МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Д. Я. ХУСАІНОВ
А. В. ШАТИРКО

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Підручник

КИЇВський ВПЦ університет
2023

УДК 517.9:004.4(075.8)
Х98

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України О. А. Бойчук,
д-р техн. наук, проф. О. С. Бичков,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. А. Стоян,
канд. техн. наук, доц. І. І. Харченко

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(*протокол № 5 від 23 жовтня 2020 року*)

Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(*протокол № 4-23 від 4 травня 2023 року*)

Хусаінов Д. Я.
Х98 Диференціальні рівняння : підручник / Д. Я. Хусаінов, А. В. Шатирко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2023. – 410 с.

ISBN 978-966-933-226-4

Розглянуто фундаментальні теоретичні факти та практичні методи розв'язання лінійних і нелініних рівнянь і систем рівнянь, а також основи теорії стійкості руху, варіаційного й операційного числень, лінійні рівняння із частинними похідними першого порядку. Наведено зразки розв'язання рівнянь і завдання для самостійної роботи, а також приклади застосування *безкоштовної програмної системи з відкритим кодом* для сучасної математики Sage для вивчення звичайних диференціальних рівнянь.

Для студентів, що вивчають дисципліни "Прикладна математика", "Інформатика", "Комп'ютерні науки".

УДК 517.9:004.4(075.8)

ISBN 978-966-933-226-4

ПЕРЕДМОВА

Навчальна дисципліна "Диференціальні рівняння" займає чільне місце серед математичних дисциплін у підготовці спеціалістів із прикладної математики, інформатики, комп'ютерних наук.

Мета пропонованого підручника – ознайомлення студентів із базовими поняттями, твердженнями, загальними методами й найпростішими застосуваннями теорії диференціальних рівнянь; сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу за допомогою розв'язаних прикладів; підготовка до подальшої творчої самостійної роботи зі спеціалізованими посібниками вищого рівня, науковими джерелами інформації.

При написанні підручника автори спиралися на свій багаторічний досвід викладання нормативної навчальної дисципліни "Диференціальні рівняння" для підготовки бакалаврів спеціальності "Прикладна математика" факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка [21, 22]. Також підручник можна використовувати для підготовки спеціалістів з інформатики, комп'ютерних наук, програмної інженерії та інших споріднених інженерно-технічних спеціальностей закладів вищої освіти.

Підручник складається з дев'яти розділів: "Диференціальні рівняння першого порядку", "Нелінійні диференціальні рівняння", "Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків", "Системи диференціальних рівнянь", "Лінійні однорідні рівняння зі змінними коефіцієнтами", "Теорія стійкості руху", "Операційне числення", "Лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку", "Основи варіаційного числення".

Кожен розділ містить теоретичний матеріал, що супроводжується розв'язаними прикладами, які підкріплюють теорію і наочно демонструють її застосування. З метою самоконтролю і додаткового опрацювання матеріалу в усіх розділах є вправи, які можна використовувати як основу для проведення практичних занять. Для поглибленого опанування матеріалом автори пропонують вправи та приклади із задачників [3, 6, 8, 11, 13], а також задачі підвищеної складності [16].

Особливою сучасною рисою підручника є те, що в певних розділах для деяких прикладів наведено їх розв'язання за допомогою пакету символьних обчислень Sage. Цей факт суттєво допоможе при викладанні дисципліни "Диференціальні рівняння" для майбутніх спеціалістів IT-сфери.

У списку джерел, що надані в кінці підручника, можна знайти відповіді на запитання, що залишилися невисвітленими або викладені під іншим кутом зору [2, 4, 5, 13, 17, 19].

Автори сподіваються, що підручник не тільки допоможе студентам в опануванні навчальної дисципліни, а й буде корисним для викладачів і науковців, які займаються диференціальними рівняннями та їхнім прикладним застосуванням.

ВСТУП

Передумови для виникнення теорії диференціальних рівнянь склалися у другій половині XVII ст. Актуальні на той час обернені задачі на дотичні, тобто пошук кривих за відомими властивостями їхніх дотичних, були одними з перших, що зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь. З метою показати необхідність вивчення теорії диференціальних рівнянь наведемо кілька прикладів із різних сфер, що потребують математичного запису постановки задачі у вигляді диференціальних рівнянь.

Приклад 1 (Р. Декарт, 1639). Нехай на площині із прямокутною системою координат потрібно знайти криву, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної пропорційний ординаті точки дотику, із заданим коефіцієнтом пропорційності k.

Якщо таку криву шукати у вигляді графіка деякої диференційованої функції $y = y(x)$, $x \in \Re$, то, ураховуючи геометричний зміст похідної, умову задачі можна подати у вигляді співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

яке є найпростішим, але важливим диференціальним рівнянням. Легко переконатися (підстановкою), що його задовольняє будь-яка функція вигляду

$$y = Ce^{kx},$$

де C – довільна дійсна константа.

Приклад 2. Модель економічної динаміки. Введемо такі позначення: $x(t)$ – обсяг основних фондів (капіталу) з розрахунку на одного працівника в момент часу t, $\mu = \mathrm{const} > 0$ та $\nu = \mathrm{const} > 0$ – норми амортизації капіталу й темпи зростання чисельності робочої сили, відповідно, $c(t)$ – обсяг споживання з розрахунку на одного працівника в момент часу t, $f(x)$ – виробнича функція, яка є характеристикою продуктивності праці й має певні властивості (опуклість, монотонність тощо).

Тоді в наведених позначеннях математична модель економічної динаміки (у найпростішому вигляді) буде записана через диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x(t)\right) - (\mu + \nu)x(t) - c(t).$$

Приклад 3. Модель розвитку одновидової популяції. Введемо до розгляду величину $x(t)$ – кількість, маса популяції у момент часу t. Ідеалізуючи процес, будемо вважати, що $x(t)$ неперервно змінюється в часі.

Гіпотеза Т. Мальтуса (1798). За малий проміжок часу $[t, t+\Delta t]$ кількість новонароджених особин становить $ax(t)\Delta t$, а кількість померлих – $bx(t)\Delta t$. Тут a та b – коефіцієнти народжуваності та смертності, відповідно.

Тоді загальна зміна величини популяції за вказаний проміжок часу виражається формулою

$$x(t+\Delta t) - x(t) = (a-b)x(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0.$$

Покладемо $k = a - b$, поділимо обидві частини рівності на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Отримаємо вже знайоме диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

розв'язком якого є функція $x = Ce^{kt}$, де C – довільна дійсна константа.

Якщо відомо, що величина популяції в момент часу t_0 становить x_0, то значення довільної сталої обчислимо з початкової умови $Ce^{kt_0} = x_0$ і отримаємо залежність

$$x = x_0 e^{k(t - t_0)},$$

яка є розв'язком задачі Коші з початковими даними (t_0, x_0).

Зауваження. Коефіцієнт k можна знайти й у випадку, коли a та b невідомі, визначивши значення $x_1 = x(t_1)$ в деякий момент t_1. Тоді з умови $x_1 = x_0 e^{k(t_1 - t_0)}$ матимемо $k = (t_1 - t_0)^{-1} \ln(x_1 / x_0)$.

Цікаво, що коли за такою методикою обчислили коефіцієнт k, користуючись даними про населення Землі в 1961 та 1971 рр., то отримали залежність

$$x = 3.06 \cdot 10^9 \cdot e^{0.02(t-1961)},$$

яка непогано узгоджується з оцінками приросту населення земної кулі в період між 1700 та 1960 рр. У цей час воно реально подвоювалося кожні **35** років. Отримана нами формула дає подвоєння за **34,6** року!

Наведемо кілька основних означень теорії диференціальних рівнянь, що будуть використовуватися далі.

Означення. Рівняння, які містять похідні від шуканої функції і можуть містити шукану функцію і незалежну змінну, називаються *диференціальними*.

Означення. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається *звичайним*.

Означення. Якщо невідома функція, що входить у диференціальне рівняння, є функцією двох або більше незалежних змінних

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial x^l, \partial y^{k-l}}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається *рівнянням у частинних похідних*.

Наприклад,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = f(x,y,z).$$

Означення. *Порядком диференціального рівняння* називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння.

Наприклад,

$y(x) = xy'(x) + y'^3(x)$ – диференціальне рівняння першого порядку,

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + y(t) - \cos y(t) = 0$ – диференціальне рівняння другого порядку,

$y^{IV}(x) - 4y'''(x) + 2y'(x) - y(x) = xe^x$ – диференціальне рівняння четвертого порядку.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* називається функція, що має необхідний степінь гладкості та при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність.

Наприклад, функція $y(x) = \cos 2x$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y''(x) + 4y(x) = 0$.

Розв'язками цього рівняння також будуть $y = \sin 2x$, $y = 3\cos 2x - \sin 2x$ і взагалі всі функції вигляду

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

З геометричного погляду розв'язку диференціального рівняння в декартовій системі координат відповідає деяка крива, яку називають *інтегральною кривою.*

Сукупність інтегральних кривих, що залежать від довільних сталих, називають *сім'єю інтегральних кривих.*

Наприклад, розв'язки рівняння $y''(x) = 2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y(x) = x^2 + C_1x + C_2$, кожна з яких є інтегральною кривою.

Означення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння.*

Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції, то кажуть, що рівняння інтегроване у *скінченному вигляді*, якщо ж розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій, то кажуть про розв'язок у *квадратурах.*

Останнім часом із розвитком комп'ютерної техніки загалом та IT зокрема набуло широкого розповсюдження застосування математичних пакетів програм до аналітичного й числового розв'язування диференціальних рівнянь (MathCad, Matlab (Scilab), Octave, FreeMat). Це пакети програм, що передусім створені для роботи із числовими матрицями й векторами та мають бути зручними для інженерно-технічних працівників.

Пакети розраховані на здійснення символьних, тобто аналітичних, обчислень (Maple, Mathematica, Maxima, MuPAD).

Практично всі ці пакети дозволяють розв'язувати диференціальні рівняння числовими (наближеними) методами. Однак остання група математичних пакетів дозволяє також знайти точний (аналітичний) розв'язок у тих випадках, коли рівняння інтегруються у скінченному вигляді.

Застосуванню пакету аналітичних обчислень і числових розрахунків Maple, створеного компанією Waterloo Maple Inc. (Канада), до розв'язування диференціальних рівнянь присвячено широкий спектр монографій і підручників, зокрема [1, 7, 9]. Для тих, хто бажає детально ознайомитися з використанням пакету Matlab (Scilab) або Mathematica, можна, наприклад, рекомендувати [9, 23].

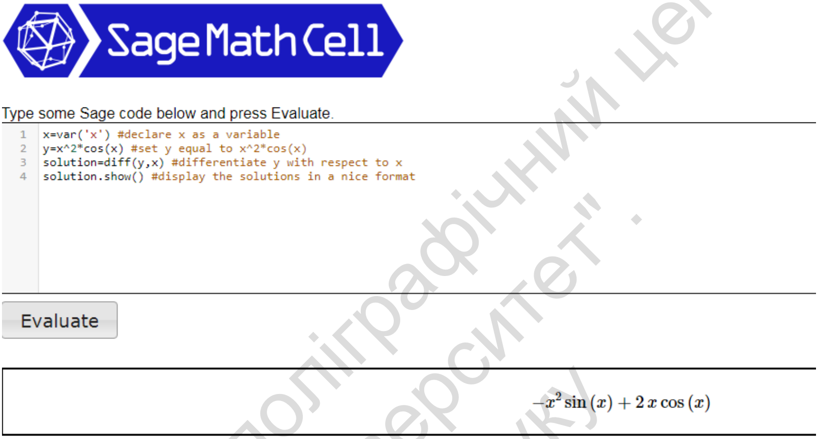
Обрана нами технологія для демонстрації можливостей застосування математичних пакетів програм до аналітичного та числового розв'язування диференціальних рівнянь – пакет **Sage** (sagemath.org) [24, 26]. Це *безкоштовна програмна система з відкритим кодом* для сучасної математики. Sage ідеально підходить для вивчення звичайних диференціальних рівнянь, оскільки її можна використовувати на комп'ютері, локальному сервері або на CoCalc (https://cocalc.com). Ще одна з її переваг – це можливість використання онлайн. Код Sage був перевірений на точність у проєкті "Звичайні диференціальні рівняння" з використанням найновішої версії, наявної на поточний момент, – версії Sage 7.6 (випущено 25.03.2017) [26].

До прикладу продемонструємо обчислення похідної від функції $f(x)=x^2\cos(x)$. У командному рядку відкритого на комп'ютері браузера наберемо й запустимо команду https://sagecell.sagemath.org. Отримаємо таке зображення:

У командному вікні наберемо такі команди Sage:

```
x=var('x') #declare x as a variable
y=x^2*cos(x) #set y equal to x^2*cos(x)
solution=diff(y,x) #differentiate y with respect to x
solution.show() #display the solutions in a nice format
```

Натиснувши на кнопку Evaluate, запустимо наш код на виконання і отримаємо такий результат на екрані:



Отже, ми отримали значення шуканої похідної

$$-x^2 \sin(x) + 2x \cos(x).$$

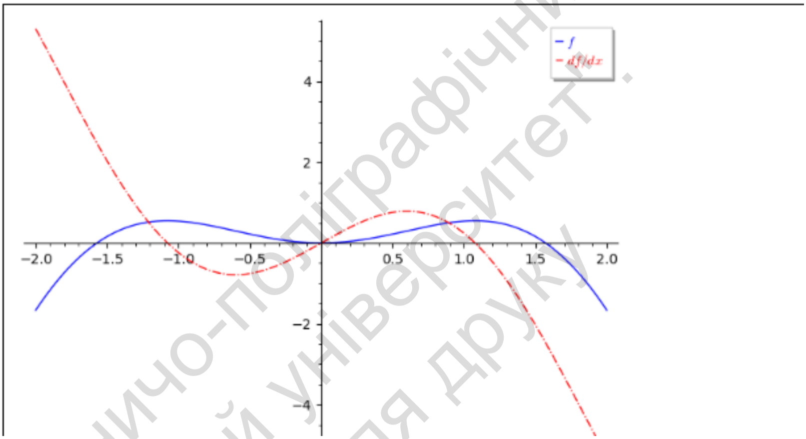
Можемо далі використати Sage для побудови графіків. Наприклад, побудуємо графіки нашої функції $f(x) = x^2 \cos(x)$ та її знайденої похідної:

```
x=var('x') #declare x as a variable
y=x^2*cos(x) #set y equal to x^2*cos(x)
yprime=diff(y,x)
p=plot(y,(x,-2,2),color='blue',legend_label='$f$',
legend_color='blue')
p+=plot(yprime,(x,-2,2),color='red',legend_label='$df/dx$',
legend_color='red', linestyle='-.')
p
```

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
x=var('x') #declare x as a variable
y=x^2*cos(x) #set y equal to x^2*cos(x)
yprime=diff(y,x)
p=plot(y,(x,-2,2),color='blue',legend_label='$f$',
legend_color='blue')
p+=plot(yprime,(x,-2,2),color='red',legend_label='$df/dx$',
legend_color='red', linestyle='-.')
p
```

Evaluate



РОЗДІЛ 1
Диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної, має вигляд

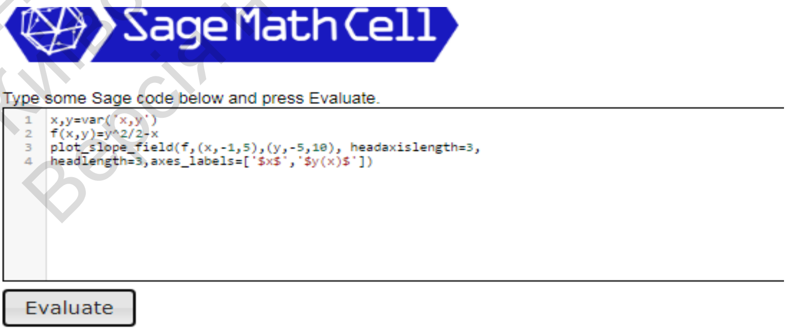
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

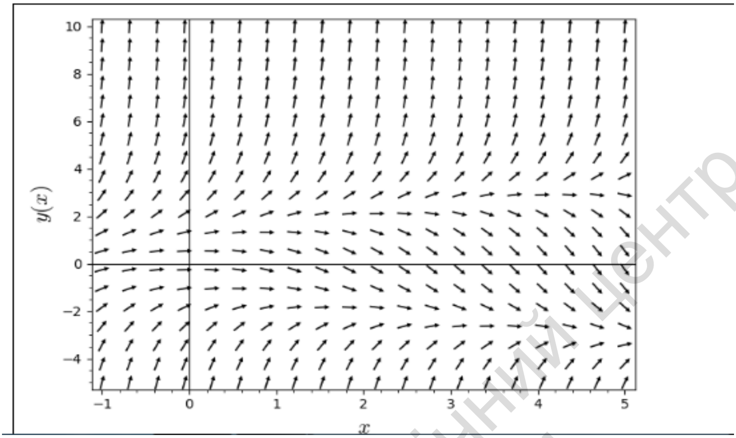
Диференціальне рівняння є зв'язком між координатами точки й кутовим коефіцієнтом дотичної dy/dx до графіка розв'язку в тій самій точці. Якщо знати x та y, то можна обчислити $f(x, y)$, тобто dy/dx.

Диференціальне рівняння визначає векторне поле, яке називається *полем напрямків*, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, які називаються *інтегральними кривими*, напрямок дотичних до яких у кожній точці збігається з напрямком векторного поля.

До прикладу розглянемо рівняння $\frac{dy}{dx} = y^2/2 - x$. За допомогою Sage побудуємо для нього поле напрямків:

