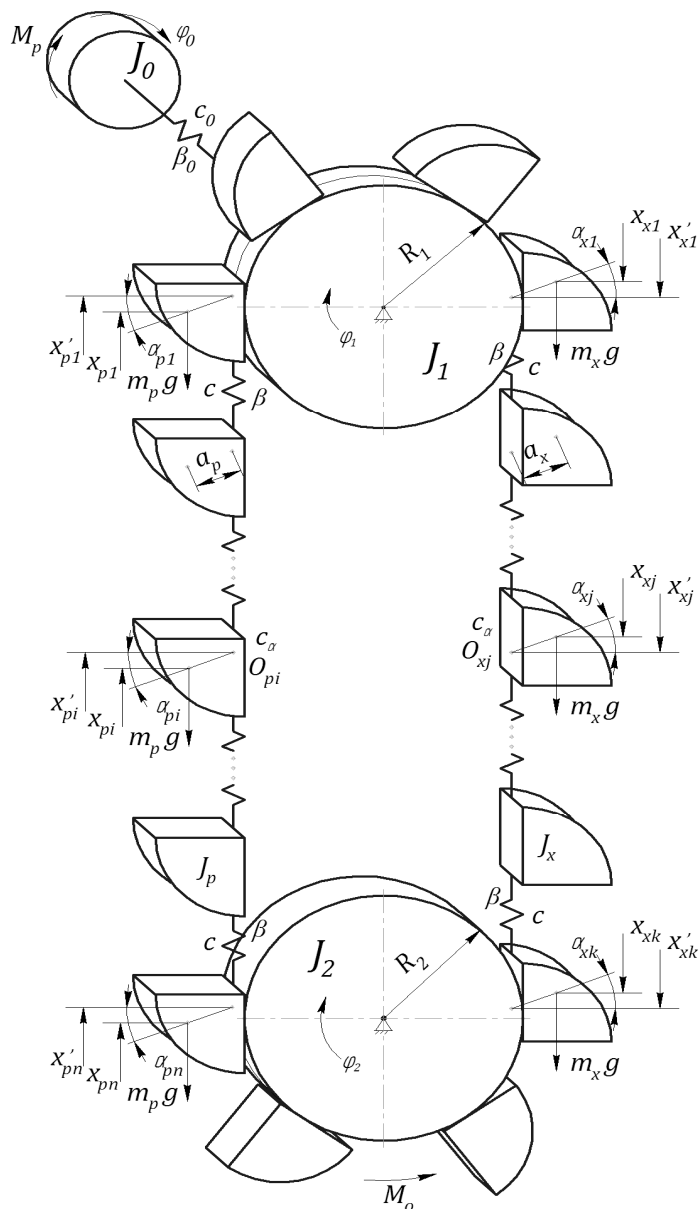


Рис. 4.24. Динамічна модель вертикального стрічкового ківшового елеватора

За узагальнені координати такої механічної системи прийнято: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ – кутові координати повороту зведеної маси приводного механізму,

приводного і натяжного барабанів відповідно; $x'_{p1}, x'_{p2}, \dots, x'_{pn}, x'_{x1}, x'_{x2}, \dots, x'_{xk}$ – вертикальні координати переміщення точок кріплення ковшів до стрічки $O_{p1}, O_{p2}, \dots, O_{pn}, O_{x1}, O_{x2}, \dots, O_{xk}$ на робочій та холостій гілках конвеєра; $\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \dots, \alpha_{pn}, \alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \dots, \alpha_{xk}$ – кутові координати повороту завантажених і розвантажених ковшів відносно точок їх кріплення $O_{p1}, O_{p2}, \dots, O_{pn}, O_{x1}, O_{x2}, \dots, O_{xk}$.

Стрічка конвеєра може бути представлена різними розрахунковими моделями, які розглядаються в роботах [49, 50]. Однією із найбільш розповсюджених та найпростіших моделей, яка наділена в'язко-пружними властивостями є реологічна модель Кельвіна-Фохта (рис. 4.25, а). Тому при моделюванні стрічки ківшового елеватора використана саме ця модель. В'язко-пружні властивості приводного механізму представлені реологічною моделлю Максвелла (рис. 4.25, б) [51, 52]. Дисипативний елемент, який входить до моделей Кельвіна-Фохта та Максвелла, на рис. 4.24 не показаний.

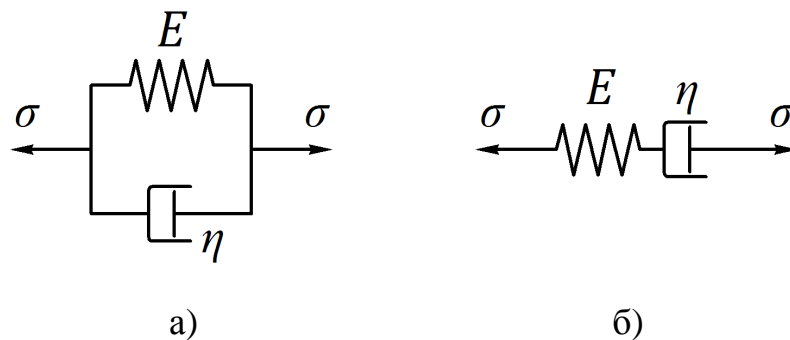


Рис. 4.25. Реологічні моделі: а) Кельвіна-Фохта; б) Максвелла

Для складання диференціальних рівнянь руху вертикального ківшового елеватора, представленого динамічною моделлю (рис. 4.24), використано рівняння Лагранжа другого роду, які записано у такому виді [2]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q_{xi} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, & i = 1, 2, \dots, n; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \phi_j} = Q_{\phi j} - \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_j}, & j = 1, 2, 3; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} = Q_{\alpha i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i}, & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4.52)$$

де t – час; T, Π – відповідно кінетична і потенціальна енергія системи; x_i, φ_i ($i=1, 2, \dots, n$) – узагальнені координати системи; Q_{x_i}, Q_{φ_i} ($i=1, 2, \dots, n$) – неконсервативні складові узагальнених сил, що відповідають цим координатам.

Визначивши часткові та повні похідні згідно системи рівнянь (4.52) і підставивши отримані похідні в цю систему, отримаємо систему нелінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned}
J_0 \ddot{\varphi}_0 &= M_p (\dot{\varphi}_0) - c_0 (\varphi_0 - \varphi_1) - \beta_0 (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1); \\
J_1 \ddot{\varphi}_1 &= c_0 (\varphi_0 - \varphi_1) + \beta_0 (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1) - c(\varphi_1 R_1 - x_{p1}) R_1 - \beta(\dot{\varphi}_1 R_1 - \dot{x}_{p1}) R_1 + \\
&+ c(x_{x1} - \varphi_1 R_1) R_1 + \beta(\dot{x}_{x1} - \dot{\varphi}_1 R_1) R_1; \\
m_p (\ddot{x}_{p1} - a_p \ddot{\alpha}_{p1}) &= c(\varphi_1 R_1 - x_{p1}) R_1 + \beta(\dot{\varphi}_1 R_1 - \dot{x}_{p1}) R_1 - c(x_{p1} - x_{p2}) - \\
&- \beta(\dot{x}_{p1} - \dot{x}_{p2}) - m_p g; \\
-m_p \ddot{x}_{p1} a_p + (J_p + m_p a_p^2) \ddot{\alpha}_{p1} &= m_p g a_p - c_\alpha \alpha_{p1}; \\
m_p (\ddot{x}_{p2} - a_p \ddot{\alpha}_{p2}) &= c(x_{p1} - x_{p2}) + \beta(\dot{x}_{p1} - \dot{x}_{p2}) - c(x_{p2} - x_{p3}) - \\
&- \beta(\dot{x}_{p2} - \dot{x}_{p3}) - m_p g; \\
-m_p \ddot{x}_{p2} a_p + (J_p + m_p a_p^2) \ddot{\alpha}_{p2} &= m_p g a_p - c_\alpha \alpha_{p2}; \\
&\dots\dots\dots \\
m_p (\ddot{x}_{pi} - a_p \ddot{\alpha}_{pi}) &= c(x_{pi-1} - x_{pi}) + \beta(\dot{x}_{pi-1} - \dot{x}_{pi}) - c(x_{pi} - x_{pi+1}) - \\
&- \beta(\dot{x}_{pi} - \dot{x}_{pi+1}) - m_p g; \\
-m_p \ddot{x}_{pi} a_p + (J_p + m_p a_p^2) \ddot{\alpha}_{pi} &= m_p g a_p - c_\alpha \alpha_{pi}; \\
&\dots\dots\dots \\
m_p (\ddot{x}_{pn-1} - a_p \ddot{\alpha}_{pn-1}) &= c(x_{pn-2} - x_{pn-1}) + \beta(\dot{x}_{pn-2} - \dot{x}_{pn-1}) - c(x_{pn-1} - x_{pn}) - \\
&- \beta(\dot{x}_{pn-1} - \dot{x}_{pn}) - m_p g; \\
-m_p \ddot{x}_{pn-1} a_p + (J_p + m_p a_p^2) \ddot{\alpha}_{pn-1} &= m_p g a_p - c_\alpha \alpha_{pn-1}; \\
m_p (\ddot{x}_{pn} - a_p \ddot{\alpha}_{pn}) &= c(x_{pn-1} - x_{pn}) + \beta(\dot{x}_{pn-1} - \dot{x}_{pn}) - c(x_{pn} - x_{pn+1}) - \\
&- \beta(\dot{x}_{pn} - \dot{x}_{pn+1}) - m_p g; \\
-m_p \ddot{x}_{pn} a_p + (J_p + m_p a_p^2) \ddot{\alpha}_{pn} &= m_p g a_p - c_\alpha \alpha_{pn};
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
J_2 \ddot{\phi}_2 &= c(x_{pn} - \phi_2 R_2) R_2 + \beta(\dot{x}_{pn} - \dot{\phi}_2 R_2) R_2 - c(\phi_2 R_2 - x_{xk}) R_2 - \\
&- \beta(\dot{\phi}_2 R_2 - \dot{x}_{xk}) R_2 - M_o(\dot{\phi}_2); \\
m_x(\ddot{x}_{xk} - a_x \ddot{\alpha}_{xk}) &= c(\phi_2 R_2 - x_{xk}) R_2 + \beta(\dot{\phi}_2 R_2 - \dot{x}_{xk}) R_2 - c(x_{xk} - x_{xk-1}) - \\
&- \beta(\dot{x}_{xk} - \dot{x}_{xk-1}) + m_x g; \\
-m_x \ddot{x}_{xk} a_x + (J_x + m_x a_x^2) \ddot{\alpha}_{xk} &= m_x g a_x - c_\alpha \alpha_{xk}; \\
m_x(\ddot{x}_{xk-1} - a_x \ddot{\alpha}_{xk-1}) &= c(x_{xk} - x_{xk-1}) + \beta(\dot{x}_{xk} - \dot{x}_{xk-1}) - c(x_{xk-1} - x_{xk-2}) - \\
&- \beta(\dot{x}_{xk-1} - \dot{x}_{xk-2}) + m_x g; \\
-m_x \ddot{x}_{xk-1} a_x + (J_x + m_x a_x^2) \ddot{\alpha}_{xk-1} &= m_x g a_x - c_\alpha \alpha_{xk-1}; \\
\text{.....} \\
m_x(\ddot{x}_{xj} - a_x \ddot{\alpha}_{xj}) &= c(x_{xj+1} - x_{xj}) R_2 + \beta(\dot{x}_{xj+1} - \dot{x}_{xj}) R_2 - c(x_{xj} - x_{xj-1}) - \\
&- \beta(\dot{x}_{xj} - \dot{x}_{xj-1}) + m_x g; \\
-m_x \ddot{x}_{xj} a_x + (J_x + m_x a_x^2) \ddot{\alpha}_{xj} &= m_x g a_x - c_\alpha \alpha_{xj}; \\
\text{.....} \\
m_x(\ddot{x}_{x1} - a_x \ddot{\alpha}_{x1}) &= c(x_{x2} - x_{x1}) R_2 + \beta(\dot{x}_{x2} - \dot{x}_{x1}) R_2 - c(x_{x1} - \phi_1 R_1) - \\
&- \beta(\dot{x}_{x1} - \dot{\phi}_1 R_1) + m_x g; \\
-m_x \ddot{x}_{x1} a_x + (J_x + m_x a_x^2) \ddot{\alpha}_{x1} &= m_x g a_x - c_\alpha \alpha_{x1}.
\end{aligned}$$

Нелінійність системи викликана нелінійністю механічної характеристики приводного асинхронного двигуна, яка залежить від кутової швидкості приводного вала і визначається за допомогою рівняння Клосса [7]. Враховуючи рівняння Клосса, рушійний момент приводного механізму, зведений до осі повороту приводного барабана, має вигляд:

$$M_p = \frac{2M_{\max}}{\frac{1 - \dot{\phi}_0 \cdot u / \omega_0}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{1 - \dot{\phi}_0 \cdot u / \omega_0}} \cdot u \cdot \eta, \quad (4.54)$$

де M_{\max} – максимальний момент на валу двигуна (береться з каталогу на електродвигуни); $\dot{\phi}_0$ – кутова швидкість приводного барабана; ω_0 – кутова швидкість ідеального холостого ходу електродвигуна; $s_{кр}$ – критичне

ковзання електродвигуна, яке відповідає максимальному моменту; u – передаточне число приводного механізму від двигуна до барабана; η – ККД приводного механізму. Момент сил опору переміщенню стрічки з ковшами та вантажем визначається залежністю:

$$M_o = F_{oz} R_3, \quad (4.55)$$

де R_3 – відстань від осі повороту барабана до кромки ковша, яка занурюється в сипкий матеріал; S_1, S_2 – кількість відповідно завантажених і порожніх ковшів; $F_{oz}(\dot{\phi}_2)$ – сила опору зачерпуванню сипкого матеріалу, яка залежить від кутової швидкості натяжного барабана і згідно [53] визначається залежністю:

$$F_{oz} = 1,1 \cdot m_{36} \cdot \dot{\phi}_2^2 \cdot R_2. \quad (4.56)$$

де m_{36} – маса зони випирання, яка виникає перед ковшем при зачерпуванні вантажу.

