Методичні рекомендації
до практичних робіт
з курсу «Диференціальні рівняння»

4. Методичні вказівки

4.1. Методичні вказівки до практичних занять та підготовки до виконання модульної контрольної роботи №1

4.1.1. Основні поняття диференціальних рівнянь

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.1]

Означення. *Звичайним диференціальним* рівнянням називається рівняння, що залежить від незалежної змінної x, шуканої функції і її похідних.

Символічно це записують так

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 .$$

Означення. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком* цього рівняння.

Наприклад:

а) - $x^2 y' + 5x\, y = y^2$ -диференціальне рівняння першого порядку.

б) - $y'' - 2y' + y - x^2 = 0$ -диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. *Розв'язком* диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння виду $y' = f(x)$.

Щоб його розв`язати, досить взяти невизначений інтеграл

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C ,$$

де *C*- довільна стала.

Означення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння називається $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots)$ розв'язок, який містить стільки констант $C_1, C_2, \ldots$ який порядок цього рівняння.

*Розв`язати задачу Коші* - означає виділити із загального розв`язку частинний розв`язок, що задовольняє заданим початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' , y''(x_0) = y_0'' , \ldots..$$

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots)$, в якому $C_1, C_2, \ldots$ приймають певні значення, які відповідають задачі Коші.

4.1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.1]

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy \tag{1}$$

називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*. Якщо $y = \varphi(x)$ його розв`язок, то маємо тотожність

$$f_1(x)dx = f_2(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Інтегруємо його

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(\varphi(x))\varphi'(x)dx + C. \tag{2}$$

У правому інтегралі виконаємо заміну змінної, покладемо $y = \varphi(x)$, тоді рівність (2) набуде вигляду $\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C.$ Таким чином, щоб розв`язати рівняння (1), досить проінтегрувати обидві частини цієї рівності:

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C \quad \text{або} \quad F_1(x) = F_2(y) + C. \tag{3}$$

Приклад 1. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y' = 2^{x+y}$.

Дивлячись на те, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, напишемо його у вигляді $2^{-y}dy = 2^x dx$

Беремо інтеграли $\int 2^{-y}dy = \int 2^x dx$, або $-\dfrac{2^{-y}}{\ln 2} = \dfrac{2}{\ln 2}^{x} + C$.

Приклад 2. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $x \cdot (y^2 - 4)dx + ydy = 0$.

Приведемо рівняння до рівняння з розділеними змінними:

$$x\,dx + \frac{ydy}{y^2 - 4} = 0.$$

Беремо інтеграли :

$$\int x\,dx + \int \frac{ydy}{y^2 - 4} = C.$$

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ та

$$\int \frac{ydy}{y^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{y^2-4} = \begin{bmatrix} y^2-4=t \\ 2ydy=dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t| = \frac{1}{2}ln|y^2-4|$$

Отримаємо загальний розв'язок:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}ln|y^2-4| = \frac{C_1}{2}$$

або

$$x^2 + ln|y^2-4| = C_1$$

4.1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.2]

Означення. Функція називається *однорідною функцією к-го порядку*, якщо $f(tx,ty)=t^k \cdot f(x,y)$.

Наприклад: $f(x,y)=4x^3+7x^2y-5xy^2+9y^3$ є однорідною функцією третього порядку, тут сумарний степінь змінних x і y в кожному доданку дорівнює трьом; функція $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{x}{y}-5$ - однорідна нульового порядку.

Означення. Диференціальне рівняння

$$f_1(x,y)dx=f_2(x,y)dy \qquad (4)$$

називається *однорідним* диференціальним рівнянням, якщо $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$- однорідні функції того самого порядку або, якщо диференціальне рівняння (4) можна розв'язати відносно y', тобто

$$y'=f(x,y), \qquad (5)$$

то $f\ (x,y)$ - однорідна функція нульового порядку.

Приклад 3. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $(x-y)dy=(x+y)dx$.

Запишемо це рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

Розділимо чисельник і знаменник правої частини на *x*: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$.

Покладемо $t=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=xt\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=t+x\dfrac{dt}{dx}$.

Підставляючи все це в рівняння, отримаємо $t+x\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+t^2}{1-t}$. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x}.$$

Звідки

$$arctgt-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)=\ln x+C$$

або

$$arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^2\right)=\ln x+C.$$

4.1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.3]

Означення. *Лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y'+p(x)\cdot y=q(x). \tag{6}$$

Зробимо підстановку: $y=u(x)\cdot v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ поки що довільні функції. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}+p(x)uv=q(x).$$

Покладаючи $u\cdot\dfrac{dv}{dx}+p(x)uv=0, u\neq 0.$

Зауваження. Якщо поставити $u=0$, отримаємо $y=0$ й $y'=0$. Лінійне рівняння втратить зміст.

Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \\ \dfrac{du}{dx} v = q(x). \end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln v = -\int p(x)dx. \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Отримане значення $v(x)$ підставляємо в друге рівняння системи, і знаходимо:

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C.$$

Шуканий розв`язок :

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y' - 2xy = 2x^3$ - лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Робимо заміну: $y = u \cdot v$, $y' = \dfrac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \dfrac{dv}{dx}$. Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} - 2xuv = 2x^3.$$

Покладемо

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} - 2xv = 0 \\ \dfrac{du}{dx} = 2x^3. \end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = 2xdx \Rightarrow \ln v = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{x^2} = 2x^3 \Rightarrow du = 2x^3dx \Rightarrow$$

$$u=\int 2x^3e^{-x^2}dx=\begin{bmatrix} t=-x^2 \\ dt=-2xdx \end{bmatrix}=-\int te^t dt=\begin{bmatrix} u=t; dv=e^t dt \\ du=dt; v=e^t \end{bmatrix}=$$

$$=-te^t+\int e^t dt=-te^t+e^t+C=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C.$$

Шуканий розв'язок

$$y=u\cdot v=\left(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C\right)e^{x^2}=x^2+1+Ce^{x^2}.$$

4.1.5. Запитання для самоперевірки і підготовки до модульної контрольної роботи

1. Дайте означення диференціального рівняння I-го порядку.
2. Дайте означення загального та частинного розв'язку диференціального рівняння.
3. Дайте означення порядку диференціального рівняння.
4. Наведіть приклади задачі Коші для диференціального рівняння I-го порядку.
5. Сформулюйте теорему існування та єдності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння I-го порядку.
6. Опишіть вигляд диференціального рівняння з розділеними змінними та його розв'язок.
7. Опишіть вигляд диференціального рівняння з відокремлюваними змінними та метод його розв'язку.
8. Опишіть вигляд однорідного диференціального рівняння та метод його розв'язку.
9. Які функції називаються однорідними?
10. Опишіть вигляд лінійного диференціального рівняння та метод його розв'язку.

4.2. Методичні вказівки до практичних занять та підготовки до виконання модульної контрольної роботи № 2

4.2.1. Диференційні рівняння вищого порядку, що допускають пониження порядку

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.4]

У деяких випадках розв`язок диференціального рівняння другого порядку спрощується за рахунок пониження його порядку.

Диференціальне рівняння виду $y'' = f(x)$.

Інтегруємо по x обидві частини цієї рівності $y' = \int f(x)dx + C_1$, де C_1- стала інтегрування. Шуканий розв`язок

$$y = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' = \cos 2x$.

Розв`язок: $y' = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1,$

$y = \int \frac{1}{2}\sin 2xdx + C_1x + C_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2.$

Приклад 6. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y''' = \frac{x^2}{2}$

Розв`язок: $$y'' = \int \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6} + C_1,$$

$$y' = \int\left(\frac{x^3}{6} + C_1\right)dx = \frac{x^4}{24} + C_1x + C_2\ ,$$

$$y = \int\left(\frac{x^4}{24} + C_1x + C_2\right)dx = \frac{x^2}{120} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Диференціальне рівняння, що не містить явно шукану функцію y:

$$y'' = f(x, y').$$

Введемо нову невідому $p(x) = y'(x)$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. А рівняння звелося до рівняння першого порядку щодо шуканої функції $p = p(x, C_1)$. Загальний розв`язок даного рівняння $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$.

Приклад 7. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$\left(1 + x^2\right)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

Покладемо $y' = p$. Тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. Підставляємо в рівняння і розділяємо змінні

$$\frac{dp}{1+p^2} = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow arctg\ p = arctgC_1 - arctgx.$$

Звідси (у відповідністю із формулою $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$),

$p = \dfrac{C_1 - x}{1+C_1 x}$ або $y' = \dfrac{C_1 - x}{1+C_1 x}$. Остаточно маємо:

$$y = \int \frac{C_1 - x}{1+C_1 x}dx = -\frac{1}{C_1}\int dx + \left(C_1 + \frac{1}{C_1}\right)\int \frac{dx}{1+C_1 x} = -\frac{x}{C_1} + \frac{C_1 + \frac{1}{C_1}}{C_1}\ln|1+C_1 x| + C_2.$$

Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну x:

$$y'' = f(y, y').$$

Покладаємо $y' = p(x)$, тоді $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}p$.