```
x,y=var('x,y')
f(x,y)=y^2/2-x
plot_slope_field(f,(x,-1,5),(y,-5,10), headaxislength=3,
headlength=3,axes_labels=['$x$','$y(x)$'])
```





1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

або, у більш загальному вигляді,

$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$$

називається *рівнянням із відокремлюваними змінними*. Розділимо його на $f_2(y)g_1(x)$ і одержимо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Оскільки при диференціалах стоять функції, що залежать лише від відповідних змінних, то рівність можна інтегрувати. Узявши інтеграли, отримаємо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C \text{ або } \Phi(x, y) = C.$$

Означення 1.1.1. Кінцеве рівняння $\Phi(x, y) = 0$, що визначає розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння як неявну функцію від x, називається *інтегралом розглянутого рівняння*.

Означення 1.1.2. Рівняння $\Phi(x, y) = C$, що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається *загальним інтегралом*.

Бувають випадки (переважно), коли невизначені інтеграли $\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx$ або $\int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy$ не можна записати в елементарних функціях. Незважаючи на це, задачу інтегрування вважають виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння розв'язане у квадратурах.

Можливо, що загальний інтеграл $\Phi(x, y) = C$ розв'язується відносно змінної y. Розв'язавши його, отримаємо $y = y(x, C)$. Завдяки вибору C можна одержати всі розв'язки вихідного диференціального рівняння.

Означення 1.1.3. Залежність $y = y(x, C)$, яка тотожно задовольняє вихідне диференціальне рівняння, де C – довільна стала, називається *загальним розв'язком диференціального рівняння*.

Геометрично загальний розв'язок є сім'єю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

Означення 1.1.4. Розв'язок $y = y(x)$, який проходить через задану точку $M\left(x_0, y_0\right)$, називається *розв'язком задачі Коші*.

Означення 1.1.5. Розв'язок, що записаний у вигляді $y = y\left(x, x_0, y_0\right)$ і задовольняє умову $y\left(x_0, x_0, y_0\right) = y_0$, називається *розв'язком у формі Коші*.

Приклад 1.1.1. Задача судмедексперта [26]. Рівняння з відокремлюваними змінними розв'язують широкий спектр проблем. Не треба дивитися надто багато кримінальних драм, щоб усвідомити, що важливим завданням багатьох розслідувань є встановлення часу смерті жертви вбивства. Як криміналіст або судово-медичний експерт визначає час смерті? У людини температура становить 98:6 °F (за українською шкалою 36,6 °C). Якщо температура навколишнього повітря буде нижчою, то тіло охолоне після смерті. Згодом температура тіла буде відповідати температурі навколишнього середовища. Ми також не можемо очікувати, що тіло охолоджуватиметься з постійною швидкістю. Згадайте, як охолоджується гаряча чашка кави або чаю. Рідина швидко охолоне протягом перших кількох хвилин, але буде залишатися відносно теплою протягом тривалого періоду.

Розв'язання нашої криміналістичної проблеми можна знайти, використовуючи *закон охолодження Ньютона*, за яким швидкість зміни температури об'єкта пропорційна різниці між температурою об'єкта та середньою температурою навколишнього середовища. Закон охолодження Ньютона можна легко записати диференціальним рівнянням

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right),$$

де T – температура об'єкта, T_m – температура навколишнього середовища, k – константа пропорційності.

Припустимо, що температура навколишнього середовища становить $70°F$ і нам з досвіду відомо, що тіло за цих умов охолоджується приблизно на $2°F$ за першу годину після смерті. Щоб визначити формулу часу смерті, ми маємо розв'язати початкову проблему (задачу Коші):

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \;\; T(0) = 98,6,$$

де $T(1) = 96,6.$

Якщо ми перепишемо останнє диференціальне рівняння як

$$\frac{1}{T-70}\frac{dT}{dt} = k,$$

то побачимо, що це рівняння з відокремлюваними змінними.

Проінтегруємо обидві частини останнього рівняння і отримаємо

$$\ln|T - 70| = kt + C.$$

Якщо вважати, що $T > 70,$ то можна переписати

$$\ln(T - 70) = kt + C \text{ або } T - 70 = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C}.$$

Поклавши $D = e^C,$ запишемо шуканий розв'язок

$$T(t) = De^{kt} + 70.$$

Використавши початкову умову $T(0) = 98,6,$ з останнього виразу знайдемо значення константи $D = 28,6.$ Отже,

$$T(t) = 28,6e^{kt} + 70.$$

Таким чином, записавши з урахуванням кінцевої умови $96,6 = T(1) = 28,6e^{k\cdot 1} + 70$, ми можемо визначити значення константи пропорційності k:

$$k = \ln\left(\frac{26,6}{28,6}\right) \approx -0,0725.$$

Остаточно отримаємо для судмедексперта формулу температури зміни тіла жертви:

$$T(t) = 28,6e^{-0,0725t} + 70.$$

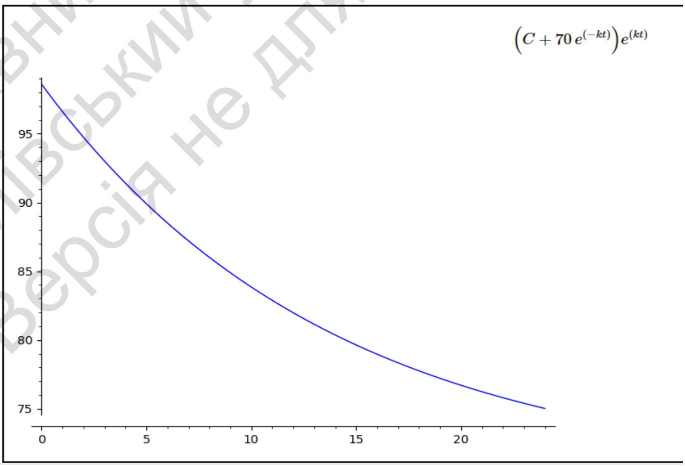
Використаємо Sage для розв'язання нашого диференціального рівняння і побудови його графіка:

SageMathCell

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
k,t=var('k,t')
T=function('T')(t)
de=diff(T,t)==k*(T-70)
solution=desolve(de,T,ivar=t)
solution.show()
#t=var('t')
T(t)=28.6 *exp(-0.0725*t)+70
plot(T,(t,0,24))
```

Evaluate



Рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c),$$

де a, b, c – сталі величини.

Зробимо заміну $ax+by+c=z$. Отримаємо

$$adx+bdy=dz \text{ і } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right).$$

Підставивши отриманий вираз у вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)=f(z) \text{ або } \frac{dz}{dx}=a+bf(z).$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{dz}{a+bf(z)}-dx=0 \text{ і } \int\frac{dz}{a+bf(z)}-x=C.$$

Після підстановки в рівняння отримаємо загальний інтеграл

$$F\left(ax+by+c\right)-x=c.$$

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь із відокремлюваними змінними.

1. Розв'язати рівняння $xydx+\left(x+1\right)dy=0.$

Розділяємо змінні:

$$\frac{xdx}{x+1}+\frac{dy}{y}=0.$$

Обчислюємо інтеграли:

$$\int\frac{xdx}{x+1}+\int\frac{dy}{y}=c \Rightarrow \int\frac{x+1-1dx}{x+1}+\int\frac{dy}{y}=c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\ln|x+1|+\ln|y|=\ln c \Rightarrow$$

$$ye^{x}=c(x+1) \Rightarrow y=ce^{-x}\left(x+1\right).$$

Після розділення змінних отримали особливий розв'язок $x+1=0.$

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

Розділяємо змінні:

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Обчислюємо інтеграли:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = c \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(y^2+1\right)}{\sqrt{y^2+1}} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \sqrt{y^2+1} + c.$$

Після розділення змінних отримали особливий розв'язок $x = 0$.

3. Розв'язати рівняння $\left(x^2-1\right)y' + 2xy^2 = 0,\ \ y(0) = 1.$

Зобразимо рівняння як $\left(x^2-1\right)\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0.$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2-1} = 0.$$

Обчислюємо інтеграли:

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2xdx}{x^2-1} + c \Rightarrow \frac{1}{y} = \int \frac{d\left(x^2-1\right)}{x^2-1} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \ln\left|x^2-1\right| + c \Rightarrow 1 = y\left(\ln\left|x^2-1\right| + c\right).$$

Після розділення змінних отримали особливий розв'язок $y = 0$.

Для визначення сталої c підставляємо початкові умови $x_0 = 0,\ \ y_0 = 1$. Отримуємо

$$1 = \left(\ln|1| + c\right) \Rightarrow 1 = c \Rightarrow 1 = y\left(\ln\left|x^2-1\right| + 1\right) \Rightarrow y = \frac{1}{\ln\left|x^2-1\right| + 1}.$$

4. Розв'язати рівняння $y'\mathrm{ctg}x + y = 2,\ \ y(\pi/3) = 0.$

Зобразимо рівняння як $\mathrm{ctg}x\dfrac{dy}{dx} = 2 - y.$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dy}{2-y} = \mathrm{tg} x dx.$$

Обчислюємо інтеграли:

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx - \ln c \Rightarrow -\ln|2-y| = -\ln|\cos x| - \ln c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-y = c\cos x \Rightarrow y = 2 - c\cos x.$$

Для визначення сталої c підставляємо початкові умови $x_0 = \pi/3$, $y_0 = 0$. Отримуємо

$$0 = 2 - \frac{1}{2}c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow y = 2 - 4\cos x.$$

Розв'яжемо цей самий приклад за допомогою пакету Sage і додатково побудуємо поле напрямків.

Код:

```
#загальний розв'язок
show ('загальний розв'язок')
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==(2-y)*tan(x)
solution=desolve(de,y)
solution.show()
#розв'язок задачі Коші
show ('розв'язок задачі Коші')
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==(2-y)*tan(x)
solution=desolve(de,y,ics=[0,-1])
solution.show()
#поле напрямків
show ('поле напрямків')
x,y=var('x,y')
f(x,y)=(2-y)*tan(x)
p=plot_slope_field(f,(x,-5,5),(y,-5,5), headaxislength=3,
headlength=3, axes_labels=['$x$','$y(x)$'])
#графік розв'язку задачі Коші
p+=desolve_rk4(f, y, ics=[0,-1], ivar=x, output='plot',
end_points=[-1,5], thickness=2)
# set the size of the plot window
p.show(xmin=-1, xmax=5, ymin=-5, ymax=5)
```

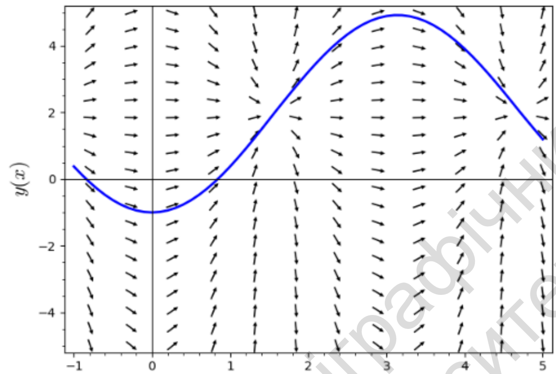
загальний розв'язок

$$\frac{C + \frac{2}{\cos(x)}}{\sec(x)}$$

розв'язок задачі Коші

$$-\frac{2(2\cos(x) - 1)}{\cos(x)\sec(x)}$$

поле напрямків



Зауваження. Як бачимо за результатами роботи програми (див. останній скрін), вигляд отриманого загального розв'язку й розв'язку задачі Коші відрізняється від попередньо отриманих "вручну". Однак вони просто зводяться один до одного.

5. Розв'язати рівняння $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$

Зобразимо рівняння як $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}.$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dy}{3y^{-2/2}} = dx.$$

Обчислюємо інтеграли:

$$\int \frac{dy}{3y^{-2/3}} = \int dx + c \Rightarrow y^{1/3} = x + c \Rightarrow y = (x+c)^3.$$

Для визначення сталої c підставляємо початкові умови $x_0 = 2, \quad y_0 = 0.$ Отримуємо

$$0 = 2 + c \Rightarrow c = -2 \Rightarrow y = (x-2)^3.$$

Після розділення змінних отримали особливий розв'язок $y = 0$.

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь, що зводяться до рівнянь із відокремлюваними змінними.

1. Розв'язати рівняння $y' - y = 2x - 3$.

Зобразимо рівняння як $\dfrac{dy}{dx} = y + 2x - 3$.

Позначимо $y + 2x - 3 = z$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} + 2 = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2.$$

Підставивши останній вираз у рівняння, отримаємо

$$\frac{dz}{dx} - 2 = z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z + 2.$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dz}{z+2} = dx.$$

Обчислюємо інтеграли:

$$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx + \ln c \Rightarrow \ln|z+2| = x + \ln c \Rightarrow z + 2 = ce^x.$$

Повернувшись до вихідних змінних, остаточно отримаємо

$$y + 2x - 1 = ce^x \Rightarrow y = ce^x - 2x + 1.$$

2. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = 1, \quad M(0,1)$$

(показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків і розв'язок задачі Коші.

Розв'язання. Наше диференціальне рівняння є рівнянням типу

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by) = f(x + 2y) = \frac{1}{x + 2y}.$$

Його можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Зробимо заміну $z = ax + by = x + 2y$. Тоді

$$dz = adx + bdy = x + 2y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Зробивши підстановку, отримаємо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}-1\right)=\frac{1}{z},\ \ \frac{dz}{dx}=\frac{2}{z}+1.$$

Наше диференціальне рівняння є рівнянням із відокремлюваними змінними. Знайдемо загальний розв'язок:

$$\frac{dz}{\left(\frac{2}{z}+1\right)}=dx\ ,$$

або

$$\frac{zdz}{(2+z)}=dx.$$

Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\int\frac{\left((z+2)-2\right)dz}{(2+z)}=\int dx,$$

$$\int dz-\int\frac{2dz}{2+z}-\int dx=C,$$

$$z-2\ln(z+2)-x=\ln C.$$

Зробивши обернену заміну, отримаємо

$$x+2y-2\ln(x+2y+2)-x=\ln C,$$

$$y-\ln(x+2y+2)=\ln C,$$

$$\ln e^{y}-\ln(x+2y+2)=\ln C,$$

$$\frac{e^{y}}{x+2y+2}=C.$$

Загальний розв'язок

$$Ce^{y}-2(y+1)+x=0,$$

де C – довільна стала.

Підставимо умову Коші $y(0)=-1$ та знайдемо коефіцієнт C:

$$Ce^{-1}-2(-1+1)+0=0.$$

Отже, $C=0.$ Тоді остаточний розв'язок задачі Коші

$$x+2y+2=0.$$

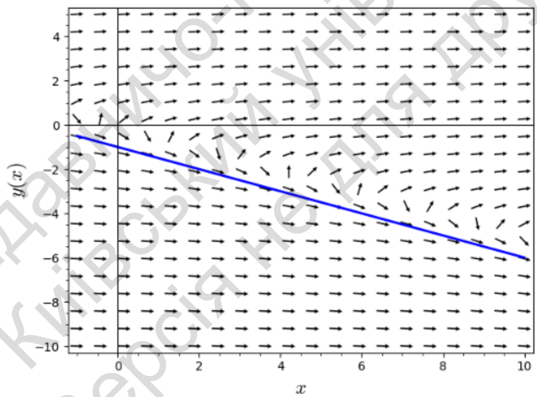
Розв'яжемо цей самий приклад за допомогою пакету Sage і додатково побудуємо поле напрямків.