На основі системи диференціальних рівнянь (4.53) з урахуванням залежностей (4.55), (4.56), виконано моделювання процесу пуску норії із завантаженою робочою гілкою. Як приклад прийнято стрічковий ківшовий елеватор – Scandia SEI 35/14 012020-4.

Графіки процесу пуску завантаженого ківшового елеватора з врахуванням дисипативних властивостей системи і без, приведені на рис. 4.26-4.31. З отриманих графічних залежностей видно, що під час пуску елеватора, в його рухомих елементах виникають значні коливальні процеси. Такі коливання є наслідком нелінійної характеристики електродвигуна та пружних властивостей елементів конвеєра. Графіки на рис. 4.26-4.31 показують, що швидкості та прискорення рухомих елементів ківшового елеватора доволі різко зростають до певного номінального значення протягом 0,8 с і мають яскраво виражений коливальний характер.

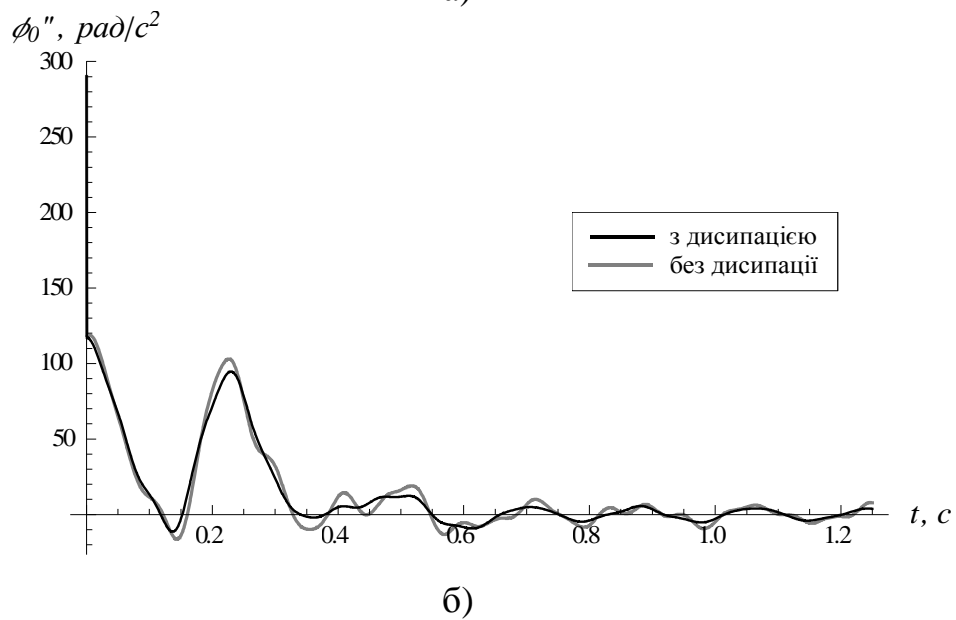
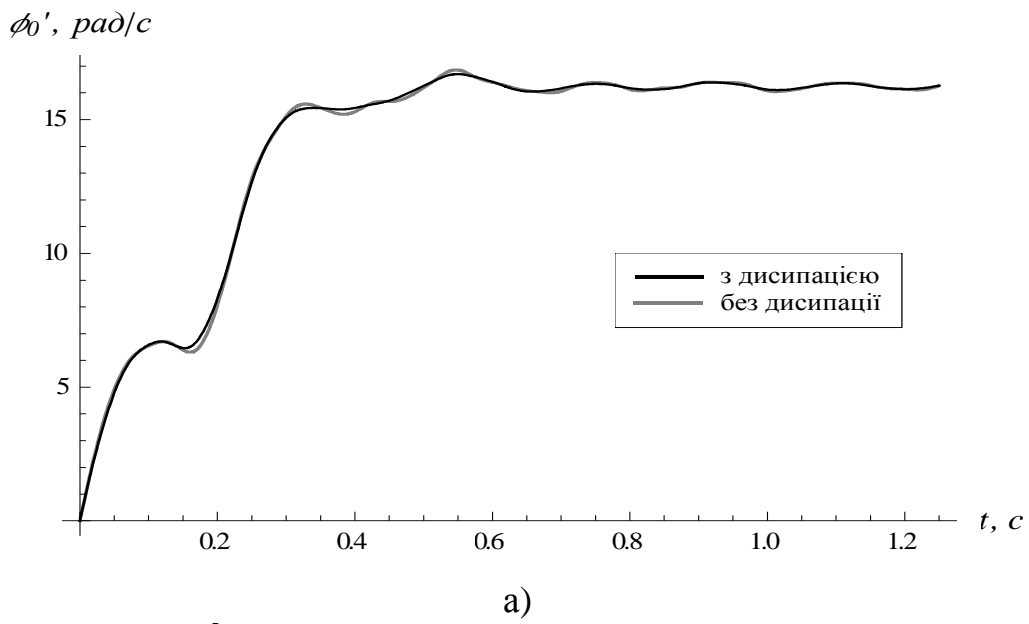
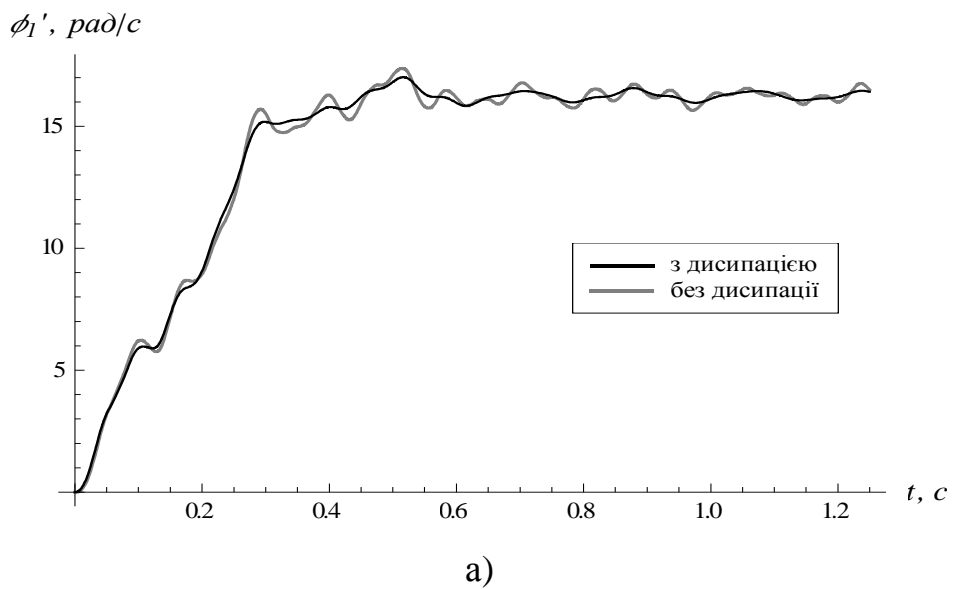
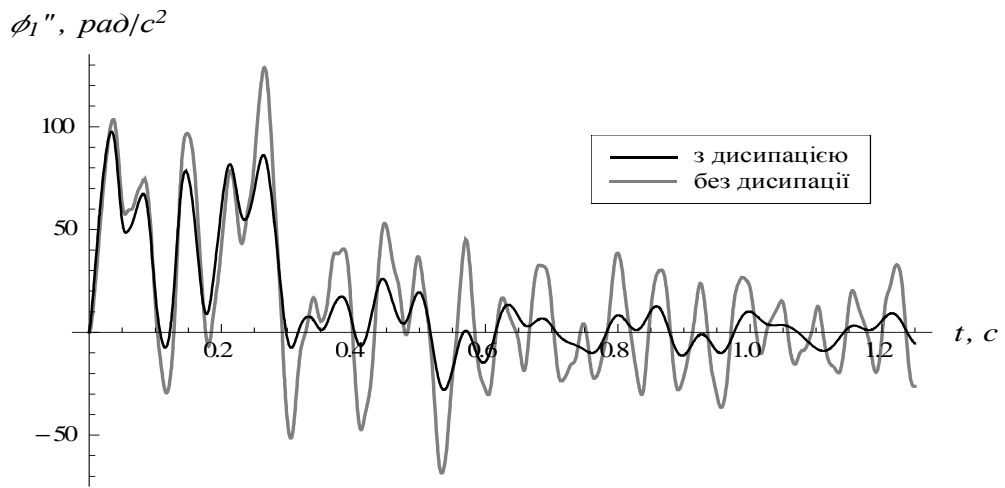


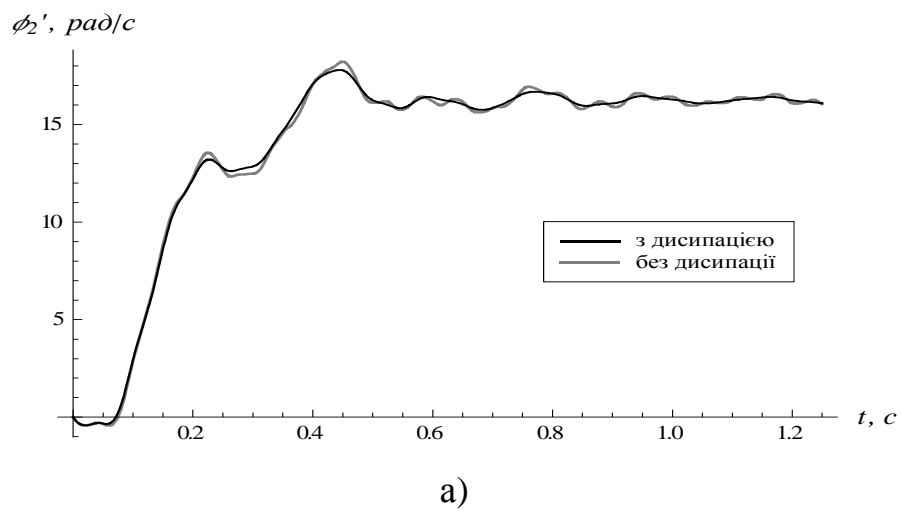
Рис. 4.26. Графіки зміни кутової швидкості (а) та кутового прискорення (б) приводного механізму



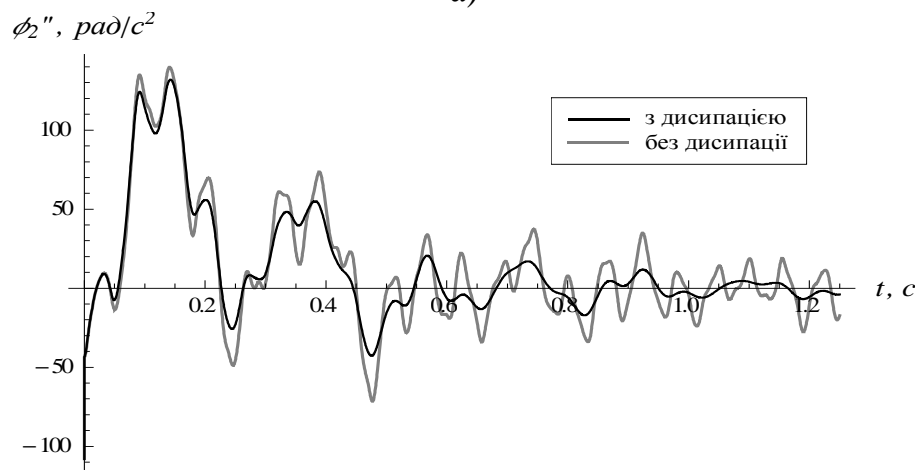


б)

Рис. 4.27. Графіки зміни кутової швидкості (а) та кутового прискорення (б) приводного барабана

