Передмова

Моделювання, зокрема математичне, є важливим напрямком розвитку сучасної цивілізації, науково-технічного прогресу. З появою комп'ютерної техніки воно широко застосовується в усіх сферах людської діяльності: створення технічних, технологічних, ергатичних, соціально-економічних та ін.. систем, вирішення глобальних проблем розвитку людства та всесвіту. Моделювання можна уявити, як імітацію елементарних явищ, що складають досліджуваний процес, коли зберігається структура взаємодії між ними З використанням моделювання розв'язана велика кількість наукових та технічних задач функціонування складних систем.

Наявна дійсність висуває нові завдання – моделювання все більше складних систем – багаторівневих ієрархічних систем із стохастичними, нечіткими, хаотичними та ін. властивостями. Вихідними даними для моделей таких систем є параметри їх елементів (підсистем) та схема їх з'єднання у відповідні структури.

У лекційному матеріалі, що пропонується, наведені типові математичні схеми моделювання складних систем, методика їх застосування в практиці

1.Основні принципи та методологічні аспекти системології

1.Основні принципи та методологічні аспекти теорії систем 2
1.1. Цілі системології 3
1.2. Система та її властивості. Складність та система 4
1.3. Призначення системи 5
1.4. Функції системи 6
1.5. Структура системи 6
1.6. Потоки системи 7
1.7. Узагальнена характеристика системи 7
1.8. Класифікація систем 8
Задачі: 10
Контрольні питання 10

Системність є всезагальною властивістю матеріального світу, яку можна назвати формую існування матерії. Відомі форми існування матерії – простір, час, рух, структурованість – являють собою часткові аспекти системного світу.

Виділяють такі основні ознаки системності:

1) цілісність;
2) структурованість;
3) взаємозв'язок частин;
4) підпорядкованість частин одній меті;
5) алгоритмічність діяльності (у логічному розумінні).

Системність світу потребує адекватного підходу до його пізнання. Такий підхід називається системним підходом.

Системний підхід – це загальнонауковий методологічний напрямок, в рамках якого методологічний напрямок, в рамках якого розробляються методи та засоби теоретичного дослідження складноорганізованих об'єктів (систем). Системний підхід (на відміну від системного аналізу) спрямований на теоретичне розгортання знання, на формування та розвиток специфічних предметів наукового дослідження.

Методологічні процедури, що розробляються системним підходом, відносяться до вивчення законів:

1) утворення цілого;
2) будови цілого;
3) функціонування цілого;
4) росту і розвитку цілого;
5) співвідношення між об'єктом (явищем) та родовою системою (метасистемою);
6) відношення між об'єктом та системою інших метасистем.

Методологія системного підходу базується на таких основних принципах (принцип – це основне вихідне положення науки, вчення, світогляду).

1. Принцип багатоплановості полягає в тому, що будь-який об’єкт (явище) розглядається в декількох планах (аспектах):

а) як деяка якісна одиниця, що має свої специфічні особливості;

б) як частина своєї видородової макросистеми, закономірностям якої підпорядковується об’єкт, що вивчається, або явище;

в) у плані мікросистем, закономірностям яких він теж підпорядковується;

г) у сенсі його зовнішніх взаємодій, та ін.

2. Принцип багатовимірності, полягає в тому що будь-який складний об’єкт характеризується великою сукупністю властивостей, об’єднаних у групи (кластери), кожен з яких описує ті чи інші його особливості. Об’єктивний „портрет” події можна отримати тільки в тому випадку, коли досліджуються всі групи властивостей та зв’язки між ними.

3. Принцип багаторівневості (ієрархічності) полягає в тому, що вивчення складних систем (об’єктів, явищ) повинно базуватися на уявленні про ієрархічність (просту чи складну) їх структури. Ієрархічну структуру мають не тільки моделі складу системи (системи-підсистеми-елементи), але також властивості, якості цих систем та критерії, що застосовуються для їх оцінки.

4. Принципи різнопорядковості властивостей полягає в тому, що ієрархічність будови системи та її властивостей породжує закономірності різного порядку. Одні закономірності притаманні всім рівням ієрархії, тобто всій системі, інші належать тільки деякій групі рівнів, треті характерні тільки для елементів одного рівня, четверті – тільки для окремих елементів одного рівня.

5. Принцип динамічності полягає в тому, що системний підхід потребує розгляду об'єкта, що вивчається, чи явища в їх розвитку, на всіх етапах їх „життєвого циклу”.

1.1. Цілі системології

Системологія– це науковий напрямок, пов’язаний з розробкою методології розв’язку проблем прикладного характеру.

З практичної точки зору системологія є системою методів дослідження чи проектування складних систем, пошук, планування та реалізації змін, призначених для ліквідації проблеми.

З методологічної точки зору системологія є прикладною діалектикою, оскільки реалізує ідеї діалектики стосовно конкретних практичних задач, особливість яких полягає в необхідності виявлення причин їх складності, та усунення цих причин.

З методичної точки зору системологія відрізняється міждисциплінарним та понад дисциплінарним характером та залучення до роботи як неформальних, евристичних, експертних методів, так і, по можливості, строгих формальних математичних методів.

Системологія спирається на самі загальні системні уявлення, так як:

1) система та підсистема;
2) система та середовище;
3) входи та виходи системи;
4) цілі системи;
5) функції та властивості системи;
6) умови та засоби досягнення цілей;
7) якість системи, чи адекватність її функціонування (діяльності).

1.2. Система та її властивості. Складність та система

Оточуючий нас світ являє собою сукупність величезної (практично нескінченної) кількості різного роду об’єктів, між якими існують відношення. Вони відносяться як до природних утворень (жива та нежива природа включно з людиною), так і до штучних у вигляді продуктів матеріальної і духовної діяльності людини.

Важливою категорією, що характеризує цю сукупність, є складність.

Складність можна визначити як результат взаємодії та взаємозалежності великої кількості об’єктів у процесі їх відношень. Інше визначення, складність – це властивість об'єкта (системи, процесу, явища, ситуації), що виражається в раптовості, непередбачуваності; або не пояснювальному характері, випадковості; „анти інтуїтивності” його поведінки.

Будь-яка система характеризується:

1) цілісністю;
2) відносною відособленістю від навколишнього середовища (межами);
3) зв’язками із зовнішнім середовищем;
4) наявністю частин та зв’язків між ними (структурованістю);
5) підпорядкованістю усієї організації системи деякій цілі (чи сукупності цілей).

Основною характерною рисою системності є багатоплановість, яка полягає у тому, що для адекватного опису будь-якої складної системи необхідною є сполука трьох площин її дослідження (трьох форм опису):

1) предметної;
2) функціональної;
3) історичної.

Предметний аспект системного дослідження передбачає двох взаємопов’язаних задач:

1) виявлення елементарного складу системи (компонентний аналіз);
2) виявлення відношень (зв’язків) між елементами системи (структурний аналіз).

Структурний аналіз є діалектично пов’язаним з аналізом складу системи і включає дві основні задачі:

1) виявлення закономірностей взаємозв’язку елементів системи;
2) виявлення ступеня складності системи.

Функціональний аспект теорії систем включає розкриття внутрішнього та зовнішнього функціонування системи.

Внутрішнє функціонування системи досліджується у плані здатності виконання нею своєї зовнішньої функції.

Зовнішнє функціонування системи досліджується для виявлення адаптивності (пристосування середовища до системи) активності системи.

Історичний опис системи включає два види дослідження (опису): генетичний та прогностичний.

Генетичне дослідження присвячене вивченню походження даної системи, процесам його формування та етапам його життєвого циклу до того моменту, коли дослідник робить систему предметом своєї уваги.

Прогностичне дослідження пов’язане з розглядом перспектив подальшого розвитку системи, її можливого стану та очікуваної поведінки на прогнозований відрізок часу.

1.3. Призначення системи

У системології розрізняють ціленаправлені та цілеспрямовані системи.

Перша група систем поводять себе як запрограмовані роботи.

До другої групи можна віднести тваринний світ та людину, університет, політичну партію та ін. Призначення цих систем визначено їх здатністю (властивістю) сприймати потреби та виконувати певні дії для задоволення своїх потреб. Ці системи є, як правило, динамічними, оскільки їх цілі, функції, структура, змінюються з часом.

Основна відмінність цих систем полягає в багатоманітності способів реакції на дію зовнішнього середовища. У цілеспрямованих системах ці способи обмежені, а у цілеспрямованих систем вибір достатньо великий.

На шляху здійснення цілей системи, тобто реалізації призначень системи (особливо соціотехнічних систем), часто виникають бар’єри, пов’язані з внутрішніми обмеженнями системи та обмеженнями середовища. До внутрішніх обмежень можна віднести:

1) неадекватність сприйняття системи;
2) слабка структурованість проблем;
3) конфлікт у системі.

До обмежень середовища відносять:

1) недоліки планування, пов’язані з неясністю цілей;
2) турбулентність середовища (складність системи відношень елементів середовища і системи);
3) запізнювання зворотного зв’язку із середовищем.

1.4. Функції системи

Під функцією розуміють зовнішній прояв властивостей об'єкта у даний системі відношень.

У системному аналізі функцію об'єкта ототожнюють з:

1) призначенням об'єкта;
2) станом об'єкта;
3) здатністю до дії;
4) впливом (застосуванням);
5) задоволенням потреб;
6) роллю;
7) обов’язком.

Часто кажуть, що функція являє собою перетворення призначення в дію. Функції двох чи більшої кількості компонентів системи можуть взаємодіяти. Ця взаємодія може здійснюватися за допомогою функціонального зв’язку. Зв’язок – це взаємообумовленість існування явищ, розділених у просторі і часі. Функціональний зв’язок встановлює взаємну обумовленість функцій одного об'єкта від реалізації функції іншого об'єкта. Тобто функціональний зв’язок показує, які дані повинні бути вироблені однією функцією для того, щоб могла бути реалізована інша.

Системи можна класифікувати за ступенями свободи, які виявляються за умов здійснення функцій. Розрізняють системи:

1) механічні та робото-технічні;
2) біологічні - рослинний та тваринний світ;
3) соціологічні - спільнота людей.

У робототехнічних системах потрібні функції програмуються людиною, їх призначення – утримувати систему у стійкому стані для досягнення необхідних цілей.

У біологічних системах функції (функціональні перетворення) визначені генетичним кодом, проте зміни в навколишньому середовищі можуть ці функції модифікувати.

У соціологічних системах людина, що є елементом цілеспрямованої системи, може здійснювати одну і ту ж функцію різними способами. Число способів здійснення функції обмежено тими цілями, яким слугують функції. Проте у більшості випадків людські системи мають можливість вибору між кількома функціями, щоб найкращим чином досягнути мети.

1.5. Структура системи

У системології розрізняють такі поняття як „форма”, „сукупність” та „структура”.

Форма є зовнішньо загальним виглядом об'єкта безвідносно до його сутності (без урахування устрою його частин). Сукупність – це з'єднання чи набір частковостей у єдину множину чи у суму безвідносно до форми чи порядку. Структура є множина частин чи форм, які знаходяться у взаємодії у специфічному порядку для здійснення функції. У соціотехнічних системах є такі системи, що підтримують форму структури:

1) зовнішньо породжені;
2) внутрішньо породжені.

Джерелом першої групи є соціальне середовище (норми поведінки, звичаї, мораль та ін.), а другої – особисті потреби (фізичні засоби існування, відпочинок, самоосвіта та ін.). Останні спонукають кожного індивіда формувати певні способи сполучення з тим, хто (та що) його оточує.

1.6. Потоки системи

Усі функції системи виконуються за умови наявності потоків енергії, матерії, інформації. У системі можуть циркулювати одночасно декілька потоків.

Розрізняють такі типи потоків: енергетичні; матеріальні; інформаційні; фінансові; людські (кадрові). Потоки та структура системи знаходяться у тісному взаємозв'язку. Структура виконує роль обмежень на потоки у просторі і часі.

Розрізняють підтримуючі потоки та потоки продукції (чи відходів). Перші необхідні для стабілізації чи збереження первинної структури, другі – є результатом структурної дії.

Можливі чотири типи взаємодій структури і потоків:

1) структура змінюється природно чи штучно, а потоки залишаються на тому ж рівні;
2) потоки змінюються (природним чи штучним чином), а структура не змінюється;
3) зміна структури тягне за собою зміну потоків (якісні та/або кількісні);
4) зміна потоків тягне за собою зміну структури.

1.7. Узагальнена характеристика системи

Розглядаючи систему як засіб досягнення мети, методологія системології виділяє в ній такі системні об'єкти чи "компоненти системи": вхід; процес; вихід; навколишнє середовище.

Входом системи називають усе, що „добувається" системою з навколишнього середовища для досягнення цілей системи. Це певні ресурси, що перетворюються в деякі кінцеві продукти в результаті процесів, що відбуваються в системі.

Виходом системи називають результат функціонування системи чи кінцевий стан процесів, що відбуваються в системі. Виходи системи визначають таким же чином, як дію системи на навколишнє середовище.

Процес (лат. пересунення), це:

1) послідовна система явищ, станів у розвитку чогось;
2) сукупність послідовних дій для досягнення якихось результатів.

Процес переводить вхід системи у вихід. Виділити систему в реальному світі – це значить вказати всі процеси, що формують даний вихід при даних входах.

У будь-якій штучній системі існують три різні за своїм призначенням (роллю) підпроцеси: основний процес, зворотній зв’язок та обмеження.

Основний процес перетворює вхід у вихід. Зворотній зв’язок виконує такі процедури:

1) порівнює вибірку виходу з моделлю виходу і виділяє відмінність;

2) оцінює зміст та сенс відмінності;

3) виробляє рішення, що відповідає відмінності;

4) формує процес введення рішення (втручання в основний процес системи) та діє на процес з метою зближення виходу та моделі виходу.

Обмеження визначаються (виробляються) споживачем результатів функціонування системи, що аналізує ці виходи. Обмеження системи складається з цілі (функції) системи та примусових зв’язків (якостей функції). Примусові зв'язки повинні бути сумісними з ціллю.

Навколишнє середовище – це сукупність природних та штучних систем, для яких дана система не є функціональною підсистемою.

1.8. Класифікація систем

1) За походженням – штучні, природні, змішані.
2) За характером зв’язку із зовнішнім середовищем – відкриті, закриті.
3) За складністю:

а) неживі (статичні структури чи їх основи (кристал); прості динамічні системи із заданим законом поведінки (часи); кібернетичні системи з управлінськими циклами зворотного зв’язку (термостат, робот));

б) живі (відкриті системи із структурою самозбереження (клітина); живі організми з низькою здатністю сприймати інформацію (рослини); живі організми з більш розвиненою системою сприйняття інформації (тварини); живі організми із самосвідомістю (людина); соціальні системи (етнос, нація); трансцендентні системи, чи системи, що знаходяться поза нашою свідомістю).

4) За принципом поведінки, що ускладнюється: матеріальні; гомеостатичні; розв’язуючі (без передбачення); з передбаченням; рефлексивні.
5) За ступенем організованості:

а) добре організовані;

б) погано організовані;

в) із самоорганізацією: із саморегуляцією; із самоосвітою (такі, що самонавчаються; самонастроюються; самоповлюються; самовідтворюються).

6) За ступенем ресурсної забезпеченості управління: малі, великі, прості, складні, звичайні, енергокритичні.
7) За цілеотриманністю: ціленаправлені; цілеспрямовані.
8) За описом змінних: якісний опис, кількісний опис; змішаний опис.

9) За способом управління: такі, що управляються ззовні; такі, що самоуправляються; з комбінованим управлінням.
10) За числом операторів системи S: чорний ящик (S невідомо); непараметричний клас (S відомо частково); параметризований клас (S відомо до параметра); білий ящик (S відомо повністю).

Задачі:

1. Сформулювати основні ознаки системності.
2. Сформулювати і пояснити основні принципи системного підходу.
3. Пояснити особливості системного підходу, як методу дослідження.
4. Надати основні характеристики будь-якої системи.
5. Пояснити основні відмінності між ціле направленими та цілеспрямованими системами.
6. Охарактеризувати поняття «форма», «структура» та «сукупність».
7. Пояснити сутність живих систем.

Контрольні питання

1. На чому базується методологія системного підходу?
2. Як розуміти принцип багато вимірності з точки зору методології системного підходу?
3. Що собою представляє системологія, як науковий напрямок?
4. На які загальні системні уявлення спирається системологія?
5. Яким чином можна визначити поняття складності?
6. Що собою представляє поняття структурного аналізу?
7. В чому полягає системологія?
8. В чому полягає відмінність між внутрішніми обмеженнями та обмеженнями середовища?
9. Що розуміють під функцією системи?
10. В чому полягає різниця між підтримуючими потоками та потоками продукції?

2 Експертні (неформальні) методи в системології

План лекції

1. Проблеми експертного оцінювання, види експертиз та основні етапи підготовки і проведення експертизи.
2. Загальні методи експертного оцінювання.
3. Методи обробки експертних оцінювань.
4. Питання для самоконтролю.
5. Рекомендована література

При моделюванні складних систем (екологічних, економічних, соціальних, політичних, військових та інших) досить часто виникає потреба у вирішенні задачі визначення суттєвих факторів, що характеризують об'єкт дослідження у відповідності до поставленої мети дослідження. Розв'язавши цю задачу, можна здійснити зазначене визначення більш обґрунтовано, ефективно використовуючи апріорну інформацію про вимоги та очікувані результати.

В такій постановці, особливо із застосуванням інформаційних технологій, найбільш затребуваним для розв'язання різних прикладних задач стає використання існуючих, а також розробка нових експертних методів, які при дослідженні більшості об'єктів користуються великою популярністю. Особливу увагу при цьому приділяють розробці математичного апарату, який би давав можливість в тій чи іншій мірі зменшити вплив суб'єктивного фактору, що вносять експерти, розкрити нечітку інформацію, мати невелику кількість прозорих і чітких обчислень.

Методи експертного оцінювання (або **експертні методи)** є частиною великої області теорії прийняття рішень та застосовуються у випадках, коли для прийняття рішень не є можливим використовувати кількісні методи.

Відомо, що інформація в поєднанні з інтуїцією та досвідом допомагають фахівцям точніше обирати найбільш важливі цілі і напрямки розвитку, знаходити найкращі варіанти вирішення складних науково-технічних, соціально-економічних задач та інших задач в умовах, коли немає інформації про вирішення аналогічних проблем у минулому.

Експертні методи безупинно розвиваються і удосконалюються. Основні напрямки цього розвитку визначаються цілою низкою чинників, в числі яких можна вказати на прагнення підвищити ступінь використання математичних методів і електронно-обчислювальної техніки, розширити області застосування, а також знайти шляхи усунення недоліків, що виявляються. Незважаючи на практичне використання методу експертних оцінок та успіхи, досягнуті в розробці, є ряд проблем і задач, що вимагають подальших методологічних досліджень і практичної перевірки.

1. Проблеми експертного оцінювання, види експертиз та основні етапи підготовки і проведення експертизи

Під **експертним оцінюванням** розуміється процедура отримання оцінки проблеми на основі судження експертів (фахівців) з метою подальшого прийняття рішення.

Судження експерта або експертної групи відносно поставленої задачі прогнозу називається **експертною оцінкою**.

У випадках розгляду нової проблеми, її надзвичайної складності, неможливості математичної формалізації процесу розв’язання, недостатності наявної інформації, доводиться звертатися до рекомендацій компетентних експертів, які досконало знають проблему, – до фахівців.

Експерт – це особа, яка володіє знаннями і здатна виказати аргументовану думку з явища, яке вивчається. Їх аргументація, формування кількісних оцінок, обробка останніх формальними методами дістали назву методів експертних оцінок.

Метод експертних оцінок – процес аналізу експертами, а також аргументування, формування кількісних оцінок, обробка оцінок формальними методами.

Експертиза – процедура отримання оцінок від експертів.

Якість одержуваних експертних оцінок значною мірою визначається підготовкою експертизи, а також вживаними методами оброблення інформації, одержуваної від експертів.

Можна виокремити <u>**основні етапи підготовки і проведення експертизи**</u>:

– формулювання мети дослідження;
– вибір форми дослідження, визначення бюджету експертизи;
– підготовка інформаційних матеріалів, анкет, модераторів;
– підбір експертів;
– проведення експертизи;
– опрацювання експертних даних;
– підготовку звіту з результатами експертизи.

Перед початком експертного дослідження необхідно чітко визначити його проблему (мету) і сформулювати відповідне питання для експертів.

Класифікувати існуючі види експертних оцінок можна за наступними ознаками:

– **за формою участі експертів**:
  а) очні оцінки;
  б) заочні оцінки.

Очний метод оцінювання дає змогу зосередити увагу експертів на розв'язуваній проблемі, це підвищує якість результату. В той самий час ***заочний метод*** може бути дешевшим;

– **за кількістю ітерацій** (повторів процедури для підвищення точності):
  а) однокрокові;
  б) ітераційні;
– **за задачами**:
  а) генеруючі рішення,
  б) оцінюючі варіанти;
– **за типом відповіді**:
  а) ідейні,
  б) ранжуючі,
  в) оцінюючі об'єкт за відносною чи абсолютною (чисельною) шкалою;
– **за способом обробки думок експертів**:
  а) безпосередні,
  б) аналітичні;
– **за кількістю залучених експертів**:
  а) без обмеження,
  б) обмежені (зазвичай використовується 5-12 осіб експертів).

Після визначення форми проведення експертизи, обирають **метод експертного опитування** (інтерв'ювання, анкетування) й подальшого оцінювання.

Найвідомішими методами експертного оцінювання є наступні:

– мозковий штурм;
– метод Дельфи;
– експертне ранжирування;
– метод аналізу ієрархій.

Кожному методу відповідають свої терміни проведення і кожен з них потребує експертів.

Після вибору методу експертного опитування **визначаються витрати на процедуру опитування**, які включають оплату експертів, оренду приміщення, придбання канцтоварів, оплату фахівця з проведення та аналізу результатів експертизи.

Для проведення процедури опитування необхідно підготувати:

– інформаційні матеріали з описом проблеми,
– наявні статистичні дані,
– довідкові матеріали,
– бланки анкет,
– інвентар.

При цьому варто уникати наступних помилок:

- висловлювати ставлення керівництва до очікуваних результатів;
- згадувати розробників матеріалів;
- виділяти той чи інший варіант рішення.

Крім того, всі доступні для експертів дані мають бути нейтральними і різнобічними. Заздалегідь необхідно розробити анкети та бланки для експертів. Залежно від методу вони можуть бути з відкритими та закритими питаннями, відповідь може даватися у вигляді парного порівняння, рангового ряду, судження, у вигляді абсолютної оцінки або в балах.

У вирішенні задачі вибору експертів істотно значимими є:

- персональний підбір експертів;
- формування представницької групи експертів.

Критерії підбору експертів:

- *компетентність* (наявність знань і досвіду з розв’язуваної проблеми);
- *антиконформізм* (несхильність до впливу авторитетів);
- *креативність* (здатність вирішувати творчі завдання);
- *колективізм* (здатність працювати в колективі згідно із загальновизнаними етичними нормами поведінки);
- *конструктивність мислення* (здатність давати практично значущі рішення);
- *самокритичність* (здатність критично ставитися до власної компетенції та своїх суджень);
- *наявність часу для роботи в експертних групах*;
- *зацікавленість* – наявність бажання у вирішенні проблеми, що розглядається.

Процедуру підбору експертів проводить незалежний модератор, який контролює дотримання регламенту, роздає анкети та матеріали, але не висловлює свою думку.

При обробці результатів опитування, залежно від цілей експертного оцінювання і обраного методу вимірювання, виникають наступні **основні задачі**:

- побудова узагальненої оцінки об’єктів на основі індивідуальних оцінок експертів;
- побудова узагальненої оцінки на основі парного порівняння об’єктів кожним експертом;
- визначення відносних ваг об’єктів;
- визначення узгодженості думок експертів;

– визначення залежностей між результатами оцінювання різних експертів;
– оцінка надійності результатів обробки.

За результатами експертного оцінювання оформлюється звіт, у якому вказуються:

– мета дослідження;
– склад експертів;
– отримана оцінка;
– аналіз результатів.

2. Загальні методи експертного оцінювання

Залежно від форм роботи з експертами **експертні методи оцінювання можна розподілити на дві групи**:

а) *методи індивідуальної експертної оцінки* (засновані на використанні думки окремих, незалежних один від одного експертів);

б) *методи колективної експертної оцінки* (засновані на використанні колективної думки експертів).

При цьому більшою точністю володіє спільна думка, у відмінності від індивідуальної думки кожного із спеціалістів. Тому, якщо це можливо, використання колективної експертної оцінки є більш затребуваним.

До індивідуальних методів найчастіше відносять:

– ***метод інтерв'ю*** – передбачає бесіду ОПР з експертом, в ході якої ОПР відповідно до заздалегідь розробленої програми ставить перед експертом питання щодо перспектив розвитку об’єкта дослідження. Схема бесіди: питання-відповідь. При цьому експерт керується в основному тільки апріорними уявленнями щодо об’єкта дослідження. Успіх отриманої в такий спосіб експертної оцінки значною мірою залежить від здібності експерта експромтом давати відповіді на питання, експертиза яких проводиться.

– ***метод аналітичних експертних оцінок*** – заснований на отриманні інформації оцінок щодо досліджуваного об’єкта шляхом логічного аналізу. Цей метод припускає тривалу і старанну самостійну роботу експерта над аналізом тенденцій, оцінкою стану і шляхів розвитку об’єкта дослідження, а також дає можливість експерту використовувати всю необхідну йому інформацію про досліджуваний об’єкт. Свої висновки експерт оформлює у вигляді доповідної записки.

Основною перевагою індивідуальних методів є можливість максимального використання індивідуальних здібностей експерта, а також незначний психологічний тиск на експерта. Однак ці методи можуть бути мало придатними через обмеженість знань одного спеціаліста-експерта.

З метою підвищення обґрунтованості рішень для їх розроблення залучаються декілька експертів, оцінки яких зіставляються й об’єднуються між собою, створюючи колективну експертну оцінку.

Методи колективної експертної оцінки засновані на виявленні узагальненої оцінки експертної групи шляхом аналізу та обробки індивідуальних незалежних оцінок експертів, що входять до складу групи.

В основі застосування методів колективної експертної оцінки лежить гіпотеза щодо наявності у експертів умінь оцінити з достатнім ступенем вірогідності: важливість і знання проблеми фактора, параметра, напряму розвитку, ознаки тощо ;час здійснення тієї чи іншої події; значення параметрів, які прогнозуються; доцільність вибору одного з альтернативних шляхів розвитку об'єкта прогнозування і т. ін.

Методи колективної експертної оцінки за ознакою способу отримання інформації від експертів умовно можна розподілити **на дві великі групи**:

1. *методи групової експертизи* – найчастіше використовуються: метод дискусій (експертних комісій, нарад, суду, колективної генерації ідей (метод «мозкової атаки»)), метод сценарію, метод оперативних ігор;

2. *методи анкетування* – найчастіше використовується метод Дельфи.

До найбільш поширених методів колективної експертної оцінки відносять:

- ***Метод експертних комісій*** – відкрита дискусія, у ході якої обговорюються проблеми, для вироблення єдиної думки фахівців. Колективна думка визначається за результатами відкритого чи таємного голосування.
- ***Метод нарад*** – метод прийняття рішення керівником шляхом проведення наради зі своїми підлеглими, в рамках якого кожний з підлеглих висловлює свою позицію з даного питання. Після цього керівник зважує виказані аргументи та ухвалює рішення.
- ***Метод суду*** – експерти діляться на три групи: 1) противники альтернативи – намагаються виявити її негативні сторони; 2) прихильники альтернативи рішення – виступають в якості її захисту; 3) регулює хід експертизи і виносить остаточне рішення.
- ***Метод сценаріїв*** – сукупність правил щодо письмового викладу пропозицій фахівців з вирішуваної проблеми. ***Сценарій*** – документ, що містить аналіз проблеми та пропозиції для її реалізації. Спочатку пропозиції пишуть експерти індивідуально, після чого вони узгоджуються і висловлюються у формі єдиного документа.
- ***Метод мозкового штурму*** – спільне очне обговорення проблеми групою фахівців.

  Метод реалізується у **два етапи**:

  – перший етап («конференція ідей») триває приблизно 1-1,5 години. У його ході експерти висувають різні ідеї, що стосуються трактування аналізованої ситуації чи прогнозу розвитку явища. Ідеї протоколюються, але не критикуються та не обговорюються. При цьому ідеї можуть бути самими різними, в т.ч. і «нісенітними». Головний принцип: чим більше, тим краще;

– на другому етапі, ідеї оцінюються, обговорюються та з них вибираються найвірніші. Прийматися остаточний вердикт з проблеми може шляхом явного або неявного голосування. Процедури генерації та обговорення ідей можуть бути більшою чи меншою мірою формалізовані.

- ***Метод оперативних ігор*** – проходить у вигляді навчань, коли експерти не тільки дають оцінку обстановки, але й приймають рішення, виконуючи роль керівників. У грі, як правило, присутні обидві сторони, що беруть участь у конфлікті. Рішення приймаються за певними правилами, які регламентуються статутами і настановами. Формальна структура ігор побудована так, що основні рішення, висновки, пропозиції підлягають критичному аналізу і розбору.

  При цьому важливо, що в ході ігор перевіряється доцільність і правильність рішень, які приймаються в певних умовах. Досвід навчань за участю кваліфікованих експертів показує, що експертне оцінювання за допомогою таких натурних моделей сприяє системному охопленню суттєвих елементів об'єктів та процесів дослідження і дозволяє отримати узагальнені рекомендації поточного та прогнозованого характеру.

Методи анкетування – методи колективної експертної оцінки, в яких для опитування експертів використовуються анкети.

Анкети можуть містити:

– питання, коли від експертів потрібно дати однозначну відповідь щодо стану прогнозованого об'єкта;

– виклад припустимої майбутньої картини деяких подій, а від експерта вимагається тільки підтвердити або відкинути їх;

– прохання оцінити важливість факторів (ознак, параметрів, напрямів розвитку тощо), кількісне значення прогнозованого параметра або границі, у яких він може знаходитись в певний момент у майбутньому.

<u>До найбільш поширених методів анкетування відносять</u>:

- ***Метод бальних оцінок*** – передбачає використання бальної шкали, межі якої є визначеними та відомими експертам.
- ***Метод парних порівнянь*** – за яким проводиться зіставлення певного досліджуваного фактору (ознаки, параметра, напряму розвитку тощо) з усіма іншими, що дає уявлення про загальну досліджувану картину або ситуацію.

- ***Метод Дельфи (дельфійський метод)*** – розроблений в 1950-1960 рр. у США корпорацією RAND. Назва походить від дельфійського оракула (Древня Греція).

  Сутність методу: за допомогою серії послідовних дій (опитувань) прийти до максимального консенсусу при визначенні правильного рішення.

  Аналіз проводиться в кілька етапів, а отриманні результати обробляються статистичними методами.

  Базовий принцип: деяка кількість незалежних експертів (не знають один про одного) краще оцінює і пророкує результат, ніж структурована група (колектив) особистостей.

  Це дає змогу:

  – уникнути відкритих зіткнень, тобто виключає безпосередній контакт фахівців між собою і, отже, груповий вплив, що виникає при спільній роботі і складається в пристосуванні до думки більшості;

  – проводити опитування екстериторіально, не збираючи експертів в одному місці (наприклад, за допомогою електронної пошти).

  Етапи дельфійського методу:

  1 етап: ***Попередній***: підбір групи експертів.

  2 етап: ***Основний***:

  - постановка проблеми: експерти отримують питання і повинні розбити його на підпитання; організаційна група з підпитань відбирає найчастіші та створює загальний опитувальник;
  - експерти отримують опитувальник для зауважень; на основі відповідей фахівців складається наступний опитувальник;
  - покращений опитувальник знову отримується експертами, яким тепер треба дати свій варіант рішення, а також розглянути крайні точки зору, висловлені іншими експертами. Виявляються домінуючі судження експертів, зближуються їхні точки зору. З доводами тих, чиї судження сильно вибиваються із загального русла, ознайомлюють усіх експертів. Після цього всі експерти можуть змінювати думку, а процедура повторюється;
  - усі попередні етапи повторюються, поки не буде досягнута узгодженість між експертами, або не буде встановлено відсутність єдиної думки з проблеми. Вивчення причин розбіжностей в оцінках експертів дає змогу виявити непомічені раніше аспекти проблеми й зафіксувати увагу на ймовірні наслідки розвитку аналізованої ситуації або проблеми. Відповідно до цього і виробляється остаточна оцінка та практичні рекомендації. Зазвичай проводиться три етапи та, якщо думки сильно різняться, етапів може бути більше.

3 етап: ***Аналітичний***:

- розроблення кінцевих рекомендацій після перевірки узгодженості думок експертів;
- аналіз отриманих висновків.

Для отримання кількісних оцінок якісних властивостей і характеристик (для отримання як індивідуальних, так і колективних експертних оцінок) застосовують наступні методи:

- ***Метод асоціацій*** заснований на вивченні схожого за властивостями об'єкта з іншим об'єктом.
- ***Метод бінарних (парних) порівнянь*** заснований на зіставленні експертом альтернативних варіантів, з яких обираються найкращі.
- ***Метод векторів переваг*** засновано на аналізі експертом всього набору альтернативних варіантів і вибору найкращих.
- ***Метод фокальних об'єктів*** – перенесення ознак випадково відібраних аналогів на досліджуваний об'єкт.
- ***Метод середньої точки*** – формулюються два альтернативних варіанти вирішення, один з яких є менш привабливим. Далі експерт підбирає третій альтернативний варіант, оцінка якого розташована між значеннями першої та другої альтернатив.

Для кількісного аналізу суб'єктивних оцінок експертів існують **спеціальні шкали вимірювання**: бальна, рангова, парних порівнянь, числова, вербально-числова (зі змістовними найменуваннями певних градацій і відповідними їм числовими значеннями або діапазонами числових значень) шкали.

3. Методи обробки експертних оцінювань

3.1 Статистична обробка анкетованих даних експертного опитування

Опитування експертів при використанні методів анкетування здійснюється за допомогою анкет. В анкеті пропонується дати кількісну оцінку кожному фактору (ознаці, параметру, напряму розвитку тощо), які входять до задачі дослідження.

Позначимо, наприклад, ці фактори через Y_1, Y_2, …Y_j,…Y_n. Кожний з цих факторів Y_j може мати тільки якісну визначеність або може мати кількісний вираз (наприклад, величини досліджуваного параметра). В обох випадках експерт зобов'язаний дати кількісну оцінку.

Для факторів якісної визначеності така оцінка має характер кількісного порівняння важливості цих факторів, яка являє собою ранг або бал певної шкали. Для факторів (параметрів) кількісної визначеності оцінка дається числом, яке відповідає запропонованому значенню цього фактора (параметра).

За результатами обробки даних, отриманих від експертів, визначаються статистичні оцінки прогнозованих характеристик та їх довірчі інтервали, а також статистичні оцінки узгодженості думок експертів. При цьому обробка результатів експертного опитування залежить від виду інформації, яка отримується від експертів.

Якщо кожен із m експертів, які беруть участь в опитуванні, дає на запитання анкети одне значення C_{ij} (i – номер експерта) досліджуваної величини j, то за результатами обробки m значень C_{ij} можуть розраховуватися такі основні показники:

– середнє значення експертних оцінок (***точковий прогноз***), яке характеризує узагальнену думку експертів:

$$\tilde{M}[Y_j] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} C_{ij} \; ; \tag{1}$$

– дисперсію оцінок, яка характеризує розкидання думок (***точкового прогнозу***) експертів відносно середнього значення:

$$\tilde{D}[Y_j] = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} (C_{ij} - \tilde{M}[Y_j]); \tag{2}$$

– середнє квадратичне відхилення:

$$\tilde{\sigma}[Y_j] = \sqrt{\tilde{D}[Y_j]}\,; \tag{3}$$

– коефіцієнт варіації, який характеризує ступінь однодушності експертів щодо оцінки j фактора (параметра):

$$V_j = \frac{\tilde{\sigma}[Y_j]}{\tilde{M}[Y_j]}. \tag{4}$$

Чим більший коефіцієнт V, тим більш є однаковою думка експертів.

Показники M_j та σ_j дозволяють визначити ***інтервальний прогноз***.

Для цього визначаються розміри області, в яку із заданою імовірністю попадає майбутнє значення прогнозованої величини:

$$\tilde{M}[Y_j] - \varepsilon_1 \le C_j \le \tilde{M}[Y_j] + \varepsilon_2. \tag{5}$$

Величини, що визначають довірчий інтервал ε_1 та ε_2, залежать від значення довірчої імовірності β і закону розподілу суми величин C_j і розраховуються за певними правилами. Так, якщо закон розподілу C_j можна вважати нормальним, то для j-ї прогнозованої величини маємо:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = t_\beta \frac{\tilde{\sigma}[Y_j]}{\sqrt{m}} \; ; \tag{6}$$

де $t_\beta = \arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ – величина, яка обернена нормальній функції розподілу $\Phi^*(x)$, обчислюється для заданого значення імовірності β.

При обробці експертних даних здійснюється також ***оцінка суперечності думок експертів***.

Розглянемо поняття «суперечність» думки колективного експерта щодо узагальненої думки всіх експертів. Припустимо, що думка *k*-го експерта C_{kj} є крайньою серед думок *m* експертів.

У зв'язку з тим, що дійсне значення дисперсії D_j, як правило, є невідомим, а відомою є лише її оцінка $\tilde{D}_j$, то для математичної оцінки суперечності думки *k*-го експерта обчислимо ймовірність того, що величина $t = \frac{C_k - \tilde{M}[Y_j]}{\tilde{\sigma}[Y_j]}$ буде більшою за деяке число γ:

$$\alpha = P\left(\frac{C_k - \tilde{M}[Y_j]}{\tilde{\sigma}[Y_j]} > \gamma\right). \qquad (7)$$

Якщо ця імовірність є достатньо великою (наприклад, більшою за 0,05-0,10), то гіпотеза щодо анормальності C_{kj} може бути відкинута, у протилежному випадку – прийнята. У зв'язку з цим суперечною вважається така оцінка C_{kj}, при якій виконується нерівність

$$C_{kj} - \tilde{M}_j[Y_j] > \gamma\tilde{\sigma}[Y_j] \qquad (8)$$

з імовірністю, меншою деякого значення α'. Значення α' береться рівним 0,1-0,05. Значення коефіцієнта γ, який задовольняє умові (8), наведено в табл. 1.

Таблиця 1

m	α		
	0,10	0,05	0,01
6	1,73	1,82	1,94
8	1,91	2,03	2,22
10	2,04	2,18	2,41
12	2,13	2,28	2,55
14	2,21	2,37	2,66
16	2,28	2,44	2,75
18	2,34	2,30	2,82
20	2,38	2,56	2,88

Виконання умови (6) при $\alpha < \alpha'$ є математичною ознакою наявності суперечної думки серед групи експертів. Слід підкреслити, що ця ознака може використовуватися тільки тоді, коли розподіл оцінок експертів можна вважати нормальним.

Якщо крайнє значення (точковий прогноз колективного експерта) буде суперечним, то здійснюється перевірка наступного найближчого до нього значення доти, доки не буде показана несуперечність чергового значення.

Виконання умови суперечності (або несуперечності) залежить від величини імовірності α', тому ця ознака є умовною і повинна доповнюватися логічним аналізом при врахуванні вимог до точності прогнозу. При обробці результатів експертного опитування необхідно мати на увазі також те, що колективний експерт краще за інших уявляє розвиток прогнозованого об'єкта (процесу) у майбутньому і тому «випадає» із області, що характеризує думки його колег. Тому до крайніх значень експертних оцінок необхідно відноситись дуже уважно.

