

Лекція 6.

ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

6.1 Визначення обсягу експериментальних даних

Обсяг експериментального дослідження безпосередньо залежить від числа й характеру досліджуваних параметрів. Кожне експериментальне дослідження може містити від однієї до десятка й більше серій дослідів. Щоб виявити функціональні зв'язки між змінними величинами, варто оцінити, по-перше, необхідну кількість дослідів в одній серії, а по-друге, кількість повторних серій, необхідних для забезпечення вагомості кожної дослідної точки графіка. Наприклад, якщо є впевненість у тім, що вийде лінійна залежність, то для побудови графіка досить двох точок; якщо дослідна крива являє собою коло, те можна обмежитися трьома крапками. У випадку ж графічного вираження не тільки загальної закономірності, але й можливо більш точного чисельного значення функції для обґрунтування кожного перегину кривої потрібно збільшувати як число крапок, так і повторність випробувань.

Число дослідів n_{0i} для кожної серії випробувань встановлюють, виходячи із приблизно середніх по складності функціональних залежностей. Для всіх основних факторів, значення яких потрібно виміряти в якій-небудь серії дослідів, визначають їхню повторність p_i як максимальну при даній точності й заданій надійності. Звичайно в досліді кожної серії повторність p_i приймають однаковою. Тоді число дослідів i -ї серії при зміні одного з основних факторів:

$$N_{0i} = p_i n_{0i} \quad (6.1)$$

Якщо в даній серії враховують z градацій інших основних факторів, то

$$N_{0i} = p_i n_{0i} z_i \quad (6.2)$$

Кількість дослідів у всіх m серіях:

$$N_0 = \sum_{i=1}^m p_i n_{0i} z_i \quad (6.3)$$

Як правило, у кожному досліді даної серії кількість вимірів та сама, тому якщо в кожному досліді i -ї серії передбачається провести q_i вимірів, то загальна кількість вимірів у дослідженні:

$$N = \sum_{i=1}^m p_i n_{0i} z_i q_i \quad (6.4)$$

Якщо всі досліді проводять за частковими методиками, то при кількості r часток методик загальне число дослідів у дослідженні в цілому можна також представити як:

$$N_0^1 + N_0^2 + \dots + N_0^r = \sum_{i=1}^r p_i n_{0i} z_i \quad (6.5)$$

а загальна кількість вимірів у дослідженні як

$$N = \sum_{i=1}^r p_i n_{0i} z_i q_i \quad (6.6)$$

Таким чином, даними для визначення обсягу експериментальних досліджень є:

- 1) перелік досліджуваних параметрів;
- 2) кількість дослідів у даній серії n_{0i} , що залежить від обраного діапазону зміни досліджуваного фактора й інтервалів між дослідними даними (крапками);
- 3) повторність вимірів p_i , що залежить від погрішності окремого виміру й заданої точності результату;
- 4) кількість змінюємих факторів і прийнята послідовність варіювання (план експерименту).

6.2. Вибір числа незалежних змінних

Будь-яку робочу гіпотезу можна встановити, тільки знаючи заздалегідь фактори, що обумовлюють розвиток явища. В експериментальному

дослідженні вимірюють або відзначають величини і якісні показники, що характеризують як фактори (аргументи), так і показники розвитку явища (функції).

Звичайно починають із визначення величин, що характеризують фактори. Однак множинність величин, що підлягають виміру, може утруднити дослідження.

При вивченні складних явищ і систем навіть простий перелік всіх потенційно впливаючих факторів, може виявитися незорим. Планування й проведення експерименту з обліком всіх цих факторів зажадало б надмірних витрат часу й засобів при дуже низькій ефективності. З іншого боку, вивчення сумарного впливу багатьох кількісно не певних факторів, що поєднуються в довільні й неясні для дослідника співвідношеннях, може привести до неясних закономірностей або навіть до помилкових висновків. У цих і подібних випадках треба всі фактори, що обумовлюють явище, розділяти на основні (найбільш впливаючі на розвиток явища) і додаткові (що впливають на розвиток явища другорядно). При цьому в досліді відзначають або вимірюють величини, характеризуємі тільки основними факторами. Існуючі способи відсівання другорядних, що слабо впливають факторів засновані на тім, що всі фактори розташовують у певному порядку (ранжируют) у ряд, що відбиває ступінь їх потенційного впливу на оптимізуємі параметр. Ранжирувати фактори можна або способом експертних оцінок, тобто обробкою літературних даних і безпосереднім опитуванням фахівців, або по даним спеціально поставлених однофакторних експериментів, у кожному з яких варіюють лише одну змінну, а інші всі залишають на нижньому рівні діапазонів їхньої зміни. У результаті цих експериментів визначають по кожному i -му факторі вибіркові значення коефіцієнтів регресії β_i , причому дисперсія коефіцієнтів регресії зменшується пропорційно числу дослідів в однофакторному експерименті.

Знаючи дисперсії незалежних змінних σ_i^2 , можна оцінити внесок кожної з них у загальну дисперсію результату:

$$D_i = \beta_i \sigma_i^2 \quad (6.7)$$

розподіливши відносні значення внесків i -у змінної в загальну дисперсію D :

$$\gamma_i = D_i / D = \beta_i \sigma_i^2 / \sum_{i=1}^n \beta_i \sigma_i^2 \quad (6.8)$$

експериментатор вирішує, урахувати або відкинути відповідного фактора.

Описовий прийом застосовують тільки для лінійних завдань. У більш складних випадках для суворого визначення значимих змінних потрібний багатофакторний активний експеримент, вихідні дані й результати якого піддають дисперсійному аналізу. Щоб зменшити обсяг експериментальних робіт з виділення домінуючих факторів, планують експерименти, що відсівають, із застосуванням, наприклад, методу випадкового балансу. У деяких випадках зменшити число змінних вдається завдяки методу аналізу розмірностей.

6.3. Визначення інтервалів між даними дослідів однієї серії

Плануючи експеримент, встановлюють кінцеве раціональне число експериментальних точок. При занадто малому обсязі експериментальних даних може бути не досягнута мета експерименту, при занадто великому обсязі даних - зростають вартість і трудомісткість експерименту. Більше того, у деяких експериментах надмірна кількість даних, отриманих проведенням багатосерійних експериментів, може перешкоджати виявленню важливих ефектів, помітних лише при обробці даних однієї серії.

Вибирати експериментальні крапки починають із визначення граничних значень незалежних змінних. Ці значення часто бувають задані умовами або завданнями дослідження. Проміжні значення незалежних змінних (або інтервали між сусідніми значеннями) визначаються характером експериментальної функції, способом відтворення відшукуваної функції по експериментальних точках і необхідній точності.