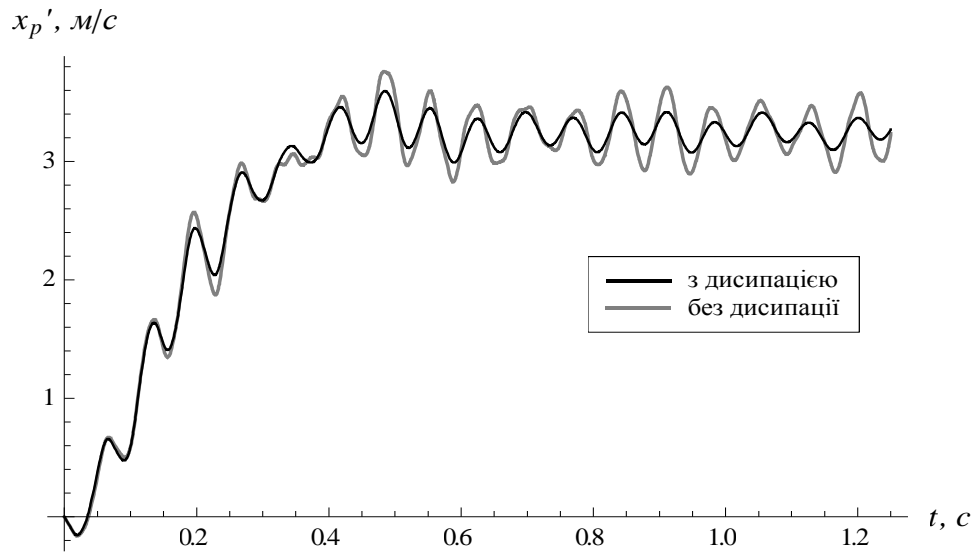


а)

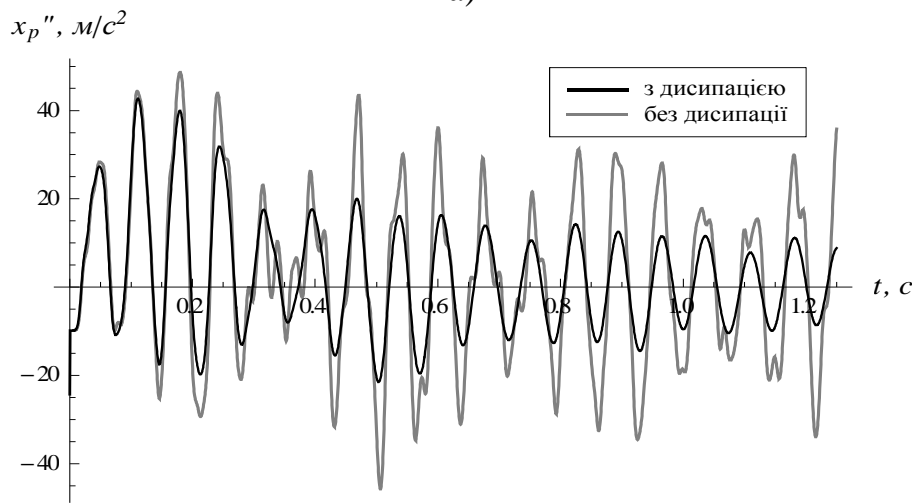


б)

Рис. 4.28. Графіки зміни кутової швидкості (а) та кутового прискорення (б) приводного барабана

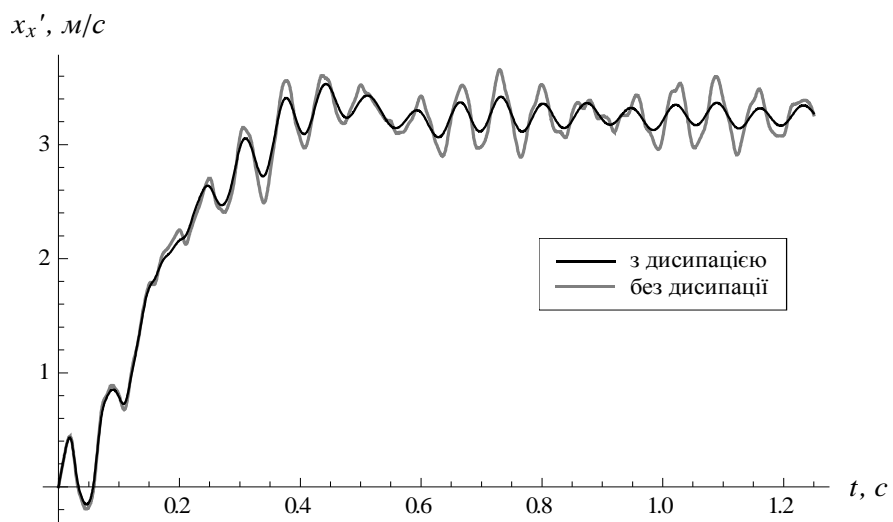


а)

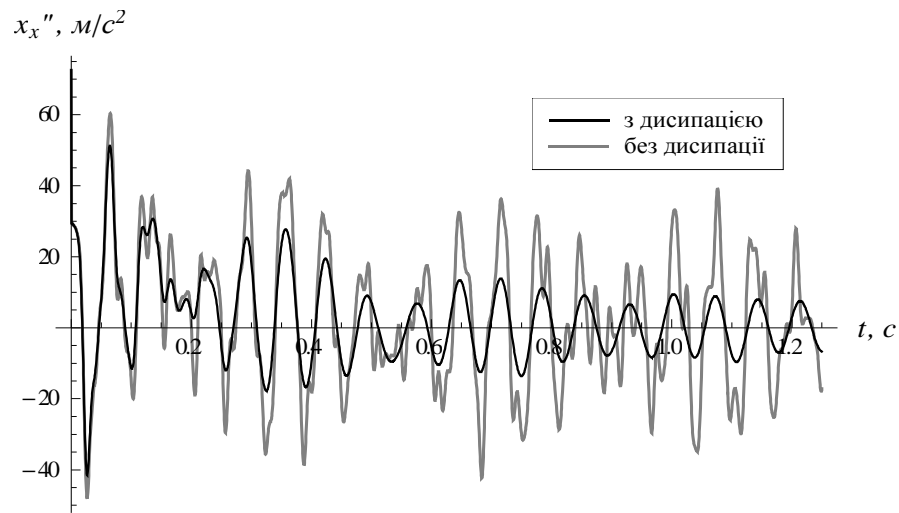


б)

Рис. 4.29. Графіки зміни швидкості (а) та прискорення (б) п'ятої маси на робочій гілці

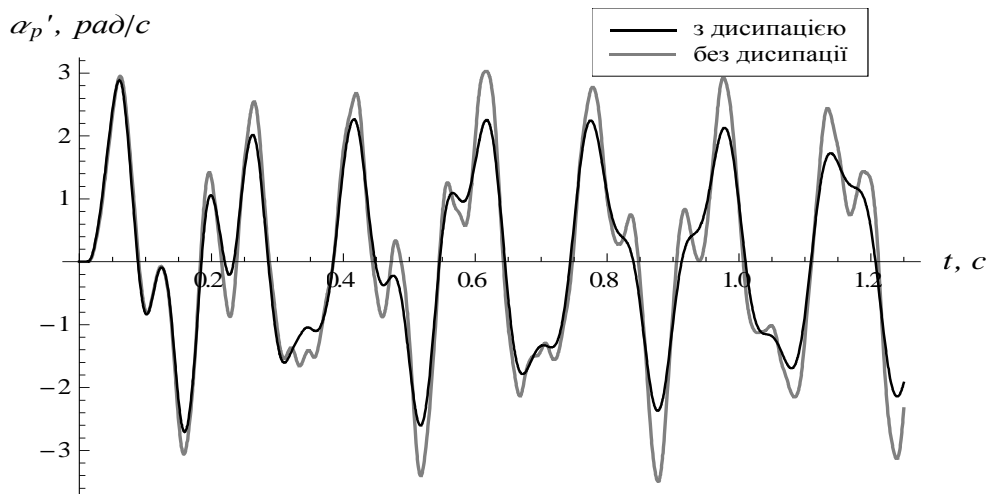


а)

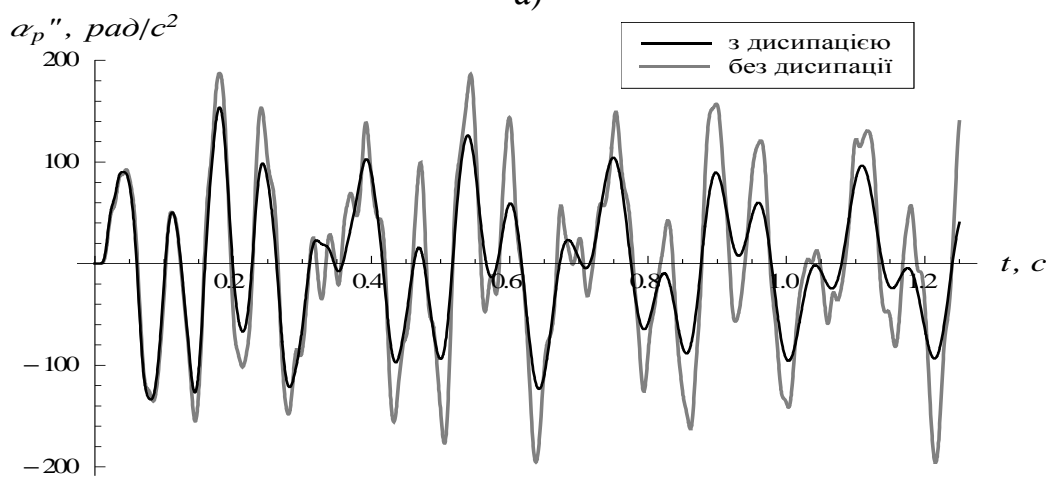


б)

Рис. 4.30. Графіки зміни швидкості (а) та прискорення (б) п'ятої маси на холостій гілці



а)



б)

Рис. 4.31. Графіки зміни кутової швидкості (а) та кутового прискорення (б) ковшів

Внаслідок того, що стрічка є пружним елементом, помітна відмінність в наростанні швидкості натяжного і приводного барабанів. З наведених результатів можна побачити, що коливання мас (для прикладу наведено лише п'яту масу), а отже, і стрічки, на робочій гілці мають більшу амплітуду, ніж маси на холостій гілці. З графіків на рис. 4.31 встановлено, що кутова швидкість ковшів має значну інтенсивність зміни як по величині, так і за напрямом дії. Крім того крутильні коливання ковшів, на відміну від їх лінійних коливань, практично не затухають протягом всього періоду роботи ківшового елеватора. Необхідно відмітити, що вплив дисипативних властивостей елементів ківшового елеватора має чітко виражений характер. З графіків видно, що при збереженні частоти коливань рухомих елементів конвеєра, спостерігається значне зменшення їх амплітуди, порівняно з системою, яка враховує тільки пружні властивості [54].

4.6. Динамічний аналіз руху мостового крана

4.6.1. Моделювання динаміки руху мостового крана

Для проведення дослідження використано приведену на рис. 4.32 розрахункову схему мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі [55].

При побудові схеми, приведеної на рис. 4.32, використані такі припущення [55]:

- не враховані зазори в приводі. Нехтування ударами між ланками приводу внаслідок зазорів у кінематичних парах приводить до зменшення максимальних динамічних навантажень на 2...5 %;
- сила опору переміщенню крана прийнята постійною ($W=\text{const}$);
- пробуксовування приводних коліс відсутнє;
- вважаємо, що візок знаходиться всередині прольоту моста;

- форма деформації моста при неусталеному режимі переміщення мостового крана приймається подібною статичній деформації при дії на нього сили в середині прольоту.

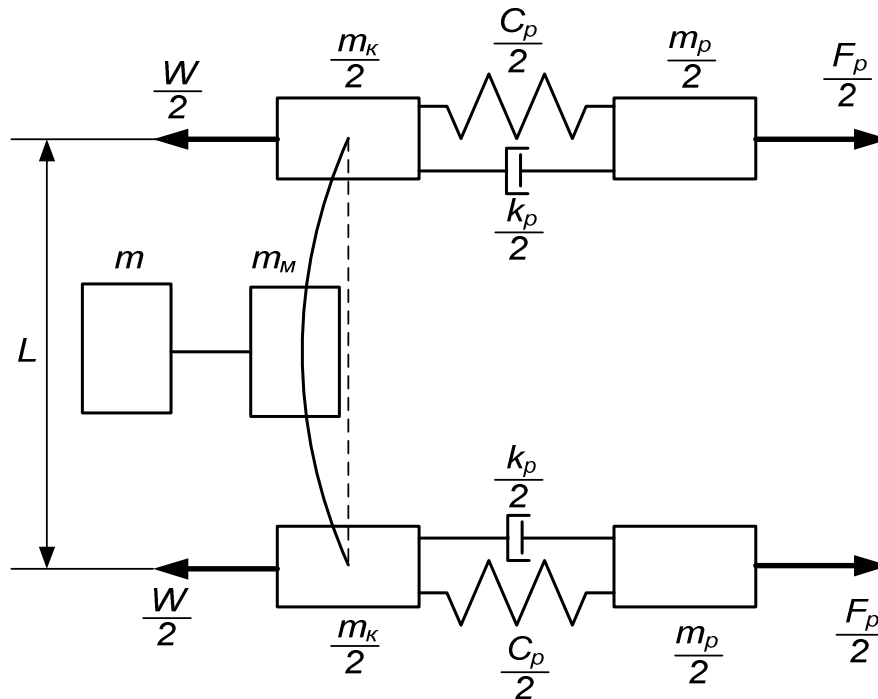


Рис. 4.32. Розрахункова схема мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі

Розрахункова схема (рис. 4.32) не зручна для проведення динамічного аналізу. Тому перейдемо від неї до іншої схеми, яку будемо використовувати для виведення математичної моделі динаміки руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі. Для цього маси двох приводних механізмів замінюємо однією масою: $\frac{m_p}{2} + \frac{m_p}{2} = m_p$; маси двох кінцевих балок заміняємо однією масою: $\frac{m_k}{2} + \frac{m_k}{2} = m_k$; масу моста m'_i разом з масою візка m_a заміняємо однією масою: $m'_m + m_a = m_m$; жорсткості приводних механізмів заміняємо однією жорсткістю $\frac{c_p}{2} + \frac{c_p}{2} = c_p$; жорсткість моста c_m характеризується пружною піддатливістю моста в горизонтальній площині; коефіцієнти демпфування приводу заміняємо одним коефіцієнтом $\frac{k_p}{2} + \frac{k_p}{2} = k_p$;

коефіцієнт демпфування металоконструкції в горизонтальній площині k_m характеризується силами в'язкого тертя, що викликають затухання її коливань; рушійні сили двох приводних механізмів $\frac{F_p}{2}$ заміняємо однією силою: $\frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2} = F_p$; приведені до поступального руху маси приводних механізмів заміняємо на одну масу:

$$\frac{m_p}{2} + \frac{m_p}{2} = m_p = 1,15 \cdot 2 \cdot J_p \frac{u^2}{r_{кол}^2}, \quad (4.57)$$

де J_p - момент інерції ротора і гальмівного шківів з муфтою одного приводного механізму; u - передаточне число приводу; $r_{кол}$ - радіус приводного колеса; 1,15 – коефіцієнт, що враховує інерційність інших частин механізму переміщення крана, які обертаються з кутовою швидкістю меншою, ніж кутова швидкість двигуна.