Отже, послідовність оцінки результатів експертизи щодо майбутнього значення величини C_j є наступною:

- визначається узагальнена думка експертів (точковий прогноз);
- визначається дисперсія і середнє квадратичне відхилення думок експертів;
- здійснюється оцінка суперечності крайніх оцінок за допомогою логічного аналізу й умови (5);
- при несуперечності думок експертів результати опитування оформлюються як точковий (4) і інтервальний (6) прогнози;
- при суперечних думках проводиться другий тур опитувань (з обговоренням результатів думок першого туру).

Часто використовується така форма оцінок, коли кожний з m експертів дає два (мінімальне C і максимальне C_{ij}) значення, між якими, за думкою експерта, буде знаходитись майбутнє значення досліджуваної величини. Для обробки результатів опитування, насамперед, необхідно прийняти вид закону розподілу прогнозованої величини між крайніми оцінками кожного експерта. В якості такого апріорного закону розподілу, наприклад, може вибиратися закон рівномірного розподілу:

$$f(C_{ij}) = \frac{1}{C_{ij}^{\max} - C_{ij}^{\min}}, C_j^{\max} \le C_j \le C_j^{\min}.$$

При цьому середнє значення (точковий прогноз), що дається i-м експертом, визначається за формулою

$$\overline{C}_{ij} = \frac{1}{2} * \left(C_{ij}^{\max} + C_{ij}^{\min}\right). \quad (9)$$

Точковий прогноз за результатами узагальнення думок всіх експертів визначається за формулою

$$\tilde{M}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \overline{C}_{ij} . \quad (10)$$

Дисперсія прогнозу і коефіцієнт варіації визначаються за формулами (2) (3) відповідно.

3.2 Математико-статистичні методи обробки експертних оцінювань

За характером постановки питань і формою відповідей можна виділити основні підходи до проведення обробки експертних оцінювань:

- метод бальних оцінок;
- метод абсолютних оцінок;
- метод ранжирування;
- метод відносних оцінок;
- методи обробки ранжируваних рядів – попарних порівнянь та безпосереднього ранжирування.

Метод бальних оцінок передбачає використання бальної шкали, межі якої є визначеними та відомими експертам.

Якщо експерти мають однакову вагу (є рівноправними), то використовують найпростішу групову оцінку (x_i), яка обчислюється як середньоарифметична бальних оцінок експерта для кожного i-го об'єкта експертизи за формулою:

$$x_i^{ca} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} x_{ij},$$

де x_{ij} – бальна оцінка i-го об'єкта j-м експертом, m – кількість об'єктів, l – кількість експертів.

Коли кожний фахівець має різну вагу (згідно з досвідом, компетентністю, ефективністю проведення експертиз тощо), тоді групова бальна оцінка об'єкта може бути обчислена як середньозважена:

$$x_i^{сз} = \sum_{j=1}^{l} q_j x_{ij}\,; \quad i = \overline{1,m}; \quad \sum_{j=1}^{l} q_j = 1,$$

де q_j $(x_{ij} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{ijk})$ – вагові коефіцієнти компетентності експертів (визначені суб'єктивно).

За умови різної важливості частин (ознак) досліджуваного об'єкта й різної ваги експертів групова бальна оцінка об'єкта обчислюється за формулою:

$$x_i^{рв} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} q_j x_{ij} = \frac{1}{lp}\sum_{j=1}^{l} q_j \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{ijk}\,; \quad i = \overline{1,m},$$

де $x_{ij}^{рв} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{ijk}$ $\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1\right)$, α_k – вагові коефіцієнти ознак (частин) об'єкта.

Величини q_j та α_k найзручніше визначати або задавати так, щоб їхні числові значення містилися в межах від 0 до 1.

Вагові коефіцієнти компетентності експертів q_j та частин (ознак) об'єкта α_k можна визначати за взаємним оцінюванням і диференціальним самооцінюванням.

При *диференціальному самооцінюванні* оцінку дають за двома групами критеріїв: за критеріями, які характеризують ознайомленість з об'єктами експертизи, та за критеріями, що характеризують ознайомленість експерта з основними джерелами інформації в досліджуваній галузі.

Метод взаємооцінювання – побудова матриці, елементами якої є числа – взаємні оцінки експертів (наприклад, це може бути кількість фахівців, які вважають i-го експерта компетентнішим, ніж j-го).

Основні переваги методу: можливість враховувати компетентність експертів; простота визначення групових оцінок об'єктів після проведення експертизи; можливість аналізу за допомогою як кількісних, так і якісних методів, що, безумовно, дає змогу порівняти результати.

Якщо висновки збігаються, то можна констатувати, що вони достовірні та базуються на матеріалі експертизи, а не на методах оброблення даних.

Недоліки методу пов'язані з труднощами отримання об'єктивних початкових оцінок x_{ij}, q_j, x_{ijk}. Та не треба забувати, що це дуже трудомістка робота.

Метод абсолютних оцінок – використання числової шкали оцінок, межі якої визначено технічними характеристиками об'єкта. Оцінка – фізична величина в певних одиницях вимірювання, тобто у наведених вище формулах використовують абсолютні оцінки замість бальних оцінок (x_{ij}).

Метод відносних оцінок передбачає отримання від експерта відносної оцінки якості об'єкта. Цей метод використовує числову або бальну шкалу відношень і може застосовуватись, наприклад, в оцінці відносної важливості критеріїв або коефіцієнтів відносної важливості цілей стратегії. При цьому для отримання групової оцінки об'єкта використовуються формули розрахунку середньоарифметичної та середньозваженої групових бальних оцінок. Сума відносних оцінок має дорівнювати 1.

Метод ранжування. Експерти оцінюють якість об'єктів за допомогою встановлення їхнього рангу (порядкового номера об'єкта, якщо всі об'єкти розташовують у порядку зростання їхньої якості). Чим меншу (більшу) суму рангів отримає об'єкт від усіх фахівців, тим нижчою (вищою) є його якість.

Методи обробки ранжируваних рядів – парних порівнянь та безпосереднього ранжирування – застосовуються для отримання узагальненої думки експертів. При цьому метод безпосереднього ранжирування застосовується тільки у випадку, коли кількість факторів ранжирування не перевищує 20, метод парних порівнянь використовується при будь-якій кількості розглядуваних факторів.

3.2.1 Ранжування. Методика побудови ранжируваного ряду

У процесі здійснення експертизи, під час проведення експертного опитування, одержувані від експертів думки (судження) часто виражені *порядковою шкалою*, тобто експерт може сказати (та обґрунтувати), наприклад:

- що певний тип продукції буде привабливішим для споживачів, ніж інші;
- що один показник якості продукції є важливішим за інший;
- що перший технологічний об'єкт є небезпечнішим, ніж другий,

і т.д.

Але при цьому експерт не в змозі сказати, *у скільки разів* або *на скільки* важливішою, або, відповідно, не безпечнішою є та чи інша досліджувана характеристика (показник, фактор).

У цьому зв'язку постає питання: як проводити аналіз відповідей, зібраних робочою групою експертів?

Для вирішення такої проблеми експертів часто просять надати ранжування (упорядкування) об'єктів експертизи, тобто розташувати їх у порядку зростання (або, точніше, неспадання) важливості характеристики, яка цікавить організаторів експертизи.

Під ***ранжуванням*** розуміється процес визначення ***рангів***, під якими, в свою чергу, розуміються відносні кількісні оцінки ступенів відмінностей за якісними ознаками (наприклад, розташування факторів у порядку їх суттєвості, значимості в даному дослідницькому контексті).

Іншими словами, під ***ранжуванням*** розуміють розташування досліджуваних факторів у порядку їх істотності або в порядку рангів, поставлених у відповідність кожному фактору.

Отже, ранжування визначаються та вивчаються за допомогою рангів, які за своєю сутністю являють собою номери (об’єкту експертизи) у впорядкованому (ранжируваному) ряді.

Формально ранги виражаються числами 1, 2, 3, ..., але при цьому дуже важливим є те, що над цими числами не можна проводити звичні арифметичні операції.

Наприклад, хоча $1+2=3$*, не можна стверджувати, що для об'єкта, що стоїть на третьому місці в упорядкуванні (в іншій термінології – ранжуванні), важливість характеристики дорівнює сумі важливостей об'єктів з рангами* 1 *та* 2.

Так, наприклад, розглядаючи оцінки досягнень спортсменів, можна поставити питання: чи можна сказати, що спортсмен, який посів третє *місце, досяг того ж результату, що й спортсмени, які посіли перше і друге місця, разом узяті?*

Тому очевидно, що для аналізу подібних якісних даних необхідна не звичайна арифметика, а підхід, що дає базу для розробки, вивчення та застосування конкретних методів розрахунку. Одним із таких підходів виступає підхід, в основі якого лежить методологія ранжирування.

Ранжування застосовується у випадках, коли є неможливою або недоцільною безпосередня оцінка.

При цьому ранжування об'єктів містить лише інформацію про те, який з об'єктів є кращим, та не містить інформацію про те, наскільки або у скільки разів один об'єкт переважає інший.

Розглянемо більш детально процедуру ранжування.

Нехай експерту пред'являється набір альтернатив (факторів), які підлягають оцінюванню, і пропонується впорядкувати їх за уподобаннями та приписати їм числа натурального ряду – ранги. Найкраща альтернатива (фактор) отримує ранг, що дорівнює 1, наступна за нею альтернатива (фактор) – ранг, що дорівнює 2 і т.д.

В такій постановці формалізуємо процес ранжування (тобто розташування факторів у порядку їх суттєвості) факторів x_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Ранжируваний ряд може будуватися двома способами:

1) на перше місце ставиться найсуттєвіший фактор, слідом за ним менш суттєвий фактор, але найважливіший з решти, і т.д.

   Отриманий таким чином ранжируваний ряд має вигляд

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, \tag{11}$$

   де:

   i_1 – номер найсуттєвішого фактора,

   i_2 – номер менш суттєвого фактора,

   $\ldots$,

   i_n – номер найбільш несуттєвого фактора в цьому ряді.

2) кожному фактору x_i ставиться у відповідність деяке число – його ранг k_i, тобто номер фактора в ранжируваному ряді (11):

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n. \end{matrix} \tag{12}$$

   Очевидно, що перший ранг $(k_i = 1)$ має фактор x_i, який найбільш впливає на реалізацію мети на об'єкті дослідження. Другий і наступні ранги (до $k_i = 2$ і т.д.) ставляться у порядку спадання їх суттєвості (важливості).

Наприклад, якщо ранги (12) виявилися такими, що відповідають представленню

$$\begin{aligned} x_i &= x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \\ k_i &= 3,\ \ 1,\ \ 5,\ \ 4,\ \ 2, \end{aligned} \tag{13}$$

то ранжируваний ряд має вигляд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3.

Дійсно, з (13) видно, що перший ранг ($k_i = 1$) має другий фактор x_2, другий ранг ($k_i = 2$) – п'ятий фактор і т.д.

Тепер, якщо доведеться створювати, наприклад, математичну модель з 3 факторами ($n = 3$), вибір істотних чинників з (13) очевидний. Це x_2, x_5, x_1. Четвертим і третім факторами при цьому нехтуємо, причому очевидно, що збиток від цього рішення буде мінімальним, оскільки відкинуто найбільш несуттєві фактори.

<u>Зауваження</u>: при описі ранжируваних рядів застосовуються:

– ***відношення переважності*** ($\succ$), за яким $x_q \succ x_s$ означає, що фактор x_q є більш переважним, ніж фактор x_s. Наприклад, ранжируваний ряд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3 з різними за своєю важливістю факторами буде мати вигляд $x_2 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$;

– ***відношення еквівалентності*** (~), за яким $x_q \sim x_s$ означає, що фактор x_q є еквівалентним (з таким самим ступенем важливості) фактору x_s. Наприклад, ранжируваний ряд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3 у випадку еквівалентності факторів x_1 та x_4 буде мати вигляд $x_2 \succ x_5 \succ x_1 \sim x_4 \succ x_3$.

Задача побудови рангового ряду (11) або еквівалентна до неї задача визначення рангів (12) вирішується експертами та зводиться до організації експертного опитування й обробки результатів цього опитування з тим, щоб отримати шукані ранги та оцінити їх достовірність, тобто визначити узгодженість суджень експертів.

3.2.2 Методологія експертного оцінювання за методом безпосереднього ранжирування та методом парних порівнянь. Визначення узгодженості суджень експертів

Найчастіше на практиці застосовують **<u>наступні методи експертного ранжування</u>**:

1. <u>безпосереднього ранжирування</u> (в даному методі експерти відразу привласнюють ранги факторам, які їм представлені для

ранжирування);

2. <u>парних порівнянь</u> (в даному методі використовується парне порівняння факторів, яке спрощує задачу експерту, але потребує подальшого оброблення результатів для отримання ранжируваного ряду).

3.2.2.1 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом безпосереднього ранжирування. Визначення узгодженості суджень експертів

Нехай *N* експертів ранжують *n* факторів $x_1, \ldots, x_n$.

Кожному фактору кожен експерт присвоює ранг – число від 1 до *n*. Так, *i*-му фактору (x_i, $i = \overline{1, n}$) *j*-й експерт (E_j, $j = \overline{1, N}$) присвоює ранг k_{ij}.

В результаті складається ***матриця*** $K = \left(k_{ij}\right)$ ***рангових суджень експертів*** виду

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \ldots \\ E_N \end{array} & \left\| \begin{array}{cccc} k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \ldots & k_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{1N} & k_{2N} & \ldots & k_{nN} \end{array} \right\| \end{array}, \tag{14}$$

де k_{ij} – ранг *i*-го фактору ($i = \overline{1, n}$), визначений *j*-м експертом ($j = \overline{1, N}$); номери рядків відповідають номерам експертів, а номери стовпців – номерам факторів. Це означає, що *j*-й рядок являє собою думку *j*-го експерта про усі фактори, а *i*-й стовпець – думка усіх експертів з приводу *i*-го фактора.

При призначенні рангів експертами потрібно дотримуватися наступних умов:

1) сума рангів, призначених всім факторам кожним експертом, має бути однаковою:
$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, N;$$
2) якщо експерт якийсь з q факторів вважає еквівалентними (однаковими за важливістю), то він надає їм один й той самий ранг, який дорівнює середньому арифметичному з q цілих рангів, таких, які б були отримані за умови, що експерту вдалося їх проранжувати.

Наприклад, якщо для трьох факторів x_1, x_2, x_3 *з різною важливістю*

$(x_1 \succ x_2 \succ x_3)$ *встановлено відповідні ранги* 1; 2; 3, *то, у випадку, якщо визначено, що* x_1, x_2 *є еквівалентними* $(x_1 \sim x_2)$ *та мають більшу важливість (є більш переважними) за* x_3, *то ранжируваний ряд матиме вигляд* $x_1 \sim x_2 \succ x_3$, *а ранги будуть наступними:* 1,5; 1,5; 3.

Якщо

$x_3 \sim$	$x_1 \succ$	x_2	
1	2	3	ранги при умові врахування суто переважності
1,5	1,5	3	ранги при умові врахування еквівалентності

то, відповідно, ранги будуть наступними: 1,5; 1,5; 3, *а в матрицю рангів записується наступна* послідовність *рангів:* 1,5; 3; 1,5 – *значення рангів заносяться відповідно розташуванню факторів* x_1, x_2, x_3 *у матриці.*

Для остаточного визначення шуканих рангів слід обчислити середні ранги кожного *i*-го фактора:

$$\bar{k}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij}, \quad i = \overline{1, n},$$

де на перше місце ставиться фактор з мінімальним середнім рангом

$$\bar{k}_l = \min_{i=1,\ldots,n} \{\bar{k}_i\},$$

тобто фактор x_l, на друге місце – фактор, що має мінімальний з решти середній ранг, і т.д.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з *N* експертів. В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) ранжування***.

Зауважимо, що, оскільки в процесі ранжування досліджуваних факторів кожним експертом, що входить до експертної групи, встановлюваний ранг присвоюється самостійно, а, отже, можливим є вплив суб’єктивного фактору експерту, виникає необхідність обробки цих даних з метою визначення ступеня довіри ОПР отримуваному ітоговому ранжуванню, в якості міри якого виступає ***узгодженість суджень експертів***.

Ця оцінка є необхідною, в першу чергу, тому, що думки експертів можуть сильно розходитися за оцінюваними параметрами. Неузгоджене ранжування призводить до того, що дані коефіцієнти будуть статистично недостовірними.

В такому формулюванні узгодженість ранжування, здійсненого експертами, необхідно визначати для підтвердження правильності гіпотези про те, що експерти виробляють відносно точні вимірювання, що дозволяє формувати різні угруповання в експертних групах, які обумовлюються багато в чому людськими факторами, насамперед такими, як відмінність поглядів, концепцій, різними науковими школами, характером професійної діяльності тощо.

<u>Узгодженість суджень експертів</u> визначається за допомогою *коефіцієнта конкордації* (*критерію узгодженості*) $0 \le W \le 1$:

$$W = \frac{D(\bar{k})}{D_{\max}} = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{k}_i - \frac{n+1}{2} \right)^2 ,$$

де:

$D(\bar{k})$ – сумарне квадратичне відхилення від середнього значення для кожного середнього рангу факторів:

$$D(\bar{k}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{k}_i - M(\bar{k}) \right)^2 ;$$

$M(\bar{k})$ – середнє арифметичне сум рангів оцінок, одержаних всіма факторами:

$$M(\bar{k}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n+1}{2};$$

$D_{\max}$ – сумарне квадратичне відхилення від середнього значення для середніх рангів факторів при найкращій узгодженості експертів:

$$D_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Коефіцієнт конкордації може набувати значень від 0 до 1: $0 \le W \le 1$.

При $W = 0$ судження експертів повністю розходяться.

При $W = 1$ судження експертів висловлюються одноголосно (повністю співпадають), що на практиці являє собою неможливий випадок.

Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \le W < 0{,}75$ – для технічних об’єктів; $0 \le W < 0{,}5$ – для економічних об’єктів; $0 \le W < 0{,}4$ – для екологічних й соціальних об’єктів), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою. Причиною низької узгодженості експертів може бути або дійсно відсутня спільність думок експертів, або ситуація, коли серед експертів існують групи з високою узгодженістю думок, однак спільні думки їх при цьому є протилежними. В таких випадках для підвищення ступінь довіри можна застосувати наступні кроки:

1) надати експертам досліджувані фактори для повторного ранжування;
2) змінити кількість експертів, що входять в експертну групу;
3) замінити групу експертів.

Сформулюємо **<u>основні переваги та недоліки методу безпосереднього ранжування</u>**, які формують особливості та умови використання методу.

До *недоліків методу* слід віднести наступні:

1) обмеженість кількості факторів, які підлягають ранжуванню. Їх кількість може становити не більше 20. Пов’язано це виключно із можливостями експертів. По суті це призводить до виникнення неточностей (похибок) при використанні методу при великому числі обробок, оскільки зі збільшенням кількості досліджуваних факторів експертам стає важко присвоїти об'єктивні рангові оцінки;

2) високий вплив суб’єктивного фактору експерту (оскільки ранжируваний ряд не є результатом кількісних оцінок факторів, а є результатом суб’єктивної думки відповідного експерту);

3) залишається відкритим питання про те, наскільки далеко за значимістю знаходяться досліджувані об'єкти один від одного.

До *переваг методу* відносяться наступні:

1) низька трудомісткість методу при здійснюванні математичних обчислень;

2) зручність для програмування та потреба в мінімальному обсязі використовуваних ресурсів обчислюовальної техніки;

3) низький рівень використовуваних ресурсів часу для проведення досліджень.

Розглянемо декілька прикладів з використання методу безпосереднього ранжування.

<u>Приклад 1.</u> Нехай маємо судження трьох експертів ($N = 3$), представлених відповідними ранжируваними рядами виду:

– ряд 1-го експерту E_1: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;
– ряд 2-го експерту E_2: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
– ряд 3-го експерту E_3: $x_3 \succ x_1 \succ x_2$

Необхідно за наданими експертами рядами ранжування побудувати матрицю рангових суджень експертів, за якою визначити ітогове ранжування та ступінь узгодженості думок експертів. Зробити відповідні висновки.

Розв’язання:

Побудуємо матрицю рангових суджень експертів. Для цього поставимо у відповідність кожному i-му фактору ранг, який відповідає рангу у ранжируваному ряді, наданими відповідними експертами.

Вважаючи, що ранг i-го фактору відповідає номеру цього (i-го) фактору у ранжируваному ряді, наданим відповідним j-м експертом, та враховуючи відношення переважності (та/або еквівалентності) факторів вихідних ранжируваних рядів, отримаємо матрицю рангових суджень $K = (k_{ij})$ з відповідними рангами k_{ij}.

Так, за рядом $x_1 \succ x_2 \succ x_3$ 1-го експерту E_1 маємо наступні ранги: $1;2;3$;
за рядом $x_2 \succ x_1 \succ x_3$ 2-го експерту E_2 – ранги $2;1;3$; за рядом $x_3 \succ x_1 \succ x_2$ 3-го експерту E_3 – ранги $2;3;1$.

Отже, матриця суджень представляється матрицею виду

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\
E_1 & 1 & 2 & 3 \\
E_2 & 2 & 1 & 3 \\
E_3 & 2 & 3 & 1
\end{array}.$$

Визначимо середні ранги за співвідношенням $\bar{k}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij}\,, \quad i = \overline{1,n}$:

$$\bar{k}_1 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} k_{1j} = \frac{1}{3}(k_{11} + k_{12} + k_{13}) = \frac{1}{3}(1+2+2) = \frac{5}{3},$$

$$\bar{k}_2 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} k_{2j} = \frac{1}{3}(k_{21} + k_{22} + k_{23}) = \frac{1}{3}(2+1+3) = \frac{6}{3} = 2\,,$$

$$\bar{k}_3 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} k_{3j} = \frac{1}{3}(k_{31} + k_{32} + k_{33}) = \frac{1}{3}(3+3+1) = \frac{7}{3},$$

Розраховані середні ранги $\bar{k}_1 = 5/3$, $\bar{k}_2 = 2$, $\bar{k}_3 = 7/3$ дають можливість побудувати ранжируваний ряд.

Для цього визначимо з трьох середніх рангів $\bar{k}_1 = 5/3$, $\bar{k}_2 = 2$, $\bar{k}_3 = 7/3$ мінімальний ранг за співвідношенням $\bar{k}_l = \min\limits_{i=1,\dots,n} \{\bar{k}_i\}$:

$$\bar{k}_1 = \min\left\{\frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}\right\} = \frac{5}{3}.$$

Далі, фактор, що відповідає мінімальному середньому рангу $\bar{k}_1 = \frac{5}{3}$, поставимо на перше місце в ранжируваному ряді.

На друге місце поставиться фактор, значення середнього рангу якого буде мінімальним з решти двох, тобто $\bar{k}_2 = \min\left\{\frac{6}{3}, \frac{7}{3}\right\} = \frac{6}{3}$.

На останнє місце поставимо фактор, значення середнього рангу якого залишилося, тобто $\bar{k}_3 = \frac{7}{3}$.

Отже, отримуємо ранжируваний ряд виду $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

Визначимо узгодженість суджень експертів:

$$W = \frac{D(\bar{k})}{D_{\max}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k}_i - \frac{n+1}{2}\right)^2}{\frac{n^2-1}{12}} = \frac{\frac{1}{3}\left(\left(\bar{k}_1 - 2\right)^2 + \left(\bar{k}_2 - 2\right)^2 + \left(\bar{k}_3 - 2\right)^2\right)}{\frac{8}{12}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{5}{3} - \frac{6}{3}\right)^2 + \left(2-2\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - \frac{6}{3}\right)^2\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{27}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11\,.$$

Оскільки $0 \le W = 0{,}1 \le 0{,}4$, то можна зробити висновок, що судження експертів виявились дуже погано узгодженими. Тим не менш, ітогове ранжування виявилось правильним. Це вийшло за рахунок усереднення суджень експертів, котре виключило їх індивідуальні особливості, а разом з ними і помилки.

Приклад 2. За завданням керівництва підприємства аналізувалися вісім проектів, запропонованих для включення до плану стратегічного розвитку підприємства. Вони позначені: *A, B, C, D, E, F, G, H*. Усі проекти було направлено 12 експертам, включеним до експертної групи, організованої за рішенням правління підприємства. У наведеній нижче табл. 2 представлено ранги восьми проектів, які їм було присвоєно кожним з 12 експертів.

Таблиця 2 – Ранги 8 проектів за рівнем привабливості
для включення до плану стратегічного розвитку підприємства

№ експерта	**Досліджувані проекти**							
	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***
1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

За табл. 2 ранги присвоювалися відповідно до уявлень експертів про доцільність включення проектів у стратегічний план підприємства. Так, експерт надавав ранг 1 найкращому проекту, який обов'язково треба реалізувати; ранг 2 отримував від експерта другий за привабливістю проект, ... , нарешті, ранг 8 – найбільш сумнівний проект, який реалізовувати варто лише в останню чергу.

Зауваження: Експерт №4 вважає, що проекти *C* та *D* є рівноцінними, але поступаються лише одному проекту – проекту *F*. Тому проекти *C* й *D* мали б стояти на другому і третьому місцях та отримати бали 2 й 3. Оскільки вони є рівноцінними, то отримують середній бал (2+3)/2 = 5/2 = 2,5.

Аналізуючи представлені в табл. 2 результати роботи експертів, члени аналітичного підрозділу робочої групи, які аналізували відповіді експертів за завданням правління підприємства, змушені констатувати, що повної згоди між експертами немає, тому дані, наведені в табл. 2, слід піддати ретельнішому математичному аналізу, а, отже, для отримання групового судження потрібне застосування методу безпосереднього ранжування.

Для цього підраховано суму рангів, присвоєних проектам (див. табл. 3). Потім ця сума була розділена на кількість експертів, в результаті розрахований середній ранг.

За отриманими середніми рангами надалі будується ітогове ранжування, виходячи з принципу – чим меншим є середній ранг, тим кращим є проект.

Так, найменший середній ранг, що дорівнює 2,625, у проекту *D*, – отже, у підсумковому ранжуванні він отримує ранг 1. Наступна за величиною сума, що дорівнює 3,125, у проекту *C*, – і він отримує підсумковий ранг 2.

Проекти *B* та *F* мають однакові суми (дорівнюючі 3,25), отже, з точки зору експертів вони є рівноцінними (при наведеному способі зведення разом суджень експертів), а тому мають стояти на 3 й 4 місцях та отримують середній бал (3 +4) /2 = 3,5. Подальші результати розрахунків наведено у табл.3.

Таблиця 3 – Результати розрахунків для рангів, наведених в табл. 2

Обчислювальний показник	**Досліджувані проекти**							
	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***
Сума рангів, $\sum_{j=1}^{N} k_{ij}$	60	39	37,5	31,5	76	39	64	85
Середнє рангів, $\bar{k}_i$	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083
Ітоговий ранг	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8

Отже, ітогове ранжування має вигляд

$$D \succ C \succ B \sim F \succ A \succ G \succ E \succ H \ .$$

Найбільш привабливим проектом, таким чином, є проект *D*, найменш привабливим проектом визначено проект *H*. Оскільки проекти *B* та *F* отримали однакову суму балів, то це означає, що вони є еквівалентними.

Надалі оцінюється узгодженість суджень експертів за використанням коефіцієнту конкордації (провести самостійно).

3.2.2.2 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом парних порівнянь. Визначення узгодженості суджень експертів

Серед методів експертної оцінки, застосовуваних для одержання коефіцієнтів відносної важливості факторів (параметрів, ознак, напряму розвитку і т. ін.), метод парних порівнянь вважається дуже ефективним, оскільки дозволяє визначити відносну важливість факторів, коли безпосереднє ранжування стає важким.

Згідно з цим методом усі фактори порівнюються між собою послідовно, причому кожна наступна оцінка не зв'язана з попередньою.

Нехай *N* експертів ранжирують *n* факторів $x_1, \ldots, x_n$ та отримують ранжирувані ряди.

> *Наприклад, якщо є 3 експерти E_j $(j = 1,2,3)$, яким необхідно проранжирувати 3 фактори x_i $(i = 1,2,3)$, то отримані ранжирувані ряди можуть мати наступний вигляд:*
>
> – *ряд 1-го експерту* E_1: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;
> – *ряд 2-го експерту* E_2: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
> – *ряд 3-го експерту* E_3: $x_2 \succ x_3 \succ x_1$.

Необхідно визначити ітогове ранжування, яке буде узагальнювати судження всіх експертів.

Для цього здійснюються наступні **основні етапи реалізації методу парних порівнянь**:

1) складаються матриці парних порівнянь для кожного експерта;
2) визначається матриця середніх парних порівнянь;
3) визначається середнє значення середнього парного порівняння *i*-го фактора з *l*-м для кожного фактору;
4) визначається ітогове ранжування факторів.

Розглянемо кожний з наведених етапів реалізації методу докладно.

1 етап: ***Складання матриці парних порівнянь для кожного експерта***.

На цьому етапі здійснюється полегшення процедури порівняння наявних факторів, для чого звичайно використовується спеціальна матриця (таблиця) парних порівнянь (табл. 4), в якій фактори (параметри, ознаки, напрями розвитку) розміщуються за горизонталями та за вертикалями (у верхньому рядку та в лівому крайньому стовпці).

Таблиця 4

Фактори	x_1	x_2	…	x_l	…	x_n
x_1	$x_1 : x_1$	$x_1 : x_2$	…	$x_1 : x_l$	…	$x_1 : x_n$
x_2	$x_2 : x_1$	$x_2 : x_2$	…	$x_2 : x_l$	…	$x_2 : x_n$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	$x_i : x_1$	$x_i : x_2$	…	$x_i : x_l$	…	$x_i : x_n$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$x_n : x_1$	$x_n : x_2$	…	$x_n : x_l$	…	$x_n : x_n$

За даною таблицею при використанні методу парних порівнянь попарно порівнюються фактори x_i з x_l з метою визначення у кожній парі найбільш важливого (значущого) фактору. В результаті таких попарних порівнянь факторів x_i з x_l заповнюється наступна таблиця (матриця), у комірки якої вписуються результати (оцінки) q_{il} здійснених порівнянь.

При цьому ранжування в такій постановці відбувається за правилом: якщо фактор i (у рядку) є більш значущим, ніж фактор l (у стовпці), то елементу q_{il} (у комірці il) приписується «+1», в противному випадку – ставиться «–1». У комірках головної діагоналі (q_{il}, $i = l$) проставляються «0», оскільки порівнювальні елементи на головній діагоналі є еквівалентними самі до себе.

Отже, досліднику пропонується попарно проранжирувати фактори, що формально означає, що кожній парі факторів x_i та x_l поставлено у відповідність число

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l ; \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l ; \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l . \end{cases}$$

При цьому $q_{il} = -q_{li}$.

Таким чином, судження кожного j-го експерту представляється у вигляді матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \left\| q_{il}^j \right\|, \quad i, l = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

де: q_{il}^j визначає оцінки q_{il}, отримані за судженням j-го експерта;

кількість матриць Q^j відповідає кількості експертів, тобто N.

<u>2 етап:</u> ***Визначення матриці середніх парних порівнянь.***

На даному етапі отримані на попередньому етапі матриці $Q^j = \left\| q_{il}^j \right\|$ для усереднення суджень експертів зводяться до однієї загальної матриці – матриці середніх парних порівнянь розмірності $n \times n$ виду

$$\overline{Q} = \left\| \overline{q}_{il} \right\|,$$

де $\overline{q}_{il}$ – середнє парне порівняння *i*-го фактора з *l*-м, отримане від усіх N експертів:

$$\overline{q}_{il} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} q_{il}^j, \quad i,l = 1,2,\ldots,n.$$

<u>3 етап:</u> ***Визначення середніх рангів за кожним і-м фактором.***

На даному етапі для остаточного визначення шуканих рангів обчислюються середні ранги за кожним *i*-м фактором

$$\overline{q}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \overline{q}_{il}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Такі середні ранги $\overline{q}_i$ виступають в якості *показників узагальненого судження щодо важливості факторів*: чим більшою є сума *i*-го рядка, тим більш важливе значення має *i*-й фактор.

<u>4 етап:</u> ***Визначення ітогового ранжування факторів за <u>Правилом 1</u>.***

На даному етапі за обчисленими середніми рангами $\overline{q}_i$ будується ранжируваний ряд, в якому на перше місце ставиться фактор з максимальним середнім рангом

$$\overline{q}_v = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \overline{q}_i \right\},$$

тобто фактор x_v (цей фактор є найсуттєвішим), на друге місце ставиться фактор, який має максимальний з решти середній ранг, і т.д.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з *N* експертів. В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) ранжування***.

З метою оцінки ступеня довіри ОПР отримуваному ітоговому ранжуванню визначимо ***узгодженість суджень експертів***, яка встановлюється за коефіцієнтом конкордації $0 \le W \le 1$, який визначається виразом

$$W = \frac{D(\overline{q})}{D_{\max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} \left(\overline{q}_{il} \right)^2,$$

де

$$D(\bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} \left(\bar{q}_{il}\right)^2 ;$$
$$D_{\max} = 1 .$$

При $W = 1$ судження експертів є повністю узгодженими, а при $W = 0$ вони суперечать один одному. Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \le W < 0{,}75$ – для технічних об'єктів; $0 \le W < 0{,}5$ – для економічних об'єктів; $0 \le W < 0{,}4$ – для екологічних й соціальних об'єктів), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою.

Сформулюємо **основні переваги та недоліки методу парних порівнянь**, які формують особливості та умови використання методу.

До *недоліків методу* слід віднести наступні:

1) має місце невеликий вплив суб'єктивного фактору експерту (оскільки ранжируваний ряд не є результатом кількісних оцінок факторів, а є результатом суб'єктивної думки відповідного експерту);

2) залишається відкритим питання про те, наскільки далеко за значимістю знаходяться досліджувані фактори один від одного.

До *переваг методу* відносяться наступні:

1) немає обмеженості кількості факторів, які підлягають ранжуванню;

2) експерт у процесі експертизи зосереджує свою увагу не на всіх факторах відразу, а тільки на двох, які порівнюються в даний момент (це полегшує роботу і сприяє підвищенню якості експертизи).

3) здійснюється велика кількість порівнянь кожного фактору з іншими, за рахунок чого підвищується точність та відкривається можливість вивчення великої кількості ознак);

4) метод дозволяє одержати не тільки середню оцінку фактора, надану кожним експертом, а й дисперсію цієї оцінки, що дає можливість проведення більш глибокого статистичного аналізу;

5) допускається вимірювання нерівномірно змінюваних важливостей показників;

Розглянемо приклад з використання методу парних порівнянь.

Приклад 3. Нехай маємо судження трьох експертів ($N = 3$), представлених відповідними ранжируваними рядами факторів x_i ($i = 1, 2, 3$):

– ряд 1-го експерту E_1: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;

– ряд 2-го експерту E_2: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;

– ряд 3-го експерту E_3: $x_2 \succ x_3 \succ x_1$.

Необхідно з використанням методу парних порівнянь визначити ітогове ранжування, яке буде узагальнювати судження всіх експертів. Оцінити ступінь узгодженості думок експертів.

Розв'язання:

Побудуємо для кожного експерта матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_l & \dots & x_n \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1l} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2l} & \cdots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{il} & \cdots & q_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nl} & \cdots & q_{nn} \end{array} \right\| \end{array}, \qquad i,l = \overline{1,n},$$

$j = \overline{1,N}$.

Використовуючи ранжируваний ряд 1-го експерту проводимо попарне порівняння кожного фактору x_i (елементи рядку) з кожним фактором x_l (елементи стовпця). В залежності від того, який фактор x_i переважатиме (не переважатиме, буде еквівалентним) фактор x_l, у матриці порівнянь Q^1 для цього експерту на перетині відповідних рядків з відповідними стовпцями проставимо числове значення q_{il} за наступним правилом:

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l\ ; \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l\ ; \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l\ . \end{cases}$$

$$q_{il} = -q_{li}\,.$$

Так, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_1 (з 1 стовпця) маємо, що $x_1 \sim x_1$, а, отже, $q_{11} = 0$. Далі, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_2 (з 2 стовпця) маємо (з ранжируваного ряду E_1), що $x_1 \succ x_2$, а, отже, $q_{12} = 1$. Аналогічно, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_3 (з 3 стовпця) маємо (з ранжируваного ряду E_1), що $x_1 \succ x_3$, а, отже, $q_{13} = 1$. Отже, таким чином, заповнено 1 рядок матриці Q^1. Далі, діючи аналогічним чином, заповнюємо 2 й 3 рядки матриці. В результаті, для 1-го експерта отримуємо

$$Q^1 = \left\| q_{il}^1 \right\| = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array},$$

верхній індекс в q_{il}^1 означає, що елементи q_{il} відносяться саме до матриці Q^1.

Аналогічно, для 2-го та 3-го експертів маємо:

$$Q^2 = \| q_{il}^2 \| = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}, \quad Q^3 = \| q_{il}^3 \| = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Далі будуємо матрицю $\overline{Q} = \| \overline{q}_{il} \|$ середніх парних порівнянь $\overline{q}_{il} = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} q_{il}^j$, які являють собою середнє арифметичне відповідних (з однаковими індексами) елементів матриць Q^j, $j = \overline{1, N}$.

Для даного прикладу, елементи 1 рядка матриці $\overline{Q}$ визначаються наступним чином:

$$\overline{q}_{11} = \frac{1}{3}\left(q_{11}^1 + q_{11}^2 + q_{11}^3\right) = \frac{1}{3}(0+0+0) = 0,$$

$$\overline{q}_{12} = \frac{1}{3}\left(q_{12}^1 + q_{12}^2 + q_{12}^3\right) = \frac{1}{3}(1+(-1)+1) = \frac{1}{3},$$

$$\overline{q}_{13} = \frac{1}{3}\left(q_{13}^1 + q_{13}^2 + q_{13}^3\right) = \frac{1}{3}(1+1+(-1)) = \frac{1}{3}.$$

Діючи аналогічно, отримаємо матрицю середніх парних порівнянь

$$\overline{Q} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{array} \right\|.$$

Далі визначимо середні ранги за кожним *i*-м фактором за співвідношенням

$$\overline{q}_i = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{q}_{il}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Маємо:

$$\overline{q}_1 = \frac{1}{3}\left(\overline{q}_{11} + \overline{q}_{12} + \overline{q}_{13}\right) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9},$$

$$\overline{q}_2 = \frac{1}{3}\left(\overline{q}_{21} + \overline{q}_{22} + \overline{q}_{23}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$\overline{q}_3 = \frac{1}{3}\left(\overline{q}_{31} + \overline{q}_{32} + \overline{q}_{33}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0\right) = -\frac{2}{9}.$$

Розраховані середні ранги $\overline{q}_1 = 2/9$, $\overline{q}_2 = 0$, $\overline{q}_3 = -2/9$ дають можливість побудувати ітоговий ранжируваний ряд. Для цього визначимо з трьох середніх рангів $\bar{q}_1 = 2/9$, $\bar{q}_2 = 0$, $\bar{q}_3 = -2/9$ максимальний ранг за співвідношенням $\bar{q}_v = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{\bar{q}_i\}$:

$$\bar{q}_1 = \max\left\{\frac{2}{9}, 0, -\frac{2}{9}\right\} = \frac{2}{9}.$$

Далі, фактор, що відповідає максимальному середньому рангу $\bar{q}_1 = 2/9$, поставимо на перше місце в ранжируваному ряді.

На друге місце поставиться фактор, значення середнього рангу якого буде максимальним з решти двох, тобто $\bar{q}_2 = \max\left\{0, -\frac{2}{9}\right\} = 0$.

На останнє місце поставимо фактор, значення середнього рангу якого залишилося, тобто $\bar{q}_3 = -2/9$.