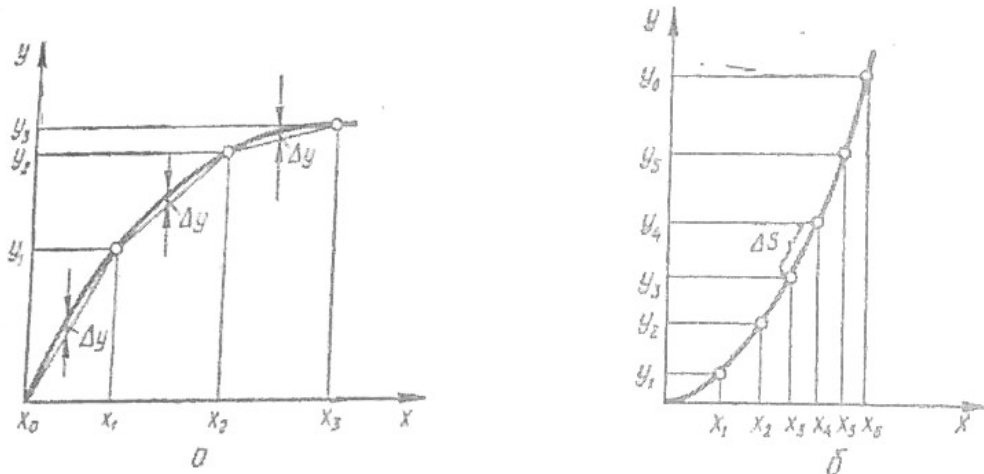


Рис. 6.1 Вибір інтервалів між досвідченими даними:

а - по даній величині відхилення Δy ; б - на умові рівності довжин ΔS ділянок кривої

У випадку лінійної експериментальної залежності досить двох крапок, що відповідають, наприклад, граничним значенням незалежної змінної. Всі інші крапки можна визначити обробкою графіка або інтерполяцією. Якщо ж функція нелінійна й експериментатор має досить певне уявлення про її характер, то значення незалежної змінної можна визначити, виходячи з необхідної точності й задавшись способом відтворення.

Розглянемо наступний приклад.

Нехай досліджувана функція має вигляд, показаний на рис.6.1, а. Якщо задано похибку відтворення Δy , а шукану функцію відновлюють по експериментальних точках, з'єднуючи їх відрізками прямих, то інтервали між значеннями експериментальних точок знаходять як відстані між абсцисами точок перетинання експериментальної кривої з відрізками прямих, проведених таким чином, що максимальна різниця між ними дорівнює припустимій помилці (похибки інтерполяції). Якщо для відновлення використовують інші функції (наприклад, відрізки парабол), то інтервали між точками при тій же похибці будуть іншими. Однак у всіх випадках доцільно прагнути до того, щоб точність будь-якої частини кривої була однаковою.

Інколи проміжні значення незалежної змінної розташовують так, щоб між точками були укладені однакові відрізки кривої (рис. 6.1, б). При такому способі максимальна похибка може бути на ділянці найбільшої кривизни, а при однаковій кривизні - на ділянці з більшим кутом нахилу дотичної. Виходячи із припустимої максимальної помилки й визначають довжину відрізка ΔS .

Вибираючи інтервали між експериментальними точками, варто враховувати ще одну обставину, пов'язану з відносною точністю виміру. На тих ділянках експериментальної залежності, де відносна точність завдання незалежної змінної або оцінки залежної змінної невисока, потрібно виходити із загальної динаміки експерименту, апріорної оцінки максимальних значень часток похідних функції багатьох змінних по кожній з незалежних змінних і для припустимих помилок поверхні відгуку визначати інтервали зміни змінних.

Якщо похибки виміру приводять до невизначеності результатів, що перевищує припустиму похибку, варто планувати повторення вимірів, тобто задавати значення незалежних змінних кілька разів та усереднювати одержувані результати. При цьому дисперсія результату зменшується відповідно до відомого співвідношення:

$$\sigma^2 = \sigma_i^2 / p \quad (6.9)$$

де σ_i - дисперсія кожного i -го результату окремо; σ дисперсії - дисперсія середнього з p результатів виміру.

6.4 Послідовність випробувань

В галузі дослідження процесів ОМТ, як і в техніці взагалі, має місце так званий невідтворюваний експеримент. Такий експеримент неможливо або виправити, змінити або повторити на тім же зразку й у суворо ідентичних умовах. І в першу чергу з тієї причини, що дослідник буде мати справу вже із залишковою деформацією металу. Навіть досліди, пов'язані з навантаженням в

області пружності, суворо кажучи, невідтворювані у зв'язку із пружним гістерезисом і по деяких інших причинах. Проте, експеримент вважають відтвореним, якщо зміни, внесені в процес експерименту при його повторенні, настільки малі, що їх неможливо виявити або ними можна зневажити. Для такого експерименту допускається вибирати план його здійснення, а виходить, і послідовність одержання даних.

Плани експерименту можуть бути двох видів:

1) послідовний, при якому спочатку беруть одне із граничних значень незалежної змінної, а потім змінюють його через певні інтервали до досягнення другого граничного значення;

2) випадковий, при якому значення незалежної змінної чергуються випадковим чином (рандомізовано), тобто вона може приймати то більше, то менше значення.

Послідовний план застосовують у багатьох інженерних експериментах, особливо в таких, де сама послідовність проведення виступає своєрідним параметром. Прикладами цього можуть служити випробування матеріалів і пристроїв, функціонування яких супроводжується гістерезисними явищами, випробування на тертя, коли мають місце переходи від тертя спокою до тертя ковзання й зворотньо.

Рандомізований план також підходить для багатьох експериментів. У деякому відношенні він виявляється навіть краще послідовного, тому що дозволяє виключити вплив на експеримент зовнішніх умов, таких як працездатність оператора, недоліки вимірювальної апаратури (дрейф нуля) або дрібних її несправностей (зміна перехідного опору контактів) і т.д. Однак такий план зовсім неприйнятний для невідтворених експериментів. Показовий такий приклад. Допустимо, що при випробуваннях на розтягання сталевого зразка вирішили прикладати до нього заздалегідь обрані навантаження випадковим образом і здійснили навантаження в такій послідовності: 30; 5,0; 4,5; 75 кН і т.д. Безумовно, такий план неправильний, тому що після першого ж навантаження зразок одержить залишкову

деформацію, а всі наступні виміри будуть проводитися на вже деформованому й зміцненому зразку.

Рандомизацію активних експериментів проводять, як правило, штучно, застосовуючи «гральний метод» і таблиці випадкових чисел. Основна концепція рандомизації полягає в тому, щоб звести до випадкових ті систематично діючі фактори, які важко піддаються обліку й контролю, і унеможливити їхній облік статистичними методами.

Рандомизація може виявитися недоцільною в складних експериментах, коли встановлення фіксованого режиму експерименту вимагає значних витрат часу, а випадкова послідовність переходів з режиму на режим приводить до ще більших витрат. Інакше кажучи, там, де рандомизація приводить до зниження ефективності, застосовувати її не рекомендується.

6.5 Види факторного планування

Наступне завдання планування експерименту - визначення числа дослідів, необхідних для виявлення залежності між досліджуваними змінними величинами. При плануванні змінні параметри, змінювані експериментатором у процесі випробувань, називають *факторами*, а досліджувані параметри — *виходами* або *відгуками системи*.

Найпростіший з методів планування експерименту — так званий *спосіб перебору*, або *класичний план*. Він полягає в тому, що всі незалежні змінні, крім однієї, наприклад x , приймають постійними, а цю одну змінну змінюють у всьому інтервалі значень. В результаті знаходять залежність $z_1 = f(x)$. Змінюючи наступну змінну (наприклад, y), а інші приймаючи постійними, знаходять залежність $z_2 = f(y)$, тобто класичний багатфакторний експеримент *зводять* до послідовності однофакторних експериментів. Так знаходять порівняно прості функції: $z = Ay^n + Bx^m$; $z = Ay^n x^m$ і т.д. Однак уже за двофакторного експерименту для одержання повної картини потрібно провести велику кількість випробувань.