Підставляємо у вихідне рівняння $p\dfrac{dp}{dy} = f(y,p) \Rightarrow p = p(y, C_1)$ або

$\dfrac{dy}{dx} = p(y, C_1)$. Розділяємо змінні $\dfrac{dy}{p(y,C_1)} = dx.$

Загальний розв\`язок диференціального рівняння знайдемо із співвідношення

$$x = \int \frac{dy}{p(y,C_1)} + C_2.$$

Приклад 8. Знайти загальний розв\`язок диференціального рівняння $y'' = 2y\,y'$.

$y' = p \Rightarrow y'' = p\dfrac{dp}{dx}$.

Підставляємо в рівняння $p\dfrac{dp}{dx} = 2yp$ або $p\left(\dfrac{dp}{dx} - 2y\right) = 0$.

1. $p = y' = 0 \Rightarrow y = C(const).$
2. $\dfrac{dp}{dy} = 2y \Rightarrow dp = 2ydy \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = p = y^2 + C_1$

а) $C_1 = 0$, тоді $\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C_2}$;

б) $C_1 > 0$. Так як стала довільна, покладемо $C_1^2 = 0$, маємо

$$\frac{dy}{C_1^2 + y^2} = dx \Rightarrow x = \frac{1}{C_1} arctg \frac{y}{C_1} + C_2.$$

в) $C_1 < 0$. Якщо $\left(-C_1^2\right)$, маємо: $\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx$, а розв'язок

$$x = \frac{1}{2C_1} \ln \frac{y - C_1}{y + C_1} + C_2.$$

4.2.2. Лінійне однорідне диференційне рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.5]

Означення. Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно лінійне щодо шуканої функції і її похідних:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (7)$$

де a_{i} (i=1,2,3…,n) - або постійні, або неперервні функції.

Означення. Диференціальне рівняння (7) називається *неоднорідним*, якщо $f(x) \neq 0$, і *однорідним*, якщо $f(x) = 0$.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (8)$$

Теорема 1. Якщо y_1 і y_2 - розв`язки рівняння (8), то і їхня сума $\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2$ також є розв`язком цього рівняння.

Теорема 2. Якщо y_0 є розв`язком рівняння (8), тоді і $\mathrm{C}\mathrm{y}_0$ також є розв`язком цього рівняння, де C = const.

Означення. Два розв`язки $\mathrm{y}_1(\mathrm{x})$ і $\mathrm{y}_2\ (\mathrm{x})$ рівняння (8) називаються *лінійно незалежними* на відрізку $[a,b]$, якщо $\frac{y_{1\,(x)}}{y_2(x)} \neq \alpha = const$, і *лінійно залежними*, якщо $\frac{y_{1\,(x)}}{y_2(x)} = \alpha$.

Теорема *про загальний розв`язок лінійного однорідного диференціального рівняння:* Якщо $\mathrm{y}_1$ і $\mathrm{y}_2$ - лінійно незалежні розв`язки рівняння (8), то загальний розв`язок цього рівняння запишеться у вигляді:

$$y = C_1 \mathrm{y}_1 + C_2 \mathrm{y}_2,$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Означення. Лінійне однорідне диференціальне (ЛОДР) рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0\,, \tag{9}$$

де коефіцієнти p і q - постійні дійсні числа.

Розв`язки рівняння шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи в рівняння, отримаємо $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$

Тому що $e^{kx} \neq 0,$ маємо

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{10}$$

Назвемо цей вираз характеристичним рівнянням. Воно являє собою квадратне рівняння відносно k. Корені квадратного рівняння $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$

Розглянемо три випадки:

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку розв`язки $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні, тому що відношення $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$. І загальний розв`язок рівняння запишеться у вигляді $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Приклад 9. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 9y' + 14y = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 9k + 14 = 0, k_1 = 2, k_2 = 7.$

Відповідь: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}$.

2. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:* $k_1 = k_2$.

За теоремою Вієта $k_1 + k_2 = -p.$ Але $k_1 = k_2$. Тому $2k_1 + p = 0$ і $k_1 = -\frac{p}{2}$. Один частинний розв`язок $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$. Другий, лінійно незалежний із цим, отримаємо із співвідношення $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx.$

Маємо

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-px}}{e^{-px}} dx = x\, e^{-\frac{p}{2}x},$$

а загальний розв`язок рівняння $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \cdot x$.

Приклад 10. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 8k + 16 = 0, k_1 = k_2 = 4.$

Відповідь: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} x.$

3. *Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені*: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

У цьому випадку можна покласти $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$.