Отже, отримуємо ітоговий ранжируваний ряд: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

Визначимо узгодженість суджень експертів:

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{\max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} (\bar{q}_{il})^2 = \frac{1}{3(3-1)} \sum_{i,l=1}^{3} (\bar{q}_{il})^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11.$$

Оскільки $0 \le W = 0{,}1 \le 0{,}4$, то можна зробити висновок, що судження експертів виявились дуже погано узгодженими. Тим не менш, ітогове ранжування виявилось правильним. Це вийшло за рахунок усереднення суджень експертів, котре виключило їх індивідуальні особливості, а разом з ними і помилки.

Існує друге правило отримання ітогового ранжування. Розглянемо його детально.

Визначення ітогового ранжування факторів за <u>Правилом 2</u>.

Кожна перевага q_{il} порівнюється з деяким обраним порогом $\delta\ (0 < \delta < 1)$. В результаті виходить наступне перетворення матриці середніх переваг $\bar{Q}$ в контрастну матрицю, елементами якої є:

$$\varphi_{il} = \varphi(q_{il}), \quad i \neq l = 1, \ldots, n,$$

де:

$$\varphi(q) = \begin{cases} -1, \text{якщо } q \le -\delta. \\ 0, \text{якщо } |q| < \delta. \\ 1, \text{якщо } q \ge \delta. \end{cases}$$

За контрасною матрицею будується ранжируваний ряд. Після цього визначається значення оптимального порога δ на «порозі протиріч», тобто таке значення δ*, невелике змінення якого призводить до протиріччя в ранжируваному ряду (правила транзитивності не виконуються). А ранжируваний ряд отриманий при значенні δ* і є шуканим ітоговим рядом.

<u>Приклад 4.</u> Нехай матриця середніх переваг $\overline{Q}$ має вигляд, приведений на рис.1, *а*. Нехай $\delta = 0{,}7$. Тоді контрастна матриця дає наступний ряд ранжирування:

$$x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1 \qquad (*)$$

Нулі в цій матриці означають не тільки еквівалентність, але й неяскраво виражену перевагу. Через це отримане ранжирування є несуперечливим. Згідно з алгоритмом, понизимо поріг.

При $\delta = 0{,}5$ контрастна матриця (*в*) вже має суперечення, оскільки мінімальний поріг, при якому не виходить суперечень, дорівнює $\delta^* = 0{,}52$ (див. рис. 1, *г*), що приводе до ранжируваного ряду (*), тобто, обравши поріг $\delta = 0{,}52$ та 0,7, отримаємо той самий ряд (*).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	-0,7	-0,44	-0,52	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1
x_2	0,7	0	-0,74	0,5	1	0	-1	0	1	0	-1	1	1	0	-1	0
x_3	0,44	0,74	0	-0,78	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1
x_4	0,52	-0,5	0,78	0	0	0	1	0	1	-1	1	0	1	0	1	0
	а)				б)				в)				г)			

Рис. 1. Матриця середніх переваг (а);
контрасні матриці при δ = 0,7 (б), δ = 0,5 (в) і δ* = 0,52 (г)

Застосування першого правила до цього прикладу дає результат, який є відмінним від (*). Це означає, що або $x_3 \sim x_2$, або для більш точного рішення необхідно отримати нові данні, які б дозволили вияснити, який з рядів ранжирування має місце у дійсності

Питання для самоконтролю

1. Що розуміється під експертним оцінюванням?
2. Що називається методом експертних оцінок? Що таке експертна оцінка?
3. Що таке ранг? Яким чином його визначають?
4. Сформулюйте поняття ранжування.
5. Які існують способи побудови ранжируваного ряду?
6. У чому полягає метод безпосереднього ранжирування?
7. Яким чином будується матриця рангових суджень експертів?
8. Як знайти ітогове ранжування методом безпосереднього ранжирування?
9. Охарактеризуйте основні етапи використання методу парних порівнянь.
10. Як будуються матриці парних порівнянь?
11. Як будується матриця середніх парних порівнянь?
12. Як знайти ітогове ранжування методом парних порівнянь?
13. В чому полягає сутність коефіцієнту конкордації та якими є його границі змінення?

3.Моделі та моделювання

План лекції

3.1. Класифікація моделей 45
3.2. Ідеальні (абстрактні) моделі 45
3.3. Матеріальні моделі 47
3.4. Відношення між моделлю і реальністю (різниці та збіжності) 48
3.5. Моделі складних систем 49
3.6. Модель типу "чорний ящик"..50
3.7. Модель типу „склад системи” 50
3.8. Модель типу „структура схеми”...51
3.9. Модель типу „структурна схема системи”..52
3.10. Динамічні моделі систем 52
3.11. Кваліметрична основа теорії систем..53
3.12. Математичні аспекти побудови моделей складних систем 54
3.13. Оцінка адекватності моделі 55
Задачі: 56
Контрольні питання 56

Модель (лат. – міра, зразок) – це деякий об’єкт, який за певних умов замінює об’єкт, який є оригіналом, відтворюючи потрібні користувачеві властивості та характеристики оригінала, має за цих умов істотні переваги користування (наочність, оглядність, доступність випробувань та ін.).

Моделювання – це дослідження певних процесів, явищ чи систем (об'єктів) шляхом побудови та вивчення їх моделей; використання моделей для визначення чи уточнення характеристик та раціоналізації способів побудови знову створюваних об’єктів.

Моделювання – це одна з основних категорій пізнання. На ідеї моделювання базується будь-який метод наукового дослідження, як теоретичний (коли використовуються абстрактні моделі), так і експериментальний (що використовує предметні моделі).

Будь-яка діяльність людини має цільовий характер. Ціль – це образ бажаного майбутнього, тобто модель стану, на дослідження якого спрямована діяльність.

Системність діяльності виявляється у тому, що вона організується за певним планом, або алгоритмом. Алгоритм є моделлю діяльності, що планується. Тобто моделювання є неминучою процедурою у всякій доцільній діяльності, а модель є цільовим відтворенням оригінала.

Ціль моделювання визначає, які властивості оригінала і у якій мірі (з якою точністю) повинні бути відображені у моделі.

3.1. Класифікація моделей

Підставою для класифікації моделі є ціль моделювання. Цільова орієнтація моделей дають змогу класифікувати їх за типами цілей, за засобами відтворення (реалізації), за етапами життєвого циклу.

За типами цілей розрізняють моделі:

- пізнавальні; прагматичні.

За тривалістю у часі розрізняють моделі:

- статичні; динамічні.

За засобами відтворення розрізняють моделі:

- ідеальні (абстрактні); матеріальні (реальні, речові).

Різниця між пізнавальними та прагматичними моделями полягає у їх відношенні до оригіналу у процесі діяльності.

Пізнавальні моделі є формою організації та подання знань, засобом з'єднання нових знань з наявними. Якщо у процесі створення пізнавальної моделі деякого реального об'єкта спостерігаються розходження, то здійснюється корекція моделі з метою наблизити її до реальності.

Прагматичні моделі є засобом управління практичними діями шляхом подання (представлення) потрібних дій, чи їх результату, тобто є робочим поданням цілі. Тому у випадку виявлення розбіжності між прагматичною моделлю та реальним об’єктом основні зусилля повинні бути спрямовані на корекцію (зміну) реальності. Прагматичні моделі носять нормативний характер, виконують роль стандарту, зразка, під який підганяються реальні об’єкти.

3.2. Ідеальні (абстрактні) моделі

Ідеальними називають моделі, побудовані засобами мислення, свідомості. До цих моделей відносяться усі мовні конструкції, що сприяють встановленню відносин між людьми.

Існує декілька рівнів мовних конструкцій, що відрізняються між собою рівнем абстракції, структурованості та точності передачі інформації.

Природна мова є універсальним засобом побудови абстрактних конструкцій (моделей). Ця універсальність забезпечується можливістю введення до мови нових слів і можливістю ієрархічної побудови все більше розвинених мовних моделей (слово – речення – текст; поняття – відношення – визначення – конструкції).

Окрім цього, універсальність мови досягається тим, що мовні конструкції характеризуються неоднозначністю, розпливчастістю, розмитістю. Тому з'являється “професійна мова”, що реалізується в обмежених людських колективах: мова медиків, фізиків, льотчиків та ін. Найбільш високо спеціалізованою є мова математики, що має визначеність, яка є максимально досяжною за нинішніх умов, і точність.

Ідеальні моделі можна розділити на знакові (семантичні) та інтуїтивні. За способом подання семантичних моделей розрізняють: математичні, логічні,_графічні моделі. Математичні моделі відіграють певну роль серед інших форм знакових моделей, проте їх важко чітко відокремити від логічних та графічних, внаслідок їх тісного переплетення. Тому часто говорять про логіко-математичні моделі.

За обчислювальним характером різних показників, відношень та ін. логіко-математичні моделі поділяються на аналітичні, алгоритмічні та імітаційні.

Аналітичні моделі передбачають реалізацію моделі у вигляді алгебраїчних, диференціальних та інших рівнянь, що пов’язують вихідні змінні з вхідними, доповненими системою обмежень. При цьому передбачається наявність однозначної обчислювальної процедури отримання точного розв'язку рівнянь.

При алгоритмічному підході математична модель, що використовується, не припускає точного розв'язку і змушує звертатися до різних наближених, рекурентних методів, ітеративних процедур пошуку наближеного розв'язку. Це типовий підхід до створення моделей складних систем.

Основним типом математичних моделей складних систем є імітаційні моделі. Імітаційна модель являє собою певну обчислювальну процедуру, що описує об'єкт аналізу, його ознаки та дії (процеси), що викликають зміну ознак об'єктів, або появу та зникнення самих об'єктів. Імітаційна модель дає змогу з будь-якою заданою точністю параметрично відтворити систему довільної складності. Основними обмеженнями при створенні цих моделей є ресурси пам'яті і часу. Головним засобом реалізації імітаційних моделей є ЕОМ.

Графічні моделі передбачають використання графічної форми подання інформації про логіко-математичні залежності між показниками системи. Сучасні комп'ютерні технології дають змогу наглядно подати багатовимірні форми зв’язку (функціональні, стохастичні, логічні), використовуючи тривимірний простір та колірну палітру.

Інтуїтивні моделі будуються на вербальному (описовому) рівні. Ці моделі не встановлюють суворі кількісні співвідношення між явищами, що моделюються, обмежуючись лише аналізом якісних узагальнених понять, що відтворюють лише загальні тенденції розвитку явищ, напрямки змін властивостей об’єктів, що вивчаються, та ін.

Такий підхід здійснюється з метою висунення різних гіпотез поведінки об'єктів складних систем, формування евристик відносно взаємовідносин між активними елементами системи та їх розвитку.

За способом формування евристик розрізняють такі типи інтуїтивних моделей: сценарій; операційна гра; розумовий експеримент.

Інтуїтивне моделювання є основним методом моделювання мета-системи.

3.3. Матеріальні моделі

Ресурси для створення матеріальних моделей отримують із середовища, що нас оточує. Щоб матеріальна модель могла замінити оригінал у процесі цілеспрямованої діяльності, необхідно встановити відношення подібності між моделлю та оригіналом. Розрізняють три типи подібності: пряма (фізична); непряма; умовна.

Прикладами прямої (фізичної) подібності є голографічний знімок об'єкта; скульптурний портрет людини; модель літака; копія витвору мистецтва (картини, шкатулки, скульптури, та ін.).

Міра прямої подібності може бути різною, але тільки за умови прямої подібності можлива взаємна заміна моделі та оригіналу, що є такою, яка важко виявляється.

Непряма подібність встановлюється шляхом виявлення активно існуючих у природі аналогій між процесом, що розглядається, та іншим процесом.

Третій тип подібності – умовна; вона встановлюється в результаті угод. Прикладами умовної подібності є: паспорт (офіційна модель власника); гроші (модель вартості); креслення (модель виробу); сигнали (моделі повідомлень); результати психологічного тесту (модель людини), та ін.

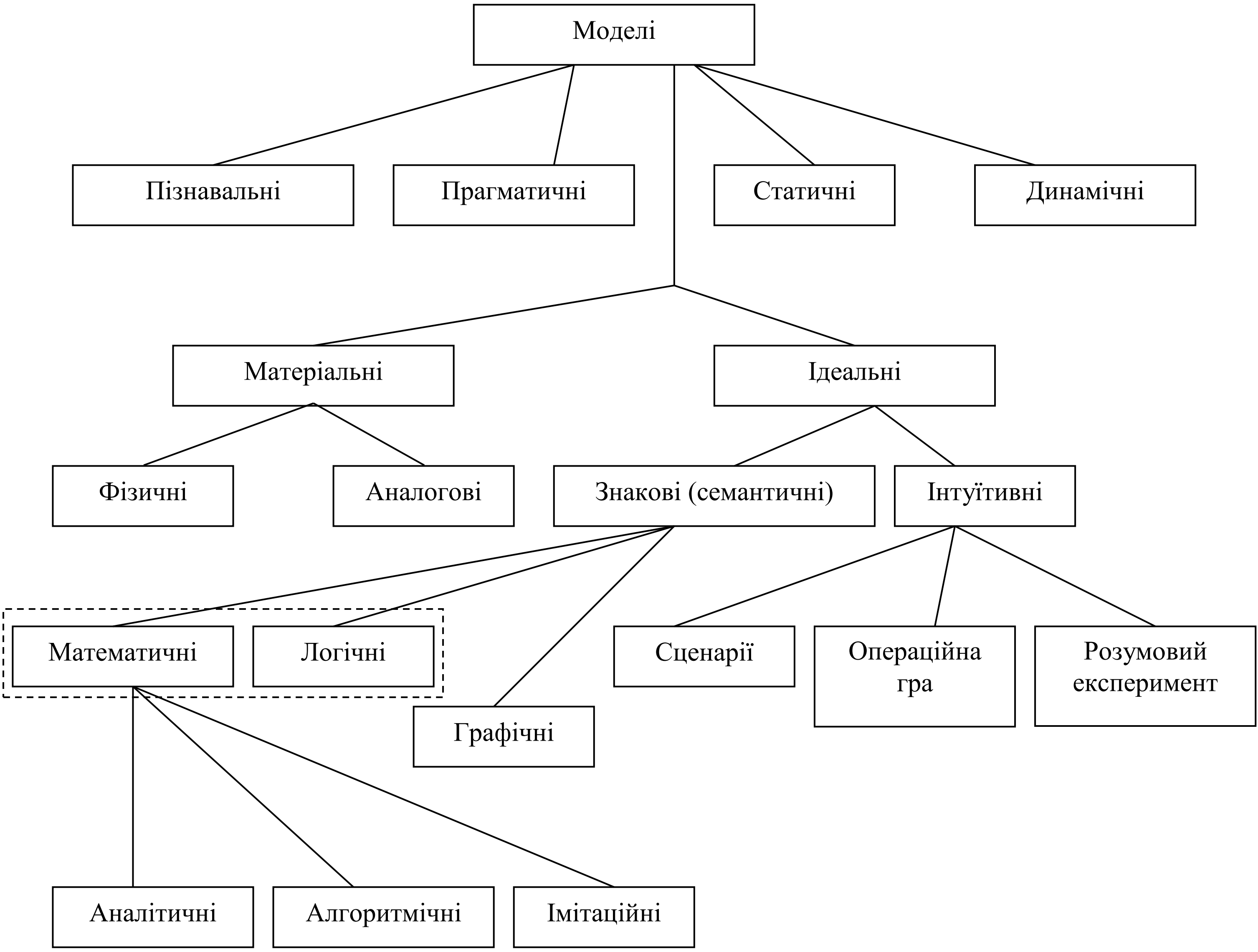


Рис. 2.1. Класифікація моделей.

3.4. Відношення між моделлю і реальністю (різниці та збіжності)

Цінність моделювання визначається в процесі виявлення відношень між оригіналом і моделлю. Необхідно знати, які властивості моделі дають змогу, у певному сенсі, ототожнювати модель та оригінал, та яким є вимір їх розбіжності.

Основною властивістю будь-якої моделі є скінченність. Скінченність моделей визначається перш за все скінченністю наших ресурсних можливостей (енергетичних, матеріальних, часових). Крім того, модель є скінченою, оскільки вона відображає оригінал через скінчену сукупність його властивостей. Спрощеність моделей призводить до відмінності між моделлю та оригіналом, міру припустимої відмінності можна оцінити, якщо співвіднести її з метою моделювання. Тому для оцінки відповідності моделі та оригінала вводиться поняття "адекватність моделі".

Адекватною називають таку модель, для якої вимоги повноти, точності та істинності моделі виконуються не взагалі у повній мірі, а тільки у тій мірі, яка призводить до досягнення мети.

При побудові моделей необхідно отримати достатньо ясні відповіді на питання: що відомо точно (достовірно)?; що відомо з оцінюваним ступенем невизначеності (з відомою імовірністю)?; що відомо з невизначеністю, що не піддається кількісному оцінюванню; що відомо про те, чого ми не знаємо.

Моделі можуть відображати об'єкти з різним ступенем змістовності. Виділяють чотири рівні відношень (основних) між моделлю та оригіналом.

Перший рівень. До нього відносяться функціональні моделі, що відображають як зовнішні прояви діяльності, так і механізми регуляції.

Другий рівень утворюють поведінкові моделі, що відображають відношення "вхід – вихід" системи.

До третього рівня відносяться моделі, що виокремлюють з різноманітності "вхід – вихід" окремі взаємопов'язані характеристики.

На четвертому рівні розташовуються моделі, що виражають відношення деяких параметрів оригінала у формі функціональних (аналітичних, статичних) залежностей (наприклад, закон Ома, та ін.).

Властивість інгерентності (від англ. inherence – міцно пов'язаний з чимось; що існує, як невід'ємна частина чогось), яка сприяє успішному перебігу процесу моделювання. Для того, щоб модель дала змогу досягти цілей, задля яких вона створювалася, необхідно, щоб існували умови, які сприяють цьому. Відсутність таких умов (такого сприятливого середовища) призводить до того, що модель втрачає ці властивості, консервує їх, що істотно знижує результати моделювання. Неузгодженість середовища та моделі призводить до того, що середовище відкидає модель, тому при її розробці повинні бути передбачені комунікаційні канали зв'язку моделі із середовищем, які припускають не тільки пристосування моделі до середовища, але й середовища до моделі.

3.5. Моделі складних систем

Уся багатоманітність природних та штучних систем, що оточують людину, може бути описаною обмеженим числом принципово різних типів моделей. Такі моделі у системному аналізі називають формальними моделями. Вони мають достатньо високий рівень абстракції і використовуються як "шаблон", за допомогою якого дослідник приступає до побудови змістовної моделі системи. Змістовною називають формальну модель, що наповнена змістовною сутністю із заданої предметної галузі, тобто вербально (словесно) "пов'язану" з об'єктом моделювання.

Рівень абстракції формальних моделей може бути різним. Чим вищим є цей рівень, тим більш широкий клас систем може описуватися цими моделями. До формальних моделей високого рівня абстрагування відносяться чотири типи моделей: "чорний ящик", "склад системи", "структура системи", "структурна схема системи" (модель типу "білий ящик").

3.6. Модель типу "чорний ящик"

Функціональна модель типу “чорний ящик”, рис. 2.2.

Рис. 2.2. Формальна модель системи типу “чорний ящик”.

Вона містить такі компоненти: межі системи; входи системи; виходи системи; оточуюче (зовнішнє) середовище.

Ця модель є вихідною при побудові моделей складної системи і акцентує увагу дослідника на взаємодії системи із зовнішнім середовищем. Ця взаємодія здійснюється впливом цілей системи (цільового продукту) на зовнішнє середовище (іншу систему). Цільові продукти системи – це виходи системи. Зовнішнє середовище виявляє дію на систему через ресурсне забезпечення, яке дає змогу системі реалізувати свої цільові функції. Такі зв’язки зовнішнього середовища із системою називають входами системи. Сама система зображується у вигляді прямокутника („непрозорого ящика”), причому вміст („начинка”) цього ящика не розкривається, тому модель називається „чорним ящиком”. Увага звертається тільки на межі системи, які підкреслюють цілісність системи і відокремленість її від зовнішнього середовища. При побудові моделі дослідник відбирає з множини факторів системи тільки деяку їх кількість, яка включається до списку входів та виходів. Критерієм відбору слугує цільове призначення моделі, значущість того чи іншого зв’язку по відношенню до цілі. Ця модель є першим етапом моделювання, але й має важливе самостійне значення. Ще одна перспективна галузь її застосування пов’язана з дослідженням систем у їх природному стані, коли втручання у її функціонування неприпустимо, чи небажано. Цією моделлю доводиться обмежуватися з причини відсутності інформації про внутрішній устрій та стан системи, що аналізується.

3.7. Модель типу „склад системи”

Розглядаючи систему як щось цілісне та уособлене від зовнішнього середовища, дослідник описує зовнішні властивості системи (по відношенню до зовнішнього середовища). Сама система, її внутрішній „устрій” є, як правило, неоднорідною, що робить необхідним розрізняти внутрішні частини, тобто структурувати систему. Рівень та глибина структуризації залежить як від самої системи, так і від цілей, що стоять перед дослідником. У системі розрізняють елементи (ЕЛ) і підсистеми різних рівнів. Підсистеми складаються з різного набору елементів (рис.)

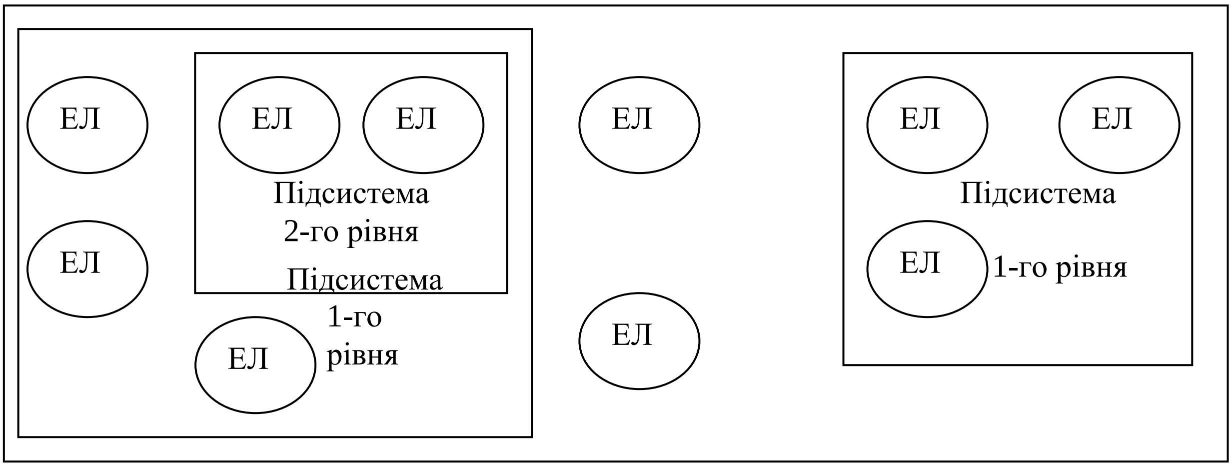


Рис. 2.3. Формальна модель типу „склад системи”.

Побудова змістовної моделі системи на практиці є непростою задачею, її конкретний вигляд залежатиме від цілей моделювання, ступеня компетентності суб’єкта моделювання; рівня інформованості суб’єкта моделювання та спеціаліста-консультанта; необхідної глибини структуризації системи, що моделюється. Модель „склад системи“ повинна відповісти на питання про границі системи більш чітко, ніж модель „чорного ящика”, хоч це буває непросто.

3.8. Модель типу „структура схеми”

Реальне число зв’язків між будь-якими системами чи їх елементами є дуже великим, може вважатися нескінченним. Однак, при побудові пізнавальних і прагматичних моделей систем для досягнення потрібної мети використовуються ті зв’язки, вплив яких або можна оцінити, або наявність яких забезпечує потрібний рівень адекватності моделей. Тому розглядати модель “структура системи” безвідносно до сукупності елементів системи (модель „склад системи”) неправомірно. Тому ця модель будується після або разом з моделлю „склад системи”. Самостійну роль може відігравати етап вивчення різних структур, їх переваг і недоліків у контексті з елементарним складом системи.

Одна і та ж система може бути поданою різними структурами в залежності від стадії пізнання об’єкта чи процесу їх розгляду, цілей створення. У процесі дослідження чи проектування структура системи може змінюватися. Структурні моделі системи можуть бути засобом їх дослідження.

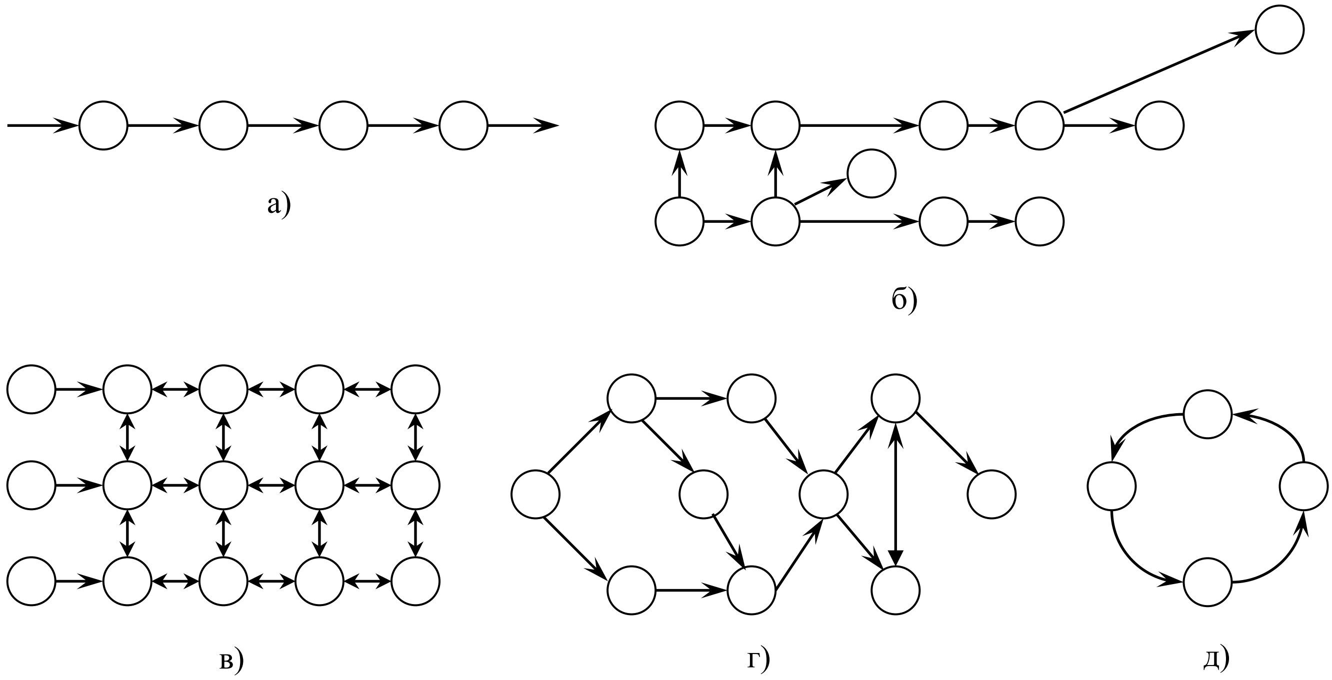


Рис. 2.4. Різноманітні типи структур: а) лінійна; б) дерево видна; в) матрична; г) мережна; д) кільцева.

3.9. Модель типу „структурна схема системи”

Завершальною і найбільш повною моделлю системи є модель, що називається „структурною схемою системи”, яка представляє собою сукупність (з’єднання) трьох розглянутих раніше моделей: чорного ящика; складу та структури. У цій моделі описуються: всі елементи системи (склад); всі зв’язки системи: внутрішні (структура), зовнішні (входи, виходи); границі системи; параметри зовнішнього середовища; параметри внутрішнього середовища.

Основною проблемою побудови моделей складних систем є знаходження компромісу між простотою опису об’єкта та ступенем його деталізації. Один з шляхів розв’язку цієї проблеми – задавання системи сімейством моделей, кожна з яких описує поведінку системи з точки зору відповідного рівня абстрагування. Для кожного рівня існують характерні особливості, закони та принципи, за допомогою яких описується поведінка системи на цьому рівні. Таке уявлення називають стратифікованим, а рівні страгірування – стратами.

3.10. Динамічні моделі систем

У розглянутих вище моделях час t як характеристика не розглядався. Такі моделі називаються статичними. Більш повно систему будуть описувати ті моделі, які дають уявлення про зміну характеристик системи у часі. Такі моделі називають динамічними.

Поняття „динаміка системи” інтерпретується неоднозначно. Розрізняють три типи динаміки системи: функціонування, ріст, розвиток. Під функціонуванням розуміють процеси, які відбуваються в системі для того, щоб система реалізовувала свою ціль. Під ростом системи розуміють таке її функціонування, коли відбуваються якісні зміни деяких характеристик системи, що реалізують ті ж функції для досягнення тієї ж цілі (або цілей).

Під розвитком розуміють такі зміни в системі, коли відбуваються якісні зміни в ній. Це, як правило, пов’язано із змінами цілей системи. Досягнення нових цілей потребує від системи нових функцій, що потребує в свою чергу від підсистем, агрегатів та елементів системи нових властивостей. Ріст та розвиток системи необов’язково є супутніми один одному. Будь-яка складна система зазвичай рідко знаходиться в якійсь одній динамічній фазі, частіше мають місце всі три фази динаміки системи, тобто система функціонує, росте та розвивається одночасно, тому побудова динамічних моделей системи завжди є складною.

У самому загальному вигляді динамічну модель можна описати так: вводять поняття „стан системи” як деякої „внутрішньої” характеристики системи. Зазвичай стан системи характеризується набором величин $z_1(t),\ldots, z_n(t)$, які утворюють вектор $\vec{z}(t)$, який є функцією часу. Вектор входу системи $\vec{x}(t) = (x_1(t),\ldots, x_n(t))$ та вектор виходу системи $\vec{y}(t) = (y_1(t),\ldots, y_n(t))$ також є функціями часу. У простому випадку вектори входу $\vec{x}(t)$, виходу $\vec{y}(t)$ та стану $\vec{z}(t)$ пов’язані між собою співвідношенням $\vec{y}(t) = f(\vec{x}(t), \vec{z}(t))$, де f – деяка функція. Тобто динамічна модель системи – це сукупність співвідношень, що визначають вихід системи в залежності від входу та стану системи (рис.).

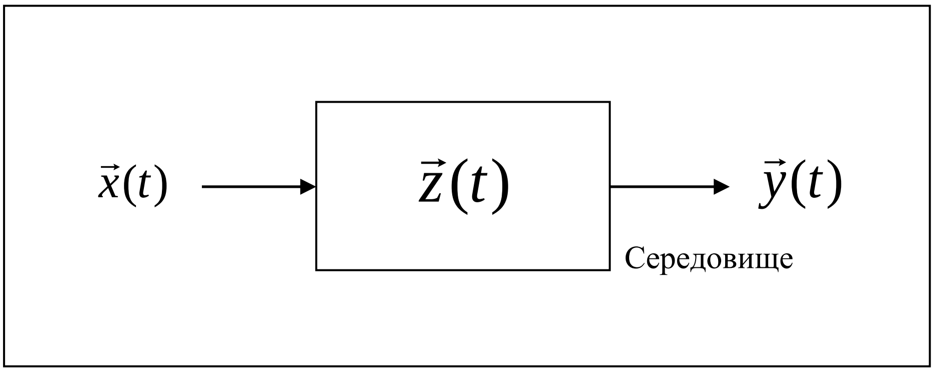


Рис. 2.5. Динамічна модель системи.

3.11. Кваліметрична основа системології

Найбільш повною, об’єктивною характеристикою будь-якого об’єкта (системи, процесу, явища, та ін.) є якість.

Якість – це філософська категорія, що виражає істотну визначеність об’єкта, завдяки якій він є саме цим, а не іншим.

Якість – це складна (комплексна) характеристика, що являє собою сукупність різних властивостей об’єкта, що проявляються у взаємодіях об’єкта із зовнішнім середовищем. Властивості якості можуть бути складними і простими. Рівень структуризації властивостей визначається рівнем декомпозиції моделі об’єкта. Кожна з властивостей якості об’єкта (складна чи проста) є якісною характеристикою об’єкта. Показник властивості якості – це кількісна характеристика (вимір) цієї якості; значення (величина) показника повинно бути тим більшим, чим більшим є вимір даної властивості.

3.12. Математичні аспекти побудови моделей складних систем

До характерних особливостей складних систем відносяться: велике число взаємопов’язаних елементів і підсистем; складність функцій системи у досягненні цілі; багато вимірність системи внаслідок чисельних зв’язків між підсистемами; взаємодія із зовнішнім середовищем; багатоманітність фізичної природи підсистем та елементів; багато показників властивостей якості системи; слабка структурованість властивостей системи; наявність множини критеріїв ефективності функціонування системи; розгалуженість мережі інформаційних потоків та ієрархічність структури управління системою; неможливість широкого застосування класичних методів аналізу системи внаслідок низького рівня формалізації процесів у системі; існування ознак системи у цілому, відсутніх у підсистемі (властивість емерджентності); великий ступінь невизначеності інформаційних характеристик стану системи.

Тобто немає можливості підходу до побудови моделі складної системи з позицій класичного математичного моделювання.

Моделі складних систем базуються на: математичному аналізі; теорії імовірності; математичній статистиці; теорії надійності та ефективності, теорії ігор, ТМО, теорії корисності та розпізнавання образів, теорії інформації, теорії управління, теорії оптимізації, та ін.

Основним методом побудови математичних моделей є ідентифікація. Задача ідентифікації формулюється наступним чином: за результатами спостережень за входами та виходами системи, побудувати оптимальну (у смислі певного критерію) модель; вважається, що система знаходиться у формальному режимі функціонування, тобто за обставин випадкових збурень та завад.

Якість ідентифікації залежить від співвідношення двох факторів: обсягу апріорної інформації про склад та структуру об’єкта; обсяг виміряної інформації.

Апріорні відомості допомагають визначити структуру моделі, тобто її вигляд (число входів і виходів, характер зв’язку між ними). Цю процедуру називають ідентифікацією у широкому смислі чи структурною ідентифікацією. Задачу визначення параметрів моделі за спостереженнями за функціонуванням об’єкта за заданою структурою моделі називають ідентифікацією у вузькому_смислі чи параметричною ідентифікацією. Для ідентифікації об’єктів стохастичної природи застосовують методи математичної статистики, що лежать у основі теорії оцінювання. Її основна задача – оцінка параметрів стохастичного об’єкта за спостереженнями при випадкових завадах.

Інший напрям застосування математичної статистики для цілей ідентифікації статичних об’єктів є теорія планування експерименту. Третій підхід – методи теорії систем.

3.13. Оцінка адекватності моделі

Адекватністю називають властивість моделі, яка полягає у можливості відтворення нею з необхідною повнотою тих властивостей якості об’єкта, які є істотними для цілей даного дослідження. Вимога адекватності моделі та об’єкта – це необхідна умова для переходу від дослідження об’єкта до дослідження моделі та подальшого перенесення результатів з моделі на об’єкт досліджень (дисперсія $D = \left(\frac{1}{n-\ell}\right)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2$).

Задачі:

1. Сформулювати поняття моделі та моделювання.
2. Пояснити, в чому полягає сутність пізнавальних та прагматичних моделей.
3. Вказати помилку у висловлюванні: «різниця між пізнавальними та прагматичними моделями полягає у їх відношенні до оригіналу».
4. Пояснити сутність розділення ідеальних моделей на знакові та та інтуїтивні.
5. Охарактеризувати сутність імітаційних моделей.
6. Навести розгорнуту схему класифікації моделей.
7. Сформулювати і проінтерпретувати поняття «динаміка системи».
8. Пояснити сутність поняття «якість».

Контрольні питання

1. В чому полягає ціль моделювання?
2. Які моделі називають ідеальними?
3. В чому полягає цінність моделювання?
4. Які компоненти містить модель типу «чорний ящик».
5. На що звертається увага при побудові моделей типу «чорний ящик»?
6. Які зв'язки використовуються при побудові пізнавальних і прагматичних моделей?
7. Що собою представляє модель типу «структурна схема системи»?
8. Які типи понять «динаміка системи» використовуються при побудові динамічних моделей систем?
9. На яких галузях науки базуються моделі складних систем?
10. Що називається адекватністю моделі?

4. Математичне моделювання систем з детермінованими структурою та функціями (детермінованих систем)

Система називається *детермінованою*, якщо результат спостереження над нею, за умови багаторазового повторення експерименту за незмінних умов, є одним і тим же (однозначним). Будь-якому реальному процесу притаманні випадкові флуктуації, проте вибір детермінованої чи імовірнісної математичної моделі є справою вибору дослідника, що визначається наявністю чи відсутністю намірів враховувати випадкові фактори.

В процесі класифікації можна виходити із способу подальшого використання моделі для вивчення складної системи, відповідні моделі поділяються на ***аналітичні*** та ***імітаційні.*** Аналітичні моделі характеризуються тим, що процеси функціонування елементів складної системи можна подати у вигляді певних функціональних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних, інтегрально-диференціальних, скінченно-різницевих, логіко-алгебраїчних, та ін. Аналітична модель досліджується: *аналітично* (шляхом отримання явних залежностей для величин, які слід визначити); *чисельно* (шляхом отримання числових результатів за умови конкретних початкових даних); *якісно* (шляхом знаходження певних властивостей розв'язку, зокрема оцінки стійкості розв'язку).

Останнім часом набуло поширення ***комп'ютерне*** **моделювання** процесів. В цьому випадку замість аналітичної моделі досліджуваного процесу використовується ***алгоритмічний опис*** процесу її функціонування з використанням алгоритму, призначеного для реалізації на комп'ютері. Проте найбільш повний і вичерпний опис можна отримати тоді, коли отримані явні залежності, які пов'язують невідомі величини, які слід визначити, з параметрами системи та початковими умовами. Як правило, їх можна отримати лише для простих систем. Якщо ж система є достатньо складною, то аналітичний розв'язок наштовхується на значні, під час непереборні, складнощі. В цьому випадку, намагаючись отримати аналітичний розв'язок, йдуть на зумисне спрощення початкової моделі, задля того, щоб мати можливість вивчити деякі загальні властивості системи. В окремих випадках дослідника влаштовують ті висновки, які можна зробити на підставі якісних методів аналізу математичної моделі.

Для отримання аналітичних розв'язків використовують потужні математичні методи. Якщо ж досліджувана система є достатньо складною, то задля отримання аналітичного розв'язку на модель накладаються жорсткі обмеження, вдаються до спрощень. Часто доводиться нехтувати деякими особливостями системи, від чого створена модель перестає відповідати своєму основному призначенню – бути засобом вивчення складної системи, яка вивчається. Проте все ж намагаються розробляти таку математичну модель, яка забезпечує хоч і грубий, але простий, доступний для огляду, розв'язок задачі, що розглядається. Цей розв'язок використовується для отримання точніших розв'язків іншими методами.

Чисельні методи, у порівнянні з аналітичними, можна застосувати до більш широкого кола функціональних рівнянь, проте отримані розв'язки мають частковий характер, вони не дають змоги отримати висновки загального типу. Ефективність використання цих методів останнім часом зростає в зв'язку з впровадженням сучасної комп'ютерної техніки як в задачах розрахункового типу, так і в задачах управління та моделювання структури складних систем.