За двофакторного експерименту безліч значень унімодальної функції оптимізації, які вона приймає при зміні змінних факторів, можна представити у вигляді поверхні з однією згладженою вершиною (рис. 6.2). Таку поверхню, що відповідає виходу досліджуваного процесу, називають *поверхнею відгуку*, а крапку з максимальним значенням однокстремальної функції — *оптимумом*.

Передбачається, що існує деякий аналітичний зв'язок між факторами й відгуком процесу. При плануванні прагнуть визначити цю залежність, тобто побудувати математичну модель процесу. Математично завдання планування експерименту полягає в тому, щоб знайти рівняння поверхні відгуку:

$$\eta = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6.10)$$

де η - вихід процесу, тобто параметр оптимізації; x_i - фактори, які варіюють при проведенні експерименту.

Таким чином, математичне планування фактично пов'язане зі зміною форми поверхні відгуку, і, отже, оптимальному значенню виходу будуть відповідати максимальні або мінімальні крапки цієї поверхні.

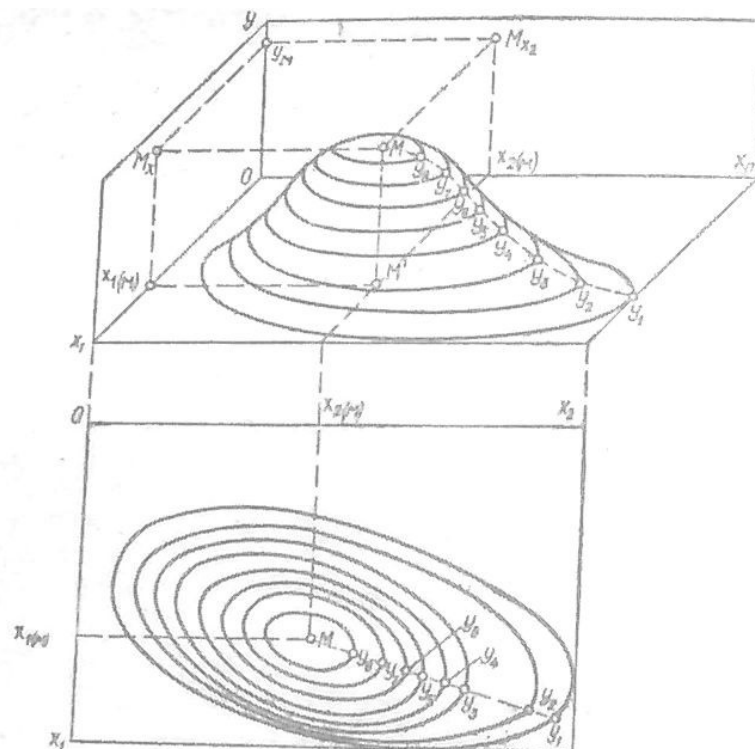


Рис. 6.2 Геометричне зображення поверхні відгуку у двухфакторному експерименті: $v_{3,5}$ - ізолінії рівного виходу функції $v = f(x_1, x_2)$;

М - точка оптимуму

Для більшості реальних завдань вид поверхні відгуку заздалегідь невідомий, тому при експериментальному пошуку оптимальних умов функцію η представляють у вигляді статичного ряду:

$$\eta = \beta_0 + \sum \beta_i x_i + \sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (6.11)$$

Очевидно, точність подібної апроксимації визначається порядком статичного ряду й діапазоном зміни змінних x . Оскільки поверхню відгуку вивчають, звичайно в порівняно вузькому інтервалі варіювання, то без великої погрішності члени вищих порядків можна відкинути. Завдання оптимізації вирішують у два етапи: спочатку визначають область оптимуму, для чого використовують лінійну модель поверхні відгуку; на другому етапі для опису стаціонарної (оптимальної) області використовують статичний ряд, що містить члени другого, а іноді й третього порядку. Коефіцієнти β статичного ряду (коефіцієнти регресії) можна оцінити вибірковими коефіцієнтами регресії b , які визначаються за результатами кінцевого числа досвідів. Тоді рівняння регресії, одержуване на підставі результатів експериментів, має вигляд:

$$y = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j + \sum b_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (6.12)$$

де y - вибіркова оцінка функції відгуку.

Таким чином, після обчислення коефіцієнтів регресії з'являється можливість оцінити вплив досліджуваних факторів на функцію відгуку й визначити напрямок руху області оптимуму. Як вихід процесу рекомендується вибирати параметр, що має ясний фізичний зміст і кількісне вираження. При цьому бажано, щоб параметр оптимізації був єдиним і не залежав від часу.

Для кожного фактора вибирають умовний нульовий (шуканий, початковий, основний) рівень x_i , діапазон x_j і крок Δx_i варіювання змінних. Діапазон зміни факторів дорівнює різниці між верхньою й нижньою межами даного фактора. Особливу увагу варто приділяти кроку варіювання. З одного

боку, збільшення вимірюваного параметра повинне бути досить значним, щоб відповідна зміна вихідного параметра була більшою похибки експерименту. З іншого боку, крок варіювання повинен бути досить малий, щоб отримана інформація давала подання про поведінку системи в околиці нульової точки більш суворую. На практиці крок часто приймають рівним подвоєній середньоквадратичній помилці, а іноді - 1/10...1/3 діапазону варіювання.

Щоб показати процедуру планування, звернемося до приклада. Нехай потрібно експериментально встановити, як впливають легування, температура нагрівання й витримка при гомогенізуючому відпалі на пластичність свинцю. Припустимо, що в результаті експерименту буде знайдена наступна математична модель:

$$\Lambda^{(i/k)} = \Lambda + A_i + B_l + C_k + \delta_{i/k} \quad (6.13)$$

де, $\Lambda^{(i/k)}$ - шукана величина (пластичність); Λ - середня пластичність у результаті всіх дослідів; A_i, B_l, C_k - ефекти відповідно легування, температури деформації й тривалості відпалу; $\delta_{i/k}$ - випадкова помилка експерименту; i, j, k - номери рівнів факторів A, B и C .

Експеримент по виявленню залежності Λ від перерахованих факторів можна спланувати по типу латинського квадрата 4x4 (табл. 6.1). Кожний із трьох факторів, як бачимо, обраний на чотирьох рівнях (тому планування й називається «по типу латинського квадрата 4x4»). Стівпці таблиці відповідають рівням вмісту сурми ($a_1 = 3\%$, $a_4 = 6\%$); рядкам відповідають рівні температури деформації ($b_1 = 100^\circ\text{C}$, $b_4=240^\circ\text{C}$); тривалість витримки при відпалі мінялася від $z_1 = 0,25$ г. до $z_4 = 1,00$ г. План рандомизовано за часом витримки.

Експериментальні значення пластичності для кожного з 16 дослідів представлені в «осередках» таблиці:
 $\Lambda^{(11)*} = 0,97; \Lambda^{(22)} = 0,62; \Lambda^{(33)} = 0,32; \dots; \Lambda^{(44)} = 0,43$. Підраховані по відповідних стівпцях середні значення пластичності Λ_i дорівнюють 1,62; 0,79; 0,46; 0,34,

відбивають вплив легування на пластичність свинцю; за значеннями Λ_j , підрахованим по рядках, можна судити про вплив температури деформації. У крайньому правому стовпці наведені значення пластичності свинцю після відпалу різної тривалості.