Код:

```
#загальний розв'язок
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==1/(x+2*y)
solution=desolve(de,y)
solution.show()
#розв'язок задачі Коші
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==1/(x+2*y)
solution=desolve(de,y,ics=[0,-1])
solution.show()
#поле напрямків
x,y=var('x,y')
f(x,y)=1/(x+2*y)
p=plot_slope_field(f,(x,-1,10),(y,-10,5), headaxislength=3,
headlength=3, axes_labels=['$x$','$y(x)$'])
#графік розв'язку Коші
p+=desolve_rk4(f, y, ics=[0,-1], ivar=x, output='plot',
end_points=[-1,10], thickness=2)
 # set the size of the plot window
p.show(xmin=-1, xmax=10, ymin=-10, ymax=5)
```

$$-(x + 2\,y(x) + 2)e^{(-y(x))} = C$$

$$-(x + 2\,y(x) + 2)e^{(-y(x))} = 0$$



Зауваження. Як бачимо за результатами роботи програми (див. останній скрін), вигляд розв'язку задачі Коші відрізняється від попередньо отриманого "вручну". Однак вони просто зводяться один до одного.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

1.1. $xy' + y = y^2$;

1.2. $2x^2 yy' + y^2 = 2$;

1.3. $y' - xy^2 = 2xy$.

2. Розв'язати рівняння, що зводяться до рівнянь із відокремлюваними змінними:

2.1. $(x+2y)y' = 1, \quad y(0) = -1$;

2.2. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

1.2. Однорідні рівняння

Нехай рівняння має вигляд

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Якщо функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні однакового степеня, то рівняння називається *однорідним*. Нехай функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні зі степенем k, тобто

$$M(tx,ty) = t^k M(x,y), \qquad N(tx,ty) = t^k N(x,y).$$

Робимо заміну $y = ux,\ dy = udx + xdu$.

Після підстановки заміни в рівняння одержуємо

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)(udx + xdu) = 0,$$

або

$$x^k M(1,u)dx + x^k N(1,u)(udx + xdu) = 0.$$

Скоротивши на x^k і розкривши дужки, запишемо

$$M(1,u)dx + uN(1,u)dx + xN(1,u)du = 0.$$

Згрупувавши доданки, одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\left[M(1,u) + uN(1,u)\right]dx + xN(1,u)du = 0,$$

або

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du = C.$$

Узявши інтеграли та замінивши $u = y/x$, отримаємо загальний інтеграл

$$\Phi(x, y/x) = C.$$

1.2.1. Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Розглянемо два випадки:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Тут система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок (x_0, y_0).

Зробимо заміну $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$ та отримаємо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1(x_1 + x_0) + b_1(y_1 + y_0) + c_1}{a_2(x_1 + x_0) + b_2(y_1 + y_0) + c_2}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2x_1 + b_2y_1 + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}\right).$$

Оскільки (x_0, y_0) – розв'язок системи алгебраїчних рівнянь, то диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1}\right)$$

і вже є однорідним нульового степеня.

Робимо заміну $y_1 = ux_1$, $dy_1 = udx_1 + x_1du$.

Підставляємо заміну в рівняння

$$u + x_1\frac{du}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1ux_1}{a_2x_1 + b_2ux_1}\right).$$

Отримаємо

$$x_1 du + \left[u - f\left(\frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u} \right) \right] dx_1 = 0.$$

Розділивши змінні, матимемо

$$\int \frac{du}{u - f\left(\frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u} \right)} + \ln x_1 = C.$$

Нехай загальний інтеграл диференціального рівняння $\Phi(u, x_1) = C.$ Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, x - x_0 \right) = C.$$

2. Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$ тобто коефіцієнти рядків лінійно залежні та $a_1 x + b_1 y = \alpha(a_2 x + b_2 y).$

Робимо заміну $a_2 x + b_2 y = z.$ Звідси $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{b_2}\left(\dfrac{dz}{dx} - a_2 \right).$

Підставивши праву частину останнього виразу в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2 \right) = f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2} \right),$$

або

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2} \right).$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{dz}{a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha + c_1}{z + c_2} \right)} - x = C.$$

Загальний інтеграл $\Phi(a_2 x + b_2 y, x) = C.$

1.2.2. Узагальнені однорідні рівняння

Якщо заміною $y = z^{\alpha}$ рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

зводиться до рівняння

$$P\left(x, z^{\alpha}\right)dx + Q\left(x, z^{\alpha}\right)\alpha z^{\alpha-1}dz = 0,$$

яке за рахунок вибору параметра α можна зробити однорідним, то вихідне рівняння називається *узагальненим однорідним*.

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь, що належать до розглянутих у цьому підрозділі типів.

1. Розв'язати рівняння

$$x\frac{dy}{dx} = y - xe^{y/x}$$

(показати загальний розв'язок), побудувати поле напрямків.

Розв'язання "вручну". Це рівняння є однорідним диференціальним.

Робимо заміну $z = \dfrac{y}{x}$, $zx = y$.

Диференціюємо її:

$$zdx + xdz = dy, \quad zx = y.$$

Переписуємо наше рівняння і робимо підстановки:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - e^{y/x}, \quad \frac{zdx + xdz}{dx} = z - e^{z}.$$

Останнє диференціальне рівняння є рівнянням із відокремлюваними змінними. Знайдемо його загальний розв'язок:

$$zdx + xdz = zdx - e^{z}dx, \quad xdz = -e^{z}dx, \quad \frac{dz}{e^{z}} = -\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{dz}{e^{z}} + \int\frac{dx}{x} = \ln C, \quad e^{-z} + \ln|x| = \ln C.$$

Робимо обернену підстановку $e^{-y/x} = \ln|Cx|$, тобто

$$-y/x = \ln|\ln|Cx||.$$

Загальний розв'язок

$$y = -x(\ln\ln(Cx)),$$

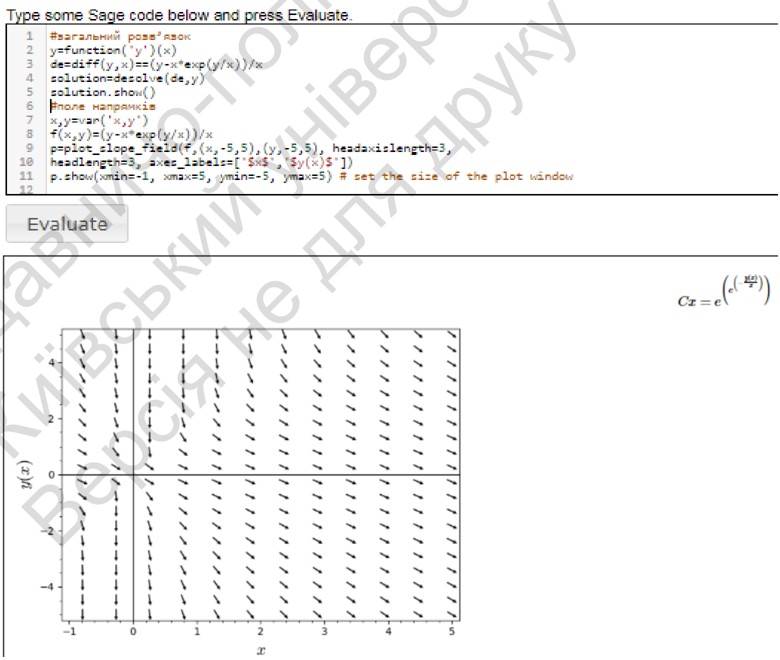
де C – довільна стала.

Розв'язання за допомогою пакету Sage.

Код:

```
#загальний розв'язок
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==(y-x*exp(y/x))/x
solution=desolve(de,y)
solution.show()
#поле напрямків
x,y=var('x,y')
f(x,y)=(y-x*exp(y/x))/x
p=plot_slope_field(f,(x,-5,5),(y,-5,5), headaxislength=3,
headlength=3, axes_labels=['$x$','$y(x)$'])
# set the size of the plot window
p.show(xmin=-1, xmax=5, ymin=-5, ymax=5)
```

SageMathCell



2. Розв'язати рівняння $\left(x+2y\right)dx - xdy = 0.$

Рівняння є однорідним першого порядку.
Робимо заміну $y = ux,\ \ dy = udx + xdu.$
Підставивши її в рівняння, отримуємо

$$\left(x+2ux\right)dx - x\left(udx+xdu\right) = 0.$$

Скорочуємо на x і маємо

$$\left(1+2u\right)dx - \left(udx+xdu\right) = 0.$$

Перегрупувавши доданки, запишемо

$$\left(1+2u-u\right)dx - xdu = 0 \Rightarrow \left(1+u\right)dx = xdu.$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1+u}.$$

Інтегруємо:

$$\ln|x| = \ln|1+u| - \ln c.$$

Звідси остаточно маємо

$$cx = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow x + y = cx^2.$$

3. Розв'язати рівняння $\left(x-y\right)dx + \left(x+y\right)dy = 0.$

Робимо заміну $y = ux,\ \ dy = udx + xdu.$
Підставивши її в рівняння, отримуємо

$$\left(x-ux\right)dx + \left(x+ux\right)\left(udx+xdu\right) = 0.$$

Скорочуємо на x і маємо

$$\left(1-u\right)dx + \left(1+u\right)\left(udx+xdu\right) = 0.$$

Перегрупувавши доданки, запишемо

$$\left(1-u+\left(1+u\right)u\right)dx + \left(1+u\right)xdu = 0 \Rightarrow \left(1+u^2\right)dx + \left(1+u\right)xdu = 0.$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dx}{x} = \frac{\left(1+u\right)du}{1+u^2}.$$

Інтегруємо:

$$\ln|x| = \int \frac{1+u}{1+u^2}du + c \Rightarrow \ln|x| = \int \frac{du}{1+u^2} + \int \frac{udu}{1+u^2} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+u^2\right)}{1+u^2} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| + c.$$

Повертаємось до вихідних змінних:

$$\ln|x| = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right| - \frac{1}{2}c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \ln|x| - \frac{1}{2}c.$$

Звідси остаточно маємо

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln\left(x^2+y^2\right) = c.$$

4. Розв'язати рівняння $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0.$

Робимо заміну $y = ux,\ \ dy = udx + xdu.$

Підставивши її в рівняння, отримуємо

$$\left(u^2x^2 - 2ux^2\right)dx + x^2\left(udx + xdu\right) = 0.$$

Скорочуємо все на x^2 і маємо

$$\left(u^2 - 2u\right)dx + \left(udx + xdu\right) = 0.$$

Перегрупувавши доданки, запишемо

$$\left(u^2 - 2u + u\right)dx + xdu = 0 \Rightarrow \left(u^2 - u\right)dx + xdu = 0.$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u^2 - u} = 0.$$

Інтегруємо:

$$\ln|x| + \int \frac{1}{u(u-1)}du = c \Rightarrow \ln|x| + \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \ln|u-1| - \ln|u| = \ln c \Rightarrow x\frac{u-1}{u} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{y-x}{y} = c \Rightarrow x\left(y-x\right) = cy.$$

При діленні отримали особливий розв'язок $y = 0.$

Завдання для самостійної роботи

3. Розв'язати диференціальні рівняння:

3.1. $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$;

3.2. $y^2 + x^2y' = xyy'$;

3.3. $\left(x^2 + y^2\right)y' = 2xy$;

3.4. $xy' - y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;

3.5. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;

3.6. $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$;

3.7. $xy' = y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$;

3.8. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$;

3.9. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;

3.10. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$;

3.11. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$;

3.12. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$;

3.13. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$;

3.14. $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$;

3.15. $x^3(y' - x) = y^2$;

3.16. $2x^2y' = y^3 + xy$;

3.17. $2xdy = \left(x^2y^4 + 1\right)ydx$;

3.18. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$.

1.3. Лінійні рівняння першого порядку

Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається *лінійним диференціальним рівнянням*. Воно має загальний вигляд

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x).$$

Якщо $q(x)\equiv 0,$ тобто

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0,$$

то рівняння називається *однорідним*. Однорідне рівняння є рівнянням із відокремлюваними змінними і розв'язується таким чином:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx,\ \int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+\ln C,\ \ln y=-\int p(x)dx+\ln C.$$

Звідси отримуємо $y=Ce^{-\int p(x)dx}.$

Розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих (методом невизначених множників Лагранжа). Він полягає в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукають у такому самому вигляді, як і розв'язок однорідного, але C вважають невідомою функцією від x, тобто

$$C=C(x)\ \text{і}\ y=C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x).$$

Звідси

$$dC(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Проінтегрувавши останній вираз, одержимо

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right].$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0) = y_0$, то розв'язок можна записати у формі Коші:

$$y(x, x_0, y_0) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{t}^{x} p(\xi)d\xi} q(t)dt.$$

Приклад. Шахтні хвости [26]. У будь-якій видобувній операції хвостосховище – це те, що залишається після видобутку всього цінного. Наприклад, при видобутку твердих порід руду часто подрібнюють, а потім переробляють на хімічні речовини для видобутку певних корисних копалин. При видобутку м'яких порід, таких як вугілля або нафта з дьогтьового піску, можуть використовувати розчинники або воду для отримання будь-якого цінного продукту. Часто матеріал, який залишається після видобутку корисних копалин, вугілля чи нафти становить величезні екологічні виклики. Існують різні способи перероблення хвостосховищ, але один зі способів – зберігати їх у водоймі, особливо якщо у процесі видобутку використовується вода. Цей метод дозволяє будь-яким частинкам, які зависли у воді, осісти на дно ставка. Потім воду можна очистити та переробити.

Припустимо, що у нас є видобуток золота і ми зберігаємо своє хвостосховище у ставку, що має початковий об'єм 20000 $м^3$. Коли ми починаємо роботу, хвостосховище-ставок наповнене чистою водою. У ставок впадає струмок, а також вода викачується зі ставка. При переробленні золотої руди використовують хімічні речовини. Ці хімікати, наприклад ціанід натрію, є дуже отруйними й небезпечними для навколишнього середовища, тому перед випусканням воду необхідно очистити. Припустимо, що 1000 $м^3$ на добу надходить у ставок із зовнішнього потоку і з нього відкачується 1000 $м^3$ переробленої води щодня. Отже, у ставку зберігається постійний рівень води.

Нехай у момент часу $t = 0$ вода з потоку забруднюється хімічними речовинами, наприклад із розрахунку 5 кг хімікатів на 1000 $м^3$. Ми будемо припускати, що вода у нашому хвостосховищі добре перемішана і концентрація хімічних речовин у ній рівномірна. Крім того, будь-які тверді частинки, що закачуються у ставок із зовнішнього потоку, осідають на дно зі швидкістю 50 $м^3$ на день. Таким чином, об'єм нашого хвостосховища щодня зменшується на 50 м^3, отже, хвостосховище заповниться після 400 днів роботи. Будемо вважати, що тверді частинки та хімічні речовини включені до тих 1000 м^3, які надходять у ставок із зовнішнього потоку щодня.

Ми хочемо знайти диференціальне рівняння, яке моделюватиме кількість хімічних речовин у хвостосховищі в будь-який конкретний момент часу. Нехай $x(t)$ – кількість хімічних речовин у ставку в момент часу t. Тоді dx/dt – це різниця між швидкістю надходження хімічних речовин у ставок і швидкістю виходу хімікатів із водойми: $\frac{dx}{dt} = \mathrm{ratein} - \mathrm{rateout}$.

Оскільки вода тече у ставок із потоку зі швидкістю 1000 м^3 на день, то швидкість потрапляння хімікатів у водойму становить 5 кг на день. З іншого боку, швидкість виходу хімікатів з водойми буде залежати від кількості наявних хімікатів у ній у момент t. Об'єм ставка зменшується через осад, а із часом t становитиме $V(t) = 2000 - 50t$. Таким чином, концентрація хімічних речовин у ставку в момент часу t дорівнює $x(t)/(2000 - 50t)$, а швидкість, з якою хімікати витікають із водойми на переробку, становить

$$1000\frac{x(t)}{2000 - 50t} = \frac{20x(t)}{400 - t}.$$

Отже, запишемо диференціальне рівняння, яке моделює кількість хімікатів у хвостосховищі у момент часу t:

$$\frac{dx}{dt} = 5 - \frac{20x(t)}{400 - t}.$$

Звичайно, нам доведеться припинити видобуток корисних копалин, як тільки ставок заповниться, оскільки це буде тільки вода у водоймі, якщо $V(t) = 2000 - 50t \geq 0$, тобто коли $0 < t < 400$.