3.1. Системи, що описуються звичайними диференціальними рівняннями

Диференціальні рівняння використовується для моделювання систем та явищ різної природи: механічні, електричні, економічні, та ін. Так, наприклад, малі коливання маятника, рис. 3.1, описуються диференціальним рівнянням

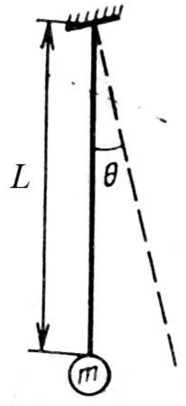


Рис. 3.1. Схема маятника

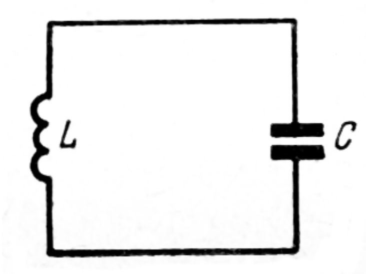


Рис. 3.2. Схема електричного коливального контуру

$$m \cdot \ell^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + m \cdot g \cdot \ell \cdot \theta = 0. \qquad (3.1)$$

Рівняння (3.1) є математичною моделлю вільних коливань маятника, з неї можна отримати всю потрібну інформацію про рух маятника, зокрема визначити період коливань T, та інші величини:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,. \qquad (3.2)$$

Для процесів в електричному коливальному контурі, рис. 3.2, має місце модель типу:

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0. \qquad (3.3)$$

де q – миттєва величина заряду на обкладинках конденсатора.

З рівняння (3.3) також можна отримати всю потрібну інформацію щодо потрібних величин, які характеризують досліджуваний процес, зокрема - період електричних коливань:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}. \qquad (3.4)$$

Порівнюючи (3.1) та (3.3), а також (3.2) та (3.4), робимо висновок, що вони за сутністю є однаковими, якщо l замінити на L, g - на $1/C$, а θ - на q. Це означає, що різні явища можуть описуватися диференціальними рівняннями одного і того ж типу, конкретно – диференціальними рівняннями другого порядку:

$$a_0 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot y = 0. \qquad (3.5)$$

В цьому рівнянні y – узагальнена координата, яка визначає стан руху системи. У випадку маятника узагальненою координатою є кут відхилення від вертикалі, а у випадку коливального контуру – заряд конденсатора, a_0, a_1, a_2 коефіцієнти, які залежать від параметрів системи. Якщо в рівнянні (3.5) взяти $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, то матимемо рівняння, ідентичне рівнянням (3.1) та (3.3).

Рівняння (3.5) є рівнянням вільного руху системи, для випадку вимушеного руху системи права частина такого рівняння буде відмінною від нуля:

$$a_0 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot y = x. \qquad (3.6)$$

В (3.6) величина x є заданою функцією часу. За сутністю x є керуючим (вхідним) сигналом системи. Стан системи y в цьому випадку можна розглядати також як вихідний сигнал системи. Значення регульованої координати y визначається з рівняння (3.6) вимушеного руху системи, воно залежить також від форми функції.

Вище розглянуто математичні моделі двох простих систем – механічної та електричної. Слід мати на увазі, що звичайними диференціальними рівняннями можна описати багато економічних, біологічних та інших процесів і систем. Методика складання диференціальних рівнянь для їх опису розглядається у відповідних дисциплінах.

3.2. Математичне моделювання систем автоматичного управління

При моделюванні процесів автоматичного управління дотримуються схеми, рис.3, за якою реальний об’єкт складається з двох підсистем, які взаємодіють: керованої та керуючої.

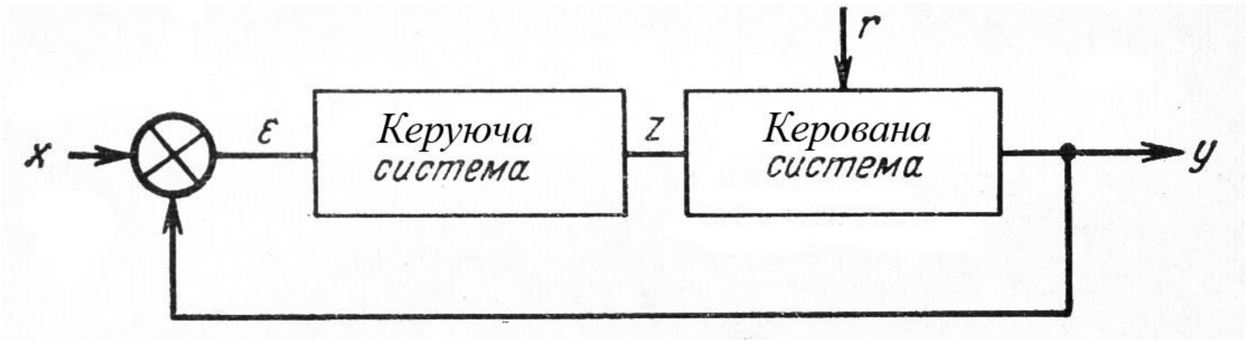


Рис. 3.3. Схема автоматичного управління за однією координатою стану системи

На рис.3.3 $y(t)$ – координата стану системи, $x(t)$ – дія завдання, $\varepsilon(t)$ – сигнал похибки, $z(t)$ – керуюча дія, $r(t)$ – збурення.

Керуюча дія $z(t)$, яка виробляється системою керування, є функцією похибки $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)\cdot$ Функція $x(t)$ формується таким чином, щоб виконувалася наближена рівність $\varepsilon(t) \approx 0\cdot$ За реальних умов до системи, окрім збурення $x(t)$, яке задається і несе в собі інформацію, необхідну для управління, надходить збурення $r(t)$, яке не містить корисної інформації. Збурюючі дії порушують потрібний функціональний зв'язок між дією, яка задається, та законом зміни вихідної координати. Вони можуть сильно спотворювати корисну інформацію і зробити систему непрацездатною.

На рис. 3.3 наведено схему автоматичного управління за однією координатою стану системи, в загальному ж випадку управління може здійснюватися за кількома координатами, рис. 3.4:

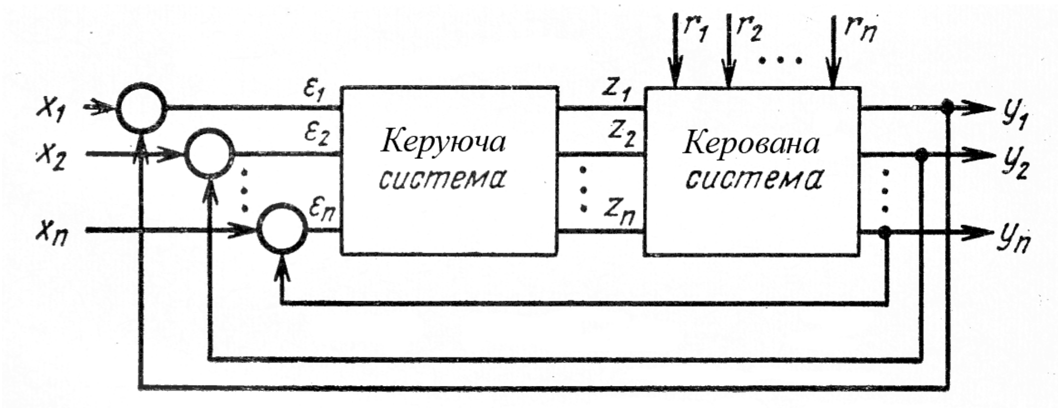


Рис.3.4. Схема автоматичного управління за кількома координатами стану системи

Дослідження багатовимірних систем є складнішою обчислювальною задачею, проте відповідна методика не залежить від числа координат стану системи. Керованою системою (об'єктом) може бути окремий двигун, ядерний реактор, цех заводу, завод у цілому, тощо, тобто це – сукупність технічних засобів, які забезпечують виконання керованою системою певної цілі. Точність виконання керованою системою заданої цілі визначається тим, наскільки точно відтворюється координата стану системи $y(t)$, різниця між заданим $y_з(t)$ та дійсним $y(t)$ значеннями величин, які визначають управління, є *похибкою управління*:

$$\varepsilon(t) = y_з(t) - y(t). \tag{3.7}$$

Якщо приписаний закон зміни керованої величини відповідає закону зміни збурення, яке задається, тобто $x(t) = y_з(t)$, то

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t). \tag{3.8}$$

Системи, для яких похибки управління $\varepsilon(t)$ дорівнюють нулю в будь-який момент часу, називаються *ідеальними*. Практичне здійснення ідеальних систем управління неможливе внаслідок того, що похибка $\varepsilon(t)$ є важливим елементом управління, що базується на принципі від'ємного зворотного зв'язку (для приведення у відповідність вихідної величини $y(t)$ до її заданого або бажаного значення використовується інформація про відхилення між ними). Задачею системи автоматичного управління є зміна величини $y(t)$ у відповідності до заданого закону з певною точністю. В процесі проектування систем автоматичного управління необхідно вибирати такі параметри системи, які б забезпечували необхідну точність управління. Окрім цього, параметри системи повинні забезпечувати вимоги стійкості та регулярності поведінки системи в перехідному процесі.

Системи автоматичного управління мають «схильність» до коливання, це викликано тим, що частина енергії з їх виходу може повертатися на вхід, а поява якось збурення чи зміни керуючої дії вона приходить в рух. Стійка система, за умови усталених значень керуючих та збурюючи дій, через певний час, знову повертається до усталеного стану рівноваги, а нестійка система, прийшовши до стану руху, не приходить до усталеного стану рівноваги, а її відхилення від стану рівноваги буде або неперервно змінюватися, або неперервно змінюватися в формі постійних незатухаючих коливань. Тому для задовільної роботи системи автоматичного управління перш за все необхідно, щоб вона була стійкою, причому вимога стійкості повинна виконуватися з деяким запасом, який передбачає можливі зміни параметрів системи під час її роботи. Якщо система є стійкою, то представляє інтерес її поведінка в такій динаміці: максимальне відхилення регульованої величини $y(t)$ в перехідному процесі, час перехідного процесу тощо.

Висновки стосовно властивостей систем автоматичного управління можна зробити виходячи з вигляду диференціальних рівнянь, які наближено описують процеси в системах. Порядок диференціального рівняння та значення його коефіцієнтів повністю визначаються статистичними та динамічними параметрами системи та її структури. Неперервні системи описуються звичайними диференціальними рівняннями та диференціальними рівняннями в частинних похідних, а *дискретні системи* – диференціальнорізницевими рівняннями. Лінійні та нелінійні системи неперервні (дискретні) системи автоматичного управління описуються відповідно лінійними та нелінійними диференціальними рівняннями. Лінійні та нелінійні системи (неперервні чи дискретні) можуть бути *стаціонарними чи нестаціонарними*, із *зосередженими чи розподіленими* параметрами. *Стаціонарні* системи описуються диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами. Якщо система є нестаціонарною, то коефіцієнти відповідних рівнянь є функціями часу. Така класифікація систем автоматичного управління за способом їх математичного опису є умовною. На практиці в системах автоматичного управління досить рідко доводиться мати справу з режимами роботи, які значно відрізняються один від одного, частіше існує якийсь один типовий режим для конкретної системи та реальний режим функціонування системи групується біля цього режиму. Саме ця обставина часто використовується для значного спрощення математичної моделі.

Розглянемо систему автоматичного управління, яка описується диференціальним рівнянням загального типу

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y, x^{(m)}, x^{(m-1)}, ..., x) = 0, \tag{3.9}$$

Де $y^{(n)}$, $x^{(m)}$ означають за часом від функцій y та x відповідно. Нехай система, яка описується рівнянням (1.9) функціонує в деякому відомому режимі, який характеризується $y_0(t)$, $x_0(t)$. Позначимо малі відхилення $x(t)$ від $x_0(t)$ через $\Delta x(t)$, а $y(t)$ від $y_0(t)$ через $\Delta(t)$, тобто

$$y(t) = y_0(t) + \Delta x(t), \quad x(t) = x_0(t) + \Delta x(t).$$

Тоді рівняння (1.9) можна лінеаризувати, розклавши функцію $F(y^{(n)}, ..., y, x^{(m)}, ..., x)$ в ряд Тейлора, обмежившись лише лінійними членами відносно приростів Δx та Δy:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial y_0^n} \cdot \Delta y^n + \frac{\partial F}{\partial y_0^{n-1}} \cdot \Delta y^{n-1} + ... + \frac{\partial F}{\partial y_0} \cdot \Delta y = \\ = \frac{\partial F}{\partial x_0^m} \cdot \Delta x^m + \frac{\partial F}{\partial x_0^{m-1}} \cdot \Delta x^{m-1} + ... + \frac{\partial F}{\partial x_0} \cdot \Delta x.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Оскільки отримане рівняння (3.10) наближено описує систему, яка моделюється, то значення похідних визначається для певних фіксованих значень змінних, що входять до нього, тобто таким чином отримана система з постійними коефіцієнтами, яка відноситься до класу стаціонарних систем, а рівняння буде лінійним відносно $\Delta y, \Delta x$ та їх похідних. Ця обставина є важливою, оскільки методи розв'язку і дослідження лінійних систем простіші, порівняно з системами загального типу. У зв'язку з цим розглядаються, в основному, тільки лінійні диференціальні рівняння, лінійні системи автоматичного управління, рівняння яких мають вигляд:

$$a_0 \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_n \cdot y_n = b_0 \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + ... + b_m \cdot x. \qquad (3.11)$$

Останнє рівняння справедливе для умов, коли прикладення збурюючих дій співпадає з входом системи. Це рівняння розв'язується з використанням операційного числення. Оператор, який перетворює функцію дійсного змінного $f(t)$ в функцію комплексного змінного $F(p)$, визначається формулою:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt, \qquad (3.12)$$

де p – комплексне число.

Функція $f(t)$ називається *оригіналом*, а функція $F(p)$ – *зображенням* функції $f(t)$. Помножимо ліву і праву частини рівняння (3.11) на $e^{-p \cdot t}$, а результат про інтегруємо від 0 до ∞, в результаті матимемо:

$$\int_0^\infty [a_0 \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_0 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_n \cdot y] \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \int_0^\infty [b_0 \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + \\ + b_1 \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + ... + b_m \cdot x] \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt. \qquad (3.13)$$

З врахуванням того, що зображення виразу $\frac{d^k f}{dt^k}$ має вигляд $p^k \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(k-1)}(0)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, вираз (3.13) можна записати у вигляді:

$$(a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot p + a_n) \cdot y(p) = \\ = (b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + ... + b_{m-1} \cdot p + b_m) \cdot x(p), \qquad (3.14)$$

де $y(p)$, $x(p)$ – зображення функцій, відповідно, $y(t)$ $x(t)$.

Рівняння (1.14) є лапласовим зображенням диференціального рівняння системи за умови нульових початкових умов для лінійної моделі (3.11), а рівняння $a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0$ є характеристичним рівнянням диференціального рівняння (3.11), воно визначає вільний рух системи.

В загальному випадку оригінал функції $f(t)$ знаходиться за її зображенням $F(p)$ оберненим перетворенням Лапласа за формулою:

$$f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \int_{\sigma - i \cdot \infty}^{\sigma + i \cdot \infty} F(p) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt. \qquad (3.15)$$

Для великої кількості функцій користуються таблицями, за якими, знаючи зображення $F(p)$, можна знайти його оригінал $f(t)$.

Приклад

Знайти розв’язок лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами, з нульовими початковими умовами

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dy}{dt} + 2 \cdot y = e^{-3 \cdot t}. \qquad (3.16)$$

Розв’язок

Помножимо обидві частини рівняння (1.16) на $p \cdot e^{-p \cdot t}$ і про інтегруємо результат за змінною t від 0 до ∞:

$$p \cdot \int_0^\infty e^{-p \cdot t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dt + 3 \cdot p \cdot \int_0^\infty e^{-p \cdot t} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot dt + 2 \cdot p \cdot \int_0^\infty e^{-p \cdot t} \cdot y \cdot dt = \\ = p \cdot \int_0^\infty e^{-p \cdot t} \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot dt. \qquad (3.17)$$

Скористаємося формулою перетворення за Лапласом

$$F(p) = p \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt.$$

Тоді вираз (3.17) матиме вигляд

$$p^2 \cdot F(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) + 3 \cdot [p \cdot F(p) - p \cdot y(0)] + \\ + 2 \cdot F(p) - \frac{p}{p+3}. \qquad (318)$$

Оскільки $y(0) = y'(0) = 0$ згідно умови, то рівняння (1.18) можна записати у вигляді:

$$p^2 \cdot F(p) + 3 \cdot p \cdot F(p) + 2 \cdot F(p) = \frac{p}{p+3}; \\ F(p) = \frac{p}{(p+3) \cdot (p^2 + 3 \cdot p + 2)} = \frac{p}{(p+3) \cdot (p+2) \cdot (p+1)}. \qquad (3.19)$$

Зображення визначиться з розв’язку алгебраїчного рівняння (3.19). Далі слід знайти оригінал, для чого подаємо вираз (3.19) у вигляді:

$$F(p) = p \cdot \frac{A}{p+3} + p \cdot \frac{B}{p+2} + p \cdot \frac{C}{p+1}.$$

Величини A, B, C знаходимо, розв’язуючи відповідну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими, тобто

$$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p+2}-\frac{p}{p+1}. \qquad (3.20)$$

Оскільки вираз $\frac{p}{p+\alpha}$ є зображенням функції $e^{-\alpha\cdot t}$, то вираз (3.20) є зображенням функції

$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}-e^{-2\cdot t}.$$

Це і є розв’язком задачі.

При дослідженні систем за їх математичними моделями виникає питання, в якій мірі реальний процес функціонування відповідатиме розрахунковому, оскільки насправді в розрахунках користуються наближеними моделями, коли ряд факторів можуть не враховуватися. Це питання є предметом теорії стійкості.

3.3. Елементи теорії стійкості систем

Теорія стійкості вивчає вплив збурюючи факторів на поведінку (рух) досліджуваної системи. Збурюючими факторами є сили, які не враховуються при опису руху внаслідок їх малої величини, порівняно з основними силами. Вони можуть діяти миттєво, що призводить до малої зміни початкового стану системи, або неперервно. Це означає, що складені диференціальні рівняння руху відрізнятимуться від істинних, що в них не враховані певні малі поправочні коефіцієнти. Вплив малих збурюючи факторів на рух системи буде різним, на одні рухи цей вплив незначний, коли збурений рух мало відрізнятиметься від незбуреного; на інші – значний, коли збурений рух значно відрізняється від незбуреного і матиме місце нестійкий рух.

Теорія стійкості встановлює ознаки, які дають змогу судити про стійкість, або про нестійкість руху. В залежності від сутності розв’язуваної задачі і типу збурення використовуються різні методи визначення стійкості. Ми розглядатимемо методи Ляпунова (перший та другий) дослідження стійкості систем.

3.3.1. Основні поняття теорії стійкості систем

Нехай система автоматичного управління описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy_i}{dt}=Y_i(t,y_1,y_2,...,y_n), i=1,2,...,n. \qquad (3.21)$$

де y_i – змінні параметри, які описують стан системи автоматичного управління; Y_i – невідомі функції, які визначені в певній фіксованій області простору змінних $t, y_1, \ldots, y_n$, з початковими умовами $y_i(t_0) = y_{i0}$, $I = 1, 2, \ldots, n$. Ці умови визначають вихідний стан системи управління при $t = t_0$. Кожній системі початкових значень $y_i(t_0)$, $t = 1, 2, \ldots, n$ системи диференціальних рівнянь (3.21). Якщо як завгодно малі зміни початкових умов здатні в значному ступені змінити розв'язок, то такий, вибраними нами початковими даними, не має практичного значення, оскільки відповідає нестійкому стану системи. У зв'язку з цим виникає питання про знаходження умов, коли достатньо мала зміна початкових даних викликає як завгодно малі зміни розв'язку, тобто знаходження умов, за яких система управління, яка описується системою рівнянь (1.21) буде стійкою.

За Ляпуновим, розв'язок $y^*_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ системи типу (3.21) називаються *стійкими*, якщо, за умови будь-якої заданої області ε припустимих відхилень від стану рівноваги, можна підібрати область припустимих початкових умов $\delta = \delta(\varepsilon)$, яка має ту властивість, що жодний рух, який починається всередині δ, ніколи не досягне границь області ε. Поняття стійкості за Ляпуновим ілюструється для двомірного випадку на рис. 3.5.

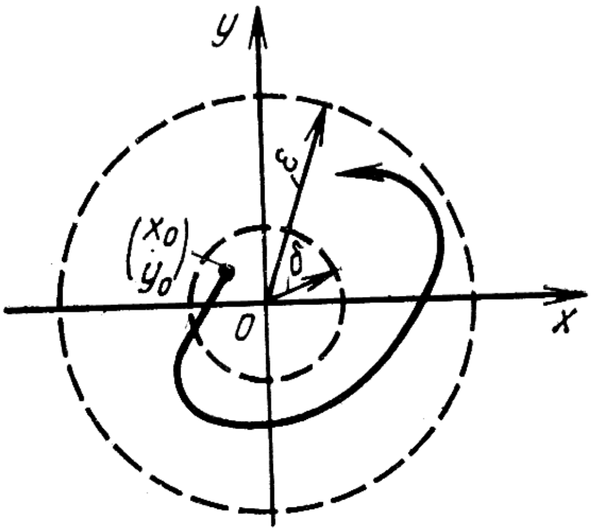


Рис. 1.5. Ілюстрація поняття стійкості за Ляпуновим

Тобто розв'язок $y^*_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ системи (3.21) буде стійким, якщо для будь-якого t_0 з інтервалу $[0\ ,\ T]$ та числа $\varepsilon \rangle 0$ можна підібрати $\delta \rangle 0, \delta = \delta(t_0, \varepsilon) \rangle 0$ таке, що всякий розв'язок $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ тієї ж системи, початкові значення якого задовольняють нерівність

$$\left| y_i^*(t_0) - y_i(t_0) \right| \langle \delta, i = 1,2,\ldots,n, \qquad (3.22)$$

Визначено в проміжку $t_0 < t < \infty$ і для всіх $t \geq t_0$ справедливими є нерівності

$$\left| y_i^i(t) - y_i(t) \right| \langle \varepsilon, i = 1,2,\ldots,n. \qquad (3.23)$$

Близькі за початковими умовами розв'язки залишаються близькими для всіх $t \geq t_0$. Розв'язок $y_i^*(t), i = 1,2,...,n$ системи (3.21) називається стійким, якщо існує область ε припустимих відхилень від стану рівноваги, для якої не існує область δ, яка є околом стану рівноваги і має ту властивість, що жодний рух, який розпочинається всередині δ, ніколи не досягне границі області ε, або якщо цей розв'язок не продовжуваний при $t \to \infty$.

В цьому випадку за умови $t_0 \in [0, T]$ і як завгодно малих $\varepsilon \rangle 0, \delta \rangle 0$ хоча б для одного розв'язку $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ нерівність (3.23) не виконується при $t \geq t_0$.

Якщо стійкий розв'язок $y_i^*(t), i = 1,2....,n$ при $t \to \infty$ задовольняє умову

$$\underbrace{\lim}_{t \to \infty} \left| y_i^*(t) - y_i(t) \right| = 0 \qquad (3.24)$$

для всякого розв'язку $y_i(t)$, то в цьому випадку має місце асимптотична стійкість.

Стійкість за Ляпуновим – це стійкість для достатньо малих початкових відхилень, вона, як поняття, є важливою тоді, коли досліджується чисто фізична здійснюваність певного стану рівноваги. Якщо стан рівноваги є стійким за Ляпуновим, то він фізично здійсненний, якщо ж ні, - то нездійсненним, оскільки за будь-яких, як завгодно малих початкових відхиленнях зображуючи точка системи розпочне відхід з околу точки рівноваги.

Для дослідження на стійкість певного розв'язку $y_i^*(t), i = 1,2,...,n$ системи рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), i = 1,2,...,n \qquad (3.25)$$

доцільно перетворити рівняння (3.25) до нових змінних:

$$x_i = y_i - y_i^*(t), i = 1,2,...,n. \;. \qquad (3.26)$$

В силу (1.26) в нових змінних система (3.25) приймає вигляд

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{dy_i^*}{dt} + Y_i(t, x_1 + y_1^*(t), ..., x_n + y_n^*(t)), i = 1,2,...,n. \qquad (3.27)$$

Очевидно, що досліджуваному на стійкість розв'язку $y_i = y_i^*(t), i = 1,2,...,n$ системи (1.25), внаслідок залежності (3.26), відповідає тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0, i = 1,2,...,n$ системи (3.27). Тому надалі можна вважати, що на стійкість досліджується тривіальний розв'язок, чи точка спокою системи рівнянь, розташована в початку координат.

Точка спокою $x_i = 0, i = 1,2,...,n$ системи (3.27) є стійкою за Ляпуновим, якщо для всіх $t_0 \in [0, T)$ і кожному $\varepsilon > 0$ можна підібрати $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ таке, що з нерівності

$$\left|x_i(t_0)\right|\langle\delta, i=1,2,...,n$$

випливає

$$\left|x_i(t)\right|\langle\varepsilon, i=1,2,...,n$$, за умови $t \geq t_0$.

3.3.2. Перший метод Ляпунова

Теорема 1. (без доведення)

Стан рівноваги $x_0 = 0$ диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x),\ f(x_0) = 0$$

є асимптотично стійким, якщо стан рівноваги 0, який відповідає вільній лінійній стаціонарній системі

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

де $A = \left\| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|_{x=x_0}$ є асимптотично стійким.

Аналогічно стійкості рівноваги визначається стійкості руху за Ляпунову.

Теорема 2. (без доведення)

Стан рівноваги 0 диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x),\ f(0) = 0$$

є нестійким, якщо стан рівноваги 0 відповідної лінійної стаціонарної системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

де $A = \left\| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|_{x=x_0}$ є асимптотично стійким.

Приклад

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = y - x + y^2 + x^2 \cdot \sin t,$$
$$\frac{dx}{dt} = y + x - x^2.$$

Точка $y_0 = 0$, $x_0 = 0$ є станом рівноваги. Дослідимо її на стійкість.

Для вибраного положення рівноваги лінеаризована система має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = y - x$$
$$\frac{dx}{dt} = y + x$$

Власними числами матриці A будуть $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$. Оскільки дійсна частина одного з них є додатною, стан рівноваги 0 для лінеаризованої системи нестійкий, тобто нестійкий для вихідної системи.

Приклад

Розглянемо систему, яка визначається рівняннями

$$\frac{dy}{dt} = 2y + 8\sin x,$$
$$\frac{dx}{dt} = 2 - e^y - 3x - \cos x.$$

Початок координат є положенням рівноваги. Дослідимо на стійкість точку рівноваги $y_0 = 0$, $x_0 = 0$.

Розклавши $\sin x, e^x, \cos x$ за формулою Маклорена, визначимо лінеаризовану систему:

$$\frac{dy}{dt} = 2y + 8x,$$
$$\frac{dx}{dt} = -y - 3x.$$

Оскільки дійсні частини власних чисел матриці від'ємні, то початок координат є асимптотично стійким положенням рівноваги для початкової системи, оскільки він асимптотично стійкий для лінеаризованої системи.

3.3.3. Другий метод Ляпунова

Цей метод дає змогу дослідити стійкість системи, не розв'язуючи диференціальні рівняння стану. Стійкість досліджується з використанням властивостей відповідних функцій, які називаються *функціями Ляпунова*.

Теорема 1 (про стійкість)

Якщо існує диференційована функція $V(x_i), i=1,2,...,n$, яка називається функцією Ляпунова, яка задовольняє в околі початку координат такі умови:
1. $V(x_i)\rangle 0,$ причому $V(x_i)=0$ при $x_i=0, i=1,2,...,n;$

2. $\frac{dV}{dt}\le 0$ при $t\rangle t_0$ внаслідок (1.21), то точка спокою $x_i\equiv 0, i=1,2,...,n$ системи є стійкою.

Існування функції Ляпунова гарантує стійкість, це можна пояснити наступним чином. Слід відмітити, що рух у фазовій площині здійснюється проти часової стрілки. Система стійка, якщо для будь-якого $\varepsilon\rangle 0$ існує $\delta\rangle 0$ таке, що за умови $|x(t_0)|\langle\delta$ виконується нерівність $|x(t_0)|\langle\varepsilon$ для всіх $t\rangle t_0$.

За умовою теореми існує функція $V(x)$ така, що $V(x)\rangle 0$ за умови $x\neq 0.$ Розглянемо точки $x=(x_1,x_2),$ для яких $V(x)=K\langle\varepsilon$. Ці точки утворюють певну криву, рис. 3.6.

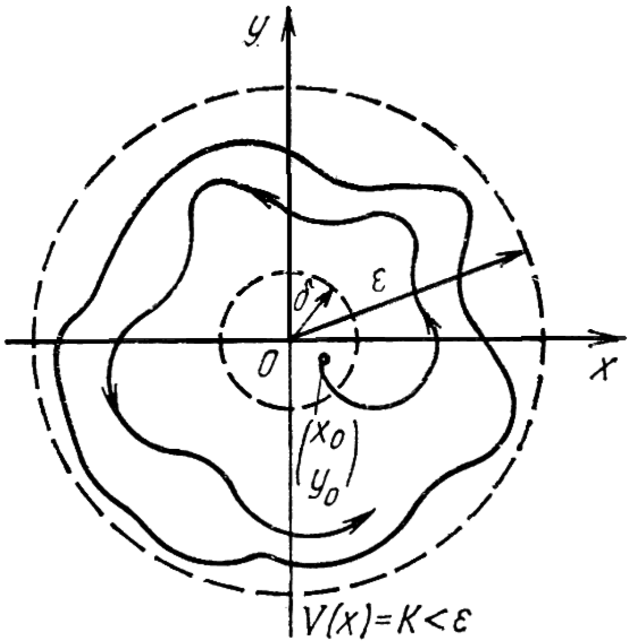


Рис. 3.6. Ілюстрація стану системи у фазовій площині

Візьмемо довільну точку $x_0(x_1(t_0),x_2(t_0)),$ яка лежить в колі, з радіусом δ. Якщо початкова точка x_0 вибрана в околі початку координат, що означає $V(x_0)=K_1\langle K_2$, то за умови $t\rangle t_0$ точка траєкторії, яка визначається цими початковими умовами, не може вийти за межі ε-околу початку координат і навіть за межі поверхні K, оскільки в силу умови 2 теореми, функція V впродовж траєкторії не зростає, тобто за умови $t\rangle t_0$

$$V(x_0)\le K_1\langle K.$$

Цим стійкість доведена.

Теорема 2 (про асимптотичну стійкість).

Якщо існує диференційована функція Ляпунова $V(x_i), i=1,2,...,n,$ яка задовольняє умови:

1. $V(x_i) = 0$ за умови $x_i = 0, V(x_i) \rangle 0,$ якщо $x_i \neq 0, i = 1,2,...,n$.

2. $\dfrac{dV}{dt} \leq 0,$ причому поза як завгодно малого околу початку координат $\dfrac{dV}{dt} \leq -\beta \langle 0,$ де β - стала, то точка спокою $x_i \equiv 0, i = 1,2,...,n$ досліджуваної системи асимптотично стійка.

Для пояснень використаємо рис. 1.6. Оскільки $\dfrac{dV}{dt} \langle 0,$ то значення $V(x)$ вздовж траєкторії розв'язку прямує до нуля, коли $t \to \infty$. Внаслідок першої умови теореми x прямує в початок координат, тобто точка спокою $x_i \equiv 0, i = 1,2,...,n$ є асимптотично стійкою.

Приклад

Дана система, яка описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_2 - x_1^3,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1 - x_2^{3.}$$

Дослідимо на стійкість точку рівноваги $x_1 = 0, x_2 = 0.$Для з'сування стійкості застосуємо перший метод Ляпунова. Для вибраного положення рівноваго лінеаризована система має вигляд:

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1.$$

Оскільки власні числа матриці A $\lambda_1 = -i2\sqrt{3}, \lambda_2 = i2\sqrt{3}$ є чисто уявними числами, то перший метод не дає інформації про стійкість стану рівноваги початкової системи. Скористаємося другим методом. Функція Ляпунова має вигляд $V = 3x_1^2 + 4x_2^2$, крім того

1. $V(x_1, x_2) \geq 0, V(0,0) = 0;$
2. $\dfrac{dV}{dt} = -(6x_1^4 + 8x_2^4) \leq 0;$

Причому $\dfrac{dV}{dt} \leq -\beta \langle 0$ поза деякого околу початку координат, тобто точка рівноваги $x_1 = 0, x_2 = 0$ за теоремою 2 є асимптотично стійкою.

Приклад

Дослідимо на стійкість точку рівноваги $x_1 = 0$ системи диференціальних рівнянь

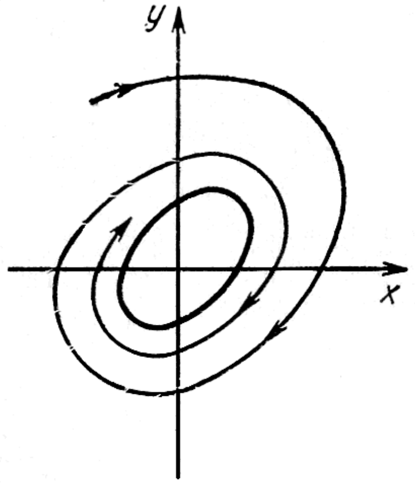
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1 - x_2 - \frac{x_1^2}{x_2}.$$

В якості функції Ляпунова виберемо
$$V = \frac{1}{2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot x_2^2.$$

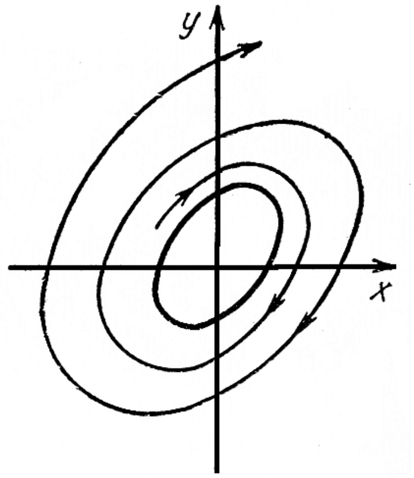
1. $V(x) \geq 0, V(0,0) = 0,$
2. $\frac{dV}{dt} = -(x_1 + x_2)^2 \leq 0,$ причому $\frac{dV}{dt} \leq -\beta\langle 0,$ тобто точка рівноваги є асимптотично стійкою.

Слід зазначити, що в означеннях Ляпунова порівнюються два розв'язки однієї і тієї ж системи. На практиці представляє інтерес з'ясування питання про те, наскільки зміниться розв'язок системи рівнянь у випадку варіацій її правої частини, оскільки в дійсності на систему, що описується, діють сили, врахувати які неможливо при складанні рівнянь.

Наявність нелінійних членів в системі спотворює поле напрямків, яке визначається лінійною системою першого наближення, тому траєкторія, що виходить з деякої точки (y_0, x_0) після обходу початку координат дещо зміщується порівняно з траєкторією лінійної системи, що проходить через ту ж точку. Причому, якщо всі траєкторії, за умови $t \to \infty$ наближаються до початку координат, то в початку координат виникає стійкий фокус, рис. 3.7.а; якщо ж траєкторія, за умови $t \to \infty$, віддаляється від початку координат, то виникає нестійкий фокус, рис. 3.7.б.



а – стійкий фокус



б – нестійкий фокус

Рис. 1.7. Схеми замкнутих траєкторій

Замкнуті траєкторії, рис. 3.7.а,б (виділені жирними лініями), в околі яких всі траєкторії є спіралями, називаються *граничними циклами*, які за реальних умов відповідають режиму автоколивань.

3.4. Дискретні системи, автомати

Дискретні пристрої в сучасній техніці займають значне місце, це – обчислювальні та керуючі машини дискретної дії, керуючі системи автоматичної телефонії, тощо. Найпростішим елементом дискретної системи є реле – елемент, вхідна та вихідна величини якого можуть приймати лише скінченне (два, три) число значень. Реле може бути виконано на діодах, тріодах, електронних лампах. Типовий релейний елемент – електромеханічне реле, виконавчі органи якого (контакти) можуть знаходитися тільки в двох (стійких) станах – замкненому та розімкненому. Аналізуючи сумісно множину елементів, які утворюють релейний пристрій елементів та зв'язку, за якими відбувається взаємодія між елементами, а саме розглядаючи структуру релейних пристроїв розв'язують такі задачі:

- побудову структури релейних пристроїв за заданим співвідношенням вхід-вихід – задача синтезу релейних пристроїв;
- визначення співвідношення вхід-вихід за заданою структурою – аналіз релейних пристроїв.

Слід мати на увазі одну з основних задач синтезу – проблему мінімізації: побудови структури, яка реалізує наперед задані співвідношення вхід-вихід та містять мінімально можливе число елементів. Математичний апарат, який застосовується для опису та дослідження елементів та пристроїв, які мають релейну дію, включає багато засобів дискретної математики: математична логіка, комбінаторний аналіз, теорія графів та інші розділи математики, які досліджують дискретні величини.

Всі релейні пристрої поділяються на два класи: *однотактні* та *багатоактні.* Однотактні пристрої – це пристрої без пам'яті, в яких сукупність вихідних сигналів в будь-який момент часу представляють собою однозначну функцію вхідних сигналів в той же момент часу. Багатотактні пристрої – це релейні пристрої з пам'яттю, в яких сукупність вихідних сигналів в будь-який момент часу залежить не тільки від сукупності вхідних сигналів, але й від внутрішнього стану пристрою.

Розглянемо основні поняття теорії дискретних систем.

3.4.1. Однотактні релейні пристрої. Булеві функції

Змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, які приймають значення з множини $\{1,0\}$, називаються *двійковими* чи *мулевими* змінними, з n мулевих змінних можна утворити 2^n наборів (0,0,…,0), (0,0,…,1),…,(1,1,…,1), які не співпадають між собою. Функції $f(x_1, x_2,…,x_n)$ від будь-якого скінченного числа булевих змінних, які приймають значення 0 чи 1, називаються *мулевими* функціями. Існує 2^{2^n} різних булевих функцій від n змінних, включно з функціями меншого числа змінних. У випадку однієї змінної існує всього чотири мулевих функції: функції-константи $f_1(x) \equiv 1, f_2(x) \equiv 1;$ функції повторення $f_3(x) \equiv x;$ функції заперечення (інверсія) $f_4(x) \equiv \overline{x}$ (не «*x*»), рівна одиниці, коли x =0, і рівна нулеві, коли x=1. Число мулевих функцій від двох змінних становить 16, включно з функціями-константами $f(x_1, x_2) \equiv 0, f_2(x_1, x_2) \equiv 1,$ функції повторення $f_{3'}^{'}(x_1, x_2) \equiv x_1, f_3^{''}(x_1, x_2) \equiv x_2;$ та інверсії $f_4^{'}(x_1, x_2) \equiv \overline{x}_1; f_4^{''}(x_1, x_2) \equiv x_2.$

Розглянемо на ще двох мулевих функціях від двох змінних – *диз'юнкції* та *кон'юнкції*. Через диз'юнкцію, кон'юнкцію та інверсію шляхом суперпозиції (підстановки деяких булевих функцій замість аргументів до даної мулевої функції) можна подати будь-яку булеву функцію будь-якого скінченного числа змінних.

Диз'юнкція (позначається $f_5(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$) задається з табл..3.1 і має смисл логічного «ЧИ». Застосовуючи суперпозицію, тобто підставляючи в диз'юнкцію $x_1 \vee x_2$ замість змінної x_2 булеву функцію (диз'юнкцію) $x_2 \vee x_3$ отримаємо диз'юнкцію від трьох змінних

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3,$$

яка задається табл. 3.1, 3.2 і т.д.

Таблиця 3.1. Значення булевої функції $x_1 \vee x_2$ (диз'юнкції) двох змінних x_1 та x_2

Аргументи		Функція
x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблиця 3.2. Значення булевої функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

Аргументи			Функція
x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Диз’юнкція як операція над змінними $x_1, x_2, ..., x_n$ підпорядковується перемісному

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_3 \vee x_2 \vee x_1 = x_2 \vee x_3 \vee x_1$$

і т.д., та сполучному

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$$

законам.