Таблиця 6.1 План і результати експериментального вивчення пластичності свинцю по латинському квадрати 4X4

Температура, °C (b _i)	Легування Sb, % (a _i)				Δ_i	При Δ_k
	a ₁ = 3	a ₂ = 4	a ₃ = 5	a ₄ = 6		
b ₁ = 100	C ₁ $\Delta^{(111)} =$ 0,97	C ₂ $\Delta^{(212)} =$ 0,62	C ₃ $\Delta^{(313)} =$ 0,32	C ₄ $\Delta^{(414)} =$ 0,25	0,54	C ₁ $\Delta = 0,962$
b ₂ = 150	C ₂ $\Delta^{(122)} =$ 1,10	C ₁ $\Delta^{(221)} =$ 0,70	C ₄ $\Delta^{(324)} =$ 0,37	C ₃ $\Delta^{(432)} =$ 0,36	0,63	C ₂ $\Delta = 0,71$
b ₃ = 200	C ₃ $\Delta^{(133)} = 2,0$	C ₃ $\Delta^{(243)} =$ 0,87	C ₁ $\Delta^{(331)} =$ 0,38	C ₂ $\Delta^{(432)} =$ 0,43	0,90	C ₃ $\Delta = 0,90$
b ₄ = 150	C ₄ $\Delta^{(144)} =$ 2,40	C ₄ $\Delta^{(243)} =$ 0,95	C ₂ $\Delta^{(342)} =$ 0,78	C ₁ $\Delta^{(441)} =$ 0,43	1,14	C ₄ $\Delta = 0,97$
Δ_i	1,62	0,79	0,46	0,34	$\Delta = 0,80$	
Примітка: C ₁ = 0,25 г.; C ₂ = 0,5 г.; C ₃ = 0,75 г.; C ₄ = 1 г.;						

Дисперсійний аналіз проведений по загальній для такого типу планування розрахунковій схемі (табл. 6.2). У розглянутому випадку $n=4$; тому що прийнято чотири рівні для кожного фактора. Розрахунком визначають наступні допоміжні величини:

1) суму квадратів всіх спостережень -

$$s_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (\Lambda^{(ijk)})^2 = 15,923;$$

Таблиця 6.2 Дисперсійний аналіз даних відповідно до плану експерименту по табл. 6.1

Джерело дисперсії	Кількість ступенів свободи	Сума квадратів	Середній квадрат
Рядок b	n - 1	$S_b^2 = S_2^2 - S_5^2$	$S_b^2 (n - 1)$
Рядок a	n - 1	$S_a^2 = S_3^2 - S_5^2$	$S_a^2 (n - 1)$

Букви с Помилки експерименту	$n - 1$ $(n - 1) (n - 2)$	$S_c^2 = S_2^2 - S_5^2$ $S_{\text{зал}}^2 = S_{\text{зар}}^2 - (S_b^2 - S_a^2 - S_c^2)$	$S_c^2 (n - 1)$ $S_{\text{зал}}^2 (n - 1) (n - 2)$
------------------------------------	------------------------------	--	---

2) суму квадратів підсумовану по рядках, ділену на число елементів у кожному рядку, -

$$S_2^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=4}^4 \left(\sum_{i=2}^4 (\Lambda^{(ijk)}) \right)^2 = 11,336$$

3) суму квадратів підсумків по стовпцях, ділену на число елементів у кожному стовпці, -

$$S_3^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=4}^4 \left(\sum_{j=1}^4 (\Lambda^{(ijk)}) \right)^2 = 14,255$$

4) суму квадратів підсумків підсумовування $\Lambda^{(ijk)}$ по черзі при $k = 1; 2; 3; 4$, ділену на число елементів, що відповідають кожному індексу, —

$$S_4^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\Lambda^{(111)} + \Lambda^{(221)} + \Lambda^{(331)} + \Lambda^{(441)} \right)^2 + \left(\Lambda^{(122)} + \Lambda^{(212)} + \Lambda^{(332)} + \Lambda^{(432)} \right)^2 + \left(\Lambda^{(133)} + \Lambda^{(243)} + \Lambda^{(313)} + \Lambda^{(423)} \right)^2 + \left(\Lambda^{(144)} + \Lambda^{(234)} + \Lambda^{(324)} + \Lambda^{(414)} \right)^2 \right] = 10,605$$

5) коригувальний член, дорівнює квадрату загального підсумку, діленому на загальне число осередків квадрата (число різних дослідів), -

$$S_5^2 = \frac{1}{16} \left(\sum_{i=4}^4 \sum_{j=1}^4 (\Lambda^{(ijk)}) \right)^2 = 10,288$$

Для зручності аналізу результати записані у вигляді зведеної таблиці (табл. 6.3).

У цьому випадку дисперсійного аналізу є можливість перевірити гіпотезу про істотність впливу факторів на зміну пластичності свинцю, порівнюючи дисперсії по факторах і залишковій дисперсії й користуючись F-критерієм. Так, із зіставлених значень середніх квадратів (табл. 6.3) можливо зробити висновок про те, що найбільше на пластичність свинцю впливає легування його сурмою:

$$F_1 = \frac{1,322}{0,047} = 28,1 > F_{\text{кр}0,05(3;5)} = 4,76$$

Таблиця 6.3 Зведена таблиця для похибок дисперсійного аналізу
бреші досліджені пластичності свинцю

Джерело дисперсії	Сума квадратів	Число ступенів свободи	Середній квадрат
Легування	$S_b^2 = 3,966$	3	1,322
Температура деформації	$S_a^2 = 1,047$	3	0,349
Витримка привідпалі	$S_c^2 = 0,318$	3	0,106
Похибка експерименту	$S_{\text{зал}}^2 = 0,282$	6	0,407

Значимим варто визнати й ефект температури:

$$F_2 = \frac{0,346}{0,047} = 7,43$$

Тривалість витримки при нагріванні сплавів свинцю для випробування на пластичність істотної ролі не грає, оскільки

$$F_3 = \frac{0,106}{0,047} = 2,26 < F_{кр}$$

Відзначимо очевидні переваги розглянутого методу планування експерименту:

- 1) при плануванні за схемою латинського квадрата число дослідів в 4 рази менше, ніж при повному факторному експерименті, для виконання якого буде потрібно $4^3=64$ дослідів;
- 2) статистичний аналіз експериментальних даних досить простий;
- 3) результати кожного дослідів служать для оцінки дії всіх факторів, що вивчаються, тому значно зменшується помилка експерименту;
- 4) дисперсійний аналіз дозволяє виділяти технологічні фактори, що найбільше сильно впливають на процес, і в цьому сенсі аналіз корисний як пошуковий апарат у початковій стадії дослідження пластичності.

Планування експерименту при дисперсійному аналізі звичайно використовують на перших етапах досліджень для рішення завдань експерименту, що відсіває не впливаючі фактори і вибору факторів, що підлягають ретельному й детальному вивченню.

Щоб представити результати експерименту поліномами для розробки математичних моделей досліджуваних процесів і явищ, необхідний повний факторний експеримент.

6.6 Повний факторний експеримент

Повний факторний експеримент (ПФЕ) реалізує всі можливі неповторювані комбінації рівнів незалежних факторів, кожний із яких варіюється на двох рівнях. Число цих комбінацій $N=2^k$. Наприклад, для трифакторного завдання вибіркоче рівняння регресії має вигляд

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j + b_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (6.14)$$

де b_0 - розрахункове значення функції виходу (параметра оптимізації); $b_0, b_0, b_i, b_{ij}, b_{123}$ - коефіцієнти; x_i, x_j, x_1, x_2, x_3 - незалежні змінні (фактори), які можна варіювати при постановці експерименту.