В результаті перетворень наведеної вище схеми (рис. 4.32) отримано чотиримасову динамічну модель руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі (рис. 4.33).

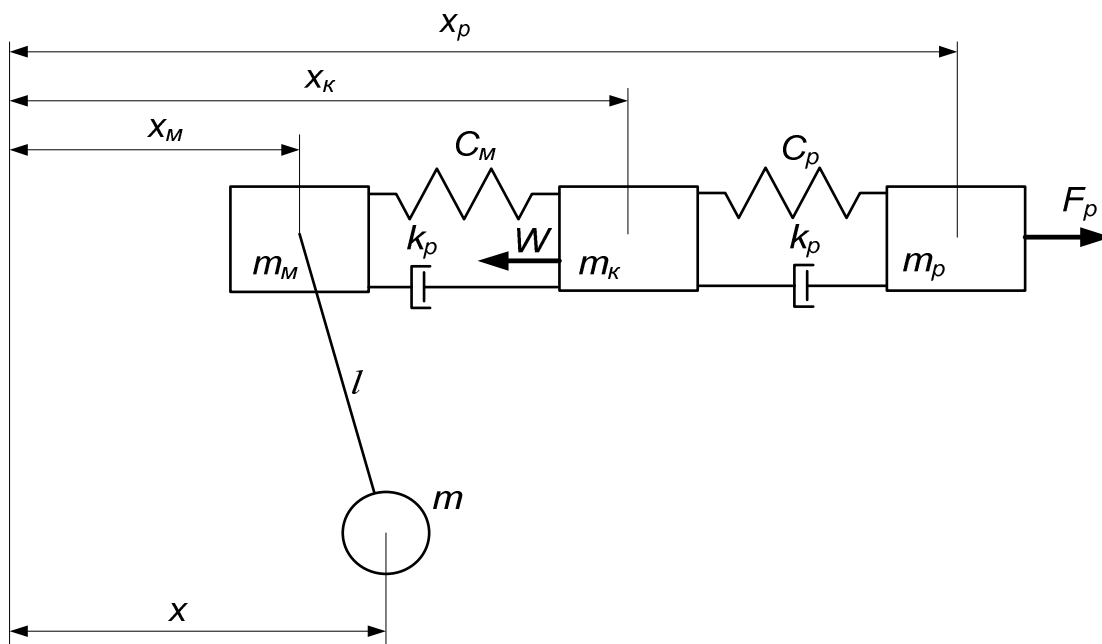


Рис. 4.33. Чотиримасова динамічна модель руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі

Приведена на рис. 4.33 модель динаміки руху мостового крана описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_p \ddot{x}_p = F_p - c_p(x_p - x_k) - k_p(\dot{x}_p - \dot{x}_k); \\ m_k \ddot{x}_k = c_p(x_p - x_k) + k_p(\dot{x}_p - \dot{x}_k) - c_m(x_k - x_m) - k_m(\dot{x}_k - \dot{x}_m) - W \text{sign}(\dot{x}_k); \\ m_m \ddot{x}_m = c_m(x_k - x_m) + k_m(\dot{x}_k - \dot{x}_m) - \frac{mg}{l}(x_m - x); \\ \ddot{x} = \frac{g}{l}(x_m - x), \end{cases} \quad (4.58)$$

де W - опір переміщенню мостового крана прикладений до коліс кінцевих балок; l - довжина гнучкого підвісу вантажу; g - прискорення вільного падіння. Крапка над символом означає диференціювання.

4.6.2. Модель асинхронного електроприводу

Існує два представлення диференціальних рівнянь асинхронного двигуна: у нерухомій та рухомій (відносно статора) системах координат. Для першого випадку система диференціальних рівнянь асинхронного двигуна характеризується наявністю змінних (періодичних) коефіцієнтів, що обумовлені зміною взаємної індуктивності між обмотками статора та обертового ротора [56]:

$$\begin{cases} \frac{di_{1\alpha}}{dt} = \frac{1}{\delta L_1} (u_{1\alpha} - i_{1\alpha} R_1 + k_r e_{2\alpha}); \\ \frac{di_{1\beta}}{dt} = \frac{1}{\delta L_1} (u_{1\beta} - i_{1\beta} R_1 - k_r e_{2\beta}); \\ \frac{di_{2\alpha}}{dt} = -\frac{1}{\delta L_2} ((u_{1\alpha} - i_{1\alpha} R_1) k_s + e_{2\alpha}); \\ \frac{di_{2\beta}}{dt} = -\frac{1}{\delta L_2} ((u_{1\beta} - i_{1\beta} R_1) k_s - e_{2\beta}); \\ M = \frac{3}{2} p L_{12} (i_{1\beta} i_{2\alpha} - i_{1\alpha} i_{2\beta}), \end{cases} \quad (4.59)$$

де $i_{1\alpha}$, $i_{1\beta}$ - проекції узагальненого вектора струму статора на нерухомі ортогональні координатні осі α і β ; $i_{2\alpha}$, $i_{2\beta}$ - проекції узагальненого вектора

струму ротора на координатні осі α і β ; L_1, L_2 - індуктивності статорної та роторної обмоток; L_{12} - взаємоіндукція; k_r і k_s - коефіцієнти магнітного зв'язку ротора та статора відповідно ($k_r = \frac{L_{12}}{L_2}$; $k_s = \frac{L_{12}}{L_1}$); M - електромагнітний момент двигуна; p - кількість пар полюсів електричної машини; $u_{1\alpha}, u_{1\beta}$ - проекції узагальненого вектора напруги статора на координатні осі α і β ($u_{1\alpha} = U_{\max} \cos(2\pi \int f dt)$, $u_{1\beta} = U_{\max} \sin(2\pi \int f dt)$); U_{\max} - амплітуда фазної напруги живлення двигуна; f - частота напруги живлення двигуна; $e_{2\beta}, e_{2\alpha}$ - ЕРС, що індукуються потокозчепленнями ротора по осях α і β відповідно ($e_{2\alpha} = p\omega_{\partial\theta}(L_2 i_{2\beta} + L_{12} i_{1\beta}) + i_{2\alpha} R_2$), $e_{2\beta} = p\omega_{\partial\theta}(L_2 i_{2\alpha} + L_{12} i_{1\alpha}) + i_{2\beta} R_2$); R_1 - активний опір статорної обмотки; R_2 - приведений до статора активний опір роторної обмотки; δ - коефіцієнт розсіювання ($\delta = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{X_1}{2\pi f L_{12}}\right) \left(1 + \frac{X_2}{2\pi f L_{12}}\right)}$); X_1 - індуктивний опір статорної обмотки;

X_2 - приведений до статора індуктивний опір роторної обмотки.

Для випадку гальмування противмиканням двигуна амплітуда та частота напруги живлення представлені такими виразами:

$$U_{\max}^{z.n.v.} = \begin{cases} U_{\max}, & \text{при } t \in [0, T_{\text{рух}}]; \\ 0, & \text{при } t \in [T_{\text{рух}}, T_{\text{рух}} + 10], \end{cases} \quad (4.60)$$

$$f_{U_{\text{живл}}}^{z.n.v.} = \begin{cases} f_{\text{ном}}, & \text{при } t \in [0, t_{\text{гальм}}]; \\ -f_{\text{ном}}, & \text{при } t \in [t_{\text{гальм}}, T_{\text{рух}}]; \\ 0, & \text{при } t \in [T_{\text{рух}}, T_{\text{рух}} + 10], \end{cases} \quad (4.61)$$

де $U_{\max}^{z.n.v.}$ - амплітуда напруги живлення приводних двигунів для випадку гальмування противмиканням; $f_{U_{\text{живл}}}^{z.n.v.}$ - частота напруги живлення приводних двигунів в режимі гальмування противмиканням; $f_{\text{ном}}$ - номінальна частота мережі живлення ($f_{\text{ном}} = 50$ Гц); $t_{\text{гальм}}$ - момент початку гальмування крана (у даному дослідженні прийнято $t_{\text{гальм}} = 20$ секунд); $T_{\text{рух}}$ -

тривалість цикла руху мостового крана. Тривалість моделювання роботи крана на десять секунд більша за тривалість цикла руху мостового крана. Це необхідно для того, щоб оцінити залишкові коливання елементів крана.

Крім математичної моделі (4.59) для опису роботи асинхронного двигуна використана статична механічна характеристика, яка відома під назвою рівняння Клосса [7]:

$$M = \frac{2M_{\max} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} s_{кр} \right)}{\frac{s}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{s} + 2 \frac{R_1}{R_2} s_{кр}}, \quad (4.62)$$

де $s_{кр}$ – критичне ковзання двигуна ($s_{кр} = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2}}$); s – поточне ковзання двигуна ($s = \frac{\omega_0 - \omega_{де}}{\omega_0}$); M_{\max} – максимальний момент двигуна ($M_{\max} = \lambda M_{ном}$).

При гальмуванні противмиканням параметри у рівнянні (4.62) змінюються так:

$$M_{\max} = \begin{cases} \lambda M_{ном}, & \text{при } t \in [0, t_{гальм}]; \\ -\lambda M_{ном}, & \text{при } t \in [t_{гальм}, T_{рух}]; \\ 0, & \text{при } t \in [T_{рух}, T_{рух} + 10], \end{cases} \quad (4.62)$$

$$\omega_0 = \begin{cases} \frac{2\pi f}{p}, & \text{при } t \in [0, t_{гальм}]; \\ -\frac{2\pi f}{p}, & \text{при } t \in [t_{гальм}, T_{рух}]; \\ 0, & \text{при } t \in [T_{рух}, T_{рух} + 10], \end{cases} \quad (4.63)$$

де λ – перевантажувальна здатність двигуна; $M_{ном}$ – номінальний момент двигуна ($M_{ном} = \frac{P_{ном}}{\omega_{ном}}$); $P_{ном}$ – номінальна потужність двигуна; $\omega_{ном}$ – номінальна кутова швидкість двигуна.

4.6.3. Математична модель механізму переміщення мостового крана із асинхронним електроприводом

Отримавши математичні моделі руху мостового крана та його асинхронного електроприводу, остаточно запишемо узагальнену математичну модель динаміки руху крана із асинхронним приводом для механічних характеристик приводних двигунів: динамічної

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{1\alpha}}{dt} = \frac{1}{\delta L_1} (u_{1\alpha} - i_{1\alpha} R_1 + k_r e_{2\alpha}); \\ \frac{di_{1\beta}}{dt} = \frac{1}{\delta L_1} (u_{1\beta} - i_{1\beta} R_1 - k_r e_{2\beta}); \\ \frac{di_{2\alpha}}{dt} = -\frac{1}{\delta L_2} ((u_{1\alpha} - i_{1\alpha} R_1) k_s + e_{2\alpha}); \\ \frac{di_{2\beta}}{dt} = -\frac{1}{\delta L_2} ((u_{1\beta} - i_{1\beta} R_1) k_s - e_{2\beta}); \\ 3pL_{12} (i_{1\beta} i_{2\alpha} - i_{1\alpha} i_{2\beta}) \frac{u\eta_{nep}}{r_{кол}} = m_p \ddot{x}_p + c_p (x_p - x_k) + k_p (\dot{x}_p - \dot{x}_k); \\ m_k \ddot{x}_k = c_p (x_p - x_k) + k_p (\dot{x}_p - \dot{x}_k) - c_m (x_k - x_m) - k_m (\dot{x}_k - \dot{x}_m) - Wsign(\dot{x}_k); \\ m_m \ddot{x}_m = c_m (x_k - x_m) + k_m (\dot{x}_k - \dot{x}_m) - \frac{mg}{l} (x_m - x); \\ \ddot{x} = \frac{g}{l} (x_m - x) \end{array} \right. \quad (4.64)$$

та статичної

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{2M_{\max} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} s_{kp} \right)}{\frac{s}{s_{kp}} + \frac{s_{kp}}{s} + 2 \frac{R_1}{R_2} s_{kp}} \frac{u\eta_{nep}}{r_{кол}} = m_p \ddot{x}_p + c_p (x_p - x_k) + k_p (\dot{x}_p - \dot{x}_k); \\ m_k \ddot{x}_k = c_p (x_p - x_k) + k_p (\dot{x}_p - \dot{x}_k) - c_m (x_k - x_m) - k_m (\dot{x}_k - \dot{x}_m) - Wsign(\dot{x}_k); \\ m_m \ddot{x}_m = c_m (x_k - x_m) + k_m (\dot{x}_k - \dot{x}_m) - \frac{mg}{l} (x_m - x); \\ \ddot{x} = \frac{g}{l} (x_m - x), \end{array} \right. \quad (4.65)$$

де η_{nep} – ККД передач приводу крана.