Кон’юнкція (позначається $f_6(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$) задається табл. 3.3 і має смисл логічного «ТА». Застосовуючи суперпозицію, отримаємо кон’юнкцію від трьох змінних x_1, x_2, x_3 (табл.. 3.4)

$$x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Таблиця 3.3. Значення булевої функції $x_1 \wedge x_2$ (кон’юнкції двох змінних x_1 та x_2

Аргументи		Функція
x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
11	0	0
1	1	1

Таблиця 3.4. Значення булевої функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Аргументи			Функція
x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Кон’юнкція також підпорядковується перемісному та сполучному законам

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = x_2 \wedge x_1 \wedge x_2 = x_3 \wedge x_2 \wedge x_3; x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3.$$

Багато виразів можна спростити за рахунок перетворення булевих функцій, виражених через диз'юнкцію, кон'юнкцію та інверсію за відомими тотожностями мулевої алгебри:

$$A \vee 0 = A, \qquad (3.28)$$
$$A \wedge 0 = 0, \qquad (3.29)$$
$$A \vee 1 = 1, \qquad (3.30)$$
$$A \wedge 1 = A, \qquad (3.31)$$
$$A \vee A = A, \qquad (3.32)$$
$$A \wedge A = A, \qquad (3.33)$$
$$A \vee \overline{A} = 1,$$
$$A \wedge \overline{A} = 0, \qquad (3.34)$$
$$\overline{\overline{A}} = A,$$
$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &= A \wedge B \vee A \wedge C, \\ A \vee (B \wedge C) &= (A \vee B) \wedge (A \vee C). \end{aligned} \qquad (1.35)$$

Дистрибутивний закон кон'юнкції по відношенню диз'юнкції в (3.35) має такий же вигляд як і для алгебраїчного множення та додавання. Дистрибутивний закон диз'юнкції по відношенню до кон'юнкції в (3.35) є специфічним для булевої алгебри і не має аналогу у звичайній алгебрі.

Сенс спрощення функцій полягає в тому, щоб знайти інший вираз, який подає ту ж функцію, але для практичної реалізації якого необхідні витрати обладнання, порівняно з первісним варіантом.

Приклад

Булеві функції $f_1(a,b,c) = ab \vee ac \vee bc$ та $f_2(a,b,c) = ab \vee ac$ є еквівалентними один одному, перший вираз перетворюється до форми другого шляхом відкидання члена bc.

Слід мати на увазі, що спрощення складних виразів не завжди можливе шляхом застосування правил (3.28)-(3.35). Для інших випадків розроблені спеціальні методи мінімізації мулевих функцій, це: метод Квайна, карти Вейча та ін..

Приклад

Побудувати вираз для мулевої функції трьох аргументів a, b, c, якщо вона перетворюється в 0 при таких наборах

$a = 1$, $b = 1$, $c = 0$;

$a = 1$, $b = 0$, $c = 0$;

$a = 0$, $b = 0$, $c = 1$;

та в 1 при всіх інших наборах. Функція, виражена через кон'юнкцію, диз'юнкцію, інверсію, матиме вигляд:

$$z(a,b,c) = (\overline{a} \vee \overline{b} \vee c) \wedge (\overline{a} \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \overline{c}). \qquad (3.36)$$

Для роботи будь-якого перерахованих наборів для a, b, c функція (3.36) дорівнюватиме нулеві. Для всіх інших наборів функція дорівнюватиме одиниці. Схема, яка реалізує таку функцію подана на рис. 3.8.

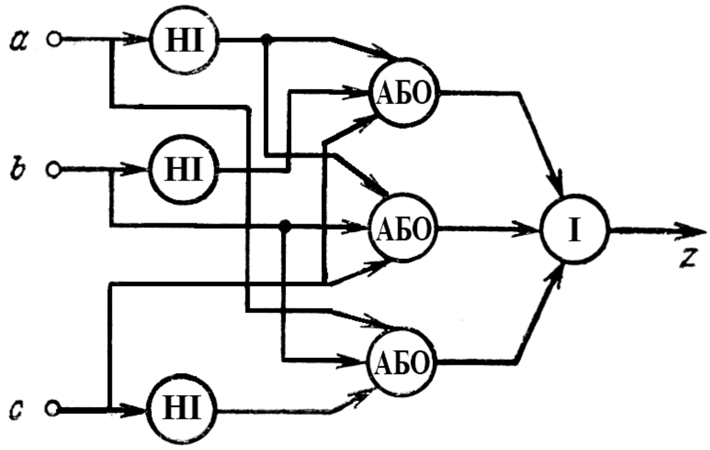


Рис. 3.8. Схема, яка реалізує функцію
$z(a,b,c) = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c})$

Приклад

Побудова схеми однотактного релейного пристрою. Спроектувати пристрій, який має три сприймаючих елементи *A*, *B*, С (кожний тип «ТАК» - «НІ») та один виконавчий елемент *z*, який повинен спрацьовувати в одному з таких чотирьох випадків:

1) спрацьовує *A*, *B* а *C* - ні,
2) спрацьовує *B*, *A* а *C* - ні,
3) спрацьовує *C*, *A* а *B* – ні,
4) спрацьовує *A*, *B*, *C*.

Оцінимо роботу релейного пристрою таблицею станів сприймаючих та виконавчого елементів (таблиця 1.5).

Таблиця 3.5.Таблиця станів сприймаючого та виконавчого елементів

Стан сприймаючих елементів			Стан виконавчого елемента
A	*B*	*C*	*z*
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	1	1

Опишемо роботу релейного пристрою таблицею станів сприймаючих та виконавчого елемента, табл.. 3.5. Аналітичне зображення потрібної структури можна записати у вигляді:

$$z = a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + abc. \qquad (3.37)$$

Схема однотактного релейного пристрою, який реалізує функцію (3.37), зображена на рис. 3.9.

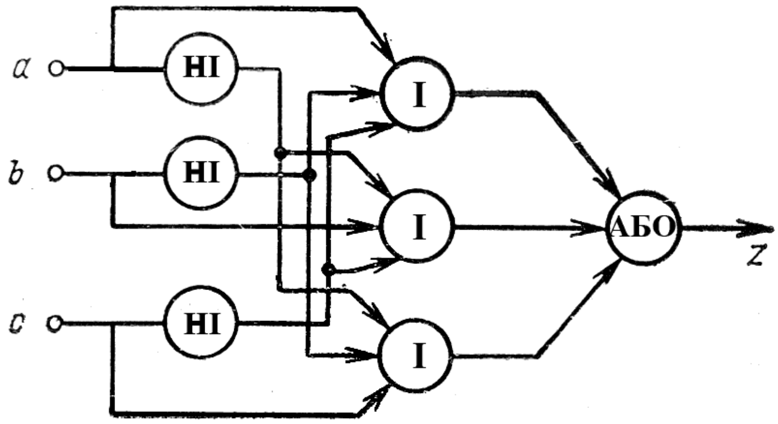


Рис. 3.9. Схема релейного пристрою для реалізації функції
$z(a,b,c) = a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + abc$

3.4.2. Багатотактні релейні пристрої

Для аналізу дискретних пристроїв з пам'яттю (багатоактних пристроїв) математичний апарат мулевої алгебри виявляється недостатнім. Робота багато контактного релейного пристрою відбувається в часі і сигнали, які виробляються ним в будь-який момент часу, залежать не тільки від того, які сигнали надходять в даний момент на його входи, але й від того, які сигнали вводилися на його входи раніше. Сукупність вихідних сигналів залежить від сукупності вхідних сигналів, але й від внутрішнього стану багато контактного пристрою, який визначається інформацією, яка запам'яталася в процесі його попередньої роботи.

Багатоконтактні пристрої доцільно досліджувати на їх спільній моделі, зображеній на рис. 3.9. За термінологією Хафмена-Мура – це є послідовнісна перемикаюча схема.

Спільна модель багатоконтактного пристрою характеризується трьома множинами: вхідним алфавітом $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$, вихідним $Y = \{y_1, y_2, ..., y_g\}$ та множиною внутрішніх станів $Z = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$.В даному такті вихідні сигнали моделі є функцією всіх вихідних сигналів та всіх внутрішніх станів в цьому такті:

$$Y_i^n = f_i(x_1, x_2, ..., x_p; z_1, z_2, ..., z_m)^n.$$

Тут *n* – номер такту. Внутрішній стан моделі, який залежить від стану пам'яті моделі в попередньому такті, визначається співвідношенням

$$z_i^{n+1} = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_p; z_1, z_2, ..., z_m)^n.$$

Розглянемо один розряд пам'яті, зображений в умовному схемному запису на рис. 3.10.

Ширина x_1 для запису одиниці в розряді пам'яті, ширина x_2 для запису нуля в тей же розряд пам'яті. Про стан розряду пам'яті можна судити за вихідними шинами y та $\overline{y}$. Одиничному стану розряду пам’яті відповідає $y=1$, нульовому $y=0$. Вказані логічні властивості можна виразити з використанням таблиці.

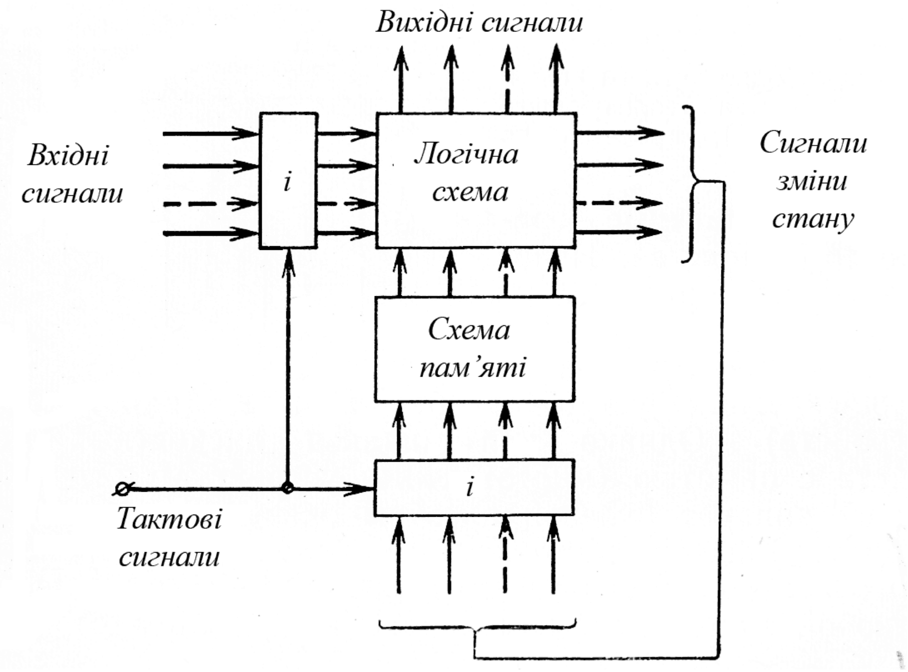


Рис. 3.10. Спільна модель багатоконтактних пристроїв.

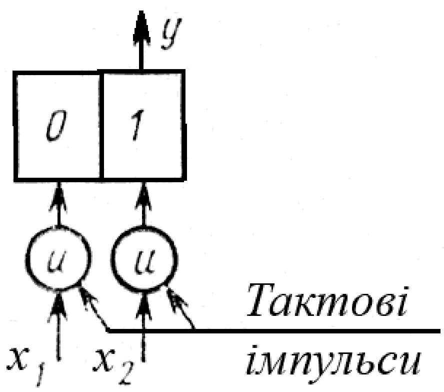


Рис. 3.11. Один розряд пам’яті в умовному схемному записові.

Таблиця 3.6. Стани розряду пам’яті в тактах

Такти	Вхідні сигнали		Стани розряду пам’яті в n-му такті	Вихідний сигнал	Стан розряду пам’яті в $(n+1)$ такті
	x_1	x_2	z^n	y^n	z^{n+1}
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	0	
…	…	…	…	…	…

Враховуючи, що поява одиниць на обох входах x_1 та x_2 одночасно є забороненою комбінацією, тобто $x_1 \wedge x_2 = 0$, використовуючи дані табл.. 3.6, запишемо рівняння, які описують роботу розряду пам'яті у вигляді:

$$y^n = z^n, z^{n+1} = x_1^n \vee \overline{x}_2^n \wedge z^n. \qquad (3.38)$$

Рівняння (1.38) повністю описує логічні властивості запам'ятовуючого елемента.

Розглянемо приклад проектування двох розрядного реверсивного лічильника на запам'ятовуючих елементах, описаних рівняннями (3.38). Нехай інформація до нього заноситься в послідовності: 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2 і т.д., якщо вхідний сигнал x- нуль, і в послідовності 3, 2, 1, 0, 3 і т.д., якщо x - одиниця. Вихідний сигнал з'являється на виході схеми за умови $x = 0$ тільки тоді, коли до лічильника записується число 2; за умови $x = 0$, коли до лічильника записується нуль. В табличній формі це записується наступним чином:

З використанням табл. 3.7 знаходимо рівняння, що описує роботу лічильника. Рівняння виходів має вигляд:

$$y^n = A^n \cdot \overline{B}^n \cdot \overline{x}^n + \overline{A}^n \cdot x^n. \qquad (3.39)$$

Рівняння стану кожного розряду (n + 1) також можна записати як функцію станів A^n, B^n та вхідного сигналу x^n в тактові n:

$$A^{n+1} = (\overline{A}^n \cdot B^n + A^n \cdot \overline{B^n}) \cdot \overline{x}^n + (\overline{A^n B^n} + A^n \cdot B^n) \cdot x^n, \qquad (3.40)$$

$$B^{n+1} = (\overline{A^n B^n} + A^n \overline{B^n}) \cdot \overline{x}^n + (\overline{A^n B^n} + A^n \cdot \overline{B}^n) \cdot x^n. \qquad (3.41)$$

За умови такого запису праві частини рівнянь (3.40), (3.41) задають вхідні рівняння елементів пам'яті. Отримані співвідношення свідчать, що до елементу пам'яті A чи B в (n+1) такті буде записана одиниця за умови відповідних станів пам'яті лічильника та вхідному сигналі в n такті.

Вхідні рівняння для запису до елементів пам'яті нулів можна знайти з таблиць чи взяти інверсії від рівнянь для запису одиниці:

$$\begin{aligned} \overline{A}^{n+1} &= (\overline{A^n B^n} + A^n B^n) \cdot \overline{x}^n + (\overline{A}^n B^n + A^n \overline{B}^n) \cdot x^n, \\ \overline{B}^{n+1} &= (A^n B^n + \overline{A}^n B^n) \cdot \overline{x}^n + (A^n B^n + \overline{A}^n B^n) \cdot x^n. \end{aligned} \qquad (3.42)$$

Всі рівняння станів лічильника складаються головним чином з чотирьох комплектів кон'юнкцій: $A^n B^n, \overline{A^n B^n}, \overline{A}^n B^n, A^n \overline{B}^n$. Це дає змогу сконструювати комбінаційну схему лічильника меншою кількістю обладнання. Схема двох розрядного реверсивного лічильника, робота якого описується рівняннями (3.40) - (3.42), зображена на рис. 3.12.

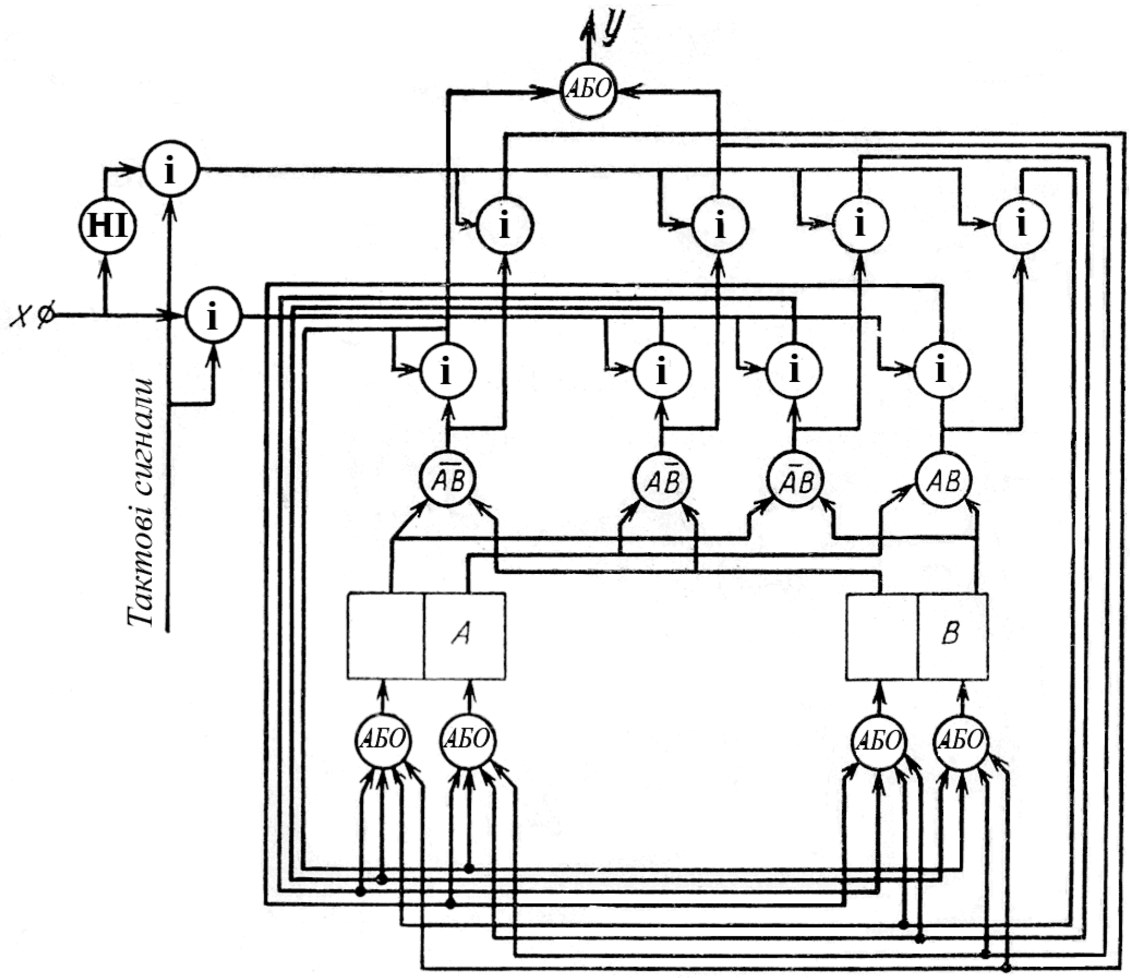


Рис. 3.12. Схема двох розрядного реверсивного лічильника.

Таблиця 3.7. Результати визначення станів розрядів пам’яті

Такти	Вхідний сигнал	Стан розрядів пам’яті в такті		Стан розрядів пам’яті в такті		Вихідний сигнал
	x	A^n	B^n	A^{n+1}	B^{n+1}	y
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
2	0	1	0	1	1	1
3	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	0
6	1	0	0	1	1	1
7	1	1	1	1	0	0
8	1	1	0	0	1	0
9	1	0	1			0

Модель багато контактного прстрою описується з використанням логічних функцій або таблиць, обидві форми запису легко піддаються автоматизації, що важливо для розв'язку задач спрощення логічних функцій і таблиць, тобто для вирішення питання мінімізації обладнанна, необхідного для реалізації дискретного пристрою, що проектується. Ішою зручною моделлю багато контактного пристрою є скінчений автомат.

3.4.3. Скінчений автомат

Скінчений автомат характеризується трьома множинами: вхідним алфавітом *X*, вихідним *Y* та множиною внутрішніх станів *Z*. Ці множини є скінченними, якщо на вхід автомата надходить слово *p* з вхідного алфавіту *X*, то на виході з'являється слово *g* з алфавіту *Y*, причому вихід автомата залежить не тільки від входу, але й від внутрішнього стану.

Введем о поняття *автоматного часу*, який дорівнює нулеві на початку роботи скінченого автомата і збільшується на одиницю за умови надходження на вхід автомата кожного наступного сигналу. Послідовні моменти часу надходження чергового сигналу ототожнюють з послідовним рядом натуральних чисел $t = 0, 1, 2, \ldots$ Ці числа називають *тактами.*

Функціонування скінченного автомата описується двома функціями: функцією переходів δ (до нового стану) та функцією виходів λ:

$$z(t) = \delta(z(t-1), x(t)), \qquad (3.43)$$

$$y(t) = \lambda(z(t-1), x(t)). \qquad (3.44)$$

В цих виразах t - поточний такт; $x(t)$ - вхідний сигнал; $z(t)$ - стан, до якого переходить автомат в поточному такті; $z(t-1)$ - стан, в якому автомат знаходився до надходження вхідного сигналу $x(t)$; $y(t)$ - вихідний сигнал, який виробляється автоматом в такті.

Функція переходів δ пов'язує стан $z(t)$, до якого переходить скінченний автомат, з його попереднім станом та вхідним сигналом $x(t)$. Функція виходів λ пов'язує вихідний сигнал $y(t)$, який виробляється скінченним автоматом, з $z(t-1)$ та $x(t)$. Функція переходів та функція виходів дають змогу визначити реакцію автомата на будь-яку послідовність вхідних сигналів, якщо відомий початковий стан скінченного автомата $z(0)$.

Автомати, для яких функції переходів та виходів визначені виразами (1.43), (1.44), називаються *автоматами Мілі*. Якщо замість співвідношення (1.44) розглядати співвідношення

$$y(t) = \mu(z(t)), \qquad (3.45)$$

то вирази (3.43), (3.45) визначають інший тип автоматів – *автомати Мура*. Вихід автомата Мура залежить тільки від внутрішнього стану автомата. Переходячи до деякого стану *z*, автомати Мура виробляють один і тей же сигнал незалежно від того, з якого стану та під дією якого вхідного сигналу вони перейшли до цього стану. Для опису автоматів Мура достатньо задати тільки одну таблицю переходів і відмітити в ній кожний стан відповідним йому вхідним сигналом.

3.5. Системи масового обслуговування

Система масового обслуговування є математичною моделлю, яка розробляється для опису багатьох поширених складних систем, призначенням яких є широковживане масове обслуговування (обслуговування продавцями покупців в магазинах, продаж квитків у всіх можливих касах, медичне обслуговування населення в поліклініках та вдома, різноманітні виробничі процеси та служби зв'язку та ін. В цьому відношенні слід виділити і розрізняти наступне: кого (що) обслуговують; хто (що) обслуговує; яким чином відбувається обслуговування і за якими правилами.

Найбільш простою є ситуація, коли існує необхідність в обслуговуванні великої кількості однотипних вимог. Під вимогою розуміють запит на задоволення якоїсь потреби, а під обслуговуванням – задоволення цієї потреби. Вимога, як запит, ототожнюється з його матеріальним носієм – особою (предметом), яка потребує обслуговування.

В загальному випадку моменти надходження вимог випадкові, факт появи вимоги – випадкова величина. Їх послідовність називається ***потоком*** *однорідних вимог* (вхідним). Слово «однорідний» означає те, що вимоги розрізняються лише моментами надходження. Вимоги, що надійшли, потребують обслуговування яким-небудь пристроєм (людиною). Засоби, які здійснюють вимоги називають ***приборами*** (що обслуговують). В такому ж розумінні вживаються терміни «лінія», «канал», та ін.. Сукупність приборів, які здійснюють обслуговування називають *системою обслуговування* (у вузькому сенсі), система обслуговування в широкому сенсі включає вхідний потік, множину приладів та дисципліну обслуговування, яка визначається нижче. Важливо знати, як обслуговуються системою обслуговування вимоги, що надходять. Сукупність правил, які задають процес обслуговування, які визначають порядок обслуговування, називається «***дисципліною обслуговування***».

Тобто система обслуговування (в широкому сенсі) вважається заданою, якщо відомі: потік вимог П, множина обслуговуючих приборів S, дисципліна обслуговування D. Слід зазначити, що реальні системи масового обслуговування представляють собою єдине ціле, часто вказані вище елементи довільної системи обслуговування розглядаються окремо.

3.5.1. Основні поняття

Опишемо основні поняття довільної системи масового обслуговування детально. Нехай заявки надходять у випадкові моменти часу $t_1, t_2, \ldots (0 \le t_1 \langle t_2 \langle \ldots)$, які є точками стрибків функції $\Pi(t)$. Величини $t_1, t_2, \ldots$ називаються *моментами появи вимог, викликаючи ми моментами*: ціле додатне число П(*t*), рівне величині стрибка, називають *кількістю вимог*, які надійшли в даний викликаючий момент, тобто для кожного *t* величина П(*t*) є числом вимог, які надійшли в проміжку часу [0, *t*]. На рис.3.13 зображена одна з реалізацій випадкової функції П(*t*).

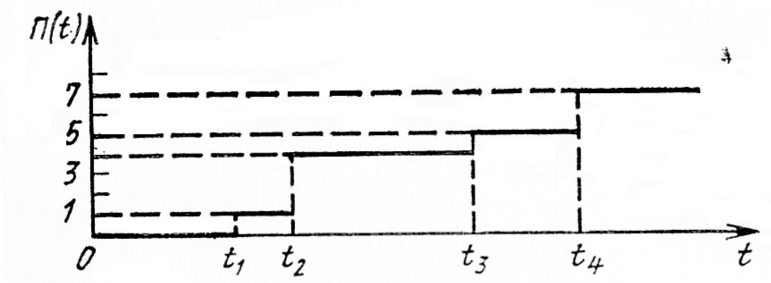


Рис. 3.13. Зображення реалізації випадкової функції П(*t*).

Найважливішими для практики є такі **властивості потоків**: стаціонарність, відсутність післядії, ординарність. Можна сказати, що потік називається *стаціонарним*, якщо імовірність надходження певної кількості вимог протягом певного проміжку часу не залежить від початкової точки цього проміжку, а визначається лише його довжиною. Якщо імовірність надходження вимог після довільного моменту часу не залежить від характеру надходження вимог до цього моменту, то кажуть про *відсутність післядії. Ординарними* називають такі потоки, для яких неможлива поява двох чи більшої кількості вимог. Потоки, які мають три вище перерахованих властивості, називають *найпростішими*. Тобто найпростіші потоки – цу стаціонарні ординарні потоки без післядії. Для найпростіших потоків імовірності $P_k(t)$ появи k вимог в проміжку часу, будь-де розташованому (стаціонарність), тривалість t підпорядковуються пуассонівському розподілу з параметром $\lambda \cdot t$:

$$P_k(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!},$$

де λ - *інтенсивність потоку*, рівна середньому числу вимог, які надійшли до системи за одиницю часу.

На практиці частими є відхилення від найпростішого потоку, наприклад, протягом доби потік викликів, які надходять до телефонної станції, змінюється в значних межа (достатньо порівняти робочий та нічний час). Тобто стаціонарним його можна вважати лише на окремих відрізках часу. Іноді якийсь важливий дзвінок викликає цілу лавину інших дзвінків – з’являється післядія. Часто до квиткової каси звертаються з проханням продати не один, а декілька квитків: наяву явне порушення властивості ординарності. Проте найпростіший потік зустрічається в реальних системах набагато частіше, наж можна уявити. Причина полягає в тому, що якщо даний потік складається з суми великої кількості взаємно незалежних стаціонарних і ординарних потоків малої інтенсивності, з довільною післядією, його можна вважати близьким до найпростішого. Існує ще один простий та зручний, але менш загальний спосіб опису довільного потоку. Замість моментів надходження вимог $t_1, t_2, ...$ розглядають проміжки між ними: $z_i = t_i - t_{i-1} (i = 1, 2, ..., t_0 = 0)$, тобто потік розглядається як послідовність випадкових величин, причому обидва способи завдання потоку еквівалентні. Якщо $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ є послідовністю взаємно незалежних випадкових величин, то кажуть про *потік з обмеженою післядією*. Обмеженість післядії є більш широким поняттям, порівняно з її відсутністю. З цієї причини стаціонарні ординарні потоки з обмеженою післядією (*потоки Пальма*) є більш загальними потоками порівняно з найпростішими. Слід зауважити, що можливість зображення довільного потоку як послідовності випадкових величин дає змогу достатньо просто формувати реалізації потоку на ЕОМ.

Вище розглядалися лише однорідні потоки, проте в багатьох складних системах обслуговування кожна вимога, окрім моменту t її надходження, характеризується також ще рядом неперервних $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i$ та дискретних $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ параметрів. За цією вимогою слід розглядати як випадковий вектор

$$R = R(t; \alpha_1, ..., \alpha_i; \beta_1, ..., \beta_k).$$

Цу дає змогу аналізувати досить складні потоки, які зустрічаються на практиці. В цьому випадку потік є послідовністю випадкових векторів, що є узагальненням другого з означень потоку. Необхідність враховувати неоднорідність потоку виникла внаслідок того, що вимоги різних типів можуть обслуговуватися по-різному.

Останнє зауваження про потоки пов’язано з тим, що вище розглядалися елементи системи масового обслуговування кожна окремо, наприклад, вважати, як це робилося, що вхідний потік не залежить від процесу обслуговування. Так система масового обслуговування типу «станки та робітники» (група робітників-ремонтників обслуговує станки, які з певних причин можуть виходити з ладу, потребуючи ремонту) можна помітити, що потік вимог на ремонт, які надходять за умови поломки станків, істотно залежить від системи обслуговування (чисельності робітників, їх кваліфікації, тощо). Дійсно, чергова вимога на ремонт даного станка може надійти лише після ремонту його попередньої несправності (робиться природне припущення, що станки можуть виходити з ладу лише за умови робочого стану). Формально цю залежність потоку від системи обслуговування можна описати в термінах неоднорідних потоків. Для практики такі потоки зручно задавати з використанням певної скінченої множини об’єктів, які називаються «джерелами вимог», кожний з яких у випадкові моменти часу можуть «посилати» вимоги, причому будь-яке джерело може посилати чергову вимогу лише після уходу попередньої вимоги з системи. Для цих потоків характерним є те, що в будь-який момент часу чисельність вимог, які знаходяться в системі, не може переважати чисельність джерел (якщо вимоги від кожного джерела надходять по одному). Саме з цієї причини такі потоки називають *обмеженими*.

Прибори, що обслуговують. Прибори визначені, як певні засоби, що дають змогу обслуговувати вимоги, які надходять. Як правило, множина S приборів, що обслуговують, є скінченною, оскільки в реальних системах масового обслуговування кількість засобів обслуговування завжди обмежена, хоча існують теоретичні дослідження іноді необхідно розглядати також граничний випадок. Вважається, що кожний прибор може знаходитися в одному з двох можливих станів: «зайнятий», якщо прибор обслуговує вимогу, «вільний» - в іншому випадку. В практичних дослідженнях не завжди можна задовольнитися лише двома станами приборів. Іноді важливо враховувати, що прибор здатний приступити до обслуговування чергової вимоги не відразу після закінчення обслуговування попередньої вимоги, оскільки потрібний деякий час (випадковий) для поновлення готовності прибору до обслуговування або для профілактики. Часто для переходу прибору із стану «вільний» до стану «зайнятий» потрібний певний час (випадкова величина). Крім того, прибори, як і всякі працюючі механізми, можуть виходити з ладую. Проблеми, що виникають, вивчаються в теорії надійності – додатку теорії ймовірностей, де також застосовуються методи теорії масового обслуговування. В багатьох системах масового обслуговування часто корисним є виділення і вивчення як самостійного об'єкту будови множини приборів S. В телефонії кажуть про «схему обслуговування» як про певним способом організовану, з певною структурою, множину засобів обслуговування.

Дисципліна обслуговування. Сукупність правил, які визначають процес обслуговування, складає *дисципліну обслуговування.* Під обслуговуванням розумітимемо виконання певної (єдиної) операції, яка задається дійсним числом (випадковим) $\eta\rangle 0$, яке називається *тривалістю обслуговування*, причому виконуються такі умови:

- вимоги обслуговується в приборі по одній;
- кожна вимога обслуговується одним прибором.

Проте в багатьох реальних системах ці умови не виконуються. Для опису таких процесів доводиться розширити поняття обслуговування, про що йтиме мова нижче. Поки розглядатимемо процес обслуговування у вже прийнятих припущеннях, причому, як основний, візьмемо випадок однорідного потоку, а надалі відмітимо, які особливості з'являються в процесі обслуговування неоднорідного потоку. Надалі вважатимемо, якщо правила обслуговування є загальними для всіх вимог, то це, зокрема, означає, що кожна вимога може бути обслужена будь-яким прибором – властивість «повнодоступності». Нижче послідовно перераховані всі можливості, які можуть зустрітися при обслуговуванні вимоги (від моменту її надходження до системи масового обслуговування до моменту припинення обслуговування), та описуються привила, які визначають поведінку вимоги у всіх цих випадках.

а) Вибір вільного прибору. Якщо при надходженні вимоги є декілька вільних приборів, то повинно бути задано спеціальне правило, згідно з яким з їх числа вибирається якийсь один. Це може бути прибор з найменшим номером чи прибор, який вивільнився раніше (чи пізніше) за інших. Часто вибір здійснюється випадковим чином (наприклад, з рівною імовірністю).

б) Якщо ж при надходженні вимоги вільних приборів не існує, то можливі два варіанти:

1) вимога відразу ж покидає систему, отримує «відмову» - система з відмовами;

2) вимога залишається очікувати вивільнення прибору – система з очікуванням.

в) Черга. Для системи з очікуванням на момент вивільнення прибору може накопичитися декілька вимог, які очікують обслуговування, які утворюють чергу. Як правило, черга є спільною, проте до кожного з телефонів-автоматів, які стоять поряд, вистроюється, як правило, черга (так звані «паралельні черги»). Аналогічне можна спостерігати в портах, якщо причали знаходяться достатньо далеко один від одного.

В цих прикладах паралельні черги мають місце в межах однієї і тієї ж системи масового обслуговування, навіть за умови заборони переходів з однієї черги до іншої, оскільки вхідний потік є спільним. Якщо ж декілька різних систем масового обслуговування (кожну разом з своїх потоком та множиною приборів) об'єднати в одну систему з паралельними чергами, вважаючи, що вхідні потоки утворюють спільний вхідний потік (вже неоднорідний), а сукупність множин приборів – спільна множина приборів (природно, таку, що не має властивості повно доступності), таку систему масового обслуговування прийнято називати такою, що *розпадається*.

г) Тривалість обслуговування задається своєю функцією розподілу. Природно, що вона може бути різною для різних приборів.

д) Дисципліна черги. Для систем з очікуванням найбільш простою є така дисципліна: вимога очікує до тих пір, доки її не почнуть обслуговувати – система з необмеженим очікуванням. В загальному випадку дисципліна задається певною системою обмежень, які накладаються на основні характеристики системи масового обслуговування (з очікуванням). Найчастіше зустрічаються такі обмеження:

1) На тривалість очікування.

2) На час перебування (сума тривалості очікування та тривалості обслуговування). В цьому випадку можливі:

а) за час τ (тривалість знаходження вимоги в системі, випадкова величина) вимога почала обслуговуватися, але обслуговування ще не закінчене – втрата «недообслуженої» вимоги;

б) за час τ вимога почала обслуговуватися і обслужилася.

Ці можливості часто зустрічаються, наприклад, в задачах військового типу, де якась ціль буває доступною для обстрілу чи спостереження лише протягом певного часу.

3) На довжину черги – вимога, заставши чергу довжиною k, залишається в ній з імовірністю P_k і не приєднується до черги з імовірністю $q_k = 1 – P_k$: саме таким чином поводять себе люди в чергах.

В системах масового обслуговування, які є математичними моделями виробничих процесів, можлива довжина черги обмежена сталою величиною, що є окремим випадком більш загальної задачі.. Класичні системи з відмовами чи необмеженим очікуванням є окремими випадками всіх вищезгаданих систем з обмеженнями, де можливі як втрати вимог, так і їх очікування, тому іноді системи з обмеженнями називають змішаними. Існують такі можливі, які зустрічаються на приктиці правила:

4) Тривалість перебування обслуговування вимоги залежить від того, скільки їй довелося очікувати.

5) середня тривалість обслуговування зменшується із збільшенням черги.

6) Чисельність приборів збільшується із зростанням черги.

е) Призначення чергової вимоги.

Якщо на момент вивільнення одного з приборів існує черга очікуваних вимог, одна з них займає цей прибор і приступає до обслуговування. В силу неоднорідності потоку можна розрізняти вимоги за тривалістю фактичного очікування (за моментами їх надходження), або за тривалістю очікування (чи перебування), яка залишається, і є наяву. Перерахуємо окремі випадки:

1) невпорядкованість – з рівними ймовірностями на обслуговування надходить будь-яка з очікуваних вимог;
2) строга черговість – вимоги призначаються до обслуговування в порядку їх надходження;
3) зворотна черговість – першою починає обслуговуватися та з вимог яка надходить останньою (розбір купи ящиків, які складаються один на одного).

Тобто основними кроками процесу обслуговування однорідного потоку є:

1) вибір вільного прибору;
2) завдання тривалості обслуговування.

Для системи з відмовою 1) та 2) вичерпують весь процес обслуговування. Якщо розглядати системи масового обслуговування з очікуванням, то повинні бути додатково задані правила:

3) утворення черги;
4) призначення чергової вимоги.

3.5.2. Порядок обслуговування

В основі процедури обслуговування неоднорідного потоку повнодоступності потоку знаходиться порядок обслуговування однорідного потоку. Далі розглядаються лише певні особливості процесу обслуговування, які викликані неоднорідністю потоку.

Зрозуміло, що для неоднорідного потоку повнодоступності множини обслуговуючих приборів S можна не спостерігати, оскільки неоднорідність потоку може виявлятися саме в тому,, що кожному з потоків, на які можна розбити неоднорідний потік, відповідає (є доступною) своя підмножина множини S. В цьому випадку множину S , як прийнято в телефонії, називають повно доступним пучком (лінією приборів). Неоднорідність потоку може впливати на розподіл тривалості обслуговування. Так телефонна статистика свідчить, що в межах одного і того ж міста діяльність розмов розподілена за показниковим законом, тоді як тривалість міжміських розмов можна грубо прийняти постійною (3 хвилини). Як приклад впливу неоднорідності потоку на дисципліну черги, наведемо важливий окремий випадок, коли для певних вимог маємо систему з необмеженим очікуванням, а для всіх інших - з відмовами. Такий варіант можливий при організації міжміського телефонного зв'язку. Заслуговує особливої уваги випадок різних варіантів призначення чергової вимоги для неоднорідного потоку. Це викликано тим, що вимоги різних типів можуть взаємодіяти між собою на спільних приборах, тобто одні вимоги можуть впливати на обслуговування інших вимог – аж до припинення їх обслуговування.

Нехай множина приборів S є повно доступною, а даний неоднорідний потік можна зобразити як суперпозицію (коли заявки двох потоків впорядковані за загальним збільшенням тривалості надходження) двох потоків. Якщо для вимог обох потоків допустимим є очікування, то необхідно спеціальне правило, яке визначає, яким чином діяти, коли на момент вивільнення одного з приборів наяву очікування вимоги обох потоків, тобто слід задавати правило взаємодії черг. Найпоширенішим є випадок, який ілюструється відомим правилом: «інваліди обслуговуються поза чергою», тобто за умови вивільнення будь-якого з приборів його відразу займає чергова вимога потоку $П_1$ («інваліди»). Схоже на те, що зручніше за все цю дисципліну називати позачерговим обслуговуванням.

За умови позачергового обслуговування (системи з очікуванням) вимоги взаємодіють лише під час очікування. Можна говорити про взаємодію в процесі обслуговування, що має сенс також для систем з відмовами. Поширеним є правило: якщо за умови надходження вимоги потоку $П_1$ всі прибори зайняті, але деякі прибори обслуговують вимоги потоку $П_2$, то вимоги потоку $П_1$ займають один з цих приборів, а обслуговування вимоги потоку $П_2$ припиняються – перервана вимога. Таким чином, черга з вимог потоку $П_1$ можлива лише в тому випадку, коли всі прибори зайняті обслуговуванням вимог потоку $П_1$. Наслідок перерваних вимог може бути різною, наприклад, в телефонії за умови надходження виклику міжміської телефонної станції перервані вимоги губляться. Якщо ж вони залишаються як претенденти на обслуговування, то повинні бути вказані правила постановки їх на чергу. Розглянемо особливості перерваних вимог, в цьому випадку використовуються два варіанти:

1) не враховується час, витрачений раніше на обслуговування цієї вимоги. Наприклад, якщо нагрів деталі був перерваний внаслідок появи більш важливої вимоги, а деталь встигає охолонути, процес нагріву слід повторити;
2) обслуговування продовжується з тієї стадії, на якій воно було перервано. Так буває у випадку механічної обробки деталі.