Зауважимо, що отримане диференціальне рівняння є неавтономним, тобто не належить до класу рівнянь із відокремлюваними змінними. Нам доведеться використати інший підхід, щоб знайти його розв'язок. Спочатку ми перепишемо рівняння у формі

$$\frac{dx}{dt} + \frac{20x(t)}{400 - t} = 5.$$

Якщо помножимо обидві частини останнього рівняння на $(400-t)^{-20}$, то отримаємо

$$(400-t)^{-20}\frac{dx}{dt}+20(400-t)^{-21}x(t)=5(400-t)^{-20}.$$

Тепер зробимо найважливіше зауваження, що у лівій частині останнього рівняння фактично записано диференціал від добутку функцій

$$(400-t)^{-20}\frac{dx}{dt}+20(400-t)^{-21}x(t)=\frac{d}{dt}((400-t)^{-20}x(t)).$$

Звідси маємо

$$\frac{d}{dt}((400-t)^{-20}x(t))=5(400-t)^{-20}.$$

Проінтегрувавши обидві частини останнього рівняння, отримаємо

$$(400-t)^{-20}x(t)=5\int(400-t)^{-20}dt=5\frac{(400-t)^{-19}}{19}+C.$$

Отже,

$$x(t)=\frac{5}{19}(400-t)+C(400-t)^{20}.$$

Зважаючи на те, що в початковий час $x(t)=0$, легко з останнього виразу обчислити конкретне значення константи $C=-(5/19)400^{-19}$. Остаточний розв'язок нашої початкової задачі

$$x(t)=\frac{5}{19}(400-t)\left[1-\left(\frac{400-t}{400}\right)^{19}\right].$$

Графік розв'язку нашого диференціального рівняння (рис. 1.3.1) ілюструє ситуацію із хімічними відходами у хвостосховищі. Спочатку у водоймі немає хімікатів, але $x(t)$ швидко зростає. Однак кількість хімікатів зменшується, коли ставок починає заповнюватися осадом. Зрештою там знову немає хімікатів при $t=400$.

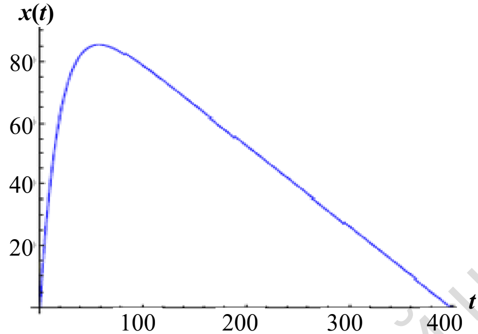


Рис. 1.3.1

1.3.1. Рівняння Бернуллі

Рівняння $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^m,\ \ m\neq 1$ називається *рівнянням Бернуллі*.

Розділимо рівняння на y^m і одержимо

$$y^{-m}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-m}=q(x).$$

Зробимо заміну $y^{1-m}=z,\ (1-m)y^{-m}\dfrac{dy}{dx}=dz.$

Підставивши обидві заміни в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x).$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок

$$z=e^{-(1-m)\int p(x)dx}\left[(1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx+C\right].$$

1.3.2. Рівняння Ріккаті

Рівняння $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y+r(x)y^2=q(x)$ називається *рівнянням Ріккаті*.

У загальному випадку рівняння Ріккаті не інтегрується. Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Ріккаті, що інтегруються у квадратурах. Розглянемо один із них.

Нехай відомий один частинний розв'язок $y = y_1(x)$. Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} + p(x)\left[y_1(x) + z\right] + r(x)\left[y_1(x) + z\right]^2 = q(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ – частинний розв'язок, то

$$\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 + r(x){y_1}^2 \equiv q(x).$$

Розкривши дужки і використовуючи вказану тотожність, одержимо

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z + 2r(x)y_1(x)z \quad + r(x)z^2 = 0.$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) + 2r(x)y_1(x)\right]z = -r(x)z^2.$$

Отримали рівняння Бернуллі з $m = 2$.

Рівняння Ріккаті, незважаючи на свою складність для випадку аналітичного розв'язання, насправді має дуже широкий спектр застосування. Особливо варто зазначити необхідність розв'язання матричних рівнянь Ріккаті в теорії керування для задач побудови оптимальних регуляторів [12].

Наведемо кілька прикладів розв'язання розглянутих вище типів рівнянь.

1. Розв'язати рівняння $xy' - 2y = 2x^4$.

Перепишемо рівняння у стандартній формі лінійного неоднорідного рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

Використовуючи формулу Коші, отримаємо

$$y = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[\int e^{-\int \frac{2}{x}dx} 2x^3 dx + c\right] = e^{2\ln|x|}\left[\int e^{-2\ln|x|} 2x^3 dx + c\right] =$$

$$= x^2\left[\int \frac{1}{x^2} 2x^3 dx + c\right] = x^2\left[x^2 + c\right].$$

Загальним розв'язком буде

$$y = x^2\left(x^2 + c\right).$$

2. Розв'язати рівняння $(2x+1)y' = 4x + 2y.$

Перепишемо рівняння у стандартній формі

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}.$$

Використовуючи формулу Коші, отримаємо

$$y = e^{\int\frac{2}{2x+1}dx}\left[\int e^{-\int\frac{2}{2x+1}dx}\ \frac{4x}{2x+1}dx + c\right] =$$

$$= e^{\ln|2x+1|}\left[\int e^{-\ln|2x+1|}\ \frac{4x}{2x+1}dx + c\right] = (2x+1)\left[\int\frac{4x}{(2x+1)^2}dx + c\right] =$$

$$= (2x+1)\left[\int\frac{2(2x+1)-2}{(2x+1)^2}dx + c\right] =$$

$$(2x+1)\left[\int\frac{2dx}{2x+1}dx - \int\frac{2dx}{(2x+1)^2} + c\right] =$$

$$= (2x+1)\left[\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + c\right] = (2x+1)\left[\ln|2x+1| + c\right] + 1.$$

Загальним розв'язком буде

$$y = (2x+1)\left[\ln|2x+1| + c\right] + 1.$$

3. Розв'язати рівняння $y' + y\operatorname{tg}x = \sec x.$

Використовуючи формулу Коші, отримаємо

$$y = e^{-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}\left[\int e^{\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}\ \frac{1}{\cos x}dx + c\right] =$$

$$= e^{\ln|\cos x|}\left[\int e^{-\ln|\cos x|}\ \frac{1}{\cos x}dx + c\right] = \cos x\left[\int\frac{1}{\cos^2 x}dx + c\right] =$$

$$= \cos x\left[\operatorname{tg}x + c\right].$$

Загальним розв'язком буде

$$y = c\cos x + \sin x.$$

4. Розв'язати рівняння

$$(x+y^2)dy = ydx,\ \ M(1,1)$$

(показати загальний розв'язок), побудувати поле напрямків і розв'язок задачі Коші.

Розв'язання методом варіації довільної сталої:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x+y^2)}.$$

Це рівняння нелінійне відносно шуканої функції $y(x)$. Перепишемо його як

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^2}{y} = \frac{x}{y} + y.$$

Однак у це рівняння змінні *x* та *dx* уже входять лінійно, тому вважатимемо *x* шуканою функцією, а *y* – незалежною змінною.

Останнє диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Для знаходження його розв'язку застосуємо метод варіації довільної сталої. Спочатку знайдемо розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{y}dy = \ln C,$$

$$\ln|x| - \ln||y = \ln C,$$

$$x/y = C.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$x = Cy,$$

де C – довільна стала.

Згідно з методом варіації довільної сталої будемо вважати, що $C = C(y)$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $x = C(y)y$. Підставимо його у рівняння і отримаємо

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dC(y)}{dy} y + C(y),$$

$$\frac{dC(y)}{dy} y + C(y) = \frac{C(y)y}{y} + y,$$

$$\frac{dC(y)}{dy} = 1, \quad C(y) = y + C,$$

де C – довільна стала.

Отже, маємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$x = y^2 + Cy,$$

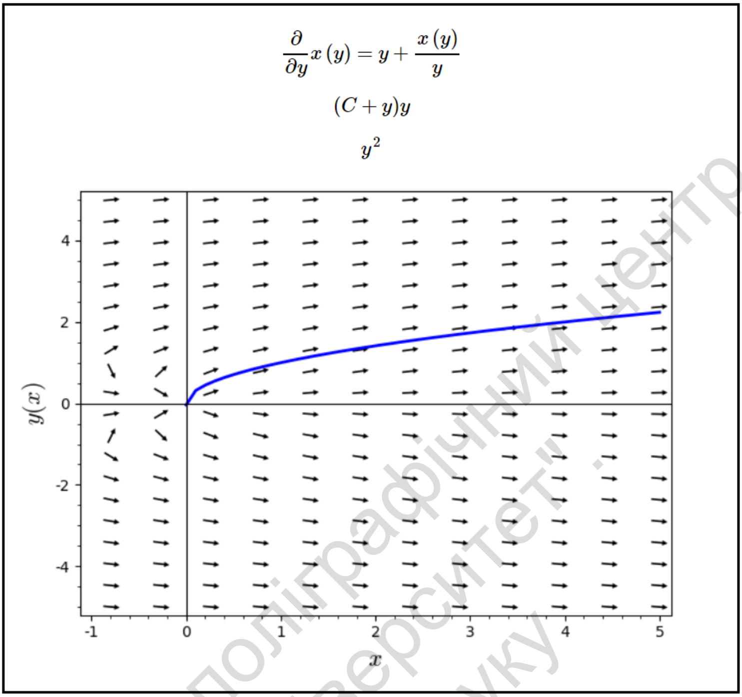
а також особливий розв'язок $y = 0$, який отримали шляхом ділення при переході від $y = y(x)$ до $x = x(y)$.

Підставимо в отриманий загальний розв'язок умову Коші $y(1) = 1$ та знайдемо коефіцієнт C: $1 = 1 + C$. Отже, $C = 0$. Тоді розв'язок початкової задачі Коші $x = y^2$.

Розв'язання за допомогою пакету Sage.

Код:

```
# загальний розв'язок
y=var('y')
x=function('x')(y)
de=diff(x,y)==x/y+y
de.show()
solution=desolve(de,x)
solution.show()
# розв'язок задачі Коші
solution=desolve(de,x,ics=[1,1])
solution.show()
# поле напрямків
x,y=var('x,y')
f(x,y)=y/(x+y*y)
p=plot_slope_field(f,(x,-5,5),(y,-5,5), headaxislength=3,
headlength=3, axes_labels=['$x$','$y(x)$'])
#графік розв'язку Коші
p+=desolve_rk4(f, y, ics=[1,1],
ivar=x, output='plot', end_points=[0,5],
thickness=2) p.show(xmin=-1, xmax=5, ymin=-5, ymax=5)
```



Завдання для самостійної роботи

4. Розв'язати диференціальні рівняння:

4.1. $\left(xy + e^x\right)dx - xdy = 0;$

4.2. $x^2 y' + xy + 1 = 0;$

4.3. $y = x\left(y' - x\cos x\right);$

4.4. $(1-2xy)\,y' = y\left(y-1\right);$

4.5. $y' + 2y = y^2 e^x;$

4.6. $(x+1)\left(y' + y^2\right) = -y;$

4.7. $xy^2 y' = x^2 + y^3;$

4.8. $xydy = \left(y^2 + x\right)dx;$

4.9. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y;$

4.10. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0;$

4.11. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1};$

4.12. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y;$

4.13. $\left(2x^2 y \ln y - x\right)y' = y;$

4.14. $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4;$

4.15. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0;$

4.16. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2;$

4.17. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2;$

4.18. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$

1.4. Рівняння в повних диференціалах

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

і отже, рівняння набуває вигляду $du(x,y) = 0,$ то рівняння називається *рівнянням у повних диференціалах*. Звідси вираз

$$u(x,y) = C$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння.

Критерієм того, що рівняння є рівнянням у повних диференціалах, тобто необхідною і достатньою умовою, є виконання рівності

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Нехай маємо рівняння в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x,y),\ \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y).$$

Звідси

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – невідома функція. Для її визначення продиференціюємо співвідношення за y і прирівняємо отриманий результат до $N(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x,y).$$

Звідси

$$\varphi(y)=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy.$$

Остаточно загальний інтеграл

$$\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy=C.$$

Як ми пам'ятаємо з математичного аналізу, якщо відомий повний диференціал $du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$, то $u(x,y)$ можна визначити, узявши криволінійний інтеграл за довільним контуром, що з'єднує фіксовану точку (x_0,y_0) і точку зі змінними координатами (x,y). Зручніше брати криву, що складається із двох відрізків прямих. Тоді криволінійний інтеграл розпадається на два прості інтеграли:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy=$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}M(x,y_0)dx+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)}N(x,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy.$$

Звідси одержуємо розв'язок задачі Коші

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y_0)dy=0.$$

Інтегрувальний множник

У деяких випадках рівняння
$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$
не є рівнянням у повних диференціалах, але існує функція $\mu=\mu(x,y)$ така, що рівняння
$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$
уже буде рівнянням у повних диференціалах. Необхідною та достатньою умовою цього є рівність
$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y),$$
або
$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Таким чином, замість звичайного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ одержимо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно функції $\mu(x,y)$. Задача його інтегрування значно спрощується, якщо відомо, у якому вигляді шукати функцію $\mu(x,y)$, наприклад $\mu=\mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ – відома функція. У такому випадку одержуємо
$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y},\ \frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

Після підстановки одержаних виразів у рівняння матимемо
$$\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x},$$
або
$$\frac{d\mu}{d\omega}\left[N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]=\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right].$$

Розділяємо змінні:
$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Проінтегрувавши останній вираз і поклавши сталу інтегрування одиницею, одержимо

$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega \right\}.$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нехай $\omega(x,y) = x$. Тоді $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, $d\omega = dx$, а

$$\mu(x) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} dx \right\}.$$

2. Нехай $\omega(x,y) = y$. Тоді $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 1$, $d\omega = dy$, а

$$\mu(y) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy \right\}.$$

3. Нехай $\omega(x,y) = x^2 \pm y^2$. Тоді $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = \pm 2y$, $d\omega = d(x^2 \pm y^2)$, а

$$\mu(x,y) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN \pm 2yM} d(x^2 \pm y^2) \right\}.$$

4. Нехай $\omega(x,y) = xy$. Тоді $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = x$, $d\omega = d(xy)$, а

$$\mu(x,y) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} d(xy) \right\}.$$

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь, розглянутих у цьому підрозділі.

1. Розв'язати рівняння $2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0.$

Маємо $M(x,y)=2xy,\quad N(x,y)=x^2-y^2$. Перевіримо, чи є наше рівняння рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x,\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2x.$$

Отже, рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Маємо $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2xy \Rightarrow U(x,y)=x^2y+\varphi(y),$

де $\varphi(y)$ – невідома функція, що залежить від аргументу y.

Продиференціюємо цей вираз за змінною y і отримаємо

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=x^2+\frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Прирівняємо отриманий вираз до функції $N(x,y)$:

$$x^2+\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=x^2-y^2.$$

Звідси $\dfrac{d\varphi(y)}{dy}=-y^2.$

Проінтегрувавши останній вираз, знайдемо функцію $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=-\frac{y^3}{3}.$$

Функція $U(x,y)$ набуває вигляду $U(x,y)=x^2y-\dfrac{y^3}{3}$, а загальний інтеграл рівняння

$$x^2y-\frac{y^3}{3}=c.$$

2. Розв'язати рівняння $\left(2-9xy^2\right)xdx+\left(4y^2-6x^3\right)ydy=0.$

Маємо $M(x,y)=2x-9x^2y^2$, $N(x,y)=4y^3-6x^3y$. Перевіримо, чи є рівняння рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-18x^2y,\ \ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-18x^2y.$$

Отже, рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Маємо $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2x-9x^2y^2 \Rightarrow U(x,y)=x^2-3x^3y^2+\varphi(y)$,

де $\varphi(y)$ – невідома функція, що залежить від аргументу y.

Продиференціюємо цей вираз за змінною y і отримаємо

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-6x^3y+\frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Прирівняємо отриманий вираз до функції $N(x,y)$:

$$-6x^3y+\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=4y^3-6x^3y.$$

Звідси $\dfrac{d\varphi(y)}{dy}=4y^3$.

Проінтегрувавши останній вираз, знайдемо функцію $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=y^4.$$

Функція $U(x,y)$ набуває вигляду $U(x,y)=x^2-3x^3y^2+y^4$, а загальний інтеграл рівняння

$$x^2-3x^3y^2+y^4=c.$$

3. Розв'язати рівняння $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0$.

Маємо $M(x,y)=e^{-y}$, $N(x,y)=-2y^3-xe^{-y}$. Перевіримо, чи є рівняння рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-e^{-y},\ \ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-e^{-y}.$$

Отже, рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Маємо $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}=e^{-y} \Rightarrow U(x,y)=xe^{-y}+\varphi(y)$,

де $\varphi(y)$ – невідома функція, що залежить від аргументу y.