Повний факторний експеримент дає можливість знайти роздільні оцінки коефіцієнтів b .

Знаходження моделі методом ПФЕ складаються з наступних етапів: 1) планування експерименту; 2) власна експеримент; 3) перевірка відтворюваності (однорідності вибіркочих дисперсій); 4) одержання математичної моделі об'єкта з перевіркою статистичної значимості вибіркочих коефіцієнтів регресії; 5) перевірка адекватності математичного опису.

Математичну модель процесу, що немає членів ступенів вище першої, прийнято називати плануванням першого порядку. Для планування першого порядку програму ПФЕ задають у вигляді таблиць-матриць, де а кожному стовпці для всіх факторів варіацію проводять тільки на двох рівнях, тобто змінної надають тільки два її екстремальних значення, центр експерименту при цьому перебуває на нульовому рівні, що відповідає середньому або

базисному значенню варійованого фактора. Типова матриця планування для випадку трьох змінних представлена в табл. 6.4.

При кодуванні факторів факторний простір лінійно перетвориться - початок координат переноситься в центр експерименту, масштаб по осях вибирається в одиницях варіювання факторів. Кодують фактори за допомогою залежності

$$X_i = (x_i - x_{i0}) / \Delta x_i \quad (6.15)$$

де X_i -кодоване значення фактора (безрозмірна величина); x_i -значення фактора в іменованих (натуральних) одиницях; x_{i0} - натуральне значення фактора на нульовому рівні; Δx_i - натуральне значення інтервалу варіювання.

Таблиця 6.4 Матриця планування ПФЕ-2

Напів-репліка	№ досліду	x_n	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_1$	$X_1 X_1$	$X_1 X_1$	$X_1 X_1 X_1$	Результати дослідів
1	1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
2	5	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_5
	6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_6
	7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_7
	8	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_8

Верхній рівень варіювання фактора позначають “+1”, нижній - “-1”. У центрі експерименту фактор має базисний рівень (середнє значення фактора). Границі варіювання факторів відомі з апіорної інформації або мають технічні обмеження. Правильний вибір центра експерименту (базисного рівня), інтервалів і рівнів варіювання факторів має велике значення, особливо при плануванні руху по поверхні відгуку, тому що в цьому випадку може існувати три екстремума.

Крім матриці з кодованими факторами (табл. 6.4), для проведення експерименту складають матрицю з натуральними значеннями факторів. Типова матриця для k факторів включає всі їх можливі неповторювані комбінації. На підставі цього неважко підрахувати число експериментальних

точок, рівнорозташованих певним чином у факторному просторі. Зокрема, для трьох факторів всі можливі їхні комбінації можна вичерпати при реалізації восьми серій дослідів. Таким чином, число експериментів для розглянутого випадку можна записати як 2^k , де 2 - число рівнів, а k - число одночасно варійованих факторів. Планування першого порядку з використанням планів типу ПФЕ звичайно записують як ПФЕ 2^k .

Матриця типу ПФЕ- 2^k реалізується постановкою експерименту для одержання значень функції виходу v . Щоб виключити систематичні помилки, матрицю потрібно реалізувати строго за програмою, яка передбачає, по-перше, повторюваність кожної серії дослідів i , по-друге, рандомізацію всіх серій i і їхніх повторень у часі. Рандомізацію можна здійснити за допомогою жеребкування, таблиць випадкових чисел і ін.

Таким чином, план експерименту геометрично можна представити (рис. 6.3) як сукупність різних точок у факторному просторі, у яких проводяться повторні досліді. Точки плану позначимо z , припустивши, що z міняється від 1 до n (n - загальне число різних точок у плані), а порядковий номер у даній крапці - i, j .

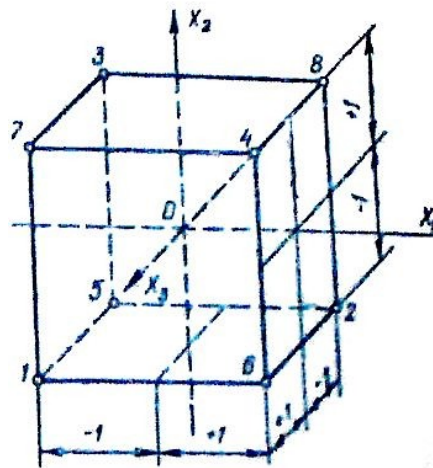


Рис. 6.3 Геометричне зображення повного факторного експерименту 2^k

Після проведення експерименту по відповідній програмі в розпорядженні дослідника є: матриця - план незалежних змінних і ефектів

взаємодії; вектори-стовпці функції виходу. Мета подальшої роботи - визначити коефіцієнти інтерполяційного рівняння (наприклад, для $k = 3$):

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3; \quad (7.2) \quad (6.16)$$

тобто вирішити нормальні рівняння методом найменших квадратів, щоб мінімізувати суму квадратів відхилень помилок. Таким чином, рівняння (6.16) є рівнянням регресії, що отримано на підставі результатів дослідів.

Для матриць типу ПФЕ-2, що підкоряються умовам:

$$\sum_{z=1}^n X_{iz} X_{jz} = 0; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 2^k - 1; \quad (7.3)$$

$$\sum_{z=1}^n X_{iz} = 0; \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1;$$

$$\sum_{z=1}^n X_{iz}^2 = n; \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1. \quad (6.17 - 6.19)$$

де (6.17) - умова ортогональності плану-матриці - скалярний добуток векторів-стовпців дорівнює нулю; (6.18) - властивість симетричності - розташування всіх незалежних змінних щодо центра експерименту (нульового рівня); (6.19) - сума квадратів всіх векторів-стовпців повинна дорівнювати числу серій дослідів. Коефіцієнти регресії визначають по формулах, які отримують з рішення нормальних рівнянь методом найменших квадратів. Зокрема, для ПФЕ-2³ ці формули мають вигляд

$$b_0 = \frac{1}{8} \sum_{z=1}^n y_z; \quad b_i = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 X_{iz} y_z; \\ b_{ij} = \frac{1}{8} \sum_{z=1}^n X_{iz} X_{jz} y_z; \quad b_{ijq} = \frac{1}{8} \sum_{z=1}^n X_{iz} X_{jz} X_{qz} y_z; \quad (6.20 -$$

6.21)

де y_z - середнє значення з ряду паралельних, рандомизованих в часі.

Після обчислення коефіцієнтів регресії й складання рівняння (6.16) оцінюють статистичну залежність b_i .

Якщо дві незалежні змінні варіювати на трьох рівнях — нижньому, верхньому й нульовому, то буде мати місце планування типу 3². Для реалізації всіх можливих комбінацій рівнів, тобто для здійснення повного

факторного експерименту, потрібно виконати дев'ять дослідів. Тоді матрицю планування можна записати так, як це зроблено в табл. 6.5.