Необхідність враховувати неоднорідність потоку викликана тим, що різні вимоги можуть обслуговуватися по різному. Якість обслуговування буде неоднаковою для вимог різних типів За інших рівних умов позачергове обслуговування і обслуговування з перериванням будуть вигіднішими для потоку $П_1$ у меншій мірі ніж для потоку $П_2$. В таких випадках говорять про «обслуговування з перевагою»; потік має перевагу в обслуговуванні по відношенню до потоку $П_2$.

Найефективнішим способом забезпечення переваги є порядок призначення чергової вимоги. Проте переваги в обслуговуванні можна досягти таким простим способом, як оголошення частини приборів недоступною для вимог потоку $П_2$, в той час, як вимоги потоку $П_1$ є доступними всі прибори – цей спосіб можна назвати способом «зайвих» приборів. Існує багато способів забезпечення переваги, в рамках цієї книги ми обмежимося тими, які наведені вище.

3.5.3. Узагальнене обслуговування

Багато практичних систем потребують розгляду більш загальних процесів обслуговування, які потребують для свого опису розширення поняття «обслуговування». Найпростішими прикладами процесів обслуговування, які відрізняються від описаних вище, можуть бути робота ліфта, здатного одночасно обслуговувати декілька пасажирів, послідовна обробка деталей на автоматичній лінії, яка складається з кількох різнотипних станків. В цілому називатимемо процес обслуговування узагальненим, якщо порушено хоча б одна з припущених вище вимог єдності: одна вимого, один прибор, одна операція обслуговування, тобто для операції узагальненого обслуговування, яка вже не припускається однократним актом, недостатньо одного прибору, причому вимоги можуть обслуговуватися цілими групами. Оскільки випадки однорідного і неоднорідного потоків істотно різні, вони розглядаються окремо. Найважливішим і найзмістовнішим є випадок неоднорідного потоку. Зупинимося на описові поняття «узагальнене обслуговування», особливо узагальнених систем обслуговування. З формальної точки зору вже описаний процес обслуговування визначимо таким чином. Задаються:

1) «елемент обслуговування», який складається за якимось певним законом (визначеному дисципліною обслуговування) за наявності в системі масового обслуговування вимоги та вільного прибору; в цьому випадку кажуть про обслуговування даної вимоги в даному приборі, який вважається вільним;
2) випадкова величина $\eta \rangle 0$, яка називається тривалістю обслуговування;
3) «правило розпаду» елемента обслуговування: елемент обслуговування «розпадається» (перестає існувати), якщо:

а) закінчився час перебування даної вимоги в системі;

б) вийшов з ладу даний прибор;

в) обслуговування даної вимоги в даному приборі перервано іншою вимогою.

Якщо за проміжок часу η елемент обслуговування не розпадається, то вважаємо дану вимогу обслуженою, а прибор вільним. Поняття **вільного обслуговування** означимо наступним чином.

а) Узагальнене однофазне обслуговування задаватимемо:

1) елементом обслуговування – парою випадкових чисел (m,n), яка складається за певним законом за наявності в системі масового обслуговування $m \geq 1$ вимог та $1 \leq n \leq r$ вільних приборів, коли кажуть про обслуговування m вимог в групі n приборів, тобто група з m вимог обслуговується сукупністю, яка складається з n приборів, які вважаються зайнятими.

2) випадковою величиною $\eta \rangle 0$ (тривалістю перебування);

3) правилом розпаду елемента обслуговування: елемент обслуговування розпадається (перестає існувати), якщо:

- закінчився час (тривалість) перебування всіх вимог, які входять в m вимог;
- вийшов з ладу хоча б один прибор, який входить до групи з n приборів;
- перервано обслуговування даних m вимог в даних n приборах; якщо за проміжок часу η елемент обслуговування не розпадається, вважаємо дані m вимог обслуженими, а кожний з n приборів вільними.

По відношенню до певного процесу узагальненого обслуговування m вимог та n приборів можна вважати, відповідно, узагальненими вимогою та прибором.

б) Узагальнене q-фазне ($q \geq 1$) обслуговування.

Вважатимемо множину обслуговуючих приборів S такими, що складаються з q підмножин, які попарно не перетинаються: $S_1, S_2, \dots, S_q$, які називаються фазами. Нехай підмножина S_k, $k=\overline{1,q}$, містить r_k приборів, де $1 \leq r_k \leq r$, причому $\sum_{k=1}^{q} r_k = r$. Задамо $3 \cdot q$ випадкових величин $m_1,\dots,m_q; n_1,\dots,n_q; \eta_1,\dots,\eta_q$, де $k = 1, 2, \dots, q$:

1) m_k - ціле число, $m_k \geq 1$;

2) n_k - ціле число, $1 \leq n_k \leq r_k$;

3) η - додатне число.

Обслуговування на першій фазі задається таким же чином, як і узагальнене однофазне обслуговування, де слід покласти $m = m_1, n = n_1, \eta = \eta_1, r = r_1$. Обслуговування якоїсь вимоги на i – тій фазі ($i = 2, q$) може розпочатися лише після того, як ця вимога буде обслуженою на (i – 1) – й фазі, і задається таким же чином, як і узагальнене однофазне обслуговування, де слід покласти $m = m_i; n = n_i; r = r_i$. Після обслуговування на q – й фазі вимога вважається обслуженою повністю.

3.5.4. Узагальнені однофазне та багатофазне обслуговування

Спочатку розглянемо декілька окремих випадків узагальненого однофазного обслуговування. Тут доцільно розглянути три випадки.

У першому випадку, коли $m = 1$, якщо $n = 1$, отримуємо звичайне означення обслуговування, тому нехай $n > 1$, тобто кожна вимога обслуговується кількома приборами. Розрізнятимемо два випадки:

1) прибори однакові (однорідні), тобто вимога може бути обслуженою будь-якими n вільними приборами;

2) прибори різні (неоднорідні), тобто узагальнений прибор повинен складатися з n певних приборів.

Проілюструємо вищевказане прикладами. Для першого випадку уявимо собі систему протиповітряної оборони якогось об'єкту. Якщо чисельність літаків порівняно невелика (менша за кількість засобів протиповітряної оборони), то для боротьби з кожним з них можна виділити декілька засобів протиповітряної оборони, причому будь-яких, якщо їх вважати однаковими. В цьому випадку n визначається станом системи обслуговування на даний момент часу. Цікавішим є випадок, коли не будь-які з вільних приборів можуть утворювати n приборів, які обслуговуються, тобто необхідно представити прибори неоднорідними відносно певної ознаки. Нехай відносно цієї ознаки множина приборів S розбита на n підмножин $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Узагальненим прибором вважатимемо сукупність з n приборів, взятих по одному з кожної підмножини. Внаслідок властивості повно доступності кожної з підмножин S_k, $k = \overline{1, n}$, максимально можливе число одночасно функціонуючих узагальнених приборів становить $min\ \{r_i\}$, де r_i – кількість приборів, які входять до підмножини S_i; $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^{n} r_i = \eta$. Тому, з точки зору найкращого використання приборів, оптимальним є випадок рівної кількості приборів у всіх підмножинах S_i, $i = \overline{1, n}$. В цьому випадку склад узагальнених приборів можна раз і на завжди зафіксувати, а далі кожні n з них назвати одним прибором, що буде звичайним обслуговуванням.

Можливе певне узагальнення правила утворення набору в n приборів. Існують системи масового обслуговування, де з певних підмножин S_i до набору n приборів входять декілька приборів, чисельність підмножин S_i не переважає n. Для прикладу можна навести випадок, коли з кожним із станків комплектується відразу декілька різців.

У другому випадку, $n = 1$, отримуємо узагальнене обслуговування лише за умови $m > 1$. Оскільки розглядається лише однорідний потік, маємо, на відміну від першого випадку, єдину можливість: узагальнена вимога складається з m довільних вимог, тобто для обслуговування необхідна одночасна наявність в системі m будь-яких вимог. Наприклад, маршрутне таксі «Київ-Бориспіль» не відправиться в рейс, доки не збереться потрібна кількість пасажирів.

В цьому випадку істотним є те, що кожний прибор здатний одночасно обслуговувати декілька вимог. Кількість вимог, які прибор обслуговує одночасно, слід вважати випадковою величиною, яка визначається параметрами самого прибору та дисципліною обслуговування. В наведеному прикладі це є місткістю таксі та правила, якими керується шофер, очікуючи заповнення машини пасажирами. Іншим прикладом є робота ліфту.

В третьому випадку m, n переважають одиницю, узагальнене однофазне обслуговування однорідного потоку можна ілюструвати роботою однотипних станків з ковзним резервом допоміжного обладнання, причому кожний станок обробляє одночасно декілька деталей.

Для випадку узагальненого багатофазного обслуговування також розглянемо три випадки.

У першому випадку, коли $m_i = n_i = 1$, $i = \overline{1,q}$ обслуговування на першій фазі є звичайним обслуговуванням. Для однорідного потоку узагальнене обслуговування, коли $m = 1$ а потоки неоднорідні, має смисл тоді, коли не всі r_i рівні між собою, $i = \overline{1,n}$. Якщо $\min\{r_i\} = r_\alpha$, то $(r_\beta - r_\alpha)$ приборів підмножини S_β використовується як ковзний резерв (забезпечує більш рівномірну завантаженість обладнання). Це має сенс, якщо прибори, які відносяться до різних підмножин S_i, мають різну надійність, тоді найменш надійних приборів повинно бути більше.

Можливим є невелике узагальнення правила утворення n – ки приборів. Існують системи масового обслуговування, де з деяких підмножин S_i, до n – ки входять декілька приборів. Чисельність підмножин S_i не повинна переважати n. Як приклад можна навести випадок, коли з кожним із станків комплектується відразу декілька різців.

У другому випадку $n = 1$. Маємо узагальнене обслуговування лише за умови $m > 1$, але оскільки розглядається лише однорідний потік, то існує єдина можливість: узагальнена вимога складається з m довільних вимог, коли для обслуговування необхідно одночасно мати в системі m будь-яких вимог.

У третьому випадку, коли $m > 1$, $n > 1$, узагальнене однофазне обслуговування однорідного потоку можна ілюструвати роботою однотипних станків з ковзним резервом допоміжного обладнання, причому кожний станок обробляє одночасно декілька деталей.

3.5.5. Узагальнене багатофазне обслуговування. Випадок неоднорідного потоку

Для узагальненого багатофазного обслуговування розглянемо три окремих випадки.

У першому випадку $m_i = n_i = 1$, $i = \overline{1,q}$. Тоді обслуговування на першій фазі бкде звичайним обслуговуванням. Якщо воно закінчується, обслужена на першій фазі вимога надходить на другу фазу, Внаслідок вибору чисел m_2 та n_2 обслуговування на другій фазі також є звичайним, після чого обслужена вимога надходить на третю фазу, де обслуговування є також звичайним, і т.д., до тих пір, доки вимога не буде обслужена на q – ій фазі, що означатиме закінчення обслуговування цієї вимоги в даній системі. Введене багатофазне обслуговування описує послідовне виконання ряду операцій, кожна з яких здійснюється різними приборами.

В другому випадку величини m_i довільні, що означає, що прибори кожної фази обслуговують вимоги групами.

В третьому випадку n_i – довільні, що можна розуміти також, як і в першому випадку (двояким чином).

Для неоднорідного потоку поняття узагальненого обслуговування стає змістовнішим. Зобразимо кожну вимогу як деякий випадковий вектор $R = R(t; \alpha_1,..., \alpha_i; \beta_1,..., \beta_k)$. Всі параметри, окрім моменту надходження t, зручно називати *нетривіальними.* Позначимо через S кількість нетривіальних параметрів: $S = i + k$.

Узагальнене обслуговування має такі особливості, пов'язані з неоднорідністю вимог:

1) вимогам різних типів можуть відповідати свої n – ки приборів;
2) m – ка вимог може складатися з досить певних означень сукупності вимог окремих типів;
3) якщо потік неоднорідний, то кожна вимога постає як єдиний «нерозчленований» об'єкт.

Тому під обслуговуванням можна розуміти здійснення певної операції чи кількох, які слідують одна за іншою, вони рознесені у часі. За умови неоднорідного випадку, крім перерахованих, є ще можливість одночасного виконання над кожною вимогою кількох операцій, суміщених у часі, оскільки під операцією можна розуміти зміну якогось одного з нетривіальних параметрів.

Розглянемо два випадки, що стосуються неоднорідних потоків. Перший випадок відповідає узагальненому однофазному обслуговуванню. Формальне означення мало відрізняється, порівняно з випадком однорідного потоку. Замість випадкової величини η задається l невід'ємних випадкових величин $\eta_1,...,\eta_l$, серед яких хоча б одна повинна бути відмінною від тотожного нуля, і називається η_i часом виконання i – тої операції (обслуговування i – го нетривіального параметра), $i = \overline{1,l}$. Тому m – ка вимог вважається такою, що обслужена повістю тільки тоді, коли за час $\eta = \max r$, $1 \le i \le l$ елемент обслуговування не розпадається. Якщо до моменту розпаду елемента обслуговування закінчаться лише деякі операції, подальша доля частково обслуженої вимоги визначається особливим правилом: воно може вважатися втраченим чи залишитися в системі для обслуговування. Прибори з обслуговуючої m – ки вважаються вільними у міру закінченням кожним з них своєї операції. При $\eta_k = 0$ k–тий параметр не змінюється, тобто розглядаються також і фіктивні операції.

У другому випадку маємо узагальнене багатофазне обслуговування. Розчленування всього процесу обслуговування на окремі етапи, кожний з яких здійснюється приборами однієї з фаз, виявляється неоднозначним. Всяка реальна система обслуговування природно розбивається на певні відносно самостійні частини, причому кожна вимога при обслуговуванні проходить ці частини послідовно.

3.5.6. Приклади

Приклад 1. Узагальнене однофазне обслуговування

Розглянемо питання впливу неоднорідності потоку на узагальнене однофазне обслуговування для окремого випадку, коли лише одна з величин $\eta_1,...,\eta_S$ відмінна від нуля, тобто коли процес обслуговування полягає в зміні одного з нетривіальних параметрів якоїсь з вимог чи групи. Можуть мати місце випадки, характерні для однорідного потоку.

а) Нехай $m=1, n\rangle 1$. Якщо для обслуговування неважливо, які з вільних приборів здатні утворювати узагальнений прибор, тобто прибори однорідні, можна вважати, що їх необхідна кількість визначається одним з параметрів вимоги. Зокрема, за умови немеханізованого розвантаження, якщо в потоці вантажів можуть зустрітися предмети найрізноманітніших габаритів та ваги, то кількість вантажників, необхідних для вигруження якогось з предметів, слід вважати випадковою величиною. Припустимо, що прибори неоднорідні відносно якоїсь ознаки, стосовно певної множини приборів S класифіковані на n підмножин $S_{1,...,}S_{n,}$ які попарно не перетинаються. Зручно вважати, що розглядуваний потік П зображений як сума P потоків $П_1,…,П_p$. Вважаємо, що для кожного з потоків $П_i$ в будь-якій з множин S_k знайдеться хоча б один прибор, здатний обслуговувати вимоги цього потоку $(i=\overline{1,p}, k=\overline{1,p})$. Обслуговуюча m – ка для вимог потоку $П_i$ складається з n приборів, взятих по одному з кожної множини S_k має знайтися хоча б один прибор, здатний обслужити вимоги потоку $П_i$ (неповно доступність множини $S_{k)}$. Описану дисципліну обслуговування в телефонії називають *n – каскадною*, множина S_k - k – м *каскадом* (k = $\overline{1,n}$).

б) Нехай $n=1, m\rangle 1$. Для випадку однорідного потоку маємо групове обслуговування. Якщо потік неоднорідний, маємо якісно новий, важливий для практики, тип обслуговування. Зобразимо потік П як суму $m\rangle 1$ потоків $П_1,…,П_m$ і задамо обслуговування наступним чином: кожний прибор може обслуговувати лише групу з m вимог, взятих по одній з кожного потоку. Формально поняття потоку m–ок є однорідним і має властивість ординарності, можна вважати, що моментом $t_i^{(S)}$ появи вимоги, яка має номер S, потоку m – ок П є $\max\{t_i^{(S)}\}$, де $t_i^{(S)}$ - відповідний момент для потоку $П_i$.

Зобразимо потік П як суму m > 1 потоків $П_1$, …, $П_m$ і задамо обслуговування наступним чином: кожний прибор може обслуговувати лише групу з m вимог, взятих по одній з кожного потоку. Поняття потоку m – ок можна ввести наступним чином: якщо кожний з потоків $П_i$ $(i=\overline{1,m})$ є однорідним і має властивість однорідності, вважаємо, що моментом $t^{(S)}$ появи вимог, яка має номер S, потоку m – ок П є $\max\{t_i^{(S)}\}$, де $t_i^{(S)}$ - відповідний момент для потоку $П_i$. Такі випадки трапляються в різноманітних задачах, де якесь ціле утворюється з частин. Це, зокрема, процеси зборки, коли по конвеєрам рухаються деталі, з яких надалі збирається пристрій, процеси отримання збірної інформації про якийсь об’єкт, та ін. При цьому специфіка конкретних задач викликає різні модифікації основної схеми.

в) На основі вищевикладеного, більш зрозумілим стає сутність узагальненого однофазного обслуговування також для довільних m та n. Для простоти можна уявити декілька станків, кожний з яких здійснює збірку певного пристрою з яких-небудь компонентів, причому набір допоміжних інструментів спільний для всіх станків.

г) Розглянемо випадок, який можливий лише для неоднорідного потоку, коли над кожною вимогою здійснюється одночасно декілька операцій. Вважатимемо, що для кожного з тих параметрів, для яких $\eta_k \neq 0$, виділені декілька приборів, які утворюють узагальнені прибори. Узагальнений прибор з номером i незалежно, а іноді і залежно, від інших змінює протягом проміжку часу η_i значення i – го параметра вимоги, причому істотно, що ці операції можуть здійснюватися в інтервали часу, що перетинаються. Як приклад, це може бути поточний ремонт кораблів, коли одна бригада виробляє фарбування бортів, інша – ремонтує двигуни, третя – перевіряє прибори, та ін.

Приклад 2. Узагальнене багатофазне обслуговування

Проаналізуємо сенс, який можна надати у випадку неоднорідного потоку. Основною особливістю є те, що на кожній з фаз над узагальненою вимогою виконується лише одна операція.

а) Змінимо завдання цілих чисел $m_i, i = \overline{1, q}$. Нехай $m_1 \geq 1, m_j \geq 0, j = \overline{2, q}$. Вважатимемо, що:

1) обслуговування на першій фазі задається точно таким чином, як і узагальнене однофазне обслуговування, де слід покласти $m = m_1, n = n_1, \eta = \eta_1$;

2) обслуговування якоїсь з вимог j - ї фази $(j = \overline{2, q})$ може початися лише після закінчення обслуговування $(j-1)$ - ї фази і задається таким же чином, як і узагальнене однофазне обслуговування, де необхідно покласти $m = m_j + 1, n = n_j, \eta = \eta_j$;

3) після обслуговування на q-й фазі вимога вважається обслуженою повністю.

За умови $m_i = 1, m_j = 0, (j = \overline{2, q})$ отримуємо процес типу послідовної обробки певної деталі. З’ясуємо, який смисл мають величини $m_i, i = \overline{1, q}$, в загальному випадку. Цього разу змінимо одне з чисел m_i, що призведе до зміни обслуговування лише на i – й фазі, прибори якої будуть обслуговувати m – ки вимог, тоді як на всіх інших фазах вимоги обслуговуються по одній. Якщо $i = 1, m$ - ка складається з m_1 вимог. Отриманий процес обслуговування можна інтерпретувати наступним чином: на першій фазі з m_1 елементів здійснюється збірка деякого пристрою, над яким послідовно здійснюються якісь $(q-1)$ операцій на інших фазах. За умови $i > 1$ можна уявити систему масового обслуговування такого типу: на перших $(i-1)$ фазах певна деталь проходить необхідну обробку, після чого, як «напівфабрикат», вона компонується на i – й фазі з якимись іншими з $(m_i + 1)$ компонентів пристрій проходить ще $(q-1)$ стадій обробки на фазах, що залишилися.

Операції, які складають процес обслуговування, можна поділити на два класи: ведучі та ведені. Останніми є ті, які можуть починатися після закінчення перших. Якщо операції є незалежними, то вони можуть починатися в довільні моменти часу. Після закінчення обслуговування за одним з параметрів може початися ведене цієї операції обслуговування, тоді як та операція, яка не залежала від ведучої, може ще продовжуватися протягом довільного часу.

3.6. Агрегативні системи

На практиці часто реальні системи виявляються надто складними, щоб їх можна було описати з використанням вже розглянутих типових математичних схем. Тоді реальний об’єкт слід розчленувати на елементи, чисельність яких є необов’язково малою, проте кожний елемент доступний для опису однієї з типових математичних схем. Схожі елементи системи можуть виявитися представленими як різні математичні схеми: один як скінчений автомат, другий - як система масового обслуговування, третій – як імовірнісний автомат, і т. д. Системи, елементи яких описані настільки різнорідно, навряд чи можна досліджувати, використовуючи єдиний метод. Тому для опису систем, які складаються з великого числа елементів, намагаються вибрати для формалізації останніх універсальні математичні схеми, які охоплюють вищезгадані системи як окремі випадки. На сьогодні найуживанішою схемою є агрегат. Для агрегатів будуються зручні імітаційні моделі, а для одного з класів – кусково-лінійних агрегатів також аналітичні методи, які базуються на апараті теорії харківських випадкових процесів. В цьому підрозділі розглядається математична модель для опису елементів системи у вигляді агрегатів, а також для спряження елементів у єдину складну систему.

3.6.1. Математична модель агрегату

Агрегат – це загальна математична модель елементів складної системи, яка дає можливість на єдиній мові зобразити опис детерміністичних та стохастичних об’єктів, які функціонують в неперервному та дискретному часі (релейно-контактних схем, скінченнях та імовірнісних автоматів, систем масового обслуговування, та ін.) В кінцевому підсумку моделі широкого класу складних систем описуються композицією спряжених агрегатів. Агрегат, як уніфікований елемент характеризується множинами моментів часу *T*, станів в кожний момент часу *Z*, вхідних *X* та вихідних *У* сигналів. Стан агрегату в момент $(t+0)$ позначимо $z(t+0)$. Вважатимемо, що із стану $z(t)$ до стану $z(t+0)$ агрегат приходить протягом малого інтервалу часу. Перехід агрегату із стану $z(t_1)$ до $z(t_2), t_2 \rangle t_1$, визначається динамічними властивостями самого агрегату та вхідними сигналами. Припустимо, що поведінка моделі у випадку дії вхідного сигналу x_n описується оператором

V. Тоді стан $z(t_n+0)$, де t_n - момент надходження до агрегату вхідного сигналу $x_n, t_n \in T$, можна визначити з виразу

$$z(t_n+0)=V[t_n, z(t_n), x_n]. \qquad (3.46)$$

Надалі півінтервал часу $t_1 \langle t \le t_2$ позначатимемо $(t_1, t_2]$, а півінтервал $t_1 \langle t \le t_2$ як $[t_1, t_2)$. Якщо інтервал (t_n, t_{n+1}) не містить жодного моменту надходження сигналів, то для $t \in (t_n, t_{n+1}]$ стан агрегату визначається оператором

$$z(t)=U[t, t_n, z(t_n+0)]. \qquad (3.47)$$

Сукупність операторів V та U розглядається як оператор переходів агрегату до нового стану. В множині станів Z доцільно виділити підмножину $Z^{(Y)}$, таку, що якщо $z(t^*)$ досягає $Z^{(Y)}$, яка є моментом видачі вихідного сигналу, який визначається оператором виходів

$$y=G[t^*, z(t*)]. \qquad (3.48)$$

Впорядкована сукупність розглянутих множин $T, X, Z, Z^{(Y)}, Y$ та випадкових операторів V, U, G повністю задає агрегат як динамічну систему. Таким чином, процес функціонування агрегату складається із стрибків стану в моменти надходження вхідних сигналів (оператор V) та змін стану між цими моментами (оператор U). На оператор U не накладається жодних обмежень, тому припустимими є стрибки стану в певні моменти часу, які не є моментами надходження вхідних сигналів. За умови практичного використання агрегатів часто такими моментами є моменти видачі вихідних сигналів (виходу стану на границю підмножини $Z^{(Y)}$) та деякі інші. Надалі моменти стрибків називатимемо «*особливими*» *моментами часу.* Для опису стрибків стану в особливі моменти часу t^*, що не є моментами надходження вхідних сигналів, використаємо оператори

$$z(t^*+0)=W[t^*, z(t^*)], \qquad (3.49)$$

які представляють собою окремі випадки оператора U. Позначення U залишимо для оператора, який визначає поведінку агрегату в інтервалах часу між особливими моментами.

Приклад

Нехай до ЕОМ, що розглядається як система масового обслуговування в моменти часу t_j, які утворюють випадковий потік однорідних подій, надходять задачі. Задача, що надійшла в момент t_j характеризується випадковим параметром α_j. Виберемо таку дисципліну обслуговування:

якщо заявка застала обчислювальну машину вільною, то задача, яка відповідає цій заявці, негайно приймається до обслуговування; в іншому випадку заявка направляється до черги і знаходиться там не більше, ніж $v_i = \varphi(\alpha_j, \beta)$, *де* β *- параметр, який характеризує продуктивність ЕОМ. Якщо до моменту часу* $t_j + v$ *задача* j *- ої заявки не буде прийнята до обслуговування, то вона «залишає» систему. В момент закінчення розв'язування задачі обчислювальна машина приступає до розв'язування наступної задачі в порядку черги. Тривалість розв'язування задачі (зайнятість обчислювальної машини) становить* $\eta_j = \psi(\alpha_j, \beta)$.

Представимо цю систему, як агрегат, стан системи опишемо такими координатами: $z_1(t)$ *- час, що залишився до закінчення розв'язування* j *- ї задачі;* $z_2(t)$ *- чисельність задач в системі (в черзі та на обслуговування). Якщо* $z_2(t) = 0$ *(система не містять заявок), то* $z_1(t) = 0$ *для всіх* $t \in T$ *до моменту появи нової задачі. Коли* $z_2(t) \rangle 1$, *то заявки є як на обслуговування, так і в черзі. В цьому випадку потрібні додаткові координати стану:* $z_{1+2\cdot k}(t) = \alpha'_k, k = 1,2,..., z_2(t) - 1,$ *де* α'_k *- параметр* k*-ої заявки в черзі;* $z_{2+2\cdot k}$ *- залишкова тривалість очікування в черзі для* k*-ої заявки. Вхідні сигнали (задачі) надходять до агрегату в моменти* t_j, *і приймають значення* $x_j = \alpha_j$.

Розглянемо випадкові оператори V, U, G, *які описують дану систему. Нехай в момент часу* t_j *надходить нова заявка. Якщо в цей момент обчислювальна машина зайнята* $(z_2(t) \rangle 0)$ *- дана заявка надходить до черги; за цих умов* $z_1(t)$ *не змінюється,* $z_2(t)$ *- збільшується на одиницю,* $z_{1+2\cdot k}(t)$ *та* $z_{2+2\cdot k}(t)$ *- не змінюються; крім того, виникають нові координати* $z_{1+2\cdot k}(t_j) = \alpha_j$ *та* $z_{2+2\cdot k}(t_j) = \varphi(\alpha_j, \beta)$, *які характеризують заявку, що надійшла. Якщо ж в момент часу* t_j *обчислювальна машина вільна і заявок в черзі немає (в цьому випадку* $z_2(t_3) = 0$ *і координати* $z_{1+2\cdot k}(t)$ *та* $z_{2+2\cdot k}(t)$ *не визначаються, задача заявки, що надійшла, приймається до обслуговування. Тоді* $z_1(t_j) = \psi(\alpha_j, \beta); z_2(t_j) = 1$, *інші координати не визначаються.*

Виходячи з цього, можна наступним чином записати оператор V:

$$
\begin{gathered}
z_1(t_j + 0) = z_1(t_j), \text{ якщо } z_2(t_j) \rangle 0, \\
z_1(t_j + 0) = \psi(\alpha_j, \beta), \text{ якщо } z_2(t_j) = 0, \\
z_2(t_j + 0) = z_2(t_j) + 1, \\
z_{1+2\cdot k}(t_j + 0) = z_{1+2\cdot k}(t_j), k \le z_2(t_j), \qquad (3.50) \\
z_{2+2\cdot k}(t_j + 0) = z_{2+2\cdot k}(t_j), k \le z_2(t_j), \\
z_{1+2\cdot k}(t_j + 0) = \alpha_j, \\
z_{2+2\cdot k}(t_j + 0) = \varphi(\alpha_j, \beta).
\end{gathered}
$$

Розглянемо зміни координат стану в інтервалі між моментами надходження вхідних сигналів.

Для моменту $t_j + 0$ *координати стану визначаються у вдповдністю з (1.50). Певний час після* t_j *координати* $z_1(t)$ *та* $z_{2+2\cdot k}(t)$ *зменшуються з одиничною швидкістю, а* $z_2(t)$ *залишається сталою. Координата* $z_1(t)$, *спадаючи з одиничною швидкістю, обертається в нуль в момент* t_j *закінчення обслуговування чергової заявки, в цей момент заявка покидає систему і приймається до обслуговування наступна (i+1) – а заявка з черги, якщо* $z_2(t_i)\rangle 0$, *тому* $z_1(t)$ *від нуля стрибком зростає до* $\eta_{i+1} = \psi(z_2, \beta)$ *і далі спадає з одиничною швидкістю. В цей же момент координата* $z_2(t)$ *зменшується на одиницю. Якщо ж заявок в черзі немає,* $z_1(t)$ *залишається рівною нулеві до надходження нової заявки та прийняття її до обслуговування. Координати* $z_{2+2\cdot k}(t)$, *спадаючи з одиничною швидкістю, оберталися б в нуль в момент* $t_j + \nu_j$ *для відповідних заявок, які приймаються до обслуговування в моменти часу* $t\rangle t_i$, *відповідні координати* $z_{2+2\cdot k}(t)$ *не визначаються. В моменти часу* $t_i + \nu_i$ *(для заявок не прийнятих до обслуговування) координата* $z_2(t)$ *зменшується на одиницю (заявка покидає систему).*

Нехай $t = t_1^*$ *(розв'язок задачі чергової заявки закінчений). В цьому випадку можливі два випадки. В першому випадку в системі є заявки,* $z_2(t_1^*)\rangle 0$ *до обслуговування приймається задача наступної заявки з черги; тривалість обслуговування* $\tau = \psi(a_1^{'}, \beta)$. *В другому випадку (в системі немає заявок,* $z_2(t^*) = 0)$ *система чекає моменту надходження нової заявки і призводить до обслуговування. Момент* $t = t_1^*$ *є особливим, оскільки в цей момент* $z(t)$ *досягає* $Z^{(Y)}$, *тобто* $z_1(t) = 0$. *Тому стрибок стану* $z_1(t^*)$ *визначається оператором* $W^{'}$:

$$\begin{gathered}
z_1(t_1^* + 0) = z_1(t^*) = 0, \text{ якщо } z_2(t) = 0, \\
z_1(t) = \psi_2(z_2(t), \beta), \text{ якщо } z_2(t)\rangle 0, \\
z_2(t_1^* + 0) = z_2(t_1^*) - 1, \\
z_{1+2\cdot k}(t_1^* + 0) = z_{1+2\cdot(k+1)}(t_1^*), 1 \le k \le z_2(t_1^*), \\
z_{2+2\cdot k}(t_1^*) = z_{2+2\cdot(k+1)}(t_1^*), 1 \le k \le z_2(t_1^*).
\end{gathered} \tag{3.51}$$

Розглянемо один особливий момент часу t_2^*, *який не є моментом надходження вхідного сигналу. В момент часу* t_2^*, *коли завершується час очікування однієї із заявок, наприклад* l *- ї, чисельність заявок в системі зменшується на одиницю. Стан агрегату* $z(t_2^* + 0)$ *визначається оператором* $W^{''}$ *такого типу:*

$$\begin{gathered}
z_1(t_2^* + 0) = z_1(t_2^*), \\
z_2(t_2^* + 0) = z_2(t_2^*) - 1, \\
z_{1+2\cdot k}(t_{1+2\cdot k}^*) = z_{1+2\cdot k}(t_2^*), k\langle l, \\
z_{2+2\cdot k}(t_2^* + 0) = z_{2+2\cdot k}(t_2^*), k\langle l,
\end{gathered} \tag{3.52}$$

$$z_{1+2\cdot k}(t_2^* + 0) = z_{1+_2\cdot(k+1)}(t_2^*), l\langle k\langle z_2(t_2^*)$$

$$z_{2+2\cdot k}(t_2^* + 0) = z_{1+2\cdot(k+1)}(t_2^*), l\langle k\langle z_2(t_2^*).$$

Координати $z_{1+2\cdot k}$ та $z_{2+2\cdot k}$ для $k = l$ не визначаються, оскільки l - та заявка покидає систему. У напівінтервалах $(t_n, t_{n+1}]$ між моментами t_n, t_{n+1} до яких відносяться моменти надходження до агрегату вхідних сигналів та видачі агрегатом вихідних сигналів, стани агрегатів змінюються за законом, визначеним оператором U, який можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(t_n +) - (t - t_n), \\ z_2(t) &= z_2(t_n + 0), \\ z_{1+2\cdot k}(t) &= z_2(t_n + 0), \\ z_{2+2\cdot k}(t) &= z_{2+2\cdot k}(t_n + 0) - (t - t_n). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Вихідним сигналом агрегату вважатимемо сукупність характеристик заявок, які залишають систему.

Нехай $y(y^{(1)}, y^{(2)})$, де $y^{(1)}$ - ознака ($y^{(1)} = 1$, якщо систему залишає обслужена заявка), та $y^{(1)} = 0$ - якщо не обслужена заявка), $y^{(2)}$ - сукупність відомостей про заявку, наприклад, $y_2 = (\alpha_j, \beta, t^*)$ означає, що заявка надійшла до системи з характеристикою α_j, обслуговуючись за умови, при значенні параметру β, покинула систему в момент часу t^*. В якості $y^{(2)}$, в залежності від конкретної задачі, можуть фігурувати також інші величини чи функції від них. Тобто дія оператора G зводиться до вибору ознаки $y^{(1)}$ та формування відомостей про заявку $y^{(2)}$.

Нехай, в момент часу t_1^* стан агрегату досягає множину $Z^{(Y)}$ ($Z^{(Y)}$ визначається співвідношенням $z_1(t) = 0$). Значення t_1^* визначається із співвідношення $z_1(t_1^*) = 0$. Це означає, що обслуговування чергової заявки закінчилося. В момент часу t_1^* агрегат видає вихідний сигнал $y = (1, \alpha_j, \beta, t_1^*)$. Якщо в момент часу t_2^* стан агрегату досягає підмножини $Z_2^{(Y)}$ ($Z_2^{(Y)}$ визначається співвідношенням $z_{2=2\cdot k}(t) = 0$, хоча б для одного k). Значення t_2^* визначається з співвідношення $z_{2=2\cdot k}(t_2^*) = 0$. Це означає, що тривалість очікування в черзі однієї із заявок завершилося і заявка залишає систему не обслуженою. В цьому випадку $y = (0, \alpha_j, \beta, t_2^*)$.

На цьому вважаємо закінченою побудову агрегату, який описує функціонування системи масового обслуговування, яка розглядається.

З теоретичної та практичної точок зору істотну роль відіграє такий важливий клас агрегатів – кусково-лінійні агрегати, для аналізування яких будуються компактні імітаційні моделі, які достатньо просто реалізуються на ЕОМ, та використовуються аналітичні методи, які базуються на теорії марківських процесів. Опис складної системи не вичерпується описом її елементів, крім того, для розв'язку задач композиції складних систем та аналізу їх структури потрібний опис взаємодії між елементами.

3.6.2. Математична модель спряження елементів в складній системі

Математична модель складної системи, окрім формального опису елементів системи, обов'язково включає формальні описи взаємодії між елементами. Можливість повного і точного опису взаємодії між елементами системи важлива для розв'язування на ЕОМ таких задач, як аналіз структури управління підприємствами та галузями економіки, аналіз складних електронних схем, технологічна підготовка виробництва виробів електроніки, та ін. Для аналізування такого класу складних систем взаємодія між елементами системи достатньо розглядати в межах механізму обміну сигналами, який включає, зокрема, як оду з основних складових, модель спряження елементів системи мережею каналів зв'язку, які забезпечують передачу сигналів між ними. В процесі побудови цієї моделі спряження елементів в меншій мірі цікавим є процес функціонування елемента як динамічної системи, більш важливими є тільки такі властивості елемента, які істотні для спряження його з іншими елементами системи та зовнішним середовищем.

Як приклад розглянемо систему S, яка складається з N елементів. На вхід елемента $C_j, j=1,...,N,$ можуть надходити вхідні сигнали $x^{(j)}$, які належать певній множині $X^{(j)}$ (множині вхідних сигналів елемента C_j), тобто $x^{(j)} \in X^{(j)}$. Вихідні сигнали елемента C_j позначимо $y^{(j)}$, причому $y^{(j)} \in Y^{(j)}$ ($Y^{(j)}$ - множина вихідних сигналів елемента C_j). Для подальшої формалізації механізму спряження елементів введемо ряд припущень, які концентрують інтуїтивні уявлення про закономірності функціонування системи, які добре узгоджуються з досвідом для класу реальних систем, які розглядаються.

а) Перше припущення відноситься до способу формального опису сигналу. В багатьох випадках вхідний сигнал $x(t) \in X$, який надходить до елемента в момент часу t, можна розглядати як сукупність «елементарних сигналів» $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$, які одночасно виникають на вході елемента; аналогічно вихідний сигнал $y \in X$ - як сукупність елементарних сигналів $y_i(t), i=1,2,...,r$. Тому перше припущення формулюється таким чином. Для опису сигналу достатньо певного скінченого набору характеристик. Так тексти донесень, які надходять від керованих об'єктів до пункту збирання інформації АСУ, представляють собою сукупності скінченої кількості букв та цифр, напівфабрикати у виробничому процесі з достатньою точністю можна характеризувати скінченним числом параметрів (розміри, характеристики матеріалу, температура, та ін.) і т.д.

б) Елементарні сигнали передаються в системі незалежно один від одного по елементарним каналам.

Кожний елементарний канал, підключений до виходу елемента C_j, призначений тільки для передачі $y_i^{(j)}(t)$, які мають фіксований індекс i. Якщо вхід елемента C_j складається з n_j вхідних контактів, то контакт X_i приймає елементарні сигнали $x_i^{(j)}(t), i=1,2,...,n_j, j=1,2,...,N.$ Аналогічно вихід елементу C_j складається з r_j вихідних контактів. Контакт $Y_i^{(j)}$ видає елементарні сигнали $y_i^{(j)}(t), i=1,2,...,r_j$.Елементарні сигнали, які видається даним вихідним контактом, передаються певному вхідному контакту іншого (чи того ж самого) елемента лише в тому випадку, коли в системі є елементарний канал, який з'єднує вищезгадані контакти.