Продиференціюємо останній вираз за змінною y і отримаємо

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -xe^{-y} + \frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Прирівняємо отриманий вираз до функції $N(x,y)$:

$$-xe^{-y} + \frac{d\varphi(x,y)}{dy} = -2y - xe^{-y}.$$

Звідси $\dfrac{d\varphi(y)}{dy} = -2y.$

Проінтегрувавши цей вираз, знайдемо функцію $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = -y^2.$$

Функція $U(x,y)$ набуває вигляду $U(x,y) = xe^{-y} - y^2$, а загальний інтеграл рівняння

$$xe^{-y} - y^2 = c.$$

4. Розв'язати рівняння $\dfrac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0.$

Маємо $M(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $N(x,y) = y^3 + \ln x.$ Перевіримо, чи є рівняння рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

Отже, рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Маємо $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow U(x,y) = y\ln x + \varphi(y),$

де $\varphi(y)$ – невідома функція, що залежить від аргументу y.

Продиференціюємо цей вираз за змінною y і отримаємо

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \ln x + \frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Прирівняємо отриманий вираз до функції $N(x,y)$:

$$\ln x + \frac{d\varphi(x,y)}{dy} = y^3 + \ln x.$$

Звідси $\dfrac{d\varphi(y)}{dy} = y^3.$

Проінтегрувавши останній вираз, знайдемо функцію $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \frac{1}{4}y^4.$$

Функція $U(x, y)$ набуває вигляду $U(x, y) = y\ln x + \frac{1}{4}y^4$, а загальний інтеграл рівняння

$$y\ln x + \frac{1}{4}y^4 = c.$$

Завдання для самостійної роботи

5. Розв'язати диференціальні рівняння:

5.1. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0;$

5.2. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0;$

5.3. $\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx - 2y\cos^2 xdy = 0;$

5.4. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy.$

1.5. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$F(x, y, y') = 0.$$

Частинні випадки рівнянь, що інтегруються у квадратурах

1. *Рівняння, що містять лише похідну.* Розглянемо рівняння

$$F(y')=0.$$

Нехай алгебраїчне рівняння $F(k)=0$ має хоча б один дійсний корінь $k=k_0$. Тоді, інтегруючи $y'=k_0$, одержимо $y=k_0x+C$. Звідси $k_0=\dfrac{y-C}{x}$ і вираз $F\left(\dfrac{y-c}{x}\right)=0$ містить усі розв'язки вихідного диференціального рівняння, тобто є загальним інтегралом.

2. *Рівняння, що містять похідну й аргумент невідомої функції.* Розглянемо рівняння

$$F(x,y')=0.$$

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y'=\psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $dy=y'dx$, одержимо $dy=\psi(t)\varphi'(t)dx$. Проінтегрувавши останній вираз, запишемо $y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C$. Отримаємо загальний розв'язок у параметричній формі

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C. \end{cases}$$

3. *Рівняння, що містять невідому функцію та її похідну.* Розглянемо рівняння

$$F(y,y')=0.$$

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} y=\varphi(t), \\ y'=\psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx$, отримаємо $\varphi'(t)dt = \psi(t)dx$ і $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$. Проінтегрувавши останній вираз, запишемо $x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C$.

Загальний розв'язок у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

4. *Рівняння Лагранжа.* Рівняння $y = \varphi(y')x + \psi(y')$ називається *рівнянням Лагранжа*.

Уведемо параметр $y' = \frac{dy}{dx} = p$ і отримаємо $y = \varphi(p)x + \psi(p)$.

Продиференціювавши останній вираз, запишемо

$$dy = \varphi'(p)xdp + \varphi(p)dx + \psi'(p)dp.$$

Замінивши $dy = pdx$, одержимо

$$pdx = \varphi'(p)xdp + \varphi(p)dx + \psi'(p)dp.$$

Звідси $\left[p - \varphi(p)\right]dx - \varphi'(p)xdp = \psi'(p)dp$.

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Його розв'язок

$$x = e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[\int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp} dp + C\right] = \Psi(p, C).$$

Остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \Psi(p, C) \\ y = \varphi(p)\Psi(p, C) + \psi(p). \end{cases}$$

5. *Рівняння Клеро.* Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$, є *рівняння Клеро*

$$y = y'x + \psi(y').$$

Поклавши $y' = \frac{dy}{dx} = p,$ отримаємо $y = px + \psi(p).$

Продиференціюємо $dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp.$

Оскільки $dy = pdx,$ то $pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp.$

Скоротивши останній вираз, одержимо $[x + \psi'(p)]dp = 0.$

Можливі два випадки:

1) $x + \psi'(p) = 0$ і розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

2) $dp = 0,\ \ p = C$ і розв'язок має вигляд $y = Cx + \psi(C).$

Загальним розв'язком рівняння Клеро буде сім'я прямих $y = Cx + \psi(C).$ Її огинає особлива крива $x = -\psi'(p),$ $y = -p\psi'(p) + \psi(p).$

6. *Параметризація загального вигляду.* Нехай диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = 0$$

вдалося записати як систему рівнянь із двома параметрами $x = \varphi(u, v),\ \ y = \psi(u, v),\ \ y' = \theta(u, v).$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx$, отримаємо

$$\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}dv = \theta(u,v)\left[\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}dv\right].$$

Перегрупувавши члени, одержимо

$$\left[\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\right]du = \left[\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right]dv.$$

Звідси

$$\frac{du}{dv} = \frac{\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}}{\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}},$$

або

$$\frac{du}{dv} = f(u,v).$$

Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

7. *Рівняння, що розв'язуються відносно похідної.* Нехай рівняння

$$F(x, y, y') = 0$$

можна розв'язати відносно y' і воно має n коренів, тобто його можна записати як

$$\prod_{i=1}^{n} [y' - f_i(x, y)] = 0.$$

Розв'язавши кожне з рівнянь $y' = f_i(x, y),\ i = \overline{1, n},$ отримаємо n загальних розв'язків (або інтегралів) $y = \varphi_i(x, C),\ i = \overline{1, n}$ (або $\varphi_i(x, y) = C,\ i = \overline{1, n}$). Загальний розв'язок вихідного рівняння, не розв'язаного відносно похідної, матиме вигляд

$$\prod_{i=1}^{n} [y - \varphi_i(x, C)] = 0, \text{ або } \prod_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x, y) - C\right) = 0.$$

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь розглянутих у цьому підрозділі типів.

1. Розв'язати рівняння $y'^2 - 1 = 0.$

Рівняння $k^2 - 1 = 0$ має дійсний розв'язок $k_0 = 1.$ Звідси розв'язком (загальним інтегралом) вихідного рівняння буде

$$\left(\frac{y - c}{x}\right)^2 - 1 = 0.$$

2. Розв'язати рівняння $x = y'^3 + y'.$

Записуємо диференціальне рівняння у параметричній формі

$$x = t^3 + t, \quad y' = t.$$

Використовуючи залежність $dy = y'dx,$ запишемо

$$dy = t\left(3t^2 + 1\right)dt.$$

Проінтегрувавши останній вираз, отримаємо

$$y=\int\left(3t^3+t\right)dt+c=\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2+c.$$

Загальний розв'язок у параметричній формі

$$x=t^3+t,\ \ y=\frac{1}{4}\left(3t^4+2t^2+c\right).$$

3. Розв'язати рівняння $x\left(y'^2-1\right)=2y'.$

Записуємо диференціальне рівняння у параметричній формі

$$x=\frac{2t}{t^2-1},\ \ y'=t.$$

Використовуючи залежність $dy=y'dx,$ запишемо

$$dy=t\frac{2\left(t^2-1\right)-4t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-\frac{t^2+1}{\left(t^2-1\right)^2}d\left(t^2-1\right)=$$

$$=\frac{t^2-1+2}{\left(t^2-1\right)^2}d\left(t^2-1\right)=-\frac{d\left(t^2-1\right)}{t^2-1}-2\frac{d\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}.$$

Проінтегрувавши останній вираз, отримаємо

$$y=-\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{t^2-1}dt-2\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}+c=-\ln\left|t^2-1\right|+\frac{2}{t^2-1}+c.$$

Загальний розв'язок у параметричній формі матиме вигляд

$$x=\frac{2t}{t^2-1},\ \ y=-\ln\left|t^2-1\right|+\frac{2}{t^2-1}+c.$$

4. Розв'язати рівняння $y=y'^2+2y'^3.$

Записуємо диференціальне рівняння у параметричній формі

$$y=t^2+2t^3,\ \ y'=t.$$

Використовуючи залежність $dy=y'dx,$ запишемо

$$\left(2t+6t^2\right)dt=tdx\Rightarrow dx=(2+6t)dt.$$

Проінтегрувавши останній вираз, отримаємо

$$x=\int\left(2+6t\right)dt+c=2t+3t^2+c.$$

Розв'язок матиме вигляд

$$x = 3t^2 + 2t + c, \quad y = t^2 + 2t^3.$$

5. Розв'язати рівняння $y = \ln\left(1 + y'^2\right)$.

Записуємо диференціальне рівняння у параметричній формі

$$y = \ln\left(1 + t^2\right), \quad y' = t.$$

Використовуючи залежність $dy = y'dx$, запишемо

$$\frac{2t}{1+t^2}dt = tdx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Проінтегрувавши останній вираз, отримаємо

$$x = \int \frac{2}{1+t^2}dt + c = 2\mathrm{arctg}t + c.$$

Розв'язок матиме вигляд

$$x = 2\mathrm{arctg}t + c, \quad y = \ln\left(1 + t^2\right).$$

6. Розв'язати рівняння $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

Перепишемо рівняння у стандартній формі

$$y = -xy' + 4\sqrt{y'}.$$

Введемо заміну

$$y' = t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = tdx.$$

Тоді рівняння Лагранжа матиме вигляд

$$y = -xt + 4\sqrt{t}.$$

Продиференціюємо останній вираз:

$$dy = -xdt - tdx + 2\frac{1}{\sqrt{t}}dt.$$

Підставивши замість dy його значення, отримаємо

$$tdx = -xdt - tdx + 2\frac{1}{\sqrt{t}}dt.$$

Перегрупуємо члени й запишемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$2tdx = \left[-x + \frac{2}{\sqrt{t}}\right]dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{t}x + 2}{2t\sqrt{t}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2t}x = \frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

Його розв'язком буде

$$x = e^{-\int \frac{1}{2t}dt}\left[\int e^{\int \frac{1}{2t}dt}\frac{1}{t\sqrt{t}}dt + c\right] = e^{-\frac{1}{2}\ln|t|}\left[\int e^{\frac{1}{2}\ln|t|}\frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt + c\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\int \frac{1}{t}\,dt + c\right] = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\ln|t| + c\right).$$

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$x = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\ln t + c\right),\ \ y = \sqrt{t}\left(4 - \ln t + c\right).$$

7. Розв'язати рівняння $y = xy' - y'^2$.

Робимо заміну $y' = t \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = tdx.$ Отримуємо $y = tx - t^2$.

Продиференціюємо останній вираз:

$$dy = tdx + xdt - 2tdt.$$

Підставивши замість dy його значення, матимемо

$$tdx = tdx + xdt - 2tdt \Rightarrow xdt - 2tdt = 0,\ \left(x - 2t\right)dt = 0.$$

Звідси отримуємо дві рівності.

1. Особливий розв'язок

$$x - 2t = 0 \Rightarrow x = 2t,\ \ y = 2t^2 - t^2 = t^2.$$

Виключивши параметр t, отримаємо $y = \dfrac{x^2}{4}$.

2. Загальний розв'язок

$$dt = 0 \Rightarrow t = c \Rightarrow y = cx - c^2.$$

Завдання для самостійної роботи

6. Розв'язати рівняння:

6.1. $y = 2xy' - 4y'^3$;

6.2. $y = xy'^2 - 2y'^3$;

6.3. $2xy' - y = \ln y'$;

6.4. $y'^3 = 3(xy' - y)$;

6.5. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$;

6.6. $y'(x - \ln y') = 1$;

6.7. $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$;

6.8. $y = (y' - 1)e^{y'}$;

6.9. $y'^4 = 2yxy' + y^2$;

6.10. $y'^2 - y^2 = 0$;

6.11. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$;

6.12. $xy'(xy' + y) = 2y^2$;

6.13. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.

1.6. Існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Неперервна залежність і диференційованість

Клас диференціальних рівнянь, що інтегруються у квадратурах, доволі обмежений, тому велике значення мають наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь. Однак щоб використовувати ці методи, треба бути впевненим у існуванні розв'язку шуканого рівняння та його єдиності.

Зараз значну частину теорем існування та єдиності розв'язків не тільки диференціальних, але й рівнянь інших видів, доводять методом стискальних відображень.

Означення 1.6.1. Простір M називається *метричним*, якщо для довільних двох точок $x, y \in M$ визначена функція $\rho(x, y)$, яка задовольняє такі аксіоми:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причому $\rho(x, y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (комутативність);
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Функція $\rho(x, y)$ називається *відстанню* у просторі M (*метрикою* простору M).

Розглянемо векторний n-вимірний простір R^n. Нехай його точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тоді за метрику можна взяти $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$, $\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$.

Розглянемо простір неперервних функцій на відрізку $[a, b]$. Позначимо його $C_{[a,b]}$. За метрику можна взяти

$$\rho(x(t), y(t)) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2},$$

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Означення 1.6.2. Послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називається *фундаментальною*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon) > 0$ таке, що при $n \geq N(\varepsilon)$ і довільному $m = 1, 2, \ldots$ буде $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$.

Означення 1.6.3. Метричний простір M називається *повним*, якщо довільна фундаментальна послідовність точок $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. простору M збігається до деякої точки $\bar{x}$ простору M .

Теорема 1.6.1 (принцип стискальних відображень). Нехай у повному метричному просторі M задано оператор $A[\bullet]$, що задовольняє такі умови:

1) оператор $A[\bullet]$ переводить точки простору M у точки цього самого простору, тобто якщо $x \in M$, то і $A[x] \in M$;

2) оператор $A[\bullet]$ є оператором стискання, тобто $\rho(A[x], A[y]) \leq \alpha \rho(x, y)$, де $0 < \alpha < 1$, x, y – довільні точки M.

Тоді існує єдина нерухома точка $\bar{x} \in M$, яка є розв'язком операторного рівняння $A[\bar{x}] = \bar{x}$, і вона може бути знайдена методом послідовних відображень, тобто $\bar{x} = \lim_{n \to \infty} x_n$, де $x_{n+1} = A[x_n]$, причому x_0 вибирають довільно.

Доведення.

1. Візьмемо довільну точку $x_0 \in M$ і побудуємо послідовність $x_1 = A[x_0]$, $x_2 = A[x_1]$, ... , $x_{n+1} = A[x_n]$, ... Покажемо, що побудована послідовність є фундаментальною. Дійсно,

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(A[x_1], A[x_0]) \leq \alpha\rho(x_1, x_0),$$

$$\rho(x_3, x_2) = \rho(A[x_2], A[x_1]) \leq \alpha\rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2\rho(x_1, x_0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(A[x_n], A[x_{n-1}]) \leq \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leq \ \dots \ \leq \alpha^n\rho(x_1, x_0).$$

Оцінимо $\rho(x_n, x_{n+m})$. Застосувавши $(n-1)$ разів правило трикутника, отримаємо

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ \dots \ + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leq$$

$$\leq \alpha^n\rho(x_1, x_0) + \alpha^{n+1}\rho(x_1, x_0) + \ \dots \ + \alpha^{n+m-1}\rho(x_1, x_0) =$$

$$= \alpha^n\rho(x_1, x_0)[1 + \alpha + \ \dots \ + \alpha^{m-1}] < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0).$$

Отже, $\rho(x_n, x_{n+m}) < \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0)$.

За достатньо великого n $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$, тобто послідовність x_1, x_2, ... x_n, ... є фундаментальною і внаслідок повноти простору M збігається до деякого елемента цього самого простору $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, $\bar{x} \in M$.

2. Покажемо, що x є нерухомою точкою, тобто $A[\bar{x}] = \tilde{x}$.

Нехай, від супротивного, $A[\tilde{x}] = \tilde{x}$ і $\bar{x} \neq \tilde{x}$. Застосувавши правило трикутника, одержимо

$$\rho(\bar{x}, \tilde{x}) < \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, \tilde{x}).$$

Оцінимо кожний із доданків.

1. Оскільки $x_n \to \bar{x}$, то при $n > N(\varepsilon)$ буде $\rho(\bar{x}, x_n) < \varepsilon / 3$.

2. Оскільки послідовність є фундаментальною, то при $\rho(\bar{x}, x_n) < \varepsilon / 3$ буде $\rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon / 3$.