Таблиця 6.5 План експерименту типу 3^2

№ досліду	X_1	X_2		№ досліду	X_1	X_2	
1	-1	-1	y_1	6	+1	0	y_6
2	0	-1	y_2	7	-1	-1	y_7
3	+1	-1	y_3	8	0	+1	y_8
4	-1	0	y_4	9	+1	+1	y_9
5	0	0	y_5				

Якщо необхідно оцінити ефекти не тільки першого, але й другого порядку, матрицю планування варто відповідно перетворити. Припустимо, що в досліджуваній області процес описаний рівнянням другого ступеня:

$$y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{11} X_1^2 + b_{22} X_2^2 + b_{12} X_1 X_2; \quad (6.22)$$

Зазначимо, що планування експерименту, представлене в табл. 6.5, має наступні властивості:

$$\sum X_1 = \sum X_2 = \sum X_1 X_2 = 0; \quad \sum X_1^2 / n = \sum X_2^2 / n = 2/3. \quad (6.23)$$

З (6.22) знаходимо, що середнє значення y , позначене через y_0 , для цього планування:

$$y_0 = b_0 + \frac{2}{3} b_{11} + \frac{2}{3} b_{22}. \quad (6.24)$$

Віднімаючи останній вираз із (6.22), одержимо:

$$y = y_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{11} (X_1^2 - 2/3) + b_{22} (X_2^2 - 2/3) + b_{12} X_1 X_2. \quad (6.25)$$

Оцінку b_0 легко одержати з рівняння:

$$b_0 = y_0 - \frac{2}{3} b_{11} - \frac{2}{3} b_{22}. \quad (6.26)$$

Математичний апарат факторного планування експерименту можна з успіхом застосувати для обробки експериментальної інформації, зокрема в тих випадках, коли в результаті дослідження повинні бути отримані емпіричні залежності. Розглянемо приклад такої обробки експериментальних даних, отриманих при дослідженні питань стійкості прутків при прошовуванні у волоку.

Існує ряд емпіричних формул для розрахунку критичного напруження в області гнучкості $\lambda_{кр} > \lambda > 40$; серед них формула Ясинського - Беляєва. Оскільки гнучкість прутків при проштовхуванні перебуває в межах 20-45, можна констатувати, що до останнього часу не було запропоновано формули, придатної для визначення критичного напруження й припустимої довжини кінця прутка, що заштовхується.

Спеціальними експериментами, у процесі яких прутки різних діаметрів з різних марок сталей доводили заштовхуючою силою до втрати стійкості (табл. 6.6), встановлено, що криві залежності критичних напружень від гнучкості добре апроксимуються рівнянням гіперболи:

$$\sigma_{кр} = c / \lambda. \quad (6.27)$$

За дослідями також встановили, що на величину $\sigma_{кр}$ впливають характеристики міцності матеріалу (межа міцності σ_b і границя текучості σ_T), що дає підставу думати, що коефіцієнт c залежить від σ_b і σ_T . Приймавши $c = k \sigma_b$, одержимо:

$$\sigma_{кр} = k \sigma_b / \lambda, \quad (6.28)$$

де k - коефіцієнт, що залежить від σ_T і λ .

Таблиця 6.6 Експериментальні значення коефіцієнтів k для різних марок сталей

Марка сталі	σ_b	σ_T	λ					
	10 МПа		20	25	30	35	40	50
35	63,0	36,0	15,20	15,30	15,80	17,50	18,11	19,90
45	64,0	36,3	18,18	17,50	16,50	17,82	18,80	18,90
ШХ15	63,5	37,0	17,39	17,40	17,76	19,24	19,90	20,55
30Х15	64,0	37,0	17,44	18,70	19,77	20,70	20,66	21,80
ШХ15	64,3	38,0	18,72	19,70	20,00	21,60	21,15	23,60
35ХС	65,0	43,0	18,30	19,10	20,42	21,05	22,87	23,63
60С2А	78,0	45,8	20,35	21,60	22,80	20,52	20,56	21,57
40ХФА	62,5	46,0	18,74	20,70	19,50	18,70	20,90	21,88
60С2А	82,0	47,0	20,35	20,20	21,15	20,65	20,60	22,50
55СМ5ФА	71,5	54,0	21,70	22,40	24,40	26,20	27,15	30,27

Функціональну залежність k від σ_T і λ визначаємо методом математичного моделювання. Для зручності дослідження вводимо кодові

позначення факторів σ_T і λ і функції відгуку k (табл. 6.7). Кожний дослід матриці дублювався 5 разів. Функцію відгуку позначимо через y .

Таблиця 6.7 Рівні й інтервали варіювання факторів

Фактор	Код	Рівень			Інтервал варіювання
		Верхній (+)	Нульовий (0)	Нижній (-)	
Межа текучості	x_1	54	45	36	9
Гнучкість	x_2	50	35	20	15

Математичну модель процесу при двохфакторному плануванні будемо на трьох рівнях (3^2):

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2, \quad (6.29)$$

де X_1, X_2 – кодовані значення факторів:

$$X_i = [x_i - 0,5(x_{i\max} + x_{i\min})] / 0,5(x_{i\max} - x_{i\min});$$

b_0, b_1, b_i – коефіцієнти регресії.

Порядкову дисперсію розраховуємо по формулі:

$$S_i = \sum_{j=1}^n (y_{ji} - y_j) / (n-1), \quad (6.30)$$

де n – кількість повторних дослідів на кожному рівні; y_i – середнє значення відгуку в j -м досліді; y_{ji} – долідені значення відгуку в i -му повторі.

Результати дослідів і розрахунку порядкових дисперсій зведені в матрицю планування (табл. 6.8).

Таблиця 6.8 Результати дослідів і розрахунку порядкових дисперсій

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y	y_i	S^2_i
1	-	-	14,37	16,24	15,34	15,80	14,25	15,20	0,764,
2	-	+	19,63	19,20	20,56	20,15	19,96	19,90	0,266
3	+	+	32,18	28,16	30,45	29,80	30,76	30,27	2,225
4	+	-	22,18	23,17	19,56	21,27	22,32	21,70	1,884
5	+	0	27,60	25,40	26,10	25,85	26,05	26,20	0,688
6	-	0	17,02	17,36	18,27	17,22	17,35	17,50	0,236
7	0	+	20,85	21,582	22,30	21,00	22,18	21,57	0,38
8	0	-	21,22	19,53	17,80	21,63	21,57	20,35	2,764
9	0)	20,98	19,80	19,86	20,05	21,91	20,52	1,400

Перевіряємо гіпотезу про однорідність вибірових дисперсій за критерієм Кохрена:

$$G_{\max} = S_{j\max}^2 / \sum_{j=1}^N S_j^2 < G_T, \quad (6.31)$$

де $S_{j\max}^2$ - максимальна порядкова дисперсія; N - число дослідів у матриці планування; G_T - табличне значення критерію Кохрена. В експерименті

$$G_{\max} = 2,764/10,674 = 0,259.$$

Розрахункове значення $G_{\max} = 0,259$ порівнюємо з табличним. При рівні залежності $\alpha = 0,05$ і ступенях свободи $f_1 = n - 1 = 4$; $f_2 = N = 9$ табличне значення критерію Кохрена $G_T = 0,358$. Оскільки $G_{\max} < G_T$ гіпотезу про однорідність не відкидаємо і для оцінки генеральної дисперсії відтворюваності приймаємо:

$$S_y^2 = \sum_{j=1}^N S_j^2 / N = 10,674 / 9 = 1,186. \quad (6.32)$$

Для розрахунку коефіцієнтів регресії будемо розширену матрицю експерименту (табл. 6.9). Коефіцієнти регресії обчислюємо по формулах:

$$b_i = \sum_{j=1}^N X_{ji} y_j / \sum_{j=1}^N X_{ji}^2;$$

$$b_0 = \sum_{j=1}^N y_j / \sum_{j=1}^N X_j^2; \quad (7.9)$$

$$b_0 = b_0 + b_{11} X_1^2 - b_{22} X_2^2. \quad (6.33 -$$

6.35)

Таблиця 6.9 Розширена матриця експерименту

	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	$x_1^2 - 2/3$	$x_2^2 - 2/3$	y_i
1	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	15,20
2	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	19,20
3	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	30,27
4	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	21,70
5	+1	+1	0	0	+1/3	-2/3	26,20
6	+1	-1	0	0	+1/3	-2/3	17,50
7	+1	0	+1	0	-2/3	+1/3	21,57
8	+1	0	-1	0	-2/3	+1/3	20,35
9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	20,52

Підставляючи у формули (6.32 – 6.34) значення з табл. 6.9, одержуємо $b_1 = 4,262$; $b_2 = 2,415$; $b_{12} = 0,968$; $b_{11} = 0,98$; $b_{22} = 0,092$; $b_0 = 21,468$.