в) Переходячи до побудови моделі спряження елементів в системі, необхідно враховувати обмеження, які накладаються на тип мережі елементарних каналів, які з'єднують вхідна та вихідні контакти елементів системи. Зокрема, якщо припустити, що до вхідного контакту певного елемента системи буде підключено декілька елементарних каналів, які йдуть від різних вихідних контактів, то поведінка цього елемента буде невизначеною внаслідок неоднозначності вхідного сигналу за рахунок появи на його вході в даний момент часу кількох сигналів, які надходять з різних джерел. Аналогічна ситуація можлива також за наявності неврахованого дублювання при передачі елементарних сигналів. Для виключення подібних випадків, слід враховувати третє припущення. До вхідного контакту може підключатися будь-яка кількість елементарних каналів за умови, що до входу одного і того ж елементу системи спрямовується не більше ніж один із згаданих елементарних каналів. Засоби передачі сигналів в реальних системах різноманітні і не завжди задовольняють обмеженням, які слідують з приведених припущень. Для використання такої формалізації достатньо кожний реальний канал передачі сигналів зобразити як самостійний елемент системи з відповідними вхідними і вихідними контактами таким чином, що б ідеальні зв'язки між елементами моделі не виходили за межі згаданих припущень.

Взаємодія системи із зовнішнім середовищем розглядається як обмін між зовнішнім середовищем та елементами системи. Тобто кожний сигнал, який видається в зовнішнє середовище, складається з елементарних сигналів, які видаються одним чи кількома елементами системи; елементарні сигнали, які складають сигнал, що надходить із зовнішнього середовища, приймаються одним чи кількома елементами. У відповідності з цим зовнішнє середовище можна зобразити як фіктивний елемент системи C_0, вхід якого містить n_0 вхідних контактів $X_i^{(0)}, i=1,2,,...,n_0$, вихід - r_0 вихідних контактів $Y_i^{(0)}, i=1,2,...,r_0$.

Сигнал, який видається системою у зовнішнє середовище, приймається елементом C_0 як вхідний сигнал, який в свою чергу складається з елементарних сигналів $x_1^{(0)}(t), x_2^{(0)}(t),..., x_{n_0}^{(0)}(t)$.Сигнал, який надходить до системи із зовнішнього середовища, є вихідним сигналом елемента C_0 і складається з елементарних сигналів $y_1^{(0)}(t), y_2^{(0)}(t),..., y_{n_0}^{(0)}(t)$. Елементарний сигнал $y_1^{(0)}(t)$ видається вихідним контактом $Y_i^{(0)}$, а елементарний сигнал

$x_i^{(0)}(t)$ приймається вхідним контактом $X_i^{(0)}$. Можна зробити висновок, що кожний C_j, у тому числі і C_0, як елемент системи S в межах прийнятих припущень про механізм обміну сигналами достатньо характеризувати множиною вхідних контактів $X_1^{(j)}, X_2^{(j)},..., X_n^{(j)}$, яку позначимо $[X_i^{(j)}]_1^n$, та множиною вихідних контактів $Y_1^j, Y_2^{(j)},..., Y_r^{(j)}$, позначеною $[Y_i^{(j)}]_1$, де $n = n_j, r = r_j, j = 1,2,..., N.$ Тобто математичною моделлю елемента C_j, яка використовується для формального опису його спряження з іншими елементами системи та зовнішнім середовищем, є пара множин: $[X_i^{(j)}]_1^n;[Y_i^{(j)}]_1^r$.

Внаслідок третього припущення кожному вхідному контакту $X_i^{(j)} \in \bigcup_{j=0}^{N}[X_i^{(j)}]_1^N$, де $\bigcup_{j=0}^{N}[X_i^{(j)}]_1^N$ - множина контактів всіх елементів системи та зовнішнього середовища, відповідає не більше одного вихідного контакту $Y_i^{(k)} \in \bigcup_{j=0}^{N}[Y_i^{(j)}]_1^r$, де $j,k = 1,2,...,r$, - множина вихідних контактів всіх елементів системи та зовнішнього середовища, з якою він пов’язаний елементарним каналом. В зв’язку з цим можна ввести однозначний оператор

$$Y_l^{(k)} = R(X_i^{(j)})$$

з областю визначення в множині $\bigcup_{j=0}^{N}[X_i^{(j)}]_1^N$ та множиною значень в множині $\bigcup_{j-0}^{N}[Y_i^{(j)}]_1^r$, який співставляє вхідному контактові $X_i^{(j)}$ вихідний контакт $Y_i^{(k)}$, пов’язаний з ним елементарним каналом. Якщо в системі до контакту $X_i^{(j)}$ не підключено жодного елементарного каналу, то оператор R не визначений на цьому $X_i^{(j)}$. Оператор R називається оператором спряження елементів в системі. Сукупність множин $[X_i^{(j)}]_1^n,[Y_1^{(k)}]_1^r$ та оператора R утворює схему спряження елементів в системі S. Все це ілюструє система, зображена на рис. 3.14.

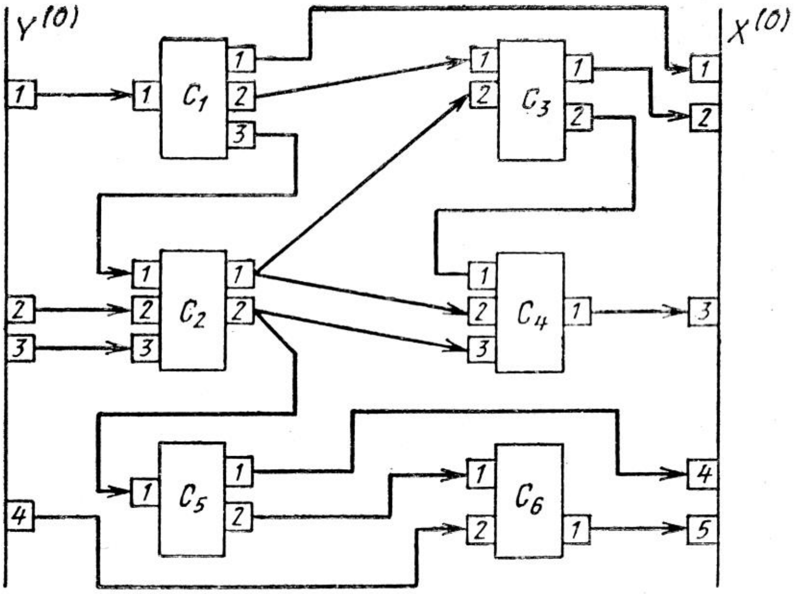


Рис. 3.14. Система спряження елементів

Оператор спряження задається у вигляді таблиці, в якій на перетині стрічок з номерами елементів системи (j) та стовпчиків з номерами контактів (i) розташовуються пари чисел (k,l), які вказують номер елемента k та номер контакту l, з яким з'єднаний контакт $X_i^{(j)}$. Для системи, зображеної на рис. 3.14, оператор спряження представляється табл. 3.7.

Таблиця 3.7. Таблиця оператора спряження системи рис. 3.14.

	1	2	3	4	5
0	1.1	3.1	4.1	5.1	6.2
1	0.1				
2	1.3	0.2	0.3		
3	1.2	2.1			
4	3.2	2.1	2.2		
5	2.2				
6	5.2	0.4			

Якщо стовпчики та стрічки таблиці нумерувати подвійними номерами (j,i) та (k,l), з'єднаних елементарним каналом. Такі таблиці представляють собою матриці суміжності орієнтованих графів, вершинами яких є контакти, а ребрами – елементарні канали. Методи теорії графів ефективні для вивчення структури зв'язків між вхідними та вихідними контактами елементів системи та зовнішнього середовища. Множина вихідних контактів елемента C_j, зв'язаних елементарними каналами з вхідними контактами елемента C_k,

$$[Y^{(j,k)}] = [Y_l^{(j)}]_1^r \bigcap R([X_s^{(k)}]_1^n).$$

Множина вхідних контактів елемента C_j, пов'язаних елементарними каналами з вхідними контактами елемента C_k,

$$[X^{(j,k)}] = R_j^{-1}\{[Y_l^{(k)}]_1^r \bigcap R([X_i^{(j)}]_1^n)\}.$$

де R_j^{-1} - оператор, обернений до оператора R_j, а R_j - звуження оператора R на множину контактів$[X_i^{(j)}]_1^n$.

Характеристики $[X^{(j,k)}]$ та $[Y^{(j,k)}]$ дають змогу зробити висновок про факт наявності зв'язків між елементами C_j та C_k, та про чисельність елементарних каналів, які з'єднують цих елементів.

Розглянута схема спряження, задана сукупністю множин $[X_i^{(j)}]$ та $[Y_i^{(j)}]_1^r$ та оператором R, є однорівневою схемою спряження.

3.6.3. Математична модель спряження елементів в багаторівневих ієрархічних системах

Розглянемо дворівневу схему спряження елементів, для багаторівневої системи модель спряження можна побудувати на основі принципу побудови операторів та формальних співвідношень, які пов'язують оператори різних рівнів.

Нехай систему S розчленовано на певну кількість підсистем $S_\mu, \mu = 1,2,...,M$,які містять не менше ніж по одному елементові таким чином, що даний елемент C_j входить до одної з підсистем S_μ (рис. 3.14).

Підсистема S є одночасно системою та елементом (в другому випадку системи S). Підсистема, як самостійна система, повинна мати контакти $X_i^{(0)\mu}$ та $Y_i^{(0)\mu}$ фіктивного елемента C_0^μ, який представляє зовнішнє середовище для неї, а як елемент системи S вона повинна містити вхідні X_i^μ та вихідні Y_i^μ контакти для зв'язку з іншими підсистемами. Відповідні X_i^μ та $Y_i^{(0)\mu}$, а також $X_i^{(0)\mu}$ та Y_i^μ представляють собою «подвійні» контакти на границях підсистеми S, рис. 3.14. Додаткові контакти, які з'являються при розчленуванні системи S на підсистеми S_μ, можна визначити так. Розглянемо множину $[Y_i^{(j)}]_\mu$ вихідних контактів $Y_i^{(j)}$ всіх елементів C_j, які належать підсистемі S_μ, тобто $C_j \in S_\mu$, які з'єднані елементарними каналами з вхідними контактами елементів C_k, які не належать підсистемі S_μ, тобто $C_k \bar{\in} S_\mu$, та фіктивного елемента C_0

$$[Y^{(j)}]_\mu = \bigcup_{C_j \in S_\mu}\{[Y^{(j,0)}] \cup (\bigcup_{C_k \bar{\in} S_\mu}[Y^{(j,k)}])\}.$$

В загальному випадку, відбираючи контакти $Y_l^{(j)}$ для включення до множини $[Y_l^{(j)}]_\mu$, можна зустрітися з одним і тим же $Y_l^{(j)}$ декілька разів. Наприклад, контакт Y_1^2 визначається, як $R(X_2^{(3)})$ і як $R(X_2^{(4)})$, рис. 3.15.

Проте множина $[Y_l^{(j)}]_\mu$ містить тільки по одному екземпляру контактів $Y_l^{(j)}$, оскільки в силу закону ідемпотентності при об'єднанні множин однакові контакти не повторюються. З рис. 3.15. видно, що для кожного $Y_l^{(j)} \in [Y_l^{(j)}]_\mu$ достатньо мати тільки один подвійний контакт $[X_i^{(0)\mu}, Y_l^{(\mu)}]$ незалежно від кількості підключених до нього елементарних контактів, оскільки роль розподілу каналів може бути передана від $Y_l^{(k)}$ до Y_l^{μ}, якщо ці канали ведуть до різних підсистем, або до $Y_l^{(0)\nu}$, якщо всі вони ведуть до підсистеми S_ν. Тому кожному $Y_l^{(\mu)} \in [Y_l^{(j)}]_\mu$ поставимо у відповідність пару контактів $Y_l^{(\mu)}$ та $X_i^{(0)\mu}$ у відповідності з операторами

$$Y_l^{(\mu)} = Q(Y_l^{(j)})$$

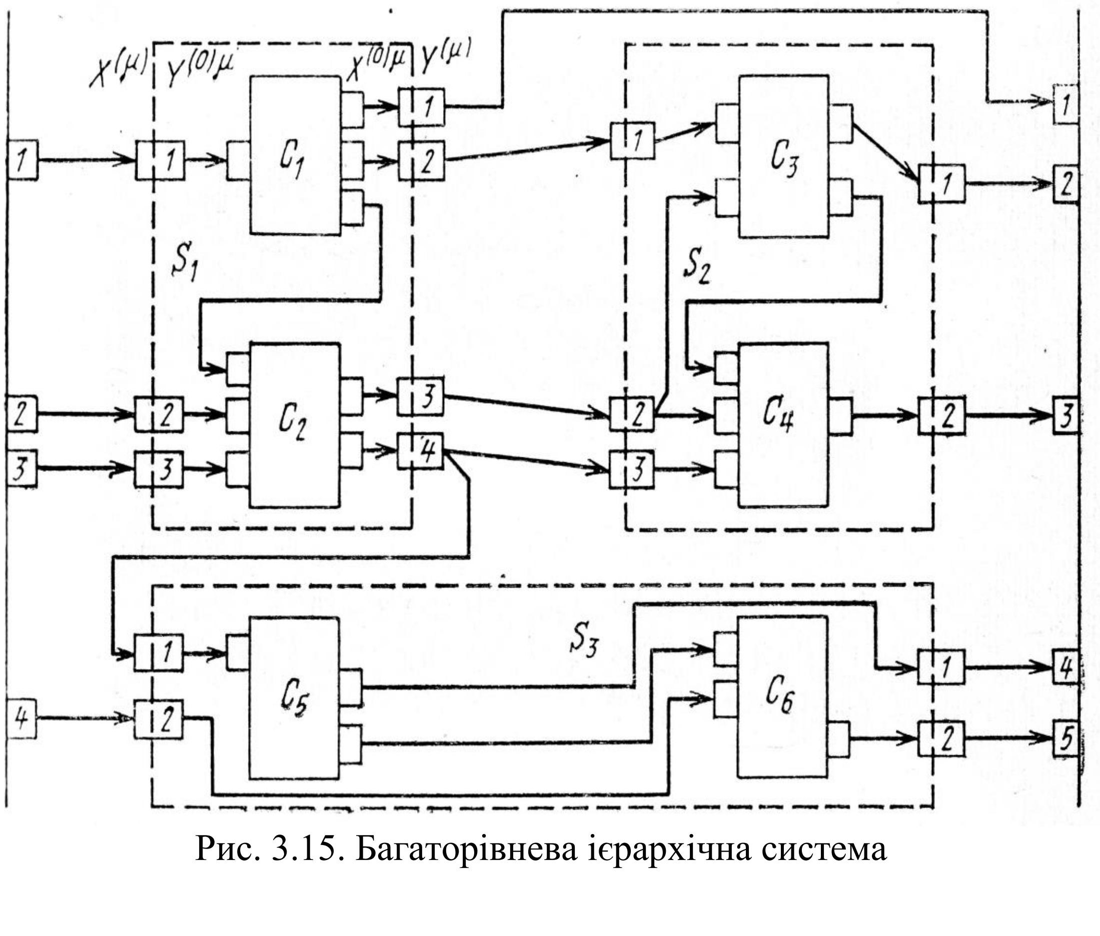


Рис. 3.15. Багаторівнева ієрархічна система

та

$$X_i^{(0)\mu} = Q_\mu^1(Y_i^{(j)}).$$

Оператори Q_μ та Q_μ^1 задаються таблицею нумерації парних контактів, табл. 3.8. Наприклад, для підсистеми S, рис. 3.15, ця таблиця має вигляд:

Таблиця 3.8. Таблиця нумерації парних контактів

	j,l	1,1	1,2	2,1	2,2
Q_μ	l_μ	1	2	3	4
Q_μ^1	i_0,μ	1	2	3	4

Оператори Q_μ та Q_μ^1 описують взаємно однозначні відповідності, тому існують однозначні обернені їм оператори Q_μ^{-1} та $(Q_\mu^1)^{-1}$.

Розглянемо множину $[X_l^{(j)}]_\mu$ вхідних контактів всіх елементів $C_j \in S_\mu$, з'єднаних елементарними каналами з вихідними контактами елементів $C_k \bar{\in} S_\mu$ та елемента C_0

$$[X_i^{(j)}]_\mu = \bigcup_{C_j \bar{\in} S_\mu} \{[X^{(j,0)}] \bigcup (\bigcup_{C_k \bar{\in} S_\mu} X^{(j,k)}])\}.$$

До множини $[X_i^{(j)}]_\mu$ входять тільки різні контакти $X_i^{(j)}$, але не для кожного з них потрібний подвійний контакт $(X_i^{(\mu)}, Y_l^{(0)\mu})$. Дійсно, для контактів $X_2^{(3)}$ та $X_2^{(4)}$ достатньо одного подвійного контакту $(X_2^2, Y_2^{(0)2})$. Окремий подвійний контакт $(X_i^\mu, Y_l^{(0)\mu})$ в загальному випадку достатньо мати для кожної сукупності множин $X_i^{(j)}$ з множини $[X_i^{(j)}]_\mu$, які мають множини $R(X_i^{(j)})$, що співпадають.

Введемо оператори

$$X_i^{(\mu)} = P_\mu(X_i^{(j)}); Y_l^{(0)\mu} = P'_\mu(X_i^{(j)}),$$

які задаються таблицею нумерації парних контактів. Так для підсистеми S_2 ці величини можна визначити з табл. 3,9.

Таблиця 3.9. Таблиця нумерації парних контактів

	i,l	3,1	3,2	4,2	4,3
P_μ	i_μ	1	2	2	3
P'_μ	$l_{0,\mu}$	1	2	2	3

Співвідношення, які описують операторами P_μ та P'_μ, в загальному випадку не є взаємно однозначними. Так подвійному контакту $(X_2^{(2)}, Y_2^{(0)2})$ відповідають два контакти: $X_2^{(3)}$ та $X_2^{(4)}$. Тому однозначні оператори не існують. Проте для даного $X_i^{(\mu)}$ виберемо довільно один з можливих $X_i^{(j)}$, позначимо його символом $P_\mu^{-1}(X_i^{(\mu)})$. Зокрема, для підсистеми S_2 оператор P_2^{-1} можна зобразити табл. 3.10.

Таблиця 3.10. Оператор P_2^{-1} для системи S_2

	t_μ	1	2	3
P^{-1}	i, j	3,1	4,2	4,3

Розглянемо підсистему S_μ як самостійну систему. Для побудови схеми спряження елементів в підсистемі S_μ необхідно мати множини вхідних та вихідних контактів і оператор спряження. Множини контактів $[X_i^{(j)}]_1^n$ та $[Y_l^{(j)}]_1^r$ для елементів $C_j \in S_\mu$ відомі, а для елемента C_0^μ, який представляє зовнішнє середовище підсистему S_μ, визначаються наступним чином

$$[X_i^{(0)\mu}]_1^n = Q_\mu^{'}([Y_l^{(j)}]_\mu),$$

$$[Y_l^{(0)\mu}]_1^r = P_\mu^{'}([X_i^{(j)}]_\mu).$$

Оператор

$$Y_l^{(k)} = R_\mu(X_i^{(j)})$$

з областю визначення на множині $\{[X_i^{(0)\mu}]_1^n \bigcup (\bigcup_{C_j \in S_\mu} \mathrm{X}[X_i^{(j)}]_1^n)\}$ та областю значень на множині $\{[Y_l^{(0)\mu}]_1^r \bigcup \mathrm{X}(\bigcup_{C_k \in S_\mu}\{Y_l^{(k)}]_1^r)\}$, який даному контакту $X_i^{(j)}$ ставить у відповідність контакт $Y_l^{(k)}$, з'єднаний з $X_i^{(j)}$ елементарним каналом, якщо таке з'єднання в підсистемі існує, називатимемо *внутрішнім оператором спряження елементів* в підсистемі S_μ.

Оператор R_μ при заданому R визначається наступним чином:

1.Нехай контакт $X_i^{(j)}$ елемента $C_j \in S_\mu$ з'єднується елементарним каналом з контактом $Y_l^{(k)}$ елемента $C_k \in S_\mu$, тобто $X_i^{(j)} \in \bigcup_{C_j \in S_\mu} \bigcup_{C_k \in S_\mu} [X^{(i,k)}]$. Тоді

$$R_\mu\{X_i^{(j)}) = R(X_i^{(j)}).$$

2.Якщо контакт $X_i^{(j)}$ елемента $C_j \in S_\mu$ з'єднаний з контактом $Y_l^{(0)\mu}$ елемента C_0^μ, тобто

$$X_i^{(j)} \in \bigcup_{C_j \in S\mu} \bigcup_{C_k \bar{\in} S_\mu} [X^{(i,k)}],$$

то

$$R_\mu(X_i^j) = P_\mu^{'}(X_i^{(j)}).$$

3. Накінець, коли $X_i^{(j)}$ є вхідним контактом елемента C_0^{μ}, тобто $X_i^{(j)} \in \{X_i^{(0)\mu}]_1^n$, то

$$R_{\mu}(X_i^{(j)}) = (Q_{\mu}^{'})^{-1}(X_i^{(j)}).$$

В табл. 3.11 – 3.13 наведені оператори R_{μ}, де μ відповідно дорівнюють 1, 2, 3 для системи, представленої на рис. 3.15.

Таблиця 3.11. Оператор R_{μ}**,** $\mu = 1$

j^i	1	2	3	4
0	1,1	1,2	2,1	2,2
1	0,1			
2	1,3	0,2	0,3	

Таблиця 3.12. Оператор R_{μ}**,** $\mu = 2$**.**

j^i	1	2	3
9	3,1	4,1	
3	0,1	0,2	
4	3,2	0,2	0,3

Таблиця 3.13. Оператор R_{μ}**,** $\mu = 3$**.**

j^i	1	2
0	5,1	6,2
5	0,1	
6	5,2	0,2

Розглянемо підсистему S_{μ} як елемент системи S. З цієї точки зору вона характеризується множинами вхідних $[X_i^{\mu}]_1^n$ та вихідних $[Y_l^{\mu}]_1^r$ контактів, де

$$[X_i^{(\mu)}]_1^n = P_{\mu}([X_i^{(j)}]_{\mu}),$$
$$[Y_l^{(\mu)}]_1^r = Q_{\mu}([Y_l^{(j)}]_{\mu}).$$

Елемент C_0, який представляє зовнішнє середовище системи S, інтерпретуватимемо як підсистему S_0 з вхідними контактами $[X_i^{(0)}]_1^n$ та вихідними контактами $[Y_l^{(0)}]_1^n$. Для побудови схеми спряження підсистеми $S_{\mu}, \mu = 0,1,\ldots,M$ в системі S введемо оператор

$$Y_l^{(\nu)} = R_0(X_i^{(\mu)}),$$

Який реалізує відображення множини $\bigcup_{\mu=0}^{M}[X_i^{(\mu)}]_1^n$ на множину $\bigcup_{\mu=0}^{M}[Y_l^{(\mu)}]_1^r$,який даному контакту $X_i^{(\mu)}$ ставить у відповідність контакт $Y_l^{(0)}$, з'єднаний з $X_i^{(\mu)}$ елементарним каналом, якщо таке з'єднання в системі S існує. Оператор $R_{\|}$ називатимемо *оператором спряження* підсистеми S_μ в системі S. Оператор R_{II} (за умови заданого R та заданих списках підсистем) можна визначити наступним чином.. Для даного $X_i^{(\mu)}$ знаходимо контакт $X_i^{(j)}$ одного з елементів $C_j \in S_\mu$, з'єднаний з $X_i^{(\mu)}$ елементарним каналом усередині підсистеми S_μ. Оскільки невідомий $X_i^{(j)} \in [X_i^{(j)}]_\mu$, то

$$X_i^{(j)} = P_\mu^{-1}(X_s^{(\mu)}).$$

Для $X_i^{(j)}$ знаходимо $Y_l^{(k)} = R\{X_i^{(j)})$. Нехай елемент C_k входить до системи S_ν. Тоді контакт $Y_l^{(k)} \in [Y_l^{(k)}]_\nu$ і для нього можна визначити вихідний контакт $Y_l^{(\nu)}$ підсистеми

$$Y_l^{(\nu)} = Q_\nu(Y_l^{(k)}).$$

з'єднаний з $Y_l^{(k)}$ елементарним каналом всередині підсистеми S_ν. Слід мати на увазі випадок, коли $k=0$, тобто контакт $X_i^{(j)} = P_\mu^{-1}(X_i^{(\mu)})$ з'єднаний, у відповідності з $Y_i^{(r)} = R(X^{(j)})$, з вихідним контактом $Y_i^{(0)}$ елемента C_0 (підсистеми S_0). В цьому випадку $Y_l^{(0)} = R(X_l^{(j)})$ є значенням оператора $R_{\text{II}}(X_i^{(\mu)})$. Для одноманітності запису формул можна ввести тотожній оператор Q_ν. Тоді

$$R_{\|}(X_i^{(\mu)}) = Q_\nu\{R[P_\mu^{-1}(X_i^{(\mu)})]\}.$$

В табл. 3.14. наведені значення оператора $R_{\|}$ для розглядуваного прикладу системи S.

Таблиця 3.14. Значення оператора $R_{\|}$ для системи S.

j^i	1	2	3	4	5
0	1,1	2,1	2,2	3,1	3,2
1	0,1	0,2	3		
2	1,2	1,3	1,4		
3	1,4	0,4			

Сукупність схем спряження підсистем S_μ в системі S та елементів C_j в підсистемах $S_\mu, \mu = 1,2,...,M$, називатимемо *дворівневою схемою спряження системи*. Дворівнева схема спряження містить множину контактів

$$[X_i^{(\mu)}]_1^n, [Y_l^{(\mu)}]_1^r, \mu = 0,1,...,M,$$

оператор R_{II}, множину контактів $[X_i^{(j)}]_1^n, [Y_l^{(j)}]_1^r, [X_i^{(0)\mu}]_1^n, [Y_l^{(0)\mu}]_1^r$ та оператори $R_\mu, \mu = 1,2,...,M, j = 1,1,...,N$.

Для декомпозиції складних систем представляє інтерес перетворення багаторівневої системи в систему з меншою кількістю рівнів, аж до однорівневої. Для прикладу розглянемо перехід від дворівневої схеми до однорівневої. Вважаємо заданою дворівневу схему спряження, отримаємо оператор R, який складає разом з відомою множиною контактів $[X_i^{(j)}]_1^n$ та $[Y_l^{(j)}]_1^r, j = 0,1,...,N,$ однорівневу схему спряження.

Виберемо довільний контакт $X_i^{(j)}$ елемента $C_j \in S_\mu$. В цьому випадку

$$R(X_i^{(j)}) = R_\mu(X_i^{(j)}).$$

В іншому випадку, коли $k = 0, R_\mu(X_i^{(j)}) = Y_i^{(0)\mu}; X_i^{(j)} \in [X_i^{(j)}]$. Для $X_i^{(j)}$ знайдемо $X_i^{(\mu)} = P_\mu(X_i^{(j)})$ та $Y_l^{(\nu)} = R_{\text{II}}(P_\mu(X_i^{(j)}))$. Слід мати на увазі два випадки. Для ν = 0 – маємо вихідний контакт $Y_l^{(0)}$ елемента C_0, який представляє зовнішнє середовище, тому

$$R(X_i^{(j)}) = R_{\text{II}}(P_\mu(X_i^{(j)})).$$

Для ν ≠ 0 контакт $Y_l^{(k)} \in [Y_i^{(k)}]_1^\nu$ є вхідним контактом елемента $C_k \in S_\nu$. Для отриманого $Y_i^{(\nu)}$ знайдемо $Y_l^{(k)} = Q_\nu^{-1}(Y_l^{(\nu)})$. Тобто

$$R = Q_\nu^{-1}(R_{\|}(P_\mu(X_i^{(j)}))).$$

Співвідношення

$$R = R_\mu; C_j, C_k \in S_\mu;$$
$$R = Q_\nu^{-1}(R_{\text{II}}(P_\mu\{X_i^{(j)}\})); C_j \in S_\mu, C_k \in S_\nu$$

розв’язують відповідну задачу.

Така формалізація спряження елементів є зручним прийомом опису складних систем, який використовується в процесі розв’язку задач композиції складних систем, аналізу їх структури та для введення в ЕОМ інформації про взаємодію елементів в складних системах.

3.7. Статистичні методи обробки спостережень

Задача, яка передує моделюванню системи, полягає у вивченні поведінки реального об’єкта, що моделюється, та його опис. Універсальний засіб вирішення цієї задачі полягає в спостереженні за станом виходів системи в різні моменти часу, в залежності від станів входів. Об'єктивний аналіз зв'язку між відповідними величинами базується на статистичних методах, оскільки результати наших спостережень за входами та виходами системи повинні розглядатися як випадкові і пояснюватися похибками вимірювання. В найпростішому випадку може бути один вхід та один вихід, це – випадок одномірних величин. В цьому випадку ціль дослідження слід розуміти наступним чином: як за значеннями вхідної змінної (аргументу) передбачити відповідні, усереднені чи найбільш вірогідні, значення вихідної змінної чи функції.

Існують різні методи розв'язування цієї задачі, які залежать від характеристик спостережень та від мети досліджень. Розглянемо методи регресійного, кореляційного, конфлюентного та лінійного багатовимірного аналізу.

3.7.1. Регресійний аналіз

В схемі регресійного аналізу вважається, що незалежна змінна x є невипадковою величиною, значення якої задаються завчасно, перед початком спостережень за системою; залежна змінна y є випадковою величиною. Це може бути з таких двох причин:

1) величина x вимірюється без похибок, або ними можна знехтувати, а в процесі вимірювання y є випадкові похибки;

2) величина y залежить не тільки від x, але й від низки неконтрольованих факторів.

Інтерес представляє лише середнє значення y за умови заданого $x - M[y(x)]$, $((M[y(x)]$ - математичне сподівання $y(x))$, тобто функціональна залежність середнього значення y від x має вигляд: $M[y(x)] = f(x, \alpha, \beta, \gamma, ...)$. В регресійному аналізі тип функції вважається відомим, за заданими результатами спостереження можна знайти оцінки для невідомих параметрів $\alpha, \beta, \gamma, ...$

На площині (x, y) рівняння $y = f(x, \alpha, \beta, \gamma, ...)$ за умови фіксованих $\alpha, \beta, \gamma, ...$ визначає певну криву, яка називається *теоретичною кривою регресії.* При вивченні зв'язку між величинами з використанням регресійного аналізу виникають наступні задачі: яким чином, найточніше в певному, завчасно означеному сенсі, провести криву регресії, якщо відомі результати спостережень та гіпотеза про тип $f(x\alpha, \beta, \gamma, ...)$; яким чином оцінити ступінь точності; яким чином побудувати довірчі інтервали та границі, попадання в які емпіричних окремих, чи середніх, значень y при кожному фіксованому x гарантували б з наперед заданою імовірністю. Обґрунтування застосування регресійного аналізу вимагає виконання таких передумов:

1) при кожному значенні x величина y розподілена за нормальним законом;

2) дисперсія $D[y|x]$ величина y є сталою ($D[y|x] = \sigma^2 = const$) або ж пропорційна відомій функції x $D[y|x] = \sigma^2 \cdot h^2(x)$, де $h(x)$ - відома функція x;
3) спостереження є стохастично незалежними.

Середнє значення величини y вважається функцією величини x, яка містить невідомі параметри, які слід визначити. Тип цієї функції невідомий. Найкращі оцінки для параметрів в рівнянні регресії визначаються на основі застосування методу найменших квадратів, вони визначаються за умови мінімізації суми квадратів різниць між значеннями y, які спостерігаються, та відповідними значеннями згідно теоретичної кривої.

Найпростішим є випадок лінійної регресії, коли функція $f(x)$ лінійна відносно x. Оцінки для параметрів в цьому випадку мають нормальний розподіл із середніми значеннями, рівними параметрам, які визначаються, з найменшими можливими дисперсіями. У випадку нелінійної регресії задачу приводять, якщо це можливо, до задачі лінійного регресійного аналізу з кількома незалежними змінними (наприклад: якщо $f(x) = \alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot e^x$, поклавши $x_1 = x, x_2 = e^x$, отримаємо: $f(x) = g(x_1, x_2) = \alpha = \beta \cdot x_1 + \gamma \cdot x_2$). Зупинимося на виборі кривої регресії, маючи на увазі, що при використанні регресійного аналізу тип функції регресії відомий. В розпорядженні дослідника є лише результати спостережень, а тип кривої регресії підлягає визначенню. Для цього за експериментальними даними будується графік – т.з. «кореляційне поле». З використанням часткових середніх (середніх значень величини y, які відповідають фіксованому x) можна прослідкувати основний напрямок витягну тості графіка функції. Доцільно використати т.з. *експертні оцінки* – сукупність відомостей професійного характеру про реальну систему, що вивчається. Прийняту гіпотезу про тип кривої регресії слід перевірити з використанням спеціально розроблених статистичних критеріїв, щоправда останні не дають змоги встановити, чи є даний гіпотетичний тип залежності найкращим, але можуть підтвердити, що припущення стосовно типу кривої не суперечать вихідним даним, чи навпаки. При визначенні регресійної залежності необхідно завжди вказувати діапазон обслідування незалежної змінної, оскільки із статистичної точки зору всяка екстраполяція емпіричних регресійних кривих не завжди коректна.

3.7.2. Кореляційний аналіз

Якщо незалежну змінну x не можна вважати невипадковою величиною, то регресійний аналіз використовувати не можна. Нехай $\eta = f(\xi)$, де η, ξ - випадкові величини. Зв'язок між ними описується з використанням двовимірної функції розподілу. Проте такий опис часто виявляється складним, а для практичних цілей достатньо залежності середнього значення η від ξ. Розглянемо випадок, коли випадковість обумовлена залежністю від неконтрольованих параметрів – схема кореляційного аналізу, тобто слід визначити

$$y = M(\eta \mid \xi = x).$$

В цьому випадку, окрім звичайних задач регресійного аналізу, виникає необхідність дослідження ступеня тісноти зв'язку між змінними. Якщо завчасно відомо, що між досліджуваними величинами є *лінійний зв'язок*, а їх сумісний розподіл нормальний, характеристикою тісноти зв'язку є *коефіцієнт кореляції*, який визначається співвідношенням:

$$r = \frac{M(\xi - M(\xi)) \cdot (\eta - M(\eta))}{\sqrt{D(\xi) \cdot D(\eta)}}.$$

Доведено, що $|r| \le 1$. Рівність $r = 0$ свідчить про взаємну некорельованість (практичну незалежність) змінних η та ξ; коли $|r| = 1$ має місце функціональна (не стохастична) лінійна залежність $\eta = a \cdot \xi + b,$ справедливим є також обернене твердження. Якщо $r > 0$, то має місце додатна кореляція, тобто більші значення однієї випадкової величини зустрічаються, як правило, з більшими значеннями іншої, а менші значення цих величин також сполучаються одне з одним; коли $r < 1$ маємо від'ємну кореляцію, яка має протилежні властивості. Якщо сумісний розподіл не є нормальним, то коефіцієнт кореляції може бути однією з можливих характеристик ступеня тісноти зв'язку, а якщо припустити відхилення залежності від лінійної, то є приклади того, що за умови $r = 0$ може бути функціональний зв'язок. За умови нелінійної залежності для визначення ступеня тісноти зв'язку використовуються складніші характеристики, наприклад *кореляційне відношення.* Зупинимося на різниці між функціональним та стохастичним типами залежності. Функціональна залежність $y = f(x)$, якщо f - однозначна функція, означає, що кожному значенню x_0 з області визначення функції f, відповідає одне і тільки одне значення $y_0 = f(x_0)$. Якщо ж між випадковими величинами ξ та η є стохастична залежність (наприклад, позитивна кореляція), то це означає, що за умови зміни ξ має місце лише певна тенденція до зміни η.

Слід зазначити, що навіть за умови встановлення тісної залежності між двома величинами, звідси не випливає їх взаємна обумовленість. Можливий випадок, коли ξ та η стохастично залежні, але причинно вони незалежні. Якщо причинно незалежні ξ та η залежать кожна зокрема від випадкової величини ε, але ця їх залежність від ε не помічена, ξ та η часто видаються як стохастично незалежні. В цьому випадку виникають задачі *багатовимірного кореляційного аналізу*: виявлення та виключення спільних причинних факторів, розрахунок «очищених», або часткових коефіцієнтів кореляції.

3.7.3. Конфлюентний аналіз

В схемі конфлюентного аналізу випадковий характер величин ξ,η пояснюється, що невипадкові величини x, y можуть бути виміряні лише з певними випадковими похибками δ_x, δ_y. Таким чином, кожну з цих величин можна зобразити як суму двох компонент – «структурною» (детермінованою) та стохастичною:

$$\xi = x + \delta_x,$$
$$\eta = y + \delta_y,$$

причому $M(\xi) = x, M(\eta) = y$, тобто $M(\delta_x) = M(\delta_y) = 0$. В цьому випадку зв'язок ξ та η обумовлений наявністю функціонального зв'язку між структурними компонентами: $y = f(x, \alpha, \beta, ...)$. У випадку конфлюентного аналізу визначаються оцінки для параметрів $\alpha, \beta, ...$ та для параметрів розподілу стохастичних компонентів δ_x, δ_y.

Принципову відмінність між конфлюентним аналізом та регресійним можна пояснити так. Нехай $y = \alpha \cdot x + \beta,$ тоді $\eta = (\varepsilon \cdot \xi + \beta) + (\delta_y - \alpha \cdot \delta_x)$. Як і завжди, $M(\eta \,|\, \xi = x) = \alpha \cdot x + \beta,$ але в цьому випадку стохастична компонента η, яка дорівнює $(\delta_y - \alpha \cdot \delta_x)$, залежить від параметра α, який слід визначити, що може призвести до зміщеності, неефективності та неспроможності оцінок. Саме тому, у випадку конфлюентного аналізу, відомі методи, наприклад, такі як метод найменших квадратів, слід застосовувати з великою обережністю.

3.7.4. Лінійний багатовимірний регресійний аналіз

Вище мова йшла лише про лінійні залежності, один з прийомів боротьби з нелінійностями полягав у зведенні задачі до багатовимірного лінійного випадку. Проте є окремі випадки, коли можливе простіше дослідження. Якщо з діаграми спостережень випливає, що лінія регресії не може бути прямою лінією, можна спробувати описати її з використанням ступеневої залежності, практично розглядаються лише квадратична та кубічна залежності. Тоді зручно залежність зображати у вигляді розкладу за ортогональною системою поліномів Чебишева. Оцінки невідомих параметрів знаходяться з використанням методу найменших квадратів. Якщо квадратична залежність незадовільно описує регресійну криву, пошуки проводяться в ширшому класі функцій, оскільки часто, шляхом простих перетворень, криву регресії можна зобразити як лінійне співвідношення між перетвореними величинами типу $y(y = a + b(x)$. Це, зокрема, функції гіперболічного типу:

$$(y = \alpha + \frac{\beta}{x}, y = \frac{1}{\alpha + \beta \cdot x}, y = \frac{x}{\alpha + \beta \cdot x}),$$

показникового типу:

$$(y = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x}, y = \alpha \cdot e^{\beta / x}, y = \frac{1}{\alpha + \beta \cdot e^{-x}}),$$

логарифмічного типу

$$y = \alpha + \beta \cdot \log x,$$

ступеневого типу:

$$y = \alpha \cdot x^{\beta},$$

та ін., з числом параметрів, не більше двох. В загальному випадку, коли рівняння кривої регресії містить більшу кількість параметрів, слід скористатися методами зведення до задачі багатовимірного лінійного регресійного аналізу, який має дещо спільне з одновимірним. Вважаємо, що певні досліджувані процеси
задаються послідовністю значень в дискретні моменти часу $t_1, t_2, ..., t_N$, і далі нехай

$$\{X_i(t_j)\} = \{X_{ij}\}, \quad (3.54)$$

$$\{Y_i(t_j)\} = \{Y_{ij}\}, \quad (3.55)$$

де $X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)$ - вхідні величини, а $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_m(t)$ - вихідні.