3. І, нарешті, $\rho(x_{n+1}, \tilde{x}) = \rho(A[x_n], A[\tilde{x}]) \leq \alpha\rho(x_n, \tilde{x}) < \alpha\dfrac{\varepsilon}{3} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Отже, $\rho(\bar{x},\tilde{x}) < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, причому $\bar{x}$ та $\tilde{x}$ фіксовані, а ε можна вибрати як завгодно малим. Звідси $\rho(\bar{x},\tilde{x})=0$, а внаслідок другої аксіоми метричного простору це означає, що $\bar{x}=\tilde{x}$.

3. Покажемо, що нерухома точка єдина. Нехай, від супротивного, існують дві точки: $\bar{x}$ та $\tilde{x}$: $A[\bar{x}]=\bar{x}$ і $A[\bar{x}]=\tilde{x}$. Однак тоді $\rho(A[\bar{x}],\ A[x])=\rho(\bar{x},\ \tilde{x})$, що суперечить припущенню про стискальність оператора.

Отже, припущення про неєдиність нерухомої точки помилкове. З використанням теореми про нерухому точку доведемо теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

Теорема 1.6.2 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші).

Нехай у диференціальному рівнянні $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ функція $f(x,y)$ визначена у прямокутнику

$$D=\left\{(x,y):\left|x_0-a\le x\le x_0+a,\ y_0-b\le y\le y_0+b\right.\right\}$$

і задовольняє такі умови:

1) $f(x,y)$ неперервна за x та y в області D;

2) $f(x,y)$ задовольняє умову Ліпшица за змінною y, тобто

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le N\left|y_1-y_2\right|,\quad N=\text{const}.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ диференціального рівняння, який визначений при $x_0-h\le x\le x_0+h$ і задовольняє умову $y(x_0)=y_0$, де $h<\min\left\{a,b/M,1/N\right\}$, $M=\max\limits_{x,y\in D}\left|f(x,y)\right|$.

Доведення. Розглянемо простір, елементами якого є функції $y(x)$, неперервні на відрізку $x\in[x_0-h,x_0+h]$ і обмежені $\left|y(x)-y_0\right|\le b$.

Уведемо метрику $\rho(y(x),z(x))=\max\limits_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|y(x)-z(x)\right|$. Одержимо повний метричний простір $C_{[x_0-h,x_0+h]}$. Замінимо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$$

еквівалентним інтегральним рівнянням

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Розглянемо оператор

$$A[y] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Оскільки

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(t, y(t))\right| dt \le M\left|x - x_0\right| \le Mh \le b,$$

то оператор $A[y]$ ставить у відповідність кожній неперервній функції $y(x)$, визначеній при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ і обмеженій $\left|y(x) - y_0\right| \le b$, також неперервну функцію $A[y] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, визначену при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ і обмежену $\left|A[y] - y(x)\right| \le b$.

Перевіримо, чи є оператор $A[\bullet]$ оператором стискання:

$$\rho(A[y], A[z]) = \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt\right| \le$$

$$\le \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\int_{x_0}^{x}\left|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\right|dt \le N \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\int_{x_0}^{x}\left|y(t) - z(t)\right|dt \le$$

$$\le N \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|y(t) - z(t)\right|\int_{x_0}^{x} dt \le Nh\rho(y, z).$$

Оскільки $Nh < 1$, то оператор $A[\bullet]$ є оператором стискання $\rho(A[y],[z]) < \alpha\rho(y, z)$, $0<\alpha<1$. Відповідно до принципу стискальних відображень операторне рівняння $A[y] = y$ має єдиний розв'язок, тобто інтегральне рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

або ж задача Коші для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

також має єдиний розв'язок.

Зауваження 1.6.1. Умову Ліпшица

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le N\left|y_1 - y_2\right|$$

можна замінити іншою, більш грубою, яку легше перевірити, – умовою існування обмеженої за модулем частинної похідної $f_y'(x,y)$ в області D. Дійсно,

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=\left|f_y'(x,\xi)\right|\left|y_1-y_2\right|\le N\left|y_1-y_2\right|,$$

де $\xi\in[y_1,y_2]$, $N=\max\limits_{(x,y)\in D}\left|f_y'(x,y)\right|$.

Використовуючи доведену теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, розглянемо теореми, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема 1.6.3 (про неперервну залежність розв'язків від параметра). *Якщо права частина диференціального рівняння*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\mu)$$

неперервна за μ *при* $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$ *і при кожному фіксованому* μ *задовольняє умови теореми існування та єдиності, причому стала Ліпшица* N *не залежить від* μ, *то розв'язок* $y=y(x,\mu)$, *що задовольняє початкову умову* $y(x_0)=y_0$, *неперервно залежить від* μ.

Доведення. Оскільки члени послідовності

$$y_n(x,\mu)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_n(t,\mu))dt$$

є неперервними функціями змінних x і μ, а стала $\alpha=Nh<1$ не залежить від μ, то послідовність $\{y_n(x,\mu)\}$ збігається до $y(x,\mu)$ рівномірно за μ. І, як випливає з математичного аналізу, якщо послідовність неперервних функцій збігається рівномірно, то вона збігається до неперервної функції, тобто $y=y(x,\mu)$ – функція, неперервна за μ.

Теорема 1.6.4 (про неперервну залежність від початкових умов). *Нехай виконані умови теореми про існування та єдиність розв'язків рівняння*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

з початковими умовами $y(x_0)=y_0$. *Тоді розв'язки* $y=y(x_0,y_0;x)$, *записані у формі Коші, неперервно залежать від початкових умов.*

Доведення. Зробивши заміну $z = y(x_0, y_0; x) - y_0$, $t = x - x_0$, одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0)$$

з нульовими початковими умовами. На підставі попередньої теореми маємо неперервну залежність розв'язків від x_0, y_0 як від параметрів.

Теорема 1.6.5 (про диференційованість розв'язків). Якщо в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні змішані похідні до k -го порядку, то розв'язок $y(x)$ рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$ у деякому околі точки (x_0, y_0) буде $(k+1)$ разів неперервно диференційований.

Доведення. Підставивши $y(x)$ у рівняння, одержимо тотожність $\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x))$, яку можна диференціювати:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f.$$

Якщо $k > 1$, то праворуч функція неперервно диференційована. Продиференціюємо її ще раз:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dy}{dx}\right) f + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right),$$

або

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right).$$

Зробивши це k разів, отримаємо твердження теореми.

Розглянемо диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної $F(x, y, y') = 0$.

Нехай (x_0, y_0) – точка на площині. Підставивши її у рівняння, одержимо відносно y' алгебраїчне рівняння

$$F(x_0, y_0, y') = 0.$$

Це рівняння має корені $y_0^{'}, y_1^{'}, \ ... \ , y_n^{'}, ...$. Задача Коші для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, ставиться у такий спосіб. Потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ рівняння $F(x, y, y') = 0,$ що задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0^{'},$$

де x_0, y_0 – довільні значення, а $y_0^{'}$ – один із вибраних наперед коренів алгебраїчного рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0.$

Теорема 1.6.6 (існування та єдиність розв'язку задачі Коші рівняння, не розв'язаного відносно похідної). Нехай у замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^{'})$ функція $F(x, y, y')$ задовольняє такі умови:

1) $F(x, y, y')$ неперервна за всіма аргументами;

2) $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ існує і відмінна від нуля;

3) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \le N_1.$

Тоді при $x \in [x_0 - h, x_0 + h],$ де h досить мала, існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння

$$F(x, y, y') = 0,$$

що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0^{'}.$

Доведення. Як випливає з математичного аналізу, відповідно до теореми про неявну функцію можна стверджувати, що умови 1), 2) гарантують існування єдиної неперервної в околі точки $(x_0, y_0, y_0^{'})$ функції $y' = f(x, y),$ обумовленої рівнянням

$$F(x, y, y') = 0,$$

для якої $y_0^{'} = f(x_0, y_0).$

Перевіримо, чи задовольняє $f(x, y)$ умову Ліпшица або більш грубу умову $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le N.$

Продиференціюємо $F(x, y, y') = 0$ за $y.$

Оскільки $y' = f(x, y)$, то одержимо $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$ Звідси

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}.$$

З умов 2), 3) маємо, що в деякому околі точки (x_0, y_0) буде $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le N$ і для рівняння $y' = f(x, y)$ виконуватимуться умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Особливі розв'язки

Означення 1.6.4. Розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння, у кожній точці якого $M(x, y)$ порушено єдиність розв'язку задачі Коші, називається *особливим розв'язком*.

Очевидно, що такі розв'язки треба шукати в тих точках області D, де порушено умови теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Однак, оскільки умови теореми мають достатній характер, то їхнє невиконання для існування особливих розв'язків є необхідним, а точки $M(x, y)$ області D, у яких порушено умови теореми про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння, є лише *підозрілими на особливі розв'язки*.

Розглянемо рівняння

$$y' = f(x, y).$$

Неперервність $f(x, y)$ в області D зазвичай виконується, а особливі розв'язки варто шукати там, де $\frac{\partial f}{\partial y} = \pm\infty.$

Для диференціального рівняння $F(x, y, y') = 0,$ не розв'язаного відносно похідної, умови неперервності $F(x, y, y')$ та обмеженості $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ зазвичай виконуються, а особливі розв'язки варто шукати там, де задовольняються рівняння

$$F(x, y, y') = 0, \ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

Вилучаючи із системи y', одержимо $\Phi(x, y) = 0$. Однак не в кожній точці $M(x, y)$, у якій $\Phi(x, y) = 0$, порушується єдиність розв'язку, тому що умови теореми мають лише достатній характер і не є необхідними. Якщо ж яка-небудь гілка $y = \varphi(x)$ кривої $\Phi(x, y) = 0$ є інтегральною кривою, то $y = \varphi(x)$ вважають особливим розв'язком. Отже, для знаходження особливого розв'язку рівняння $F(x, y, y') = 0$ треба:

1) знайти p-дискримінантну криву, обумовлену рівняннями

$$F(x, y, p) = 0, \ \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0;$$

2) з'ясувати шляхом підстановки, чи є серед гілок p-дискримінантної кривої інтегральні криві;

3) з'ясувати, чи порушено умову одиничності в точках цих кривих.

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь, що були розглянуті у цьому підрозділі.

1. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y' = \sqrt{y}$$

Особливий розв'язок слід шукати там, де $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \pm\infty.$

Оскільки $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, то отримаємо $\bar{y}(\bar{x}) = 0$ – криву, підозрілу на особливу. Перевірка показує, що це дійсно інтегральна крива. Щоб до кінця переконатися, що ця крива особлива, розв'яжемо рівняння

$$y' = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = x + C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}(x + c)^2.$$

Легко переконатися, що $\overline{y}(x) \equiv 0$ є кривою, яка огинає сім'ю інтегральних кривих $y(x) = \frac{1}{4}(x+c)^2$.

2. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y = x + y' - \ln y.$$

Складаємо рівняння p-дискримінантної кривої

$$y = x + p - \ln p, \; 0 = 1 - \frac{1}{p}.$$

Із другого рівняння $p = 1$. Підставивши його в перше, отримаємо рівняння для кривої, підозрілої на особливу: $\overline{y}(x) = x + 1$. Підставивши останній вираз у рівняння, отримаємо $x + 1 = x + 1 - \ln 1$. Упевнилися, що $\overline{y}(x) = x + 1$ є інтегральною кривою.

Розв'яжемо рівняння методом введення параметра. Його загальний розв'язок

$$y = Ce^x - \ln C.$$

Можна переконатися, що $\overline{y}(x) = x + 1$ є кривою, яка огинає сім'ю інтегральних кривих.

РОЗДІЛ 2
Нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків

У класичній механіці будь-який динамічний процес завдяки другому закону Ньютона можна описати, задіявши в моделі положення координати, її швидкість і прискорення [10, 12, 18, 20]. Майже завжди ці співвідношення будуть нелінійними. У диференціальних рівняннях швидкість – перша похідна від координати, прискорення – друга. Узагальнюючи, розуміємо, що багато реальних процесів достатньо адекватно описуються в термінах нелінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. У цьому розділі розглянемо певні класи таких рівнянь, що допускають аналітичне розв'язання.

2.1. Загальні означення

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0.$$

Якщо диференціальне рівняння розв'язане відносно старшої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}).$$

Іноді його називають *диференціальним рівнянням у нормальній формі*.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що інтегруються у квадратурах

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що інтегруються у квадратурах.

1. *Рівняння, що містить лише вищу похідну*. Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x).$$

Проінтегрувавши його n разів, одержимо загальний розв'язок

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \ \ldots \ dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ \ldots \ + C_{n-1} x + C_n.$$

Якщо задано умови Коші

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \ldots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

то розв'язок набуває вигляду

$$y = \int_{x_0}^{x} \ \ldots \int_{x_0}^{x} f(x) dx \ \ldots \ dx + \frac{y_0}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} +$$

$$+ \frac{y'_0}{(n-2)!}(x - x_0)^{(n-2)} + \ \ldots \ + y^{(n-2)}(x - x_0) + y_0^{(n-1)}.$$

2. *Рівняння, що містить похідну вищого порядку та аргумент*. Розглянемо диференціальне рівняння

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Нехай його вдалося записати в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи основне співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$, одержимо

$$dy^{(n-1)} = \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Проінтегрувавши його, матимемо

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Одержимо параметричний запис рівняння $(n-1)$-го порядку

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1). \end{cases}$$

Пробивши зазначені дії ще $(n-1)$ разів, одержимо загальний розв'язок рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, \ \ldots \ , C_n) \end{cases}.$$

3. *Рівняння, що містить дві похідні вищого порядку*. Розглянемо диференціальне рівняння

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

Нехай його вдалося записати в параметричному вигляді

$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи основне співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, одержимо

$$\varphi'(t)\,dt = \psi(t)\,dx.$$

Проінтегрувавши його, отримаємо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Отримали параметричний запис рівняння $(n-1)$ -го порядку

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-1)} = \varphi(t). \end{cases}$$

Використовуючи попередній пункт, понизивши порядок на одиницю, запишемо

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-2)} = \varphi_2(t, C_2). \end{cases}$$

Проробивши останню процедуру $(n-2)$ разів, запишемо загальний розв'язок у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y = \varphi_n(t, C_2, \ \dots \ , C_n). \end{cases}$$

4. *Диференціальне рівняння, що містить передостанню та вищу похідні*. Нехай рівняння

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$$

можна розв'язати відносно старшої похідної $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$. Домножимо його на $2y^{(n-1)}dx$ і одержимо

$$2y^{(n-1)}y^{(n)}dx = 2f(y^{(n-2)})y^{(n-1)}dx.$$

Перепишемо його у вигляді

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}).$$

Проінтегрувавши його, отримаємо

$$(y^{(n-1)})^2 = 2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1,$$

тобто

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1},$$

або

$$y^{(n-1)} = \pm\psi_1(y^{(n-2)}, C_1).$$

Отже, отримали параметричний запис рівняння $(n-1)$ -го порядку

$$\begin{cases} y^{(n-2)} = t \\ y^{(n-1)} = \pm\psi_1(t, C_1) \end{cases}$$

і повернулися до третього випадку.

Наведемо кілька прикладів розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків, що інтегруються у квадратурах.

1. Розв'язати рівняння $y'' = x + \sin x$.

Проінтегруємо записане рівняння два рази:

$$y' = \int (x + \sin x)dx + C_1 = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1;$$

$$y = \int (\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1)dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

2. Розв'язати рівняння $(y'')^3 - 2y'' - x = 0$.

Запишемо рівняння у параметричній формі

$$\begin{cases} y'' = t, \\ x = t^3 - 2t \end{cases}.$$

Використовуючи співвідношення $dy' = y''dx,$ одержимо

$$dy' = t(3t^2 - 2)dt,$$

або

$$dy' = (3t^3 - 2t)dt.$$

Понизимо порядок рівняння на одиницю:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1, \\ x = t^3 - 2t. \end{cases}$$

Знову використовуючи співвідношення $dy = y'dx$, одержимо

$$dy = (\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1)(3t^2 - 2)dt,$$

або

$$dy = \left(\frac{9}{4}t^6 - \frac{9}{2}t^4 + (2 - 3C_1)t^2 + C_1\right)dt.$$

Звідси загальний розв'язок у параметричній формі

$$\begin{cases} y = \dfrac{9}{28}t^7 - \dfrac{9}{10}t^5 + (\dfrac{2}{3} - C_1)t^3 + C_1 t + C_2, \\ x = t^3 - 2t. \end{cases}$$

3. Розв'язати рівняння $y''' - e^{-y''} = 0$.

Запишемо рівняння у параметричній формі

$$\begin{cases} y'' = t, \\ y''' = e^{-t}. \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $dy'' = y'''dx$, одержимо $dt = e^{-t}dx$. Звідси $dx = e^t dt$ і $x = e^t + C_1$.