Приймаємо, що початковими умовами для руху крана для системи рівнянь (4.58) є нульові (розглядається рух крана зі стану спокою):

$$i_{1\alpha}(0)=i_{1\beta}(0)=i_{2\alpha}(0)=i_{2\beta}(0)=x_p(0)=\dot{x}_p(0)=x_k(0)=\dot{x}_k(0)=x_m(0)=\dot{x}_m(0)=x(0)=\dot{x}(0)=0. \quad (4.66)$$

Нульові значення струмів означають, що будь-які електромагнітні процеси у електричних двигунах на початку руху відсутні. Для чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь (4.65) використані початкові умови (4.66) з п'ятої по дванадцяту.

Моделювання пуску та гальмування крана виконано на природній механічній характеристиці приводних двигунів, що означає закорочення роторних реостатів.

Коефіцієнти, які входять у системи диференціальних рівнянь (4.64) та (4.65) визначаються виходячи з параметрів механізму переміщення крана та прийнятих при моделюванні значень довжини гнучкого підвісу вантажу та маси вантажу. Подальший аналіз виконаний для мостового крана, динамічні розрахунки якого приведені у роботі [55]. Коефіцієнти демпфування розраховувались згідно методики, яка наведена у роботі [57].

Обидві задачі Коші (4.64)-(4.66) та (4.64)-(4.66) не можуть бути розв'язані у аналітичному вигляді, оскільки рівняння, що описують електропривод, є нелінійними. Для системи рівнянь (4.64) задача їх інтегрування ускладнюється змінними у часі коефіцієнтами, які входять у (4.64). Тому для інтегрування диференціальних рівнянь було використано чисельний метод Рунге-Кутта [58].

4.6.3. Аналіз руху мостового крана

Проведемо аналіз циклу переміщення мостового крана за різноманітними показниками за умови, що приводний двигун працює на природній динамічній механічній характеристиці (ПДМХ), а гальмування

здійснюється у режимі противмикання, при цьому швидкість ідеального холостого ходу змінює свій знак на протилежний у момент початку гальмування. У таблиці 4.1 наведені розраховані показники для даного режиму руху мостового крана при різних значеннях довжини гнучкого підвісу вантажу.

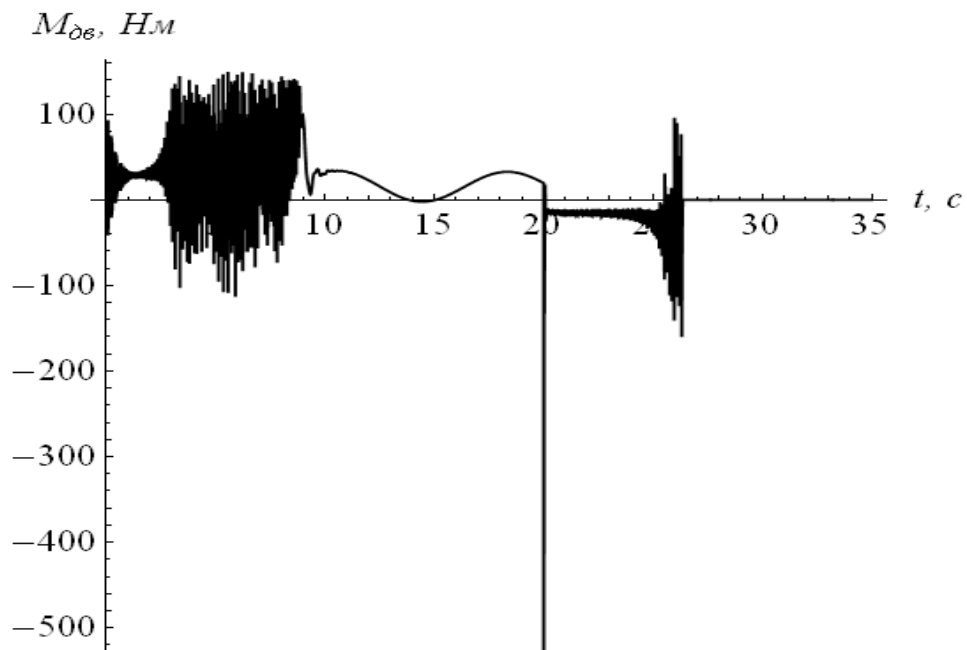
Таблиця 4.1

Показники динаміки руху мостового крана при роботі кранових двигунів на ПДМХ та гальмуванні у режимі противмикання

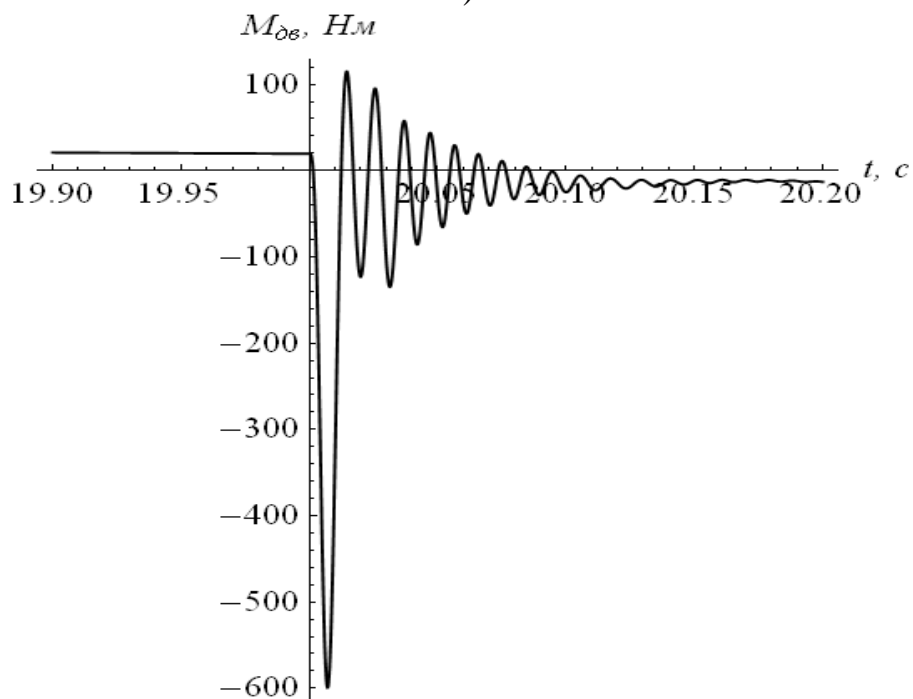
	ДОВЖИНА ГНУЧКОГО ПІДВІСУ ВАНТАЖУ		
	3 м	8 м	15 м
Максимальний момент на швидкохідному валу привода $M_{л.мах}$, Нм	1268	1262	1172
Максимальне приведенне зусилля у мості $R_{л.мах}$, Н	72517	68224	66712
Максимальне відхилення каната з вантажем від вертикалі, $\Delta x_{мах}$, м	0,216	0,413	0,883
Максимальний кут відхилення каната з вантажем від вертикалі, $\Delta \varphi_{мах}$, град	4,104	2,907	3,306
Тривалість розгону, $t_{розг}$, с	9,53	9,35	9,00
Тривалість гальмування, $t_{гальм}$, с	5,59	5,28	5,92

Відомо [7], що у перехідних режимах руху електроприводу на його валу виникають значні крутні моменти, які викликані в основному дією вільних складових струмів. У даному дослідженні розрахована величина максимального моменту на валу двигуна, яка у 10,43 разів перевищує його номінальний момент. На рис. 4.34 показано графік зміни електромагнітного моменту приводного двигуна.

Пікові значення моменту додатково навантажують приводний механізм та можуть викликати поломку зубчастих передач, валів та муфт. Від'ємні значення моментів означають, що двигун періодично переходить у режим гальмування. Із рис. 4.34, б видно, що під час гальмування знак електромагнітного моменту двигуна змінюється і двигун загальмовує кран.



a)



б)

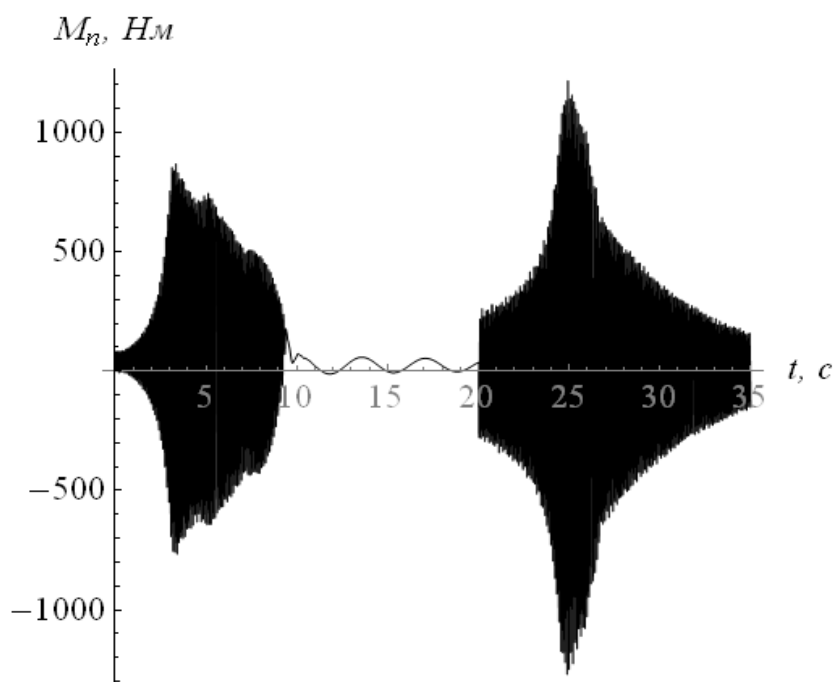
Рис. 4.34. Графік зміни електромагнітного моменту двигуна: а) протягом усього циклу переміщення; б) у околі моменту початку гальмування

Відхилення вантажу у напрямку руху крана зумовлює зменшення крутного моменту і струму двигуна (вантаж ніби „тягне” за собою кран) і навпаки: відхилення вантажу проти руху крана збільшує крутний момент та струм двигуна.

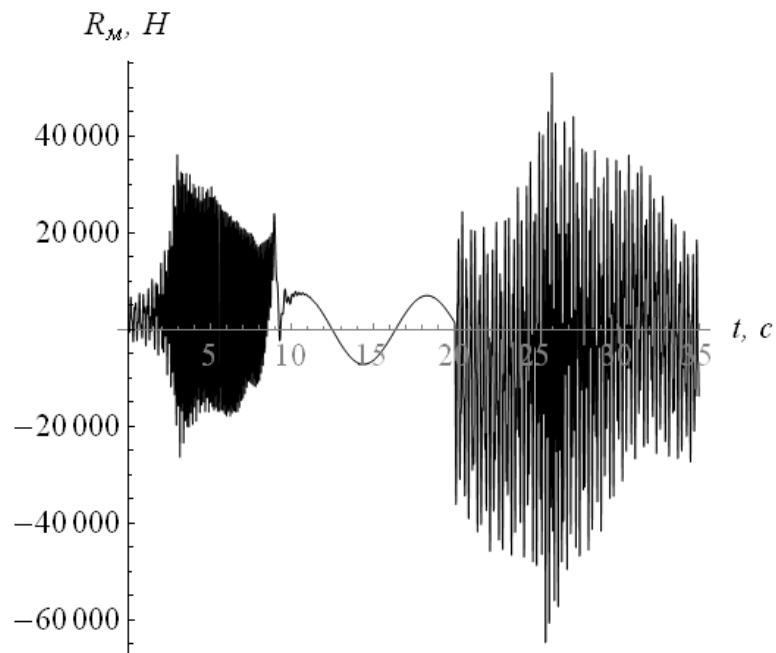
Величина $M_{n.\max}$ слабо корелює із величиною довжини гнучкого підвісу.

Для аналізу моменту на швидкохідному валу приводу та зусилля, що діє на міст крана у горизонтальній площині, приведемо їх графіки для випадку найбільших значень $M_{n.\max}$ та $R_{m.\max}$ (рис. 4.35). Із графіків на рис. 4.35 видно, що найбільш небезпечним режимом для приводу та моста крана є гальмування у режимі противмикання.