Теорема. Якщо розв`язком диференціального рівняння (10) є комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x),$, то розв`язками рівняння (9) будуть його дійсна $u(x)$та уявна $v(x)$ частини.

Підставляємо $y = u(x) + iv(x)$ в рівняння (9)

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0$$

або, у силу властивостей похідних,

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + q) = 0 .$$

Відомо, що комплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Тому маємо

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0 \text{ і } v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0 .$$

У відповідності із формулами Ейлера, записані вище розв`язки рівняння (9) подаємо у вигляді $y_1 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)),$ $y_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)).$

В силу доведеної теореми розв`язками рівняння (9) зручніше взяти їх дійсну й уявну частини $u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $v(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Вони лінійно незалежні $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = ctgx \neq const.$

Загальний розв`язок набуде вигляду

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)).$$

Приклад 11. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 20y = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 20 = 0,$

$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 20} = 2 \pm 4i.$

Відповідь: $y = e^{2x}(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)).$

4.2.3. Лінійне неоднорідне диференційне рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.6]

Лінійне неоднорідне диференційне рівняння II-го порядку має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (11)$$

Теорема. (Структура загального розв`язку рівняння (11)). Загальний розв`язок рівняння (11) являє собою суму загального розв`язку відповідного йому однорідного рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (12)$$

і деякого частинного розв`язку $y_ч$ неоднорідного рівняння (11)

$$y = y_{одн} + y_ч.$$

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

права частина якого має спеціальний вигляд, що дозволяє знайти його частинний розв'язок за допомогою невизначених коефіцієнтів

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \qquad (13)$$

де $P_n(x)$- багаточлен n- го порядку.

Візьмемо функцію $y = Q(x)e^{\lambda x}$, де

$$Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

- багаточлен n- го порядку з невизначеними коефіцієнтами, і підставимо в рівняння (5.9). Після очевидних перетворень отримаємо

$$Q_n''(x) + (2\lambda + p)Q_n'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q_n(x) = P_n(x). \qquad (14)$$

Відзначимо, що, якщо $Q_n(x)$ - багаточлен n- го порядку, то $Q_n'(x)$ - (n-1)- го, а $Q_n''(x)$- (n-2)- го порядку.

а. Нехай λ - дійсне число, що не є коренем характеристичного рівняння. Тоді ліва і права частини рівності (14) є багаточлени n -го порядку. Частинний розв`язок неоднорідного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$y_ч = Q_n(x)e^{\lambda x}. \qquad (15)$$

б. Нехай λ - дійсний однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в правій частині рівності (14) залишиться багаточлен n -го порядку, а в лівій – (n-1)- го, тому що $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Частинний розв`язок

$$y_ч = xQ_n(x)e^{\lambda x}. \qquad (16)$$

в. λ - дійсний дворазовий корінь характеристичного рівняння. У рівності (14) не тільки $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, але і у силу теореми Вієта $2\lambda + p = 0$. Частинний розв`язок

$$y_ч = x^2 Q_n(x)e^{\lambda x}. \qquad (17)$$

Запишемо праву частину рівняння (5.9) так

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda_1 x} + Q_n(x)e^{\lambda_2 x}, \qquad (18)$$

де $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - комплексні числа, що не є коренями характеристичного рівняння. Повторюючи міркування, наведені для однорідних рівнянь у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, отримаємо

$$y_ч = U_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \qquad (19)$$

Можна також показати, що якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ є однократними коренями характеристичного рівняння, то

$$y_ч = x\left[U_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x).\right] \qquad (20)$$

Нехай тепер

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \qquad (21)$$

Покажемо, що рівність (21) можна записати у вигляді (18). Дійсно, застосовуючи формули Ейлера, запишемо

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} =$$
$$= \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) + \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha+\beta i)x} + \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) - \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Тут у кожній із квадратних дужок багаточлен степені $n = \max(n_1, n_2)$.

Зауваження. Якщо $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Приклад 12. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = x + 2 + 9xe^{2x} + e^x \cos x. \qquad (22)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - y' = 0.$$

(23)

Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0, k_1 = 0, k_2 = 1.$

Загальний розв`язок рівняння (23)

$$y_{одн} = C_1 + C_2 e^x.$$

Подамо праву частину рівняння (22) у вигляді

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

де $f_1(x) = x + 2;\ f_2(x) = 9xe^{2x}\ ; f_3(x) = e^x \cos x.$

Шукаємо частинний розв`язок неоднорідного рівняння (22).