Запишемо рівняння другого порядку у параметричній формі

$$\begin{cases} y'' = t, \\ x = e^t + C_1. \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $dy' = y''dx$, одержимо $dy' = te^t dt$. Звідси $y' = \int te^t dt = e^t(t-1) + C_2$.

Отримали диференціальне рівняння першого порядку у параметричній формі

$$\begin{cases} y' = e^t(t-1) + C_2, \\ x = e^t + C_1. \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx$, запишемо:

$$y = \int [e^t(t-1) + C_2] e^t dt = \frac{1}{2}e^{2t}(t-1) - \frac{1}{4}e^{2t} + C_2 e^t + C_3.$$

Остаточно загальний розв'язок

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}e^{2t}(t - \dfrac{3}{2}) + C_2 e^t + C_3, \\ x = e^t + C_1. \end{cases}$$

Якщо вилучити параметр t, то одержимо загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{2}(x - C_1)^2(\ln|x - C_1| - \frac{3}{2}) + C_2(x - C_1) + C_3.$$

4. Розв'язати рівняння $3\sqrt[3]{y}\,y'' = 1$.

Запишемо рівняння як

$$y'' = \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}.$$

Помножимо обидві частини на $2y'dx$. Одержимо

$$2y''y'dx = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}y'dx,$$

або

$$d(y')^2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}dy.$$

Проінтегруємо отримані рівняння і одержимо $(y')^2 = (y)^{\frac{2}{3}} + C_1$.

Звідси $y' = \pm\sqrt{(y)^{2/3} + C_1}$.

Нехай початкові умови такі, що $C_1 = \overline{C}_1^2 > 0$, тобто рівняння має вигляд $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(y)^{2/3} + \overline{C}_1^2}$.

Розділимо змінні:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y)^{2/3} + \overline{C}_1^2}} = \pm\int dx + C_2.$$

Зробимо заміну:

$$\sqrt{(y)^{2/3}+\overline{C}_1^2}=t.$$

Тоді $y=\left(t^2-\overline{C}_1^2\right)^{3/2}$, $dy=3\left(t^2-\overline{C}_1^2\right)^{1/2}tdt$,

а інтеграл

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(y)^{2/3}+\overline{C}_1^2}}=3\int\sqrt{t^2-\overline{C}_1^2}\,dt=3\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2-\overline{C}_1^2}-\ln|C+\sqrt{t^2-\overline{C}^2}|\right).$$

2.3. Найпростіші випадки пониження порядку в диференціальних рівняннях вищих порядків

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають пониження порядку.

1. *Рівняння не містить шуканої функції та її похідних до* $(k-1)$*-го порядку включно*:

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)}\ \dots\ ,y^{(n)})=0\,.$$

Зробивши заміну $y^{(k)}=z$, $y^{(k+1)}=z'$, ... , $y^{(n)}=z^{(n-k)}$, одержимо рівняння $(n-k)$-го порядку

$$F(x,z,y',\ \dots\ ,z^{(n-k)})=0\,.$$

2. *Рівняння не містить явно незалежної змінної*:

$$F(y,y',\ \dots\ ,y^{(n)})=0\,.$$

Будемо вважати, що y – нова незалежна змінна, а y', ... , $y^{(n)}$ – функції від y. Тоді

$$y'_x=p(y),\quad y''_{x^2}=\frac{d}{dx}y'_x=\frac{d}{dy}(p(y))\frac{dy}{dx}=p'_y p,$$

$$y'''_{x^3}=\frac{d}{dx}y''_{x^2}=\frac{d}{dy}(p'_y p)\frac{dy}{dx}=(p''_{y^2}p+p'^2_y)p,$$

……………

Після підстановки одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$ -го порядку

$$F(y, p, p'_y p, (p''_{y^2} p + p'^2_y) p, \ \dots \ , p^{(n-1)}) = 0.$$

3. *Нехай функція F диференціального рівняння*

$$F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$$

є однорідною щодо аргументів $y, y', \ \dots \ , y^{(n)}$.

Зробимо заміну $y = e^{\int u dx}$, де $u = u(x)$ – нова невідома функція. Одержимо

$$y' = e^{\int u dx} u, \quad y'' = e^{\int u dx} u^2 + e^{\int u dx} u' = e^{\int u dx} (u^2 + u'),$$

$$y''' = e^{\int u dx} u(u^2 + u') + e^{\int u dx} (2uu' + u'') = e^{\int u dx} (u^3 + 3uu' + u''),$$

……………………

Після підстановки отримаємо

$$F(x, e^{\int u dx}, e^{\int u dx} u, e^{\int u dx} (u^2 + u'), e^{\int u dx} (u^3 + 3uu' + u''), \ \dots) = 0.$$

Оскільки рівняння однорідне відносно $e^{\int u dx}$, то цей член можна винести й на нього скоротити. Одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$ -го порядку

$$F(x, 1, u, u^2 + u', u^3 + 3uu' + u'', \ \dots \ , u^{(n-1)}) = 0.$$

4. *Нехай ліва частина рівняння*

$$F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$$

є похідною деякого диференціального виразу $(n-1)$ *-го порядку, тобто*

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}).$$

У цьому випадку легко обчислити перший інтеграл:

$$\Phi(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}) = C \ .$$

5. *Нехай диференціальне рівняння*

$$F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$$

розписане у вигляді диференціалів

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \ \dots \ , d^n y) = 0$$

і Φ *– функція, однорідна за всіма перемінними.*

Зробимо заміну $x = e^t$, $y = ue^t$, де u, t – нові змінні. Тоді одержимо

$$dx = e^t dt,\ \ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{u'_t e^t + ue^t}{e^t} = u'_t + u,$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dt}\left(u'_t + u\right)\frac{dt}{dx} = \frac{u''_{t^2} + u'_t}{e^t},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx} y''_{x^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u''_{t^2} + u'_t}{e^t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\left(u'''_{t^3} + u''_{t^2}\right)e^t - \left(u''_{t^2} + u'_t\right)e^t}{e^{3t}} = \frac{u'''_{t^3} - u'_t}{e^{2t}}$$

Підставивши отримані вище вирази в рівняння, розписане у вигляді диференціалів, одержимо

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \ \dots, d^n y) =$$
$$= \Phi(e^t, ue^t, e^t dt, (u'_t + u)e^t dt, (u''_{t^2} + u'_t)e^t dt, \dots) = 0.$$

Скоротивши вираз у дужках із останнього рівняння на e^t, отримаємо

$$\Phi(1, u, dt, u'_t + u,\ u''_{t^2} + u'_t, \dots, u_t^{(n)}) = 0,$$

тобто диференціальне рівняння, що не містить явно незалежної змінної, або повертаємося до другого випадку.

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь вищого порядку, що допускають його пониження.

1. Розв'язати рівняння $(y'')^3 + xy'' = y'$.

Позначимо $y' = z,\ y'' = z'$. Одержимо рівняння $(z')^3 + xz' = z$, тобто рівняння Клеро, що легко інтегрується введенням параметра.

Нехай $z' = p$. Тоді $z = xp + p^3$.

Продиференцюємо це співвідношення:

$$dz = xdp + pdx + 3p^2 dp.$$

Підставивши $dz = pdx$, отримаємо $(x + 3p^2)dp = 0$.

Це рівняння розпадається на два:

1) $x+3p^2=0.$

Звідси маємо $x=-3p^2$, $z=-2p^3$.

Повертаємось до вихідних змінних $x=-3p^2$, $y'=-2p^3$. Використовуємо основне співвідношення $dy=y'dx.$ Одержуємо

$$dy=12p^4dp \Rightarrow y=\frac{12}{5}p^5+C_1.$$

Отже, перша гілка дає розв'язок

$$x=-3p^2,\quad y=\frac{12}{5}p^5+C_1.$$

2) $dp=0.$

Звідси маємо $z=C_1x+C_1^3$.

Повертаємось до вихідних змінних $y'=C_1x+C_1^3$.

Проінтегруємо останній отриманий вираз і одержимо другу гілку розв'язків $y=C_1\dfrac{x^2}{2}+C_1^3x+C_2$.

2. Розв'язати рівняння $y^4-y^3y''=1.$

Відсутній аргумент x, отже, його порядок понижується заміною $y'=p$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. Звідси $y^4-y^3p\dfrac{dp}{dy}=1$.

Розділимо змінні: $y^3p\dfrac{dp}{dy}=y^4-1$. Звідси $\dfrac{y^4-1}{y^3}dy=pdp$.

Проінтегруємо: $\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2y^2}=\dfrac{p^2}{2}-\dfrac{C_1}{2}$. Отримали

$$p^2=y^2+\frac{1}{y^2}+C_1.$$

Повертаємось до вихідних змінних $y'^2=y^2+\dfrac{1}{y^2}+C_1.$

Розв'яжемо рівняння відносно похідної

$$y'=\pm\frac{1}{y}\sqrt{y^4+C_1y^2+1}.$$

Розділимо змінні:

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{y^4+C_1y^2+1}}=dx\,.$$

Візьмемо інтеграл:

$$\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{y^4+C_1y^2+1}}=\pm\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2+\frac{C_1}{2})}{\sqrt{\left(y^2+\frac{C_1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{C_1}{4}\right)}}=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\ln|\,y^2+\frac{C_1}{2}+\sqrt{y^4+C_1y^2+1}\,|.$$

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$x=\pm\frac{1}{2}\ln|\,y^2+\frac{C_1}{2}+\sqrt{y^4+C_1y^2+1}\,|.$$

3. Розв'язати рівняння $yy''=(y')^2$.

Оскільки рівняння однорідне за змінними y, y', y'', то робимо заміну $y=e^{\int udx}$, $y'=e^{\int udx}u$, $y''=e^{\int udx}(u^2+u)$. Рівняння набуде вигляду $e^{\int udx}e^{\int udx}(u^2+u)=\left(e^{\int udx}u\right)^2$.

Скоротимо ліву й праву частини останнього рівняння на $e^{\int udx}u$. Отримаємо $u^2+u'=u^2$, або $u'=0$. Звідси $u=C_1$ і загальний розв'язок

$$y=e^{\int C_1xdx}=e^{C_1x+\ln|C_2|}=C_2e^{C_1x}.$$

4. Розв'язати рівняння $yy''-(y')^2=y^2$.

Розділимо рівняння на y^2 та отримаємо $\dfrac{yy''-(y')^2}{y^2}=1$. Перепишемо його як $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{y}\right)=1$. Проінтегрувавши, одержимо загальний розв'язок $\dfrac{y'}{y}=x+C_1\Rightarrow\ln|\,y|=\dfrac{x^2}{2}+C_1x+C_2$.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння:

1.1. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;

1.2. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$;

1.3. $2xy'' = y'$;

1.4. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$;

1.5. $xy'' + y' = x + 1$;

1.6. $xyy'' - xy'^2 - 2yy' = 0$;

1.7. $\mathrm{tg} x y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$;

1.8. $x^2 y'' + xy' = 1$;

1.9. $y'' \mathrm{ctg} 2x + 2y' = 0$;

1.10. $x^3 y'' + x^2 y' = 0$.

РОЗДІЛ 3
Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Як було зазначено в попередньому розділі, диференціальні рівняння вищих порядків дають достатньо адекватний опис реальних динамічних процесів і об'єктів. У цьому розділі увагу зосереджено на методах розв'язання лінійних рівнянь. Пов'язано це з тим, що, по-перше, у випадках, коли не вдається розв'язати якусь задачу в початковій нелінійній постановці, дуже часто на практиці вдаються до її лінеаризації, а по-друге, апарат лінійних рівнянь у наш час досконало розроблений, отже, його застосування дає вдалі результати [12, 18, 23, 26].

Рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots \ + a_n(x)y = b(x)$$

називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку*.

Рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots \ + a_n(x)y = 0$$

називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку*.

Якщо при $x \in [a,b]$, $a_0(x) \neq 0$ коефіцієнти $b(x)$, $a_i(x)$, $i = \overline{0,n}$ неперервні, то для рівняння

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y^{(n-1)} - \ \dots \ - \frac{a_n(x)}{a_0(x)}y + \frac{b(x)}{a_0(x)}$$

виконуються умови теореми існування та єдиності та існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

3.1. Лінійні однорідні рівняння

3.1.1. Властивості лінійних однорідних рівнянь

Властивість 3.1.1. Лінійність і однорідність зберігаються при довільному перетворенні незалежної змінної $x = \varphi(t)$.

Дійсно, після заміни $x = \varphi(t)$ одержимо

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt},$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx}y'_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{\varphi'(t)} = -\frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(\varphi'(t))^2}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Після підстановки і зведення подібних одержимо знову лінійне однорідне рівняння

$$A_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + A_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ \ldots\ + A_n(t)y = 0.$$

Властивість 3.1.2. Лінійність і однорідність зберігаються при лінійному перетворенні невідомої функції $y = \alpha(x)z$.

Дійсно, після заміни $y = \alpha(x)z$ одержимо

$$y'_x = \alpha'(x)z + \alpha(x)z'$$

$$y''_{x^2} = \alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Після підстановки одержимо знову лінійне однорідне рівняння

$$\overline{A_0}(x)z^{(n)} + \overline{A_1}(x)z^{(n-1)} + \ \ldots\ + \overline{A_n}(x)z = 0.$$

3.1.2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь

Властивість 3.1.3. Якщо $y = y_1(x)$ є розв'язком однорідного лінійного рівняння, то $y = Cy_1(x)$, де C – довільна стала, також буде розв'язком однорідного лінійного рівняння.

Дійсно, нехай $y = y_1(x)$ – розв'язок лінійного однорідного рівняння, тобто

$$a_0(x)y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ \ldots\ + a_n(x)y_1(x) \equiv 0.$$

Тоді й

$$a_0(x)[Cy(x)]^{(n)} + a_1(x)[Cy_1(x)]^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(x)Cy_1(x) =$$
$$= C[a_0(x)y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_1(x)] \equiv 0,$$

оскільки вираз у дужках дорівнює нулю.

Властивість 3.1.4. Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння, то $y = y_1(x) + y_2(x)$ також буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Дійсно, нехай $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – розв'язки лінійного рівняння, тобто

$$a_0(x)y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_1(x) \equiv 0,$$

$$a_0(x)y_2^{(n)}(x) + a_1(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_2(x) \equiv 0.$$

Тоді й

$$a_0(x)[y_1(x) + y_2(x)]^{(n)} + a_1(x)[y_1(x) + y_2(x)]^{(n-1)} + \ ... +$$
$$+ a_n(x)[y_1(x) + y_2(x)] =$$
$$= [a_0(x)y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_1(x)] +$$
$$+ [a_0(x)y_2^{(n)}(x) + a_1(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_2(x)] \equiv 0,$$

оскільки обидва вирази в дужках дорівнюють нулю.

Властивість 3.1.5. Якщо $y_1(x),\ y_2(x), \ldots ,\ y_n(x)$ – розв'язки однорідного лінійного рівняння, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x),$$

де $C_1,\ C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі, також буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Дійсно, нехай $y_i(x),\ i = 1, n$ – розв'язки лінійного однорідного рівняння, тобто

$$a_0(x)y_i^{(n)}(x) + a_1(x)y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y_i(x) \equiv 0, \ \ i = \overline{1, n}.$$

Тоді й

$$a_0(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\right]^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i [a_0(x) y_i^{(n)}(x) + \ldots + a_n(x) y_i(x)] \equiv 0,$$

оскільки кожен вираз у дужках дорівнює нулю.

Властивість 3.1.6. Якщо комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то окремо дійсна частина $u(x)$ і уявна $v(x)$ будуть також розв'язками цього рівняння.

Дійсно, нехай $y = u(x) + iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, тобто

$$a_0(x)[u(x) + iv(x)]^{(n)} + a_1(x)[u(x) + iv(x)]^{(n-1)} + \ \ldots$$
$$+ a_n(x)[u(x) + iv(x)] \equiv 0.$$

Розкривши дужки і перегрупувавши члени, одержимо

$$[a_0(x) u^{(n)}(x) + a_1(x) u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) u(x)] +$$
$$+ i[a_0(x) v^{(n)}(x) + a_1(x) v^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) v(x)] \equiv 0.$$

Комплексний вираз дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли дорівнюють нулю дійсна й уявна частини, тобто

$$a_0(x) u^{(n)}(x) + a_1(x) u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) u(x) \equiv 0,$$
$$a_0(x) v^{(n)}(x) + a_1(x) v^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) v(x) \equiv 0,$$

або функції $u(x)$, $v(x)$ є розв'язками рівняння, що і було потрібно довести.