Динамічні показники, що приведені на рис. 4.35, мають коливний характер, причому можна виокремити як мінімум дві гармоніки коливань: низькочастотну, причиною якої є коливання вантажу відносно точки його закріплення та високочастотну, що викликана коливаннями елементів металоконструкції і приводу. Остання досить швидко затухає і в кінці перехідного процесу вона відсутня. Зазначимо, що максимальне значення зусилля та крутного моменту виникають у режимі гальмування противмиканням, отже необхідно уникати такий вид гальмування, оскільки при цьому виникає небезпека передчасного виходу з ладу елементів крана. Із аналізу величин $M_{n.\max}$ та $R_{m.\max}$ випливає, що вони мають слабку кореляцію з довжиною гнучкого підвісу.



а)



б)

Рис. 4.35. Графіки динамічних показників руху крана: а) момент на швидкохідному валу приводу ; б) приведенне зусилля, що діє на міст крана

Таким чином, ключові показники динаміки руху крана (табл. 4.1) слабо корелюють із довжиною гнучкого підвісу або взагалі не корелюють з нею. Звідси можна зробити висновок: показники, за якими здійснюється оцінка руху мостового крана, повинні залежати від інших параметрів, зокрема від характеру зовнішнього збурення.

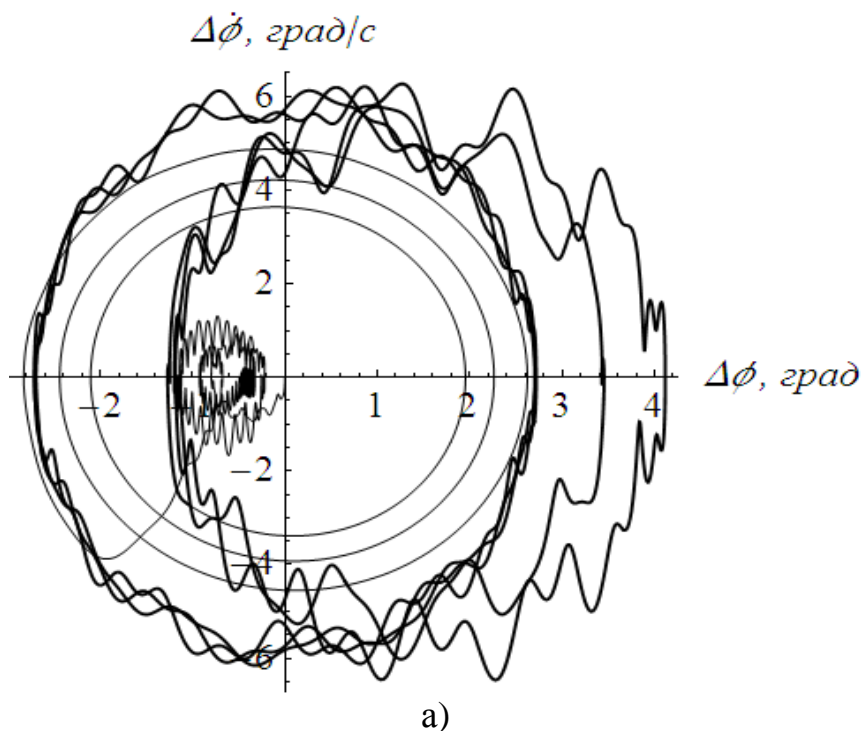
Розглянемо питання виникнення та еволюції коливань вантажу закріпленого на гнучкому підвісі. Для цього побудуємо фазові портрети коливань вантажу (рис. 4.36). На рис. 4.36 товстою лінією показано фазовий портрет коливань, які виникають після моменту гальмування крана (момент зміни чергування фаз мережі живлення).

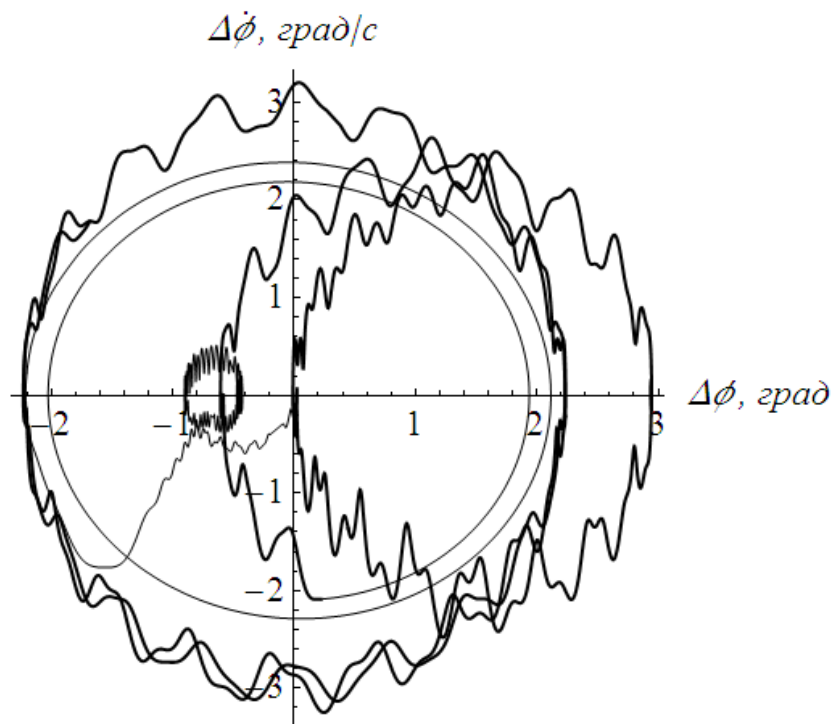
Загалом фазові траєкторії коливань вантажу на гнучкому підвісі, які показані на рис. 4.36, складаються із чотирьох ділянок:

- 1) ділянка з початку руху моста і до моменту досягнення номінальної швидкості. При цьому збільшується енергія коливань від нульового до максимального значення. На рис. 4.36 ця ділянка фазової траєкторії

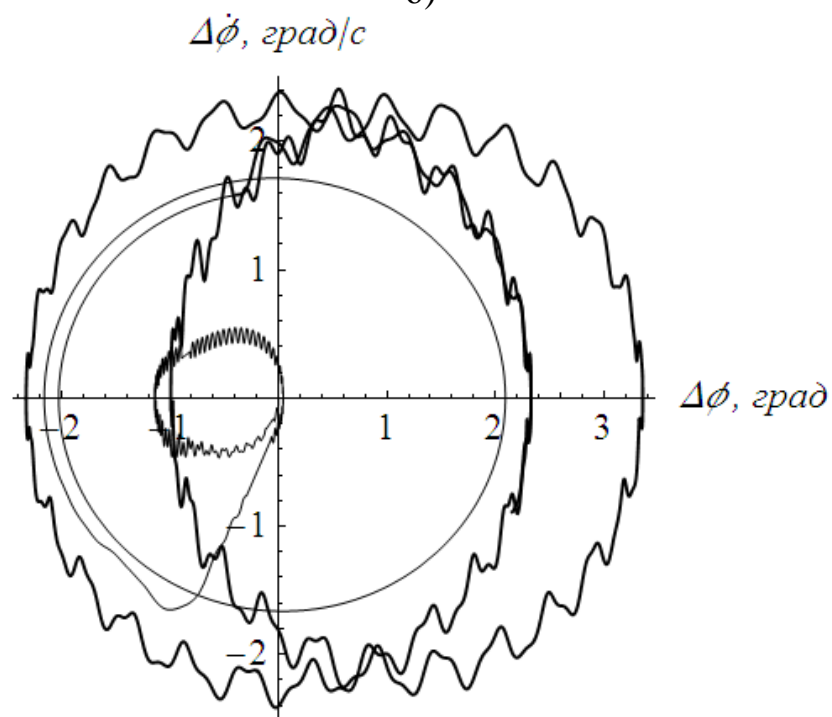
показана тонкою лінією, яка виходить із початку координат та закінчується виходом на „спіраль”;

- 2) ділянка руху крана на швидкості близькій до номінальної, що супроводжується коливаннями вантажу із значною амплітудою, яка з часом повільно згасає (проявляється демпфуюча здатність приводу). Фазова траєкторія показана тонкою лінією, яка має форму спіралі, що поступово „зтягується” до початку координат;
- 3) ділянка гальмування на якій амплітуда коливань змінюється: вона може зростати або навпаки зменшуватись, в залежності від того, якою була фаза коливань у момент початку гальмування. На рис. 4.36 ця ділянка фазової траєкторії показана товстою лінією, яка бере свій початок із тонкої лінії та закінчується граничним циклом коливань;
- 4) граничний цикл коливань (після зупинки моста), який характеризується тим, що енергія коливань залишається майже незмінною і коливання вантажу продовжуються. На рис. 4.36 це товста лінія.





б)



в)

Рис. 4.36. Фазові портрети коливань вантажу на гнучкому підвісі при його довжині: а) 3 метри; б) 8 метрів; в) 15 метрів

Саме остання ділянка цікава з точки зору забезпечення точності позиціонування вантажу. Із рис. 4.36 видно, що залишкові коливання вантажу присутні для всіх розглянутих випадків довжини гнучкого підвісу вантажу.

Приведемо графіки зміни швидкості моста крана. Це дасть змогу наглядно оцінити характер його руху (рис. 4.37).

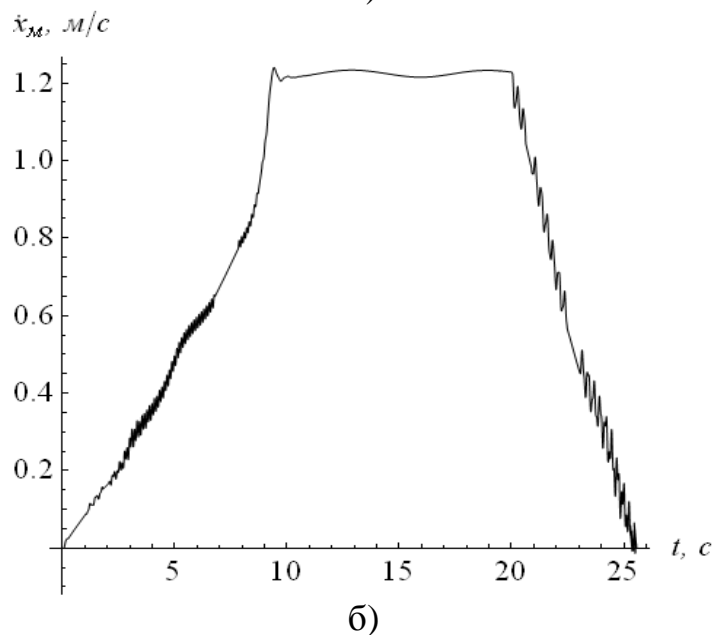
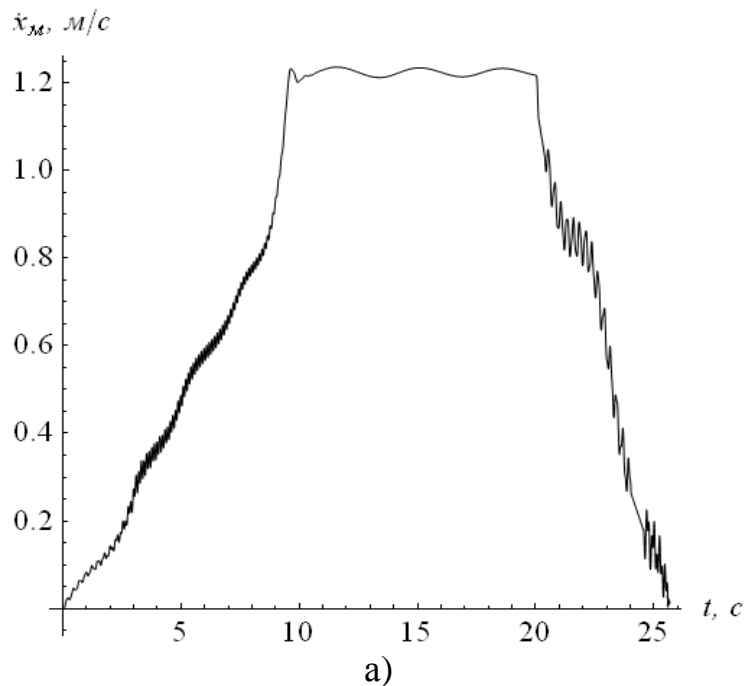


Рис. 4.37. Графіки зміни швидкості моста крана: а) при найбільшій тривалості розгону; б) при найбільшій тривалості гальмування

Із приведених на рис. 4.37 графіків видно, що швидкість руху моста має коливний характер, причому чітко видно дві гармоніки коливань: перша спричинена низькочастотними коливаннями вантажу відносно точки його закріплення, а друга – електромагнітними процесами у приводному двигуні,

які впливають на високочастотні коливання у приводному механізмі та мості крана.

Значення тривалостей перехідних процесів мало відрізняються одна від одної. Також відсутні які-небудь закономірності між зміною тривалостей перехідних процесів і довжиною гнучкого підвісу вантажу. Тому можна зробити висновок про відсутність кореляції між вказаними показниками.