Значимість коефіцієнтів регресії визначаємо за допомогою *t*-критерію Стьюдента, обчислюючи довірчі границі по формулі:

$$\Delta b_i = \pm t_{n,N} S_{b_i}, \quad (6.36)$$

де $t_{n,N}$ -табличне значення коефіцієнта Стьюдента, рівне 2.262 при $z = 0,05$ а $N = 9$; $S_{b_i}^2$ - дисперсія помилки визначення коефіцієнтів регресії й b_i :

$$S_{b_i}^2 = S_y^2 / \sum_{j=1}^N X_j^2. \quad (6.37)$$

Підставляючи значення S_y^2 з (6.32) і $\sum_{j=1}^N X_j^2$ з табл. 6.9, знаходимо, що

$$S_{b_1}^2 = S_{b_2}^2 = 1,186 / 6 = 0,1977; \quad S_{b_1} = S_{b_2} = \sqrt{S_{b_1}^2} = \pm 0,443;$$

$$\Delta b_1 = \Delta b_2 = \pm 2,262 \cdot 0,443 = \pm 1,002.$$

Аналогічно

$$S_{b_{12}} = \pm 0,544; \quad \Delta b_{12} = \pm 1,23; \quad S_{b_{21}} = S_{b_{23}} = \pm 0,773;$$

$$\Delta b_{21} = \Delta b_{23} = \pm 1,748.$$

По формулі (6.37) визначаємо $S_{b_0} = 0,132$; $S_{b_0}^2$ - по формулі

$$S_{b_0}^2 = S_{b_0}^2 + \sum (X_i)^2 S_{j_i}^2 = 0,132 + 0,773 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0,773 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,819;$$

$$S_{b_0} = \pm 0,905; \quad \Delta b_0 = 2,62 \cdot 0,905 = \pm 2,37.$$

Коефіцієнти регресії значимі, якщо $b_i > \Delta b_i$. Таким чином, з розрахованих коефіцієнтів значимі b_0 , b_1 і b_2 .

Після виключення незначущих коефіцієнтів рівняння регресії одержує вид:

$$y = 21 + 4,262X_1 + 2,415X_2. \quad (6.38)$$

Адекватність моделі перевіряємо за критерієм Фішера:

$$F = S_{Ad}^2 / S_y^2, \quad (6.39)$$

де $S_{Ad}^2 = \left[\sum_{j=1}^N (\hat{y}_f - \check{y}_f) \right] / f_0$; $f_0 = (N - m - 1)$ - число ступеней свободи; m -

число факторів у моделі експерименту; y_f - значення функції відгуку, розраховані по рівнянню регресії (6.38). Дані для підрахунку дисперсії адекватності S_{ad}^2 занесені в табл. 6.10. Тепер:

$$S_{Ад}^2 = 26,744 / 6 = 2,9436; \quad F = 2,9436 / 1,34 = 2,48.$$

При ступенях свободи $f_0 = 6$ і $f_1 = (n - 1) = 36$ табличне значення критерію Фішера $F_T = 3,79$. Оскільки $F < F_T$, модель адекватна.

Переходячи до виміру величин у натуральному масштабі, за допомогою формули переходу з рівняння (6.38) одержимо формулу для визначення коефіцієнта k :

$$k = 0,475\sigma_T + 0,16\lambda - 6.$$

6.7 Дробовий факторний експеримент

За трифакторного експеримента типу 2^3 число дослідів дорівнює 8, при чотирьохфакторному - 16, при п'ятифакторному - 32 і т.д. Різке зростання числа дослідів зі збільшенням кількості факторів робить практично неможливим

Таблиця 6.10 Дані для підрахунку дисперсії адекватності

i	y_i	S_i^2	y_i	$y_i - y_i$	$(y_i - y_i)^2$
1	15,20	0,764	14,313	-0,887	0,7868
2	19,90	0,266	19,143	-0,757	0,5730
3	30,27	2,225	27,667	-2,603	6,7756
4	21,70	1,884	22,837	-1,137	1,2928
5	26,20	0,688	25,252	-0,948	0,8987
6	17,50	0,236	16,728	-0,772	0,5960
7	21,57	0,438	23,405	-1,835	3,3672
8	20,35	2,764	18,575	1,775	3,1506
9	20,52	1,409	20,99	0,470	0,2209
N					$\sum_{i=1}^N (y_i - y_i)^2 = 17,6616$

здійснення повного перебору всіх значень при ПФЕ. Вихід із цього положення - застосування так званих дробових реплік від повного факторного експерименту.

В багатьох практичних завданнях взаємодії другого й вищого порядків нехтовно малі або відсутні. У зв'язку із цим представляється можливим планувати, наприклад, трифакторний експеримент по матриці двофакторного

з реалізацією всього чотирьох дослідів замість восьми. Математична модель

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i.$$

експерименту в цьому випадку здобуває простий вид:

Легко показати геометричну інтерпретацію планів експерименту (рис. 6.4). Очевидно при варіюванні змінних на двох рівнях, закодованих числами ± 1 , область простору обмежується тетраедром (рис. 6.4, а), координати вершин якого визначаються вибірковою перестановкою чисел ± 1 . Якщо в повному

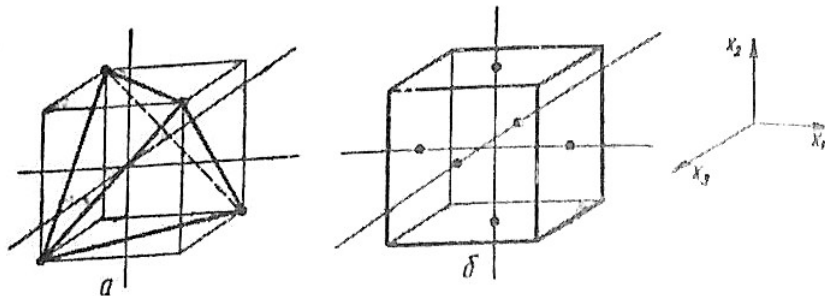


Рис. 6.4 Геометричні зображення дробового факторного експерименту 2^{3-1} (а) і класичної схеми планування (б)

трифакторному експерименті дослідів ставлять у вершинах куба, у дробовому - у вершинах тетраедра, то в традиційному однофакторному експерименті дослідів ставлять не у вершинах, а на гранях куба (рис. 6.4, б). Тому точність одержуваних оцінок коефіцієнтів регресії при факторному плануванні вище в кілька разів, чим при однофакторному. Так, у розглянутих на рис.6.4 випадках точність оцінок значень коефіцієнтів b_i для ПФЕ- 2^3 .

$$S_{b_i}^2 = S_y^2 / 8;$$

для дробової репліки 2^{3-1} : $S_{b_i}^2 = S_y^2 / 4;$

для однофакторного експерименту: $S_{b_i}^2 = S_y^2 / 2;$

6.8 Методи оптимізації процесу при плануванні

Для планування експерименту в «майже стаціонарній області» найбільш ефективні повні або дробовий факторні експерименти. Однак

однієї з найпоширеніших дослідницьких завдань саме і є знаходження цієї області.