3.1.3. Лінійна залежність і незалежність розв'язків. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння вищого порядку

Означення 3.1.1. Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називаються *лінійно залежними* на відрізку $[a, b]$, якщо існують сталі

$C_1, ..., C_n$, які одночасно не дорівнюють нулю і такі, що за всіх $x \in [a,b]$

$$C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ ... + C_n y_n(x) \equiv 0.$$

Якщо ж тотожність справедлива лише для $C_1 = C_2 = = ... = C_n = 0,$ то функції $y_1(x),\ y_2(x), ..., y_n(x)$ називають *лінійно незалежними*.

Функції $1,\ x,\ x^2,\ ...\ ,\ x^{n-1}$ лінійно незалежні на будь-якому відрізку $[a,b],$ тому що вираз $C_1 + C_2 x + \ ... \ + C_n x^{n-1} = 0$ є багаточленом степеня $(n-1)$ і має не більше ніж $(n-1)$ дійсних коренів.

Функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},\ ...\ , e^{\lambda_n x},$ де всі λ_i – дійсні числа, лінійно незалежні.

Функції $1, \sin x, \cos x,\ ...\ , \sin nx, \cos nx$ лінійно незалежні.

Теорема 3.1.1 (необхідна умова лінійної незалежності функцій). Якщо функції $y_1(x), y_2(x), ...\ , y_n(x)$ лінійно залежні, то визначник $W[y_1(x),\ ...\ , y_n(x)]$, який називається *визначником Вронського*, тотожно дорівнює нулю за всіх $x \in [a,b]$:

$$W[y_1,\ ...\ , y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & ... & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Доведення. Нехай $y_1(x)\ y_2(x)\ ...\ y_n(x)$ лінійно залежні. Тоді існують сталі $C_1,\ ...\ , C_n$, які одночасно не дорівнюють нулю і такі, що при $x \in [a,b]$ буде тотожно виконуватися

$$C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ ... + C_n y_n(x) \equiv 0.$$

Продиференціювавши цей вираз $(n-1)$ разів, одержимо

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ ... + C_n\, y_n(x) = 0 \\ C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x) + \ ... + C_n y'_n(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ ... + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Для кожного фіксованого $x \in [a,b]$ одержимо лінійну однорідну систему алгебраїчних рівнянь, що має ненульовий розв'язок $C_1, \ ... \ , C_n$. Це можливо тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто $W[y_1, \ ... \ , y_n] \equiv 0$ за всіх $x \in [a,b]$.

Теорема 3.1.2 (достатня умова лінійної незалежності розв'язків). Якщо розв'язки лінійного однорідного рівняння $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ лінійно незалежні, то визначник Вронського $W[y_1, \ ... \ , y_n]$ не дорівнює нулю в жодній точці $x \in [a,b]$.

Доведення. Припустимо від супротивного, що існує $x_0 \in [a,b]$, за якого $W[y_1(x_0), \ ... \ , y_n(x_0)] = 0$. Оскільки визначник дорівнює нулю, то існує ненульовий розв'язок $C_1^0, \ C_2^0, \ ... \ , C_n^0$ лінійної однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \ ... \ + C_n^0 y_n(x) = 0 \\ C_1^0 y'_1(x) + C_2^0 y'_2(x) + \ ... \ + C_n^0 y'_n(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1^0 y_1^{(n-1)}(x) + C_2^0 y_2^{(n-1)}(x) + \ ... \ + C_n^0 y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Розглянемо лінійну комбінацію $y = C_1^0 y_1(x_0) + \ ... \ C_n^0 y_n(x_0)$ з отриманими коефіцієнтами. Унаслідок властивості 3.1.5 ця комбінація буде розв'язком. Унаслідок вибору сталих $C_1^0, \ C_2^0, \ ... \ , C_n^0$ розв'язок буде задовольняти умови

$$y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 0, \ ... \ y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Однак ці самі умови, як неважко перевірити простою підстановкою, задовольняє і тотожний нуль, тобто $y(x) \equiv 0$. За теоремою існування та єдиності ці два розв'язки збігаються, тобто $C_1^0 y_1(x_0) + \ ... \ C_n^0 y_n(x_0) \equiv 0$ при $x \in [a,b]$, або система функцій $y_1(x), \ y_2(x), \ ... \ , y_n(x)$ лінійно залежна, що суперечить припущенню. Отже, $W[y_1(x), \ ... \ , y_n(x)] \neq 0$ у жодній точці $x_0 \in [a,b]$, що й було потрібно довести.

На підставі попередніх двох теорем сформулюємо необхідні й достатні умови лінійної незалежності розв'язків лінійного однорідного рівняння.

Теорема 3.1.3. Для того, щоб розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ були лінійно незалежними, необхідно й достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю в жодній точці $x \in [a,b]$, тобто

$$W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] \neq 0.$$

Теорема 3.1.4. Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

є лінійна комбінація n лінійно незалежних розв'язків

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Доведення. Оскільки $y_i(x), i = 1,2, \ldots n$ є розв'язками, то внаслідок властивості 3.1.5 їхня лінійна комбінація також буде розв'язком.

Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто вибором сталих $C_1, \ldots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Дійсно, оскільки система розв'язків лінійно незалежна, то визначник Вронського відмінний від нуля і алгебраїчна система неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \ldots + C_n y'_n(x_0) = y_0' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, а лінійна комбінація $y = \sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x)$ є розв'язком, причому, як видно із системи алгебраїчних рівнянь, задовольняє довільно обрані умови Коші.

Властивість 3.1.7. Максимальна кількість лінійно незалежних розв'язків дорівнює порядку рівняння.

Це випливає з попередньої теореми, тому що будь-який розв'язок виражається через лінійну комбінацію n лінійно незалежних розв'язків.

Означення 3.1.2. Будь-які n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку називаються *фундаментальною системою розв'язків*.

3.1.4. Формула Остроградського – Ліувілля

Оскільки максимальна кількість лінійно незалежних розв'язків дорівнює n, то система $y_1(x), \ldots, y_n(x), y(x)$ буде залежною і $W[y_1(x), \ldots, y_n(x), y(x)] \equiv 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \ldots & y'_n(x) & y'(x) \\ \multicolumn{5}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Розкладаючи визначник за елементами останнього стовпця, одержимо

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \ldots & y'_n(x) \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} y^{(n)} -$$

$$-\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \ldots & y'_n(x) \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \ldots = 0.$$

Порівнюючи останній вираз із рівнянням

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n(x)y=0,$$

одержимо

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)}=-\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}}{W[y_1,y_2,\ \dots,y_n]}.$$

Однак, оскільки

$$\frac{d}{dx}W[y_1,y_2,\ \dots,y_n]=\begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & \dots & y''_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}+\ \dots$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix},$$

то, підставивши це значення повної похідної в попередній вираз, одержимо

$$-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}=\frac{\frac{d}{dx}W[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n]}{W[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n]}.$$

Розділимо змінні:

$$-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx=\frac{dW[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n]}{W[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n]}.$$

Проінтегрувавши останній вираз, дістанемо

$$\ln W_1[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n]-\ln W_1[y_1(x_0),\ \dots\ ,y_n(x_0)]=-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx,$$

або

$$W[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n]=W[y_1(x_0),\ \dots\ ,y_n(x_0)]e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Отримана формула називається *формулою Остроградського – Ліувілля*. Зокрема, якщо рівняння має вигляд

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +p_n(x)y=0,$$

то формулу запишемо так:

$$W[y_1(x),y_2(x),\ \dots\ ,y_n(x)]=W[y_1(x_0),y_2(x_0),\ \dots\ ,y_n(x_0)]e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(x)dx}.$$

3.1.5. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_ny=0.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y=e^{\lambda x}$. Продиференціювавши його, одержимо

$$y'=\lambda e^{\lambda x},\ y''=\lambda^2e^{\lambda x},\ \dots\ y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}.$$

Підставивши $y,\ y',\ \dots\ ,y^{(n)}$ у диференціальне рівняння, отримаємо

$$\lambda^{(n)}e^{\lambda x}+a_1\lambda^{(n-1)}e^{\lambda x}+\ \dots\ +a_ne^{\lambda x}=0.$$

Скоротивши це рівняння на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda^{(n)}+a_1\lambda^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n=0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів. Залежно від їхнього вигляду матимемо різні розв'язки.

1. Нехай $\lambda_1,\lambda_2,\ \dots\ ,\lambda_n$ дійсні та різні. Тоді функції $e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\ \dots\ ,e^{\lambda_n x}$ є розв'язками, а оскільки всі λ_i різні, то $e^{\lambda_i x}$ – лінійно незалежні розв'язки, тобто $\left\{e^{\lambda_i x}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ є фундаментальною системою розв'язків. Її загальним розв'язком буде лінійна комбінація $y=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i e^{\lambda_i x}$.

2. Нехай маємо комплексно-спряжені корені $\lambda=p+iq$, $\overline{\lambda}=p-iq$. Їм відповідають розв'язки $e^{(p+iq)x}$, $e^{(p-iq)x}$. Розкладаючи їх за формулою Ейлера, одержимо

$$e^{(p+iq)x}=e^{px}e^{iqx}=e^{px}\cos qx+ie^{px}\sin qx=u(x)+iv(x),$$
$$e^{(p-iq)x}=e^{px}e^{-iqx}=e^{px}\cos qx-ie^{px}\sin qx=u(x)-iv(x).$$

Як випливає із властивості 3.1.6, функції $u(x)$ та $v(x)$ будуть окремими розв'язками. Отже, кореням $\lambda=p+iq$, $\overline{\lambda}=p-iq$ відповідають два лінійно незалежні розв'язки $u=e^{px}\cos qx$, $v=e^{px}\sin qx$. Загальним розв'язком, що відповідає цим двом кореням, буде

$$y=C_1e^{px}\cos qx+C_2e^{px}\sin qx.$$

3. Нехай λ – корінь кратністю k, тобто

$$\lambda_1=\lambda_2=\ \dots\ =\lambda_k,\ k\le n.$$

а) Розглянемо випадок $\lambda=0$. Тоді характеристичне рівняння

$$\lambda^{(n)}+a_1\lambda^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n=0$$

вироджується у рівняння

$$\lambda^{(n)}+a_1\lambda^{(n-1)}+\ \dots\ +a_{n-k}\lambda^{\kappa}=0.$$

Диференціальне рівняння, що відповідає цьому характеристичному рівнянню, запишемо як

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ \dots \ + a_{n-k} y^{(k)} = 0.$$

Неважко бачити, що частковими лінійно незалежними розв'язками цього рівняння будуть функції $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$. Загальним розв'язком, що відповідає кореню $\lambda = 0$ кратністю k, буде лінійна комбінація цих функцій

$$y = C_1 + C_2 x + \ \dots \ + C_k x^{k-1}.$$

б) Нехай $\lambda = v \neq 0$ – дійсний корінь. Зробивши заміну $y = e^{vx} z$, на підставі властивості 3.1.2 лінійних рівнянь після підстановки знову одержимо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$z^{(k)} + b_1 z^{(k-1)} + \ \dots \ + b_k z = 0.$$

Причому, оскільки $y_i(x) = {}^{\lambda_i x}$, а $z_i(x) = e^{\mu_i x}$, то показники λ_i, μ_i пов'язані співвідношенням $\lambda_i = v_i + \mu_i$. Звідси кореню $\lambda = v$ кратністю k відповідає корінь $\mu = 0$ кратністю k. Як випливає з попереднього пункту, кореню $\mu = 0$ кратністю k відповідає загальний розв'язок $z = C_1 + C_2 x + \ \dots, + C_k x^{k-1}$. З огляду на те, що $y = e^{vx} z$, кореню $\lambda = v$ кратністю k відповідає розв'язок

$$y = C_1 e^{vx} + C_2 x e^{vx} + \ \dots \ + C_k x^{k-1} e^{vx}.$$

в) Нехай характеристичне рівняння має корені $\lambda = p + iq$, $\overline{\lambda} = p - iq$ кратністю k. Проводячи аналогічні викладки, одержимо, що їм відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$e^{px} \cos qx, \ x e^{px} \cos qx, \ \dots, \ x^{k-1} e^{px} \cos qx;$$

$$e^{px} \sin qx, \ x e^{px} \sin qx, \ \dots, \ x^{k-1} e^{px} \sin qx,$$

а загальним розв'язком, що відповідає цим кореням, буде

$$y = C_1 e^{px} \cos qx + C_2 x e^{px} \cos qx + \ \dots \ + C_k x^{k-1} e^{px} \cos qx +$$

$$+ C_{k+1} e^{px} \sin qx + C_{k+2} x e^{px} \sin qx + \ \dots \ + C_{2k} x^{k-1} e^{px} \sin qx.$$

Наведемо кілька прикладів розв'язання лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. Розв'язати рівняння $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв'язок шукатимемо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Тоді $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Підставивши отримані значення в диференціальне рівняння, одержимо $\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0$. Скоротивши останнє рівняння на $e^{\lambda x}$, отримаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Його коренями будуть $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$. Їм відповідають два лінійно незалежні розв'язки $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-x}$. Загальним розв'язком диференціального рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

2. Розв'язати рівняння $y'' + y' + 2y = 0$.

Розв'язок шукаємо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Тоді $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Підставивши отримані значення в диференціальне рівняння, одержимо $\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0$. Скоротимо останнє рівняння на $e^{\lambda x}$. Дістанемо $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$. Коренями характеристичного рівняння будуть $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Їм відповідають два лінійно незалежні розв'язки $y_1(x) = e^{-x}\cos x$, $y_2(x) = e^{-x}\sin x$. Загальним розв'язком рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x.$$

3. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Розв'язок шукатимемо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Тоді $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Підставимо отримані значення в диференціальне рівняння, одержимо $\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0$. Скоротимо останнє рівняння на $e^{\lambda x}$. Отримаємо $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Коренями характеристичного рівняння будуть $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$. Оскільки вони кратні, то їм відповідатимуть два лінійно незалежні розв'язки $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = xe^{-2x}$. Загальним розв'язком рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння:

1.1. $y''-5y'+6y=0$;

1.2. $y''-4y'+2y=0$;

1.3. $y''-9y=0$;

1.4. $y''+6y'+13y=0$;

1.5. $y''-y'=0$;

1.6. $y''-4y'+15y=0$;

1.7. $y''+2y'+y=0$;

1.8. $y''-6y'+34y=0$;

1.9. $2y''+5y'+2y=0$;

1.10. $y''+4y=0$;

1.11. $y''-4y=0$;

1.12. $y''+2y'+10y=0$;

1.13. $y''+3y'=0$;

1.14. $y''+y=0$;

1.15. $y''-y'-2y=0$.

2. Знайти частинні розв'язки (розв'язати задачі Коші), що задовольняють зазначені початкові умови при $x=0$:

2.1. $y''-5y'+4y=0$; $y=5$, $y'=8$;

2.2. $y''+3y'+2y=0$; $y=1$, $y'=-1$;

2.3. $y''+4y=0$; $y=0$, $y'=2$;

2.4. $y''+2y'=0$; $y=1$, $y'=0$.

3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Загальний вигляд лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n(x)y=b(x)\,.$$

3.2.1. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

Властивість 3.2.1. Якщо $y_0(x)$ – розв'язок лінійного однорідного рівняння, $y_1(x)$ – розв'язок неоднорідного рівняння, то $y = y_0(x) + y_1(x)$ буде розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Дійсно, нехай $y_0(x)$ і $y_1(x)$ – розв'язки відповідно однорідного та неоднорідного рівнянь, тобто

$$a_0(x){y_0}^{(n)}(x) + a_1(x){y_0}^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y_0(x) \equiv 0,$$
$$a_0(x){y_1}^{(n)}(x) + a_1(x){y_1}^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y_1(x) \equiv b(x).$$

Тоді

$$a_0(x)[y_0(x) + y_1(x)]^{(n)} + a_1(x)y_0(x) + y_1(x)^{(n-1)} + \dots$$
$$+ a_n(x)y_0(x) + y_1(x) = [a_0(x){y_0}^{(n)}(x) + a_1(x){y_0}^{(n-1)}(x) + \dots$$
$$+ a_n(x)y_0(x)] +$$
$$+ [a_0(x){y_1}^{(n)}(x) + a_1(x){y_1}^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y_1(x)] \equiv b(x),$$

тобто $y = y_0(x) + y_1(x)$ – розв'язок неоднорідного диференціального рівняння.

Властивість 3.2.2 (принцип суперпозиції). Якщо $y_i(x), \quad i = \overline{1, m}$ – розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = b_i(x), \;\; i = \overline{1, m},$$

то $y = \sum\limits_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$ із довільними сталими C_i буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = \sum_