Розглянемо задачу визначення рівняння лінійної регресії, де складна система має один вихід та входи $X_1, X_2, ..., X_n$. Вважаємо, що існує така залежність:

$$Y^* = M(Y \mid x_1, x_2, ..., x_n) = a_0^{'} + a_1^{'} \cdot x_1 + ... + a_n^{'} \cdot x_n. \quad (3.56)$$

Задача полягає в перевірці правомірності припущення про наявність залежності типу (3.56) та знаходженні оцінок коефіцієнтів рівняння (3.56) $a_0, a_1, ..., a_n$, які дають:

$$\min M[Y - (a_0 + a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n)]^2.$$

Перед дослідженням рівняння (3.56), слід виключити з (3.54), (3.55) явні «викиди» - такі значення величин, які не відповідають реальному процесові. Вони можуть з'явитися внаслідок нестабільного функціонування вимірювальної апаратури, ненадійності деяких елементів системи, та ін. Для перевірки значущості кореляції r_{yx_i} між виходом Y та входами $X_i (i = \overline{1, n})$.

Після перевірки значущості коефіцієнтів r_{yx_i} рівняння регресії досліджується без тих X_i, для яких r_{yx_i} незначно відрізняється від нуля. Крім того, оцінюється кореляція r_{ij} між параметрами X_i та X_j. Якщо X_i та X_j лінійно пов'язані між собою, то один з цих параметрів нічого істотного, порівняно з іншими, не вносить до рівняння, а до рівняння регресії можна включити тільки один з цих параметрів. При розрахунку коефіцієнтів рівняння (3.56) для зручності обчислень доцільно перейти до нових змінних Z_{il} та U_l:

$$Z_{il} = \frac{X_{il} - \overline{X}_i}{\sigma_{X_i}},$$

$$U_l = \frac{Y_l - \overline{Y}}{\sigma_Y},$$

де σ_Y, σ_X - оцінка дисперсій величин $X_i, Y; \overline{X}_i, \overline{Y}$ - оцінки середніх X_i та Y.

Після заміни змінних матимемо лінійне рівняння регресії в нових змінних;

$$U = \beta_1 \cdot Z_1 + \beta_2 \cdot Z_2 + \ldots + \beta_n \cdot Z_n,$$

де - β_i - нові коефіцієнти рівняння регресії, які однозначно пов'язані з коефіцієнтами a_i такими залежностями:

$$a_0 = \overline{Y} - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \overline{X}_j,$$

$$a_i = \beta_i \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_{X_i}},\ (i = \overline{1,n}).$$

Коефіцієнти β_i знаходяться з системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
r_{YX_i} &= \beta_1 + \beta_2 \cdot r_{X_2X_1} + \beta_3 \cdot r_{X_3X_1} \ldots + \beta_n \cdot r_{X_nX_1}, \\
r_{YX_2} &= \beta_1 \cdot r_{X_1X_2} + \beta_2 + \beta_3 \cdot r_{X_3X_2} + \ldots + \beta_n \cdot r_{X_nX_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{YX_n} &= \beta_1 \cdot r_{X_1X_n} + \beta_2 \cdot r_{X_2X_n} + \beta_3 \cdot r_{X_3X_n} + \ldots + \beta_n.
\end{aligned}$$

Для того, щоб встановити правомірність припущення про лінійність залежності виходу Y від входів $X_1, X_2, \ldots, X_n$ визначається коефіцієнт множинної кореляції R за формулою:

$$R = \sqrt{\beta_1 \cdot r_{YX_1} + \beta_2 \cdot r_{YX_2} + \ldots + \beta_n \cdot r_{YX_n}}.$$

В залежності від кількості параметрів та розміру їх реалізації N з використанням диференціальної функції розподілу Фішера та перетворення за Стьюдентом встановлюється наявність чи відсутність значущості коефіцієнта множинної кореляції R та коефіцієнтів рівняння регресії β_i.

Якщо R значущим чином відрізняється від нуля, тоді лінійний зв'язок існує, а припущення про лінійність зв'язку (3.56) між вхідними та вихідними параметрами системи справджується. В цьому випадку оцінюються коефіцієнти регресії β_i та, якщо якийсь з них незначним чином відрізняється від нуля, то відповідний параметр X_i відкидається з рівняння регресії.

Задачі:

1. Дати розгорнуту характеристику поняття «аналітична модель».
2. Пояснити, що необхідно для отримання аналітичних розв'язків рівнянь математичних моделей.
3. Охарактеризувати сутність аналітичного, чисельного та якісного
4. Дослідження математичних моделей систем.
5. Охарактеризувати схему математичного моделювання систем (процесів) автоматичного управління.
6. Охарактеризувати особливості дискретних систем.
7. Пояснити сутність двійкових чи булевих величин.
8. Сформулювати основні властивості булевих операцій кон'юнкції та диз'юнкції.
9. Дати стислу характеристику дискретних пристроїв з пам'яттю.
10. Охарактеризувати процес функціонування скінченного автомата.
11. Пояснити особливості опису автомату Мілі та автомату Мура.
12. Описати основні поняття довільної системи масового обслуговування.
13. Пояснити сутність узагальненого обслуговування.
14. Охарактеризувати сутність агрегату.
15. Охарактеризувати сутність конфлюентного аналізу.
16. Порівняти особливості конфлюентного та кореляційного аналізу.

Контрольні питання

1. В чому полягає сутність понять: «комп'ютерне моделювання» та «алгоритмічний опис»?
2. В яких випадках застосовують чисельні методи в процесі розв'язку задач математичного моделювання?
3. Для моделювання яких систем використовуються диференціальні рівняння?
4. Яка координата може бути узагальненою для випадку моделювання маятника?
5. Чим визначається точність виконання керованою системою заданої цілі?
6. Що вивчає теорія стійкості?
7. Який розв'язок систем диференціальних рівнянь називається стійким?
8. В чому полягає сутність другого методу Ляпунова?
9. В чому полягає сутність поняття «асимптотична стійкість»?
10. Що собою представляють однотактні та багатотактні пристрої?
11. Що собою представляють багатотактні пристрої з пам'яттю?
12. Як характеризується спільна модель багатотактного пристрою?
13. З чого складаються всі рівняння станів лічильника?
14. Яким чином описується модель багатоконтактного пристрою?
15. Якими параметрами характеризується скінченний автомат?
16. Що собою представляє поняття автоматного часу?
17. Що собою представляють системи масового обслуговування?

18. Як розуміти поняття «відсутність післядії»?
19. В чому полягає особливість найпростіших потоків?
20. Як розуміти поняття «потік з обмеженою післядією»?
21. Які потоки називаються обмеженими?
22. В чому полягає сутність поняття «дисципліна обслуговування»?
23. Що знаходиться в основі процедури обслуговування неоднорідного потоку?
24. В чому полягає особливість однофазного та багатофазного обслуговування?
25. Яким чином агрегат задається як динамічна система?
26. Що включає в себе математична модель складної системи?
27. Що називається внутрішнім оператором спряження елементів в підсистемі?
28. В чому полягає відмінність між коефіцієнтом кореляції та кореляційним відношенням?
29. Яким чином визначається величина множинного коефіцієнта кореляції?

5. Моделювання систем із стохастичними, нечіткими, хаотичними властивостями (імовірнісних, нечітких, хаотичних систем)

5.1. Стохастичні системи 123

5.2. Стохастична теорія управління 125

4.3. Нечіткі системи..126

5.4. Використання нечітких моделей 129

5.5. Інтеграція нечітких та нейронних мереж 130

5.6. Хаотичні системи 131

Задачі: 133

Контрольні питання 133

Сучасна теорія управління вивчає різні системи та методи управління ними. *Системою* називається будь-яка сукупність предметів будь-якої природи, що взаємодіють. Прикладами систем може бути весь світ, що оточує нас, якась його частина, людське суспільство, галузь економіки, завод, корабль, обчислювальна система, організм людини чи тварини, тощо. Для застосування математичних методів при вивченні функціонування якоїсь системи, необхідно побудувати математичну модель цієї системи. Для цього слід визначити сукупність величин, чкі можуть бути характеристиками функціонування системи, далі встановити співвідношення між цими величинами, які наближено описують функціонування системи.

Всяка система (окрім світу, що оточує нас, який піддається тільки внутрішнім взаємодіям його частин) взаємодіє з навколишнім середовищем, щось отримує ззовні і після переробки щось віддає в навколишнє середовище, зокрема іншим системам, в цьому полягає функціонування, або робота системи. Першим кроком до побудови математичної моделі системи є математичний опис того, що система отримує на вході і видає на виході. Цей опис полягає у встановленні двох множин величин, з використанням яких можна визначити зовнішні дії на систему та все те, що вона дає на виході в кожний момент часу. Величини, які визначають зовнішні дії на систему, називаються *вхідними сигналами*, а величини, які визначають дію системи на оточуюче середовище та на інші системи, називаються *вихідними сигналами* системи. Окрім вхідних та вихідних сигналів, для побудови математичної моделі системи доводиться вводити ще й певні допоміжні величини, зокрема такі, які характеризують дії різних частин системи одна на іншу – внутрішні взаємодії частин системи. Всі ці величини, які характеризують положення (стан) системи в кожний момент часу, називаються *змінними стану* системи. Називатимемо *вхідним сигналом* системи всю сукупність її вхідних сигналів, *вихідним сигналом* – всю сукупність її вихідних сигналів та *вектором стану* – всю сукупність її вихідних змінних стану системи. Множина всіх можливих вхідних сигналів системи називається її *простором вхідних вхідних сигналів*, а множина всіх можливих вихідних сигналів системи – її *простором вихідних* *сигналів*, а множина всіх можливих векторів станів системи - її *простором станів*. Вхідний та вихідний сигнали системи, як певні функції часу, та зміна вектору стану з часом характеризує функціонування системи, або її поведінку.

Після визначення вхідного та вихідного сигналів та вектора стану системи для отримання математичної моделі слід встановити співвідношення між цими величинами. Вони можуть бути детермінованими чи містити певні елементи невизначеності. В останньому випадку користуються методами теорії випадкових процесів, теорії нечітких множин, або ж засобами опису хаотичних систем. Тобто *математичною моделлю системи* називається сукупність чотирьох елементів: простору станів, простору вхідних сигналів, простору вихідних сигналів, співвідношень, які пов'язують вхідний та вихідний сигнали та вектор стану системи.

4.1. Стохастичні системи

Модель системи називається *стохастичною*, якщо кожній реалізації її вхідного сигналу відповідає певний розподіл вихідного сигналу цієї системи. Для однієї і тієї ж системи можна побудувати багато різноманітних моделей. В залежності від ступеня детальності характеристики поведінки системи та кількості факторів, які враховуються, одні моделі будуть простішими, інші – складнішими. Із збільшенням кількості факторів модель стає більш складною, більш повно і точно вона описуватиме поведінку системи. Проте, внаслідок обмеженості доступної інформації, неточності вхідних даних, які використовуються в процесі застосування моделі, надмірно складна модель може виявитися менш точною, порівняно з більш простою моделлю. В зв'язку з цим ступінь складності прийнятої моделі повинна бути узгодженою з доступною інформацією, яку можна використати для побудови і застосування моделі.

Основною характеристикою системи є її *оператор*, який визначає механізм формування вихідного сигналу за даним вхідним сигналом. Оператор детермінованої системи ставить у відповідність кожному вхідному сигналу один певний вихідний сигнал, тобто оператор детермінованої системи відображає простір вхідних сигналів в простір вихідних сигналів. Оператор стохастичної системи ставить у відповідність кожному вхідному сигналу певний розподіл вихідного сигналу, цей розподіл залежить від вхідного сигналу. Тобто оператор стохастичної системи відображає простір вхідних сигналів в простір всіх можливих розподілів на просторі вихідних сигналів. За сутністю вхідні та вихідні сигнали неперервної системи є неперервними обмеженими функціями часу, тому оператор детермінованої системи відображає простір неперервних функцій в такий же простір.

Нехай $x(t)$ - вхідний сигнал детермінованої системи, яких є n - вимірною векторною функцією часу t, $y(t)$ - вихідний сигнал – неперервна m- вимірна векторна функція t. Позначимо буквою A оператор системи, тоді співвідношення між вхідним та вихідним сигналами детермінованої системи можна записати у вигляді:

$$y(t) = A[x(t)], \tag{4.1}$$

Такий короткий запис включає всю сукупність математичних операцій, які слід виконати над функцією $x(t)$, щоб визначити функцію $y(t)$. Детермінована система називається *фізично можливою*, якщо значення її вхідного сигналу $y(t)$ в кожний момент часу t є функціоналом від вхідного сигналу $x(\tau)$ за умови $\tau > t$, тобто значення вихідного сигналу фізично можливої системи $y(t)$ в кожний момент t є функціоналом від вхідного сигналу $x(\tau)$, заданого в інтервалі часу $t_0 \le \tau \le t$. Стохастична системи називається *фізично можливою*, якщо розподіл значення її вихідного сигналу $Y(t)$ в будь-який момент часу t не залежить від значення вхідного сигналу $x(\tau)$, за умови $\tau > t$.

Детермінована система називається *стійкою в даному режимі*, якщо зміна $\Delta y(t)$ її вихідного сигналу $y(t)$ в цьому режимі залишається як завгодно малою за умови достатньо малої зміни $\Delta x(t)$ вхідного сигналу $x(t)$, тобто детермінована система називається стійкою в даному режимі якщо за умови будь-якого $\varepsilon > 0$ для даного режиму існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що $|\Delta y(t)| < \varepsilon$ для всіх $t > t_0$, якщо $|\Delta x(t)| < \delta$ для всіх $t > t_0$. Для випадку векторних x, y приймається, що $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, $|y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$.

Стохастична система називається *стійкою в даному режимі майже напевно* (*з імовірністю 1*), якщо зміна її вихідного сигналу $\Delta Y(t)$ в цьому режимі як завгодно мала з імовірністю 1 за умови будь-якої як завгодно малої зміни вхідного сигналу $\Delta x(t)$.

Стохастична система називається *стійкою в даному режимі за імовірністю*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що

$$\lim_{t \to \infty} P(\sup_{t > t_0} |\Delta Y(t) \ge \varepsilon) = 0| \tag{4.2}$$

для всіх $\Delta x(t)$, які задовольняють умову $\sup_{t > t_0} |\Delta x(t)| < \delta$.

Стохастична система називається *стійкою в даному режимі в p-середньому,* p>0, якщо математичне сподівання $M|\Delta Y(t)|^p$ в цьому режимі залишається як завгодно малим для всіх достатньо малих змінах вхідного сигналу $\Delta x(t)$. З нерівності Чебишева

$$P(|\Delta Y| \ge \varepsilon) < M|\Delta Y|^p / \varepsilon^p \tag{4.3}$$

випливає, що *стохастична система стійка за імовірністю, якщо вона стійка в p-середньому.* Точно таким же чином *із стійкості майже мабуть* *випливає стійкість за імовірністю. З р-стійкості, за умови даного р, випливає р-стійкість для всіх менших р*. Обернене в загальному випадку не є вірним. На практиці найбільшу роль відіграє стійкість майже мабуть. Часто обмежуються стійкістю *в середньому* (p=1) та *стійкістю в середньому квадратичному* (p=2). Клас систем, стійких в середньому квадратичному, та клас систем, стійких майже мабуть, є підкласами класу систем, стійких за імовірністю, обидва ці класи мають непорожній перетин.

4.2. Стохастична теорія управління

Стохастична теорія управління вивчає динамічні системи, які описуються різницевими чи диференціальними рівняннями з врахуванням діючих завад, які розглядаються як стохастичні процеси. Ця теорія розроблена для того, щоб дати відповіді на такі питання: якими є стохастичні властивості параметрів системи; яким чином підлаштовувати параметри, щоб оптимізувати систему відносно заданого критерію; яким чином, за умови заданих система та критеріїв знайти закон управління, який мінімізує заданий критерій. Однією з найважливіших проблем стохастичної теорії управління є теорія фітрації та попередження, розроблені Вінером та Колмогоровим. Ця теорія дає можливість виділити сигнал на фоні завад. Значний вплив на розвиток стохастичної теорії управління виявило використання цифрових обчислювальних машин для розв'язку проблем аналізу та синтезу. Великий внесок в розв'язок проблеми фільтрації зробили Калман та Б'юсі, в їхніх теоретичних розробках задачі попередження та фільтрації розв'язуються рекурентними методами, що дає можливість використати цифрові обчислювальні машини. Результати, отримані Калманом та Б'юсі поширюються також на нестаціонарні процеси. На основі відповідної прогноз здійснюється на базі вихідної змінної лінійної динамічної системи, коли управління реалізується за спостереженнями.

Стохастичне оптимальне управління базується на положеннях динамічного програмування. Для лінійних систем з квадратичним критерієм розв'язок дається *теоремою розділення*, яка дає можливість будувати оптимальну стратегію з двох частин, рис. 4.1.: оптимального фільтра, який визначає оцінки стану як умовне середнє за умови умовного заданих спостережень вихідних сигналів, та лінійного зворотнього зв'язку від оцінюваного стану до сигналу управління.

За цих умов лінійний зворотний зв'язок такий же, яким би він був за умови відсутності завад та точного виміру стану системи. Лінійний зворотний зв'язок можна визначити шляхом розв'язку задачі детермінованого управління. Умовне середнє значення стану характеризує вихідну змінну фільтру Калмана, який є математичною моделлю системи, коли управління здійснюється за спостереженнями. Характеристики фільтру залежать від завад та динамічних властивостей системи, але не залежать від критерію.

Таким чином, теорема розділення забезпечує зв'язок між теорією фільтрації та теорією стохастичного оптимального управління. Оптимальна стратегія розв’язку задачі стохастичного управління для лінійних систем з квадратичним критерієм складається з лінійної динамічної системи з можливо залежними від часу параметрами. До цього класу стратегії відносяться стратегії, які протягом багатьох років використовувалися на

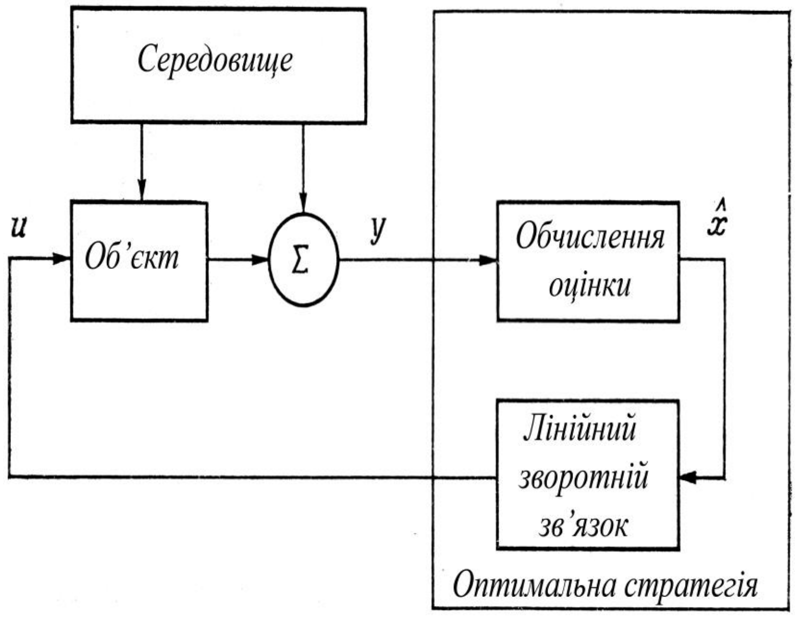


Рис. 4.1. Блок-схема, яка ілюструє теорему розділення: *u* –сигнал управління; *y* – вихідна змінна; $\bar{x}$ - оцінка змінної стану

практиці, проте їх отримання здійснювалося окремими методами. Оскільки перехід до систем з багатьма входами та виходами не викликає ускладнень, то лінійна стохастична теорія є засобом розв’язування задач управління. Лінійна стохастична теорія управління має особливості, необхідні для теорії регулювання із зворотним зв’язком. В ній враховуються різниця між розімкненими та замкнутими системами; робота системи критично залежить від інформації, отримуваної в той момент часу, коли визначається сигнал управління. Оптимальний зворотний зв’язок представляє собою лінійну динамічну систему.

4.3. Нечіткі системи

Моделі статичних та динамічних систем, побудова, використання та аналіз яких базується на положеннях теорії нечітких множин та нечіткої логіки, називають *нечіткими моделями*, а відповідні системи – *нечіткими системами.*

Нечітке моделювання не підміняє собою різні методології моделювання складних систем, в яких істотні залежності з’ясовані настільки добре, що їх можна виразити в числах чи символах, які отримують числові оцінки. Нечіткі моделі дають необхідний інструмент для дослідження як окремих аспектів, так і всієї системи в цілому на різних етапах її аналізу у випадку домінування якісних елементів над кількісними. В табл.. 4.1.

показано взаємозв'язки між описами та змінними, які характеризують різні аспекти традиційних чітких (crisp) та нечітких (fuzzy) моделей.

Таблиця 4.1. Взаємозв'язки між описами та змінними чітких та нечітких моделей

Опис моделі	Вхідні дані	Результуючі (вихідні) дані	Математичні методи
Чіткий	Чіткий	Чіткий	Функціональний аналіз, лінійна алгебра та ін.
Чіткий	Нечіткий	Нечіткий	Принцип узагальнення Заде
Чіткий	Нечіткий	Чіткий	Нечіткі моделі, нечіткі обчислення
Нечіткий	Чіткий/нечіткий	Нечіткий	Нечіткі моделі, нечіткі обчислення

Нечіткі моделі можна представити як узагальнення інтервально-оцінюваних моделей, які є узагальненням чітких моделей. На рис. 4.2. ілюструються особливості обчислення функцій для чітких, інтервальних та нечітких даних. Функцію $f : X \times Y$ можна задати як *відношення* на декартовому добутку $X \times Y$. Визначення функції для заданого значення вхідної змінної здійснюється за три кроки поза залежністю від типу функції та даних (чітких, інтервальних, нечітких):

- завдання значення вхідної змінної x в просторі $X \times Y$ (вертикальні пунктирні лінії на рис. 4.2);
- знаходження перетину з відношенням;
- проекція цього перетину на Y (горизонтальна пунктирна лінія).

Відомі такі сфери застосування нечітких моделей.

а) *Недостатнє чи невизначене знання про досліджуваний об'єкт чи систему.* Традиційна теорія систем використовує чіткі математичні моделі у вигляді алгебраїчних, диференціальних чи різницевих рівнянь. Такі моделі дають змогу адекватно описати системи, закономірності поведінки та управління якими чітко визначені. Проте для більшості конкретних систем отримання прийнятного для побудови чіткої моделі рівня потрібної інформації є складною, трудомісткою, високо вартісною або зовсім неможливою задачею. Для них чіткі математичні моделі отримати неможливо, або вони є надто складними для практичного використання. Це задачі хімічної чи харчової індустрії, сфери біотехнології, екології, фінансів, соціології та ін. Значна частина інформації про ці системи є доступною у вигляді експертних даних чи в евристичному описові процесів функціонування. Ця інформація може бути нечіткою та невизначеною для того, щоб бути вираженою математичними залежностями. Крам того, інформація про систему може бути різноякісною, а оцінка значень параметрів

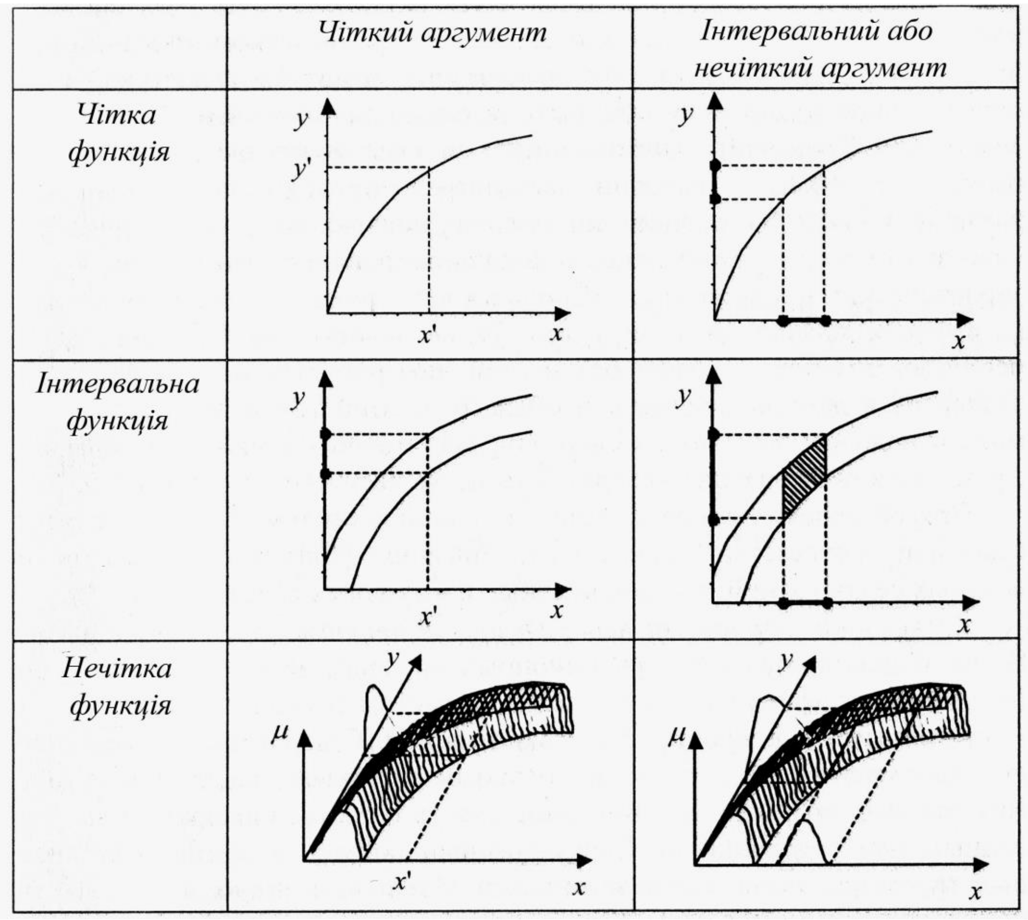


Рисунок 4.2. Обчислення значень чітких, інтервальних та нечітких функцій для чітких, інтервальних та нечітких аргументів

проводиться з використанням різних шкал (відношень, інтервалів, порядку та найменувань). Проте часто можна описати функціонування цих систем як евристичних переваг, використовуючи конструкції природної мови в формі правил типу «якщо-то». Такі нечіткі моделі можна використати для створення баз знань, побудованих на основі знань експертів в даній предметній галузі. В цьому випадку нечіткі моделі подібні експертним системам, які достатньо досліджені в межах відповідного напрямку штучного інтелекту.

Інший аспект невизначеності знань про систему пов’язаний з неясністю чи нечіткістю виділення та опису границі системи чи окремих її складових, а також вхідних та вихідних дій.

б) *Адекватна обробка невизначеної інформації*. Точні обчислення з використанням традиційних математичних моделей дають необхідний ефект у випадку, якщо параметри та вхідні дані є точними та коректно представленими. Часто традиційні математичні методи не тільки не дають адекватно обробити дані, але не дають змоги врахувати природно притаманну цим даним невизначеність. Імовірнісний підхід є лише традиційним шляхом врахування невизначеності. Проте не всі типи невизначеності можна врахувати з використанням цього підходу. Нечітка логіка і теорія нечітких множин є одним з ефективних підходів до вирішення цієї проблеми.

в) «*Прозоре*» (*gray-box*) *моделювання та ідентифікація*. Ідентифікація динамічних систем на основі вимірів їх вхідних та вихідних параметрів є важливою задачею в цілому ряду практичних додатків. Багато реальних систем є нелінійними в свїй основі і не можуть бути описані лінійними моделями, які використовують відповідні методи ідентифікації. Останнім часом увага приділяється розвитку методів ідентифікації нелінійних систем на основі вимірюваних (експериментальних) даних. Штучні нейронні мережі та нечіткі моделі є найбільш затребуваними і адекватними для розв'язку цих задач. Нечіткі моделі за наявності вибірки, що навчає, дає змогу апроксимувати функції чи виміряні дані з потрібною точністю. Ця властивість нечітких моделей певного класу дає змогу віднести їх до *універсальних апроксиматорів.*

Порівнюючи нечіткі моделі з іншими вивченими відомими методами апроксимації, наприклад із штучними нейронними мережами, можна відмітити їх велику прозорість, яка можлива завдяки їх лінгвістичній апроксимації як нечітких продукційних правил. Лінгвістична структура цих правил сприяє розумінню і аналізу системи кількісно-якісними методами. В табл. 4.2. порівнюються різні підходи до моделювання систем.

Таблиця 4.2. Взаємозв'язки між описами та змінними чітких та нечітких систем

Підхід до моделювання	**Джерело інформації**	**Метод отримання (набуття знань)**	**Приклад**	**Недоліки**
Метод «білого» ящика	Формальні знання чи дані	Математичний (наприклад рівняння Лагранжа)	Диференціальні рівняння	Не може використовувати знання, зображені в «природньому» вигляді
Метод «чорного» ящика	Експериментальні дані	Оптимізація (навчання)	Регресія, нейронні мережі	Не може зовсім використовувати знання
Метод «сірого» ящика	Експертна інформація чи експериментальні дані	Такий, що базується на знаннях + навчання	Нечіткі продукційні та реляційні моделі	«Прокляття» розмірності

4.4. Використання нечітких моделей

В залежності від призначення положення теорії нечітких множин та нечіткої логіки можуть використовуватися:

1. Безпосередньо в процесі опису системи. У цьому випадку системи можна визначити:

- нечіткими продукційними моделями (Rule-Based Fuzzy Models/Systems – нечіткі моделі/системи, які базуються на правилах). Нечіткі моделі даного класу є найбільш загальними для зображення різноманітних погано формалізованих складних систем.
- у вигляді нечітких функціональних моделей (Fuzzy Functional Models/Systems). Моделі цього типу можна зобразити як різновид нечітких продукційних моделей, в яких дані в галузі передумов зображуються як нечіткі множини, а залежності входів-виходів в області висновків задаються у вигляді функції. Крім того нечіткі функціональні моделі можна виділити в окремий клас в силу різної специфіки формування функціональних залежностей, а також різноманітності розв'язуваних з їх використанням задач.
- нечіткими реляційними (у вигляді нечітких відношень) моделями (Fuzzy Relational Model/Systems). Ці моделі є альтернативою нечітким продукційним моделям, вони зберігають їх особливості, не вимагають додаткових зусиль для формування нечітких продукційних правил.

2. В процесі завдання параметрів системи. Системау можна визначити як алгебраїчні чи диференціальні рівняння, в яких параметри є нечіткими числами, наприклад:

$$y = \overset{\approx}{3} \cdot x_1 = \overset{\approx}{5} \cdot x_2 ,$$

де $\overset{\approx}{3}$ та $\overset{\approx}{5}$ нечітки числа «приблизно три» та «приблизно п'ять», задані відповідними функціями належності.

3. При задаванні входів, виходів та станів системи.

Крім того, нечіткі моделі можна створити на основі суміщення вказаних підходів.

4.5. Інтеграція нечітких та нейронних мереж

Складності використання нечітких моделей для розв'язку практичних задач пов'язані з апріорним визначення компонентів цих моделей – нечітких висловлювань, функцій належності для кожного значення лінгвістичних змінних, структури бази нечітких правил і т.д. Нечіткі моделі зручно використовувати як нечіткі мережі – сітьові структури, елементи чи сукупності елементів яких реалізують різні компоненти нечітких моделей та етапи нечіткого висновку. До основних переваг такого зображення слід віднести: конструктивність і наглядність інтерпретації з їхнім використанням компонентів моделі; можливість виділення параметрів, перш за все параметрів настройки, моделі під відповідні алгоритми. Оскільки компоненти нечітких моделей часто вибираються суб'єктивно, вони можуть бути не зовсім адекватними модельованій системі чи процесу, що відображається на нечітких мережах, які реалізують їх.

Одним з результативних прикладів об’єднання формалізмів об’єднання формалізмів моделі та мережі є штучні нейронні мережі, які є сукупністю негроподібних елементів, об’єднаних одна з іншою певним чином, та із зовнішнім середовищем з використанням зв’язків, які задаються ваговими коефіцієнтами. Основною перевагою нейромережевого підходу полягає у можливості виявлення закономірностей в даних, їх узагальнення, тобто здобуття знань з даних, а основним недоліком є неможливість безпосередньо, в явному (а не у вигляді вагових коефіцієнтів міжнейронних мереж) зобразити функціональну залежність між входом і виходом досліджуваного об’єкта. Іншим недоліком нейромережевого підходу є також формування представницької вибірки, більша кількість циклів навчання та забуття «старого» досвіду, складність визначення розміру та структури нейтронної мережі.

Підходи до дослідження складних систем на основі нечітких та нейромережевих моделей взаємно доповнюють один одного, тому доцільна їх інтеграція на основі принципу «м’яких» обчислень (Soft Calculation). Основи такої інтеграції зводяться до терпимості до нечіткості та часткової істинності використовуваних даних для досягнення інтерпретованості; гнучкості та низької вартості рішень.

4.6. Хаотичні системи

Нове явище, яке інтенсивно обговорюється в фізиці та теорії динамічних систем в останні десятиліття полягає в наступному. Розглянемо динамічну систему в просторі змінних (I,ν) та параметрів (μ). Рух системи відбувається в певній області G такого простору. Нехай на систему не діють ніякі випадкові сили, а всі параметри системи μ також є невипадковими. Проте в певній області фазового простору та значень параметрів G_s динаміка системи є стохастичною. Останнє означає, що жодним методом не можна відрізнити динамічний процес, який реалізується траєкторією системи

$$I = I(t; I_0, \vartheta_0; \mu), \vartheta = \vartheta(t; I_0, \vartheta_0; \mu),$$

від певного випадкового процесу. Лише зміною параметрів μ чи зміною початкових умов (I_0, ϑ_0) можна отримати або регулярну, або стохастичну траєкторію системи. Це явище називається динамічною стохастичністю, синоніми – хаос, стохастичність, нерегулярний рух. Явище хаосу притаманне тільки нелінійним системам, з ним пов’язана нестійкість та руйнування інваріантних торів (в процесі руху траєкторія залишається весь час в торі, тому говорять про існування інваріантних торів, їх взаємне розташування в фазовому просторі визначається розмірністю фазового простору системи). Неможливо отримати повне уявлення про еволюцію динамічних систем, не торкаючись області G_s стохастичної природи. Розглянемо певний уявний простір, в якому одна точка зображує динамічну систему. З точки зору питання про те, як багато серед цієї множини точок, таких, в яких є область стохастичності $G_s \neq 0$ можна сказати, що майже всі динамічні системи мають область хаосу, а системи, які мають тільки регулярну динаміку, є виключними випадками. Це твердження сильно змінює наше загальне уявлення про динамічні системи, призводить дор необхідності нового погляду та нового підходу до аналізу нелінійної динаміки. Припущення про закони випадку та статистичні ансамблі, які справджувалися лише для дуже великих систем ($N = 10^{23}$), перестають бути припущеннями і стають придатними для малого числа ступенів свободи ($N \geq \frac{3}{2}$, $N = \frac{3}{2}$ означає, що на динамічну систему з $N = 1$ діє періодична сила, яка залежить від часу). В цьому випадку методи статистичної механіки вторгаються до малих систем, в яких відсутні статистичні дії. Область виникнення хаосу G_s може бути дуже малою, або взагалі не мати реального фізичного смислу, тому хаос виявляється не завжди помітним і не завжди притаманним умовам, в яких відбувається фізичне явище.

Задачі:

1. Пояснити сутність стохастичної системи.
2. Дати характеристику стохастичної системи в даному режимі в р-середньому.
3. Охарактеризувати взаємозв’язки між описами та змінними чітких і нечітких моделей.
4. Дати стислу характеристику хаотичних систем.

Контрольні питання

1. Що визначає оператор, як основна характеристика системи?
2. Що означає, що стохастична система є стійкою в даному режимі майже напевно?
3. Що вивчає стохастична теорія управління?
4. Які системи називаються нечіткими?
5. Яким чином положення нечітких множин можуть використовуватися в процесі опису системи?
6. Яким чином можна отримати регулярну або стохастичну теорію системи?

Список літератури

1. Чуйко Г.П., Дворник О.В., Яремчук О.М. Математичне моделювання систем і процесів: Навч. посібник. Миколаїв: Вид-во ЧНУ ім.. Петра Могили, 2015. -244 с.
2. Хусаінов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В. Введення в моделювання динамічних систем: Навч. посібник . Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2010,— 128 с
3. Клир Дж. Системологія. Автоматизація рішения системних задач. - К.: Радио и связь, 1990. - 544 с.
4. Escobet, A., A. Nebot, and F.E. Cellier (2004), Visual-FIR: A New Platform for Modeling and Prediction of Dynamical Systems, Proc. SCSC'04, Summer Computer Simulation Conference, San Jose, California, pp.229-234
5. Gusev A.A., Shvetsova N.A. The design of a goal-oriented information system for decision support. // Topical areas of fundamental and applied research IV. Vol.1. – North Charleston, USA, 2014. – pp. 134-137
6. Снапелев Ю.М., Старосельский В.А. Моделирование в сложных системах.- М.: «Сов. Радио», 1974.- 264 с.
7. Флейшман Б.С. Основы системологии.- М.: «Радио и связь», 1982.- 368 с.
8. Основы моделирования сложных систем: Учеб. Пособие для студентов вузов/Под общ.ред. д-ра техн..наук Н.В.Кузьмина- Киев: Вища школа. Головное узд-во, 1981.- 360 с.
9. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем.- М.: Узд-во «Советское радио», 1973.- 440 с
10. Лямец В.И., Тевяшев А.Д. Системный аналіз. Вводный курс. Уч. Пособие/Харьковский гос. Техн.. ун-т радиоэлектроники.- Х.: 1998ю- 252 с.
11. Кузьменко Б.В., Лисенко В.П., Андріішина М.В. Основи системного аналізу. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт.- К.: НАУ, 2006.- 65 с.
12. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети.- М.: Горячая линия-Телеком, 2007.- 284 с.
13. Адомиан Дж. Стохастические системы: Пер. с англ.- М.: Мир, 1987.- 376 с.
14. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988.- 368 с.
15. Кузьменко Б.В., Лисенко В.П. Спеціальні розділи вищої математики6 нечіткі множини, нечіткі відношення, нечітка логіка та основи теорії наближених міркувань, двійкові динамічні системи, теорія випадкових процесів і функцій, прикладна теорія катастроф.- К.: Фенікс, 2006.- 416 с.
16. Гилмор Р. Прикладная теорія катастроф: В 2-х книгах. Кн.. 1. Пер. С англ..-М.: Мир,1984.- 350 с.
17. Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорію управления.- Пер. С англ..- М.: Мир. 1973.- 320 с.

18. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Основи системного аналізу.- К.: Видавнича група BHV, 2007.- 544 с.
19. Томашевський В.М. Моделювання систем.- К.: Видавнича група BHV, 2005.- 352 с.
20. Боев В.Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World: Учеб. Пособие.- СПб.: БХВ-Петербург, 2004.- 368 с.
21. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики: Учеб. Пособие для вузов.- 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1987.- 496 с.

22. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.
23. Грабовецький Б. Є. Методи експертних оцінок : теорія, методологія, напрямки використання : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2010. 171 с.
24. Гнатієнко Г. М., Снитюк В. Є. Експертні технології прийняття рішень : монографія. Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. 444 с.
25. Ярощук Л. Д. Інтелектуальні системи управління: курс лекцій до теми «Системи експертного оцінювання» розділу «Основи штучного інтелекту» кредитного модуля «Інтелектуальні системи управління». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 40 с.
26. Новосад В. П., Селіверстов Р. Г., Артим І. І. Кількісні методи експертного оцінювання : наук.-метод. розробка. Київ : НАДУ, 2009. 36 с.
27. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с