$f_1(x) = x + 2$ можна записати в такому вигляді $f_1(x) = (x+2)e^{0x}$. А так як серед коренів характеристичного рівняння є $k = 0$, то розв`язок $y_{ч_1}$ шукаємо у вигляді $y_{ч_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$. Знаходимо $y'_{ч_1} = 2Ax + B,$ $y''_{ч_1} = 2A$ і і підставляємо в рівняння $2A - 2Ax - B = x + 2$.

Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x ліворуч і праворуч

$$\left.\begin{array}{l} x\,|2A = 1 \\ x^0|\,2A - B = 2 \end{array}\right\} \quad A = \frac{1}{2},\ B = -1.\ \ y_{ч_1} = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_2} = (Ax + B)e^{2x} \quad \Rightarrow y'_{ч_2} = [2Ax + (A + 2B)]e^{2x},$$
$$y''_{ч_2} = [4Ax + (4A + 4B)]e^{2x}.$$

Підставляємо в рівняння (22)

$$[4Ax + (4A + 4B)]e^{2x} - [2Ax + (A + 2B)]e^{2x} = 9xe^{2x} \quad \text{або}$$
$$2Ax + (3A + 2B) = 9x.$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,|2A = 9 \\ x^0|\,3A + 2B = 0 \end{array}\right\} \quad A = 4.5,\ B = -6.75.\ \ y_{ч_2} = (4.5x - 6.75)e^{2x}.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_з}=e^x\left(A\cos x+B\sin x\right)\Rightarrow$$

$$y'_{ч_з}=e^x\left(\left(A+B\right)\cos x+\left(B-A\right)\sin x\right),\ y''_{ч_з}=\left[2B\cos x-2A\sin x\right]e^x.$$

Підставляємо в рівняння (22)

$$\left[2B\cos x-2A\sin x-\left(A+B\right)\cos x-\left(B-A\right)\sin x\right]e^x=e^x\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(B-A\right)\cos x+(-A-B)\sin x=\cos x.$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos x\,\left|B-A=1\right.\\ \sin x\left|-A-B=0\right.\end{array}\right\}\quad A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}.\ \ y_{ч_з}=\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)e^x.$$

Загальний розв`язок рівняння (22)

$$y=y_{одн}+y_ч=C_1+C_2e^x+\frac{1}{2}x^2-x+\left(4.5-6.75\right)e^{2x}+$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)e^x.$$

4.2.4. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.7]

Розглянемо систему рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(t,x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=f_2(t,x,y)\end{cases},\qquad (24)$$

де t - незалежна змінна, x і y - шукані функції.

Система, у лівій частині якої знаходяться похідні шуканих функцій першого порядку, а праві не містять похідних, називається *нормальною*. Розв`язувати систему будемо зведенням її до рівняння другого порядку щодо однієї з невідомих функцій.

Диференціюємо по t перше рівняння системи

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Замінюючи $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$ на $f_1(t,x,y)$ і $f_2(t,x,y)$ отримаємо $\frac{d^2x}{dt^2}=F(t,x,y)$. Припускаючи, що y можна виразити через t,x і $\frac{dx}{dt}$ із системи $\left(y=\varphi(t,x,\frac{dx}{dt})\right)$ отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Розв`язуючи це рівняння, знаходимо $x = \varepsilon(t, C_1, C_2)$. Невідому функцію *y* знайдемо із співвідношення $y = \varphi(t, x, \frac{dx}{dt}) = \varphi(t, C_1, C_2)$.

Зауваження. Система n диференціальних рівнянь із n невідомими функціями зводиться до диференціального рівняння n –го порядку.

Приклад 13. Знайти загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

Диференціюємо перше рівняння: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial t} + 4\frac{\partial y}{\partial t}$. Робимо заміну у відповідності із другим рівнянням системи: : $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial t} + 4(2x + 3y)$.

Виражаємо $y = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial t} - x\right)$ з першого рівняння системи і підставляємо в останню рівність $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial t} + 8x + 3\frac{\partial x}{\partial t} - 3x$ або $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{\partial x}{\partial t} - 5x$.

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k - 5 = 0,$$

де $k_1 = -1, k_2 = 5$.

Розв`язок системи

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \\ y = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial x}{\partial t} - x\right) = \dfrac{1}{4}(-C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t} - C_1e^{-t} - C_2e^{5t}) = C_2e^{5t} - \dfrac{1}{2}C_1e^{-t}. \end{cases}$$

4.2.5. Запитання для самоперевірки і підготовки до модульної контрольної роботи

1. Яке диференціальне рівняння називається таким, що припускає зниження порядку? Які класи таких рівнянь ви знаєте?
2. Яка заміна змінної використовується в диференціальних рівняннях, що припускає зниження порядку?
3. Запишіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння n-го порядку.