Для того, щоб оцінити рух крана, модель якого представлена системою диференціальних рівнянь (4.65), зведемо всі розраховані показники у таблицю 4.2. Нагадаємо, що у даному випадку при моделюванні динаміки руху крана використовувалась природна статична механічна характеристика (ПСМХ) приводних двигунів.

Динамічні показники у табл. 4.2 менші, ніж аналогічні у табл. 4.1. Звідси можна зробити висновок, що силові розрахунки моста крана та швидкохідного валу приводу необхідно виконувати, використовуючи ПДМХ.

Кінематичні показники у табл. 4.1 та 4.2 не збігаються. Оскільки точність розрахунків із використанням математичної моделі (4.64) є вищою, то доцільно використовувати саме її для аналізу кінематичних показників.

Таблиця 4.2

Показники динаміки руху мостового крана при роботі кранових двигунів на ПСМХ та гальмуванні у режимі противмикання

	ДОВЖИНА ГНУЧКОГО ПІДВІСУ ВАНТАЖУ		
	3 м	8 м	15 м
Максимальний момент на швидкохідному валу привода $M_{п.мах}$, Нм	871	877	943
Максимальне приведенне зусилля у мості $R_{м.мах}$, Н	43066	41752	51464
Максимальне відхилення каната з вантажем від вертикалі, $\Delta x_{мах}$, м	0,276	0,417	0,837
Максимальний кут відхилення каната з вантажем від вертикалі, $\Delta \varphi_{мах}$, град	5,244	2,964	3,192
Тривалість розгону, $t_{розг}$, с	9,42	9,44	8,97
Тривалість гальмування, $t_{гальм}$, с	5,89	5,58	6,48

Показники $t_{\text{розг}}$ та $t_{\text{гальм}}$ у табл. 4.1 та табл. 4.2 відрізняються не значно. Для унаочнення різниці у тривалостях перехідних процесів руху крана із вантажем на гнучкому підвісі приведемо графіки функцій зміни швидкості моста крана для всього циклу його руху (рис. 4.38). Сірим кольором показано графік зміни швидкості моста, який побудований при врахуванні ПСМХ.

Майже за всіма, запропонованими у даній роботі, показниками використання ПСМХ є недоцільним, оскільки при цьому не враховуються електромагнітні процеси, які відбуваються у приводних двигунах, які значно впливають на динаміку руху мостового крана [59].

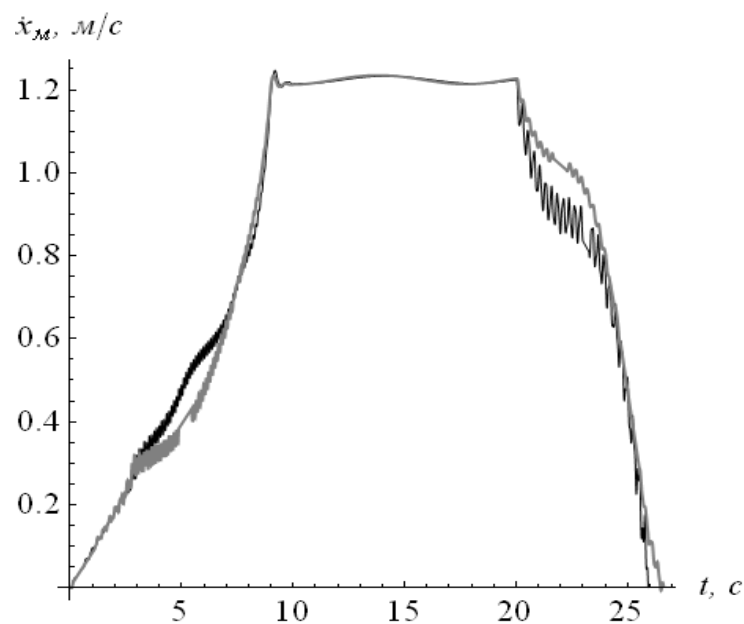


Рис. 4.38. Графіки зміни швидкості моста побудовані із використанням математичних моделей динаміки руху мостового крана (4.64) та (4.65)

4.7. Питання та завдання для самоперевірки

1. Якими параметрами характеризується дисипація енергії при коливаннях елементів гвинтового кормозмішувача?
2. За якою залежністю визначається коефіцієнт дисипації приводного механізму гвинтового кормозмішувача?
3. Прокоментуйте графіки на рис. 4.2-4.8 та зробіть висновок щодо впливу дисипативних сил на динаміку руху гвинтового кормозмішувача.
4. Які припущення використані для побудови динамічної моделі скребкового конвеєра, що представлена на рис. 4.9?
5. Чому формула Клосса, якою описується статична механічна характеристика асинхронного двигуна, є нелінійною?
6. Поясніть причину затухання коливань елементів скребкового конвеєра, після їх виходу на усталений режим руху.
7. Яке значення кута між кривошипамі зерноочисної машини дозволяє значно зменшити енергетичні витрати при русі її похилих решет?
8. Чому при виведенні рівнянь руху елементів зерноочисної машини були використані рівняння Лагранжа II роду?
9. Яка кількість узагальнених координат використана для опису динаміки руху трелювальної лебідки (рис. 4.18).
10. Поясніть сутність етапів, на яких розглядається рух елементів динамічної системи „мобільна трелювальна лебідка - вантаж”.
11. Чому зображена на рис. 4.21, а функція переміщення вантажу має від’ємні значення?
12. Який режим руху ківшового елеватора характеризується найбільшими навантаженнями?
13. Які припущення були використані при розробці динамічної моделі ківшового елеватора (рис. 4.24).

14. Що є причиною виникнення коливань елементів ківшового елеватора під час його пуску?
15. Чому крутильні коливання ковшів, на відміну від їх лінійних коливань, практично не затухають протягом всього періоду роботи ківшового елеватора?
16. Охарактеризуйте динамічну модель руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі, яка зображена на рис. 4.33.
17. Поясніть сутність початкових умов (4.66) руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі.
18. Чому на валу приводного двигуна крана під час перехідних режимів його руху виникають значні крутні моменти?
19. Поясніть, чому коливання динамічних характеристик руху крана, які показані на рис. 4.35, з плином часу зменшуються.
20. Дайте характеристику фазовим портретам коливань вантажу на гнучкому підвісі, які зображені на рис. 4.36.
21. Чому використання статичної механічної характеристики приводних двигунів при проведенні динамічного аналізу руху мостового крана є недоцільним?

ДОДАТОК

Чисельне розв'язування диференціальних рівнянь

Революційні зміни в методичному інструментарії теорії та прикладних питаннях динаміки машин пов'язані з появою й широким поширенням комп'ютерів. Зокрема, комп'ютер дозволяє ефективно застосовувати чисельний розв'язок диференціальних рівнянь для аналізу динаміки коливних систем, наочно й швидко представляти результатів за допомогою комп'ютерної графіки.

Динамічна система загального виду на площині задається рівняннями:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \quad (1)$$

Розглянемо основну ідею чисельного розв'язання такого роду рівнянь. Для загальності будемо вважати, що функції, що фігурують у правих частинах виразів (1), можуть залежати не тільки від динамічних змінних, але й від часу:

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t). \quad (2)$$

Будемо представляти шукані функції часу $x(t)$ й $y(t)$ їх значеннями на дискретній множині точок $t_n = nh$, як кажуть, у вузлах сітки із кроком h за часом:

$$x_n = x(nh), \quad y_n = y(nh). \quad (3)$$

Величина кроку повинна бути досить малою, оскільки від неї буде залежати точність розв'язку.

Найпростіший спосіб апроксимувати похідні за часом x і y полягає в тому, щоб представити похідні у такому вигляді:

$$\dot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \quad \dot{y}_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \quad (4)$$

Підставляючи ці вирази в (2), приходимо до запису рівнянь у вигляді різницевої схеми:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(x_n, y_n, t_n), \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = g(x_n, y_n, t_n). \quad (5)$$

Звідси неважко виразити в явному виді x_{n+1} і y_{n+1} через x_n і y_n :

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n, t_n), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n, t_n). \quad (6)$$

Використовуючи ці співвідношення й задавшись початковими умовами (x_0, y_0) , ми можемо крок за кроком обчислювати на комп'ютері значення змінних у вузлах сітки $n=1,2,3,\dots$. Отримані результати можна:

- вивести на друк й одержати таблицю функцій, що представляють розв'язок (такий спосіб широко застосовувався в епоху перших електронно-обчислювальних машин, які не мали дисплею);
- вивести на дисплей у вигляді графічної залежності, відкладаючи по осі абсцис час $t_n=nh$, а по осі ординат значення x_n і y_n ;
- вивести на дисплей у вигляді фазового портрета, відкладаючи по осі абсцис значення x_n , а по осі ординат y_n .

Як відомо з курсу математичного аналізу, при апроксимації похідних виразами (5) ми допускаємо на кожному кроці похибку порядку h^2 . Оскільки число кроків при побудові розв'язку має порядок h^{-1} , а похибка має тенденцію накопичуватися від кроку до кроку, тобто результуюча похибка, буде порядку h . В цьому випадку ми маємо різницевий метод першого порядку. Його називають методом Ейлера. В принципі цей метод дозволяє

досягти будь-якої бажаної точності, але ціною істотного зменшення кроку, тобто збільшення числа кроків і об'єму обчислень [58].

Як можна вдосконалити метод і добитися більшої точності? Один із можливих способів полягає в наступному. Спочатку, використовуючи метод Ейлера, знайдемо половину кроку:

$$x_{n+1/2} = x_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n, t_n), \quad y_{n+1/2} = y_n + \frac{1}{2}hg(x_n, y_n, t_n). \quad (7)$$

Потім, „відштовхуючись” від початкової точки, зробимо повний крок, але з використанням вже обрахованих величин $x_{n+1/2}, y_{n+1/2}, t_{n+1/2}=(n+1/2)h$:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}, t_{n+1/2}), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}, t_{n+1/2}). \quad (8)$$

Можна показати, що цей метод дає на одному кроці похибку порядку h^3 , а на кінцевому фіксованому часовому інтервалі похибка буде порядку h^2 . Таким чином, це метод другого порядку. Використання алгоритму більш складного в порівнянні з методом Ейлера першого порядку звичайно виправдовує себе, тому що для одержання потрібної точності число кроків можна обрати суттєво меншим.

Можна побудувати й різницеві схеми більш високого порядку. Одна з них, досить зручна й широко використовувана, відома як метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Стосовно до системи рівнянь (2) алгоритм виконання одного кроку за часом задається наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n, t_n), \quad l_1 = g(x_n, y_n, t_n), \\ k_2 &= f(x_n + \frac{1}{2}hk_1, y_n + \frac{1}{2}hl_1, t_n + \frac{1}{2}h), \quad l_2 = g(x_n + \frac{1}{2}hk_1, y_n + \frac{1}{2}hl_1, t_n + \frac{1}{2}h), \\ k_3 &= f(x_n + \frac{1}{2}hk_2, y_n + \frac{1}{2}hl_2, t_n + \frac{1}{2}h), \quad l_2 = g(x_n + \frac{1}{2}hk_2, y_n + \frac{1}{2}hl_2, t_n + \frac{1}{2}h), \\ k_4 &= f(x_n + hk_3, y_n + hl_3, t_n + h), \quad l_2 = g(x_n + hk_3, y_n + hl_3, t_n + h), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Наука про чисельний розв'язок диференціальних рівнянь в даний час є самостійним і досить об'ємним розділом обчислювальної математики. Поряд з перерахованими тут методами існує багато інших, які в якихось випадках можуть виявитися зручними (наприклад, багатокрокові схеми Адамса). Для докладного ознайомлення з тонкощами чисельного розв'язку диференціальних рівнянь, різними алгоритмами, технічними прийомами (такими як автоматичний контроль точності), „підводними каменями”, які можуть зустрітися при розв'язанні конкретних задач, читачеві слід звернутися до відповідної до спеціальної літератури.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Автоколивання** 67
- Апроксимація**
- механічної характеристики
 - – прямою 115
 - – поліноміальна 118
 - – сплайнова 123
 - похідних за часом 214
- Вал**
- жорсткий 84
 - гнучкий 84
- Двигун**
- гідравлічний
 - – об’ємного регулювання 34
 - – дросельного регулювання 35
 - пневматичний 37
 - електродвигун
 - – постійного струму 39
 - – змінного струму 42
- Декремент логарифмічний** 76
- Дюамеля інтеграл** 106
- Енергія питома залишкових коливань** 137
- Задача динаміки основна** 66
- Закон**
- Амонтона-Кулона 50
- Зв’язки** 52
- утримуючі 53
 - неутримуючі 53
 - геометричні 54
 - кінематичні (диференціальні) 54
- стаціонарні (склерономні) 55
 - нестаціонарні (реономні) 55
 - голономні 55
 - неголономні 55
- Коливання**
- вільні (власні) 66
 - вимушені 66
 - параметричні 66
 - періодичні 68
 - неперіодичні 68
 - майже періодичні 68
 - гармонічні 68
 - загасаючі 69
 - наростаючі 69
 - субгармонійні 92
 - супергармонійні 92
 - основні 92
- Коефіцієнт**
- динамічності 76
 - підсилення 79
- Крива кістякова** 90
- Метод**
- рівноваги (див. принцип д’Аламбера)
 - Чебишева 89
 - чисельного розв’язування диференціальних рівнянь
 - – Ейлера 215
 - – Рунге-Кутта 215