Оптимізація процесу — це встановлення області можливого оптимуму й вивчення факторного простору в околиці оптимуму. В експерименті потрібні пошук і рух по поверхні відгуку в область можливого оптимуму.

Пошук оптимальної області звичайно здійснюють *методом крутого сходження* по поверхні відгуку в напрямку градієнта. У випадку лінійної моделі коефіцієнти регресії пропорційні складового градієнта функції відгуку в околиці нульової крапки. Тому коефіцієнти при лінійних членах дають певне подання протє, у яких пропорціях варто змінювати фактори для досягнення оптимуму. Потім ставлять серію дослідів у точках, що лежать на лінії регресії, які відходять множенням кроку варіювання кожного фактора на його коефіцієнт регресії. У результаті такого просування визначають екстремальне значення відгуку. Оскільки рух виконується по градієнті (рис.6.5). то пройдений шлях - найкоротший в області оптимуму. В області отриманого максимального значення функції відгуку процедуру крутого сходження можна повторити. При цьому за основний рівень прийняти максимальне значення функції, отримане на попередньому етапі сходження. Проводити круте сходження стає недоцільним, коли досліджуваний процес не можна описати лінійними рівняннями, що свідчить про близькість оптимальної (стаціонарної) області. У цьому випадку потрібно або побудувати модель більше високого порядку, або (що простіше й досить ефективно) провести в даній області кілька багатфакторних експериментів з вибором нульового рівня при такій комбінації факторів, що забезпечує найкращий результат.

Досить ефективним для досягнення «майже стаціонарної області» є й симплексне планування. Симплексом називають найпростіший опуклий багатогранник, утворений $k + 1$ вершиною в k -мірному просторі. У двовимірному просторі (на площині) симплекс - це трикутник, у

тривимірному ~ тетраедр і т.д. Якщо відстані між вершинами рівні, то такий симплекс називають регулярним. Сутність і процедура застосування симплекса-планування складаються я наступному. У двофакторному просторі (найпростіший випадок) планують серію дослідів, для яких комбінація числових значень факторів x_1 і x_2 відповідає вершинам симплекса (рис.6.6). Вершина симплекса, у якій результат досліду був найгіршим, відкидається й дзеркально відображається щодо протилежної сторони з метою потрапити в область більш високих значень відгуку. Для двовимірного симплекса ця операція рівноцінна «кантуванню» трикутника через сторону, протилежну гіршому результату. При цьому утвориться симплекс, положення нової вершини якого задає умови чергового досліду. Після постановки цього досліду проводять порівняння результатів всіх дослідів, крім відкинутого. Знову відкидається гірший результат невідповідну йому вершину дзеркально відбивають у факторному просторі. Процес руху продовжують до тих пір, поки не досягнуть заданого рівня відгуку або поки симплекс не почне обертатися навколо однієї з вершин з найбільшим значенням функції («зациклення»).

Щоб спланувати вихідну серію з $k + 1$ дослідів, для факторів вибирають основний або нульовий рівень значення факторів X_i^0 і одиниці їхнього варіювання S_i . Здійснюють це аналогічно вже розглянутим методам. Значення факторів, що відповідають вершинам вихідного симплекса, знаходять по формулі:

$$x_{ij} = x_i^0 + r_{ij}S_i, \quad (6.31)$$

де r_{ij} - коефіцієнт, величина якого відповідно до номеру досліду i і номером фактора j визначається елементами матриці (табл. 6.11). Координати вершини нового симплекса знаходять по формулі:

$$x_j^H = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k x_{ij} - x_j^{OT}, \quad (6.32)$$

де x_j^H - значення j -го фактора для нового досліду; x_j^{OT} - значення j -го фактора у твореному досліді.

Таблиця 6.11 Матриця симплексного планування

№ дослід у	№ фактору і								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,5	0,289	0,204	0,158	0,129	0,109	0,095	0,083	0,074
2	-0,5	0,289	0,204	0,158	0,129	0,109	0,095	0,083	0,074
3	0	-0,577	0,204	0,158	0,129	0,109	0,095	0,083	0,074
4	0	0	-0,612	0,18	0,129	0,109	0,095	0,083	0,074
5	0	0	0	-0,632	0,129	0,109	0,095	0,083	0,074
6	0	0	0	0	-0,645	0,109	0,095	0,083	0,074
7	0	0	0	0	0	-0,654	0,095	0,083	0,074
8	0	0	0	0	0	0	-0,662	0,085	0,074
9	0	0	0	0	0	0	0	0,66	0,074
10	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,671

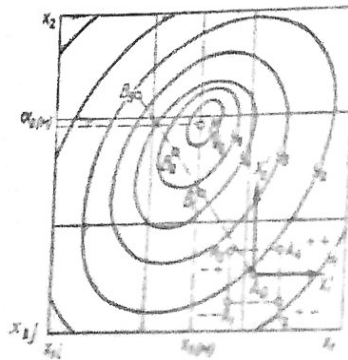


Рис. 6.5 Схема крутого сходження по поверхні відгуку до області оптимуму: $v_1 - v_6$ ізолінії рівного виходу функції відгуку $y = f(x_1, x_2)$, A_0 - основний рівень; $A_1 - A_6$ - вихідні досліді; B_{36} кінцева функція при сходженні; M - точка оптимуму

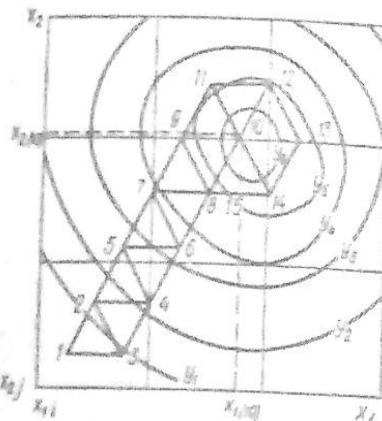


Рис. 6.6 Схема симплекса-планування: $v_1 - v_6$ - ізолінії рівного виходу функції відгуку; 1, 2, 3 - вершини вихідного симплекса; 4 - 15 - нові вершини симплекса,

отримані в процесі руху

Слід зазначити основні особливості симплекса-планування і його переваги в порівнянні з іншими методами пошуку оптимуму. Обчислювальний апарат методу простий, не вимагає від дослідника спеціальних математичних знань, може бути реалізований як в «ручному», так і в «машинному» варіантах. Застосування методу в промислових умовах особливо афективно, тому що симплекс може впливати безупинно за "дрейфуючим" оптимумом. Метод «не боїться» помилок, тому що має властивість самоконтролю. Помилка або грубий промах лише продовжать (скривлять) шлях симплекса, але не відіб'ються на кінцевому результаті.