Модель

- динамічна
- – дискретна 10
- – континуальна 10
- – дискретно–континуальна 10
- – гвинтового кормозмішувача 153
- – скребкового конвеєра 160
- – трелювальної лебідки з вантажем 176
- – вертикального стрічкового ківшового елеватора 185
- – руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі 196
- математична 11
- реологічна
- – Кельвіна–Фохта 186
- – Максвелла 186

Особлива точка

- центр 72
- фокус 72
- вузол 72
- сідло 72

Портрет фазовий 69

- неklasичний (тривимірний) 74

Приведення

- мас 17
- жорсткостей 17
- сил (моментів сил) 17

Принцип

- д'Аламбера 21
- можливих переміщень 23
- Гамільтона-Остроградського 25

Рівняння

- Лагранжа II роду (див. принцип Гамільтона–Остроградського)
- Ейлера 28
- Клосса 42
- Абея 120
- Рікатті 127

Сили потенціальні 29

Удар

- тривалий 96
- короткий 96

Удару

- форма 94
- – прямокутна 94
- тривалість 94

Характеристика ідеальна

- кінематична 31
- силова 31
- двигуна
- – статична 32
- – динамічна 34
- робочого процесу 45

Цикл граничний 82

Число ступенів вільності 8

Частота власних коливань 76

Швидкість критична кутова 83

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Суриянов Н.Г. Теоретические основы динамики машин: учебное пособие / Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дашенко, П.А. Белоус. – О.: ОГПУ, 2000. – 302 с.
2. Ловейкін В.С. Теорія технічних систем / В.С. Ловейкін, І.І. Назаренко, О.Г. Онищенко. – К. - Полтава: ІЗМН-ПДТУ, 1998. –175 с.
3. Зоммерфельд А. Механика / А. Зоммерфельд [пер. с нем.]. – Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 368 с.
4. Коловский М.З. Динамика машин / М.З. Коловский. – Л.: Машиностроение, 1989. – 265 с.
5. Бередняков В.В. Основы теории машин авиационной техники / В.В. Бередняков. – Казань: Казанский авиационный институт, 1981. – 92 с.
6. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами / М.З. Коловский. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
7. Чиликин М.Г. Общий курс электропривода: учебник [для студ. вузов] / М.Г. Чиликин, А.С. Сандлер. – [6-е изд., доп. и перераб.]. – М.: Энергоиздат, 1981. – 576 с.
8. Лавріненко Ю.М. Електропривод: підручник / Ю.М. Лавріненко, О.С. Марченко, П.І. Савченко, О.Ю. Синявський, Д.Г. Войтюк, В.П. Лисенко (за ред. Лавріненка Ю.М.). – К.: вид-во Ліп-К., 2009. – 504 с.
9. Armstrong-Helouvry B., Dupont P., Canudas de Wit C. A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for Control of Machines with Friction // *Automatika*. 1994. Vol. 30, U 7. P. 1083.1138.
10. Canudas de Wit C., Olsson H., Astrom K.J., Lishinsky P. A New Model for Control of Systems with Friction // *IEEE Trans. AC-40*. 1995. U 3. P. 419-425.

11. Вибрации в технике: справочник. В 6-ти т. / ред. совет: В.Н. Челомей. – М.: Машиностроение, 1979. – Т.2. Колебания нелинейных механических систем / Под. ред. И.И. Блехмана. 1979. – 351 с.
12. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: учебное пособие для студентов вузов / В.Д. Горяченко [изд. 2-е перераб. и доп.]. – М.: Высшая школа, 2001. – 395 с.
13. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 720 с.
14. Магнус К. Колебания: введение в исследование колебательных систем / К. Магнус [пер. с нем.]. – М.: Мир, 1982. – 302 с.
15. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний / Я.Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
16. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – Л.: Государственное издание физико-математической литературы, 1959. – 916 с.
17. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания: учебн. пособие для вузов / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2002. – 292 с.
18. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики / А.И. Лурье. – М.; Л.: Гос. Узд-во техн.-теорет. лит., 1950. – 431 с.
19. Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе / С.Н. Вешеневский. – М.: Энергия, 1977. – 432 с.
20. Прокопеня А.Н. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. – Мн.: БГУ, 1999. – 265 с.
21. Корн Г. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

22. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
23. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
24. Григоров О.В. Совершенствование рабочих характеристик крановых механизмов: дисс. на соиск. степ. доктора техн. наук: 05.05.05 / Григоров Отто Владимирович. – Х., 1995. – 386 с.
25. Мельникова Л.В. Автоматизация технологического процесса перемещения механизма с подвешенным грузом средствами микропроцессорного управления: дисс. на соиск. степ. канд техн. наук: 05.09.03 / Мельникова Любовь Васильевна. - Одесса, 2000. – 116 с.
26. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / Комаров М.С. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
27. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.-Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.
28. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтнянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
29. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.
30. Киселев Ю.Н. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения / Ю.Н. Киселев, С.Н. Авакумов, М.В. Орлов. – М: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. Ломоносова, 2007 – 270 с.
31. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями / Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. - М.: Наука, 1980. - 384 с.
32. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.

33. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус [перевод с англ. Митрофановой, Н.М. Первозванского А.А., Хусу А.П., Шалаевского О.В.] – М.: Наука, 1965. – 460 с.
34. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 389 с.
35. Красовский И.И. Теория управления движением (линейные системы) / И.И. Красовский. – М.: Наука, 1968. - 476 с.
36. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В.П. Тарасик. – Мн: ДизайнПРО, 2004. – 640 с.
37. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит. 2001. – 320 с.
38. Грузоподъемные краны. Кн. 2 / Шеффлер М., Дресиг Х., Курт Ф.; [пер. с немецкого М.М. Рунов, В.Н. Федосеев]; под ред. М.П. Александрова. – М.: Машиностроение, 1981. – 287 с.
39. Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
40. Пертен Ю.А. Динамика вертикального четырёхцепного конвейера / Ю.А.Пертен, Н.В.Эбервейн // Проблемы динамики и прочности исполнительных механизмов и машин: материалы науч. конф., 1-5 окт. 2002 г. – Астрахань, 2007. – С. 178-182.
41. Яворська А.В. Математична модель динаміки руху кормозмішувача гвинтового типу / А.В. Яворська, В.С. Ловейкін // Сільськогосподарські машини. Вип.21.Том 2. – 2011. – С.255-264.
42. Давыдов Б.Л. Статика и динамика машин / Б.Л. Давыдов– М.: Машиностроение, 1967. – 432с.
43. Ловейкін В.С. Дослідження динаміки пуску скребкового конвеєра зі змінним навантаженням у процесі пуску / В.С. Ловейкін, О.Ю. Костина // Motrol. Том 13 В. 2011. - Lublin. – С. 42-49.

44. Кожуховский И.Е. Зерноочистительные машины. Конструкция, расчет и проектирование. Изд. 2-е перераб. / И.Е. Кожуховский, М.: Машиностроение, 1974. – 248 с.
45. Гладков Н.Г. Зерноочистительные машины / Н.Г. Гладков. – М.:1961, 348 с.
46. Ловейкин В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / В.С. Ловейкин. – Киев: УМК ВО, 1990. – 168 с.
47. Ловейкін В.С. Кінематичний аналіз та оптимізація спарених кривошипно-повзунних механізмів, які реалізують рекуперацію енергії зворотно-поступального руху робочих органів / В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, В.П. Кулик // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. Механізація сільськогосподарського виробництва. – 2008. – Т.1, Вип.75. – С. 127-134.
48. Ловейкін В.С. Динамічна модель руху трелювальної лебідки / В.С. Ловейкін, Ю.Ю. Сердюченко // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. - 2009. Вип. 134. Ч. 2. - С. 214-217.
49. Дмитриев В.Г. Теоретические основы расчета ленточных конвейеров / В.Г. Дмитриев, А.О. Спиваковский. – М.: Наука, 1977. – 154 с.
50. Haddad Y. M. Viscoelasticity of engineering materials / Yehia M. Haddad.– London Chapman & Hall, 1995. – 378 p.
51. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов / В.Л. Вейц – Л.: Машиностроение, 1969. – 370 с.
52. Meirovich L. Methods of analytical dynamics / Leonard Meorovich. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 524 p.
53. Турчин В.С. Обоснование конструктивно-режимных параметров элеваторов ковшового типа для транспортировки сыпучих материалов: Дис. канд. техн. наук: 05.20.01/ Турчин Вячеслав Семёнович. – Оренбург, 2005. – 187 с.

54. Ловейкін В.С. Математична модель динаміки руху стрічкового ківшового елеватора з одностороннім зв'язком тягового органа / В.С. Ловейкін, В.А. Бортун // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2012. – Том 65. – № 1. – С.83-89. – (машинобудування, автоматизація виробництва та процеси механічної обробки).
55. Будиков Л.Я. Многопараметрический анализ динамики грузоподъёмных кранов мостового типа / Л.Я. Будиков – Луганск: Издательство ВУГУ, 1997. – 210 с.
56. Штейнер Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты / Р.Т. Штейнер.- Екатеринбург: УРО РАН, 2000. – 654 с.
57. Гохберг М.М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин / М.М. Гохберг. – М.: Машиностроение, 1969. – 520 с.
58. Формалев В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.
59. Ловейкін В.С. Аналіз та синтез режимів руху механізмів вантажопідійомних машин: монографія / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. – К. : Компрінт, 2012. – 298 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДИНАМІКИ МАШИН	8
1.1. Вибір кількості ступенів вільності механічних систем	8
1.2. Моделювання динаміки машин	11
1.2.1. Побудова динамічних моделей	13
1.2.2. Методи синтезу математичних моделей динамічних систем	21
1.3. Моделювання приводних зусиль	31
1.3.1. Гідравлічний двигун об'ємного регулювання	34
1.3.2. Гідродвигун із дросельним регулюванням	35
1.3.3. Пневматичний двигун	37
1.3.4. Електродвигун постійного струму	39
1.3.5. Електродвигун змінного струму	42
1.4. Сили опору робочих машин	45
1.5. Сухе та в'язке тертя	50
1.6. Зв'язки у машинах та їх класифікація	52
1.7. Типові елементи машин, що описуються нелінійними залежностями	55
1.7.1. Момент інерції (маса)	56
1.7.2. Жорсткість	60
1.7.3. Дисипація	63
1.8. Питання та завдання для самоперевірки	64
РОЗДІЛ 2. КОЛИВАННЯ У МАШИНАХ ТА МЕХАНІЗМАХ	66
2.1. Класифікація коливань	66
2.3. Фазові траєкторії та фазовий портрет коливань	69
2.4. Вимушені коливання механізмів. Механічний резонанс	75

2.4.1. Коливна система „двигун-фундамент”	75
2.4.2. Коливна система „гнучкий вал”	83
2.5. Коливання в механізмі з пружною муфтою	85
2.5.1. Рівняння руху механізму з пружною муфтою	85
2.5.2. Коливання в механізмах з лінійною пружною муфтою	87
2.5.3. Коливання в механізмах з нелінійною пружною муфтою	88
2.6. Віброізоляція при ударному впливі	92
2.7. Захист від дії коливань	97
2.8. Питання та завдання для самоперевірки	101
3. ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКИ МАШИН	103
3.1. Перехідні процеси у машині при ідеальній характеристиці двигуна	103
3.1.1. Виведення рівнянь руху	103
3.1.2. Вибір закону руху вихідної ланки двигуна	104
3.1.3. Розв’язок рівняння руху	106
3.1.4. Дослідження перехідного процесу при дії сил опору	111
3.1.5. Методи зменшення динамічної похибки	113
3.2. Аналіз режиму пуску механізмів представлених одномасовою моделлю	114
3.3. Аналітичний розв’язок рівнянь руху одномасових механізмів	124
3.4. Визначення раціональних законів руху машин	133
3.4.1. Двомасова динамічна модель	133
3.4.2. Тримасова динамічна модель	143
3.5. Питання та завдання для самоперевірки	152
РОЗДІЛ 4. ДИНАМІКА МАШИН СІЛЬСЬКО- ТА ЛІСОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ	153
4.1. Дослідження динаміки руху гвинтового кормозмішувача	153

4.2. Дослідження динаміки пуску скребкового конвеєра зі змінним навантаженням	158
4.3. Динамічний аналіз роботи зерноочисної машини з рекупераційним приводом	166
4.4. Моделювання та аналіз руху мобільної трелювальної лебідки	175
4.5. Дослідження динаміки руху ківшового елеватора	183
4.6. Динамічний аналіз руху мостового крана	194
4.6.1. Моделювання динаміки руху мостового крана	194
4.6.2. Модель асинхронного електроприводу	198
4.6.3. Математична модель механізму переміщення мостового крана із асинхронним електроприводом	200
4.6.3. Аналіз руху мостового крана	201
4.7. Питання та завдання для самоперевірки	211
ДОДАТОК. Чисельне розв'язування диференціальних рівнянь	213
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	217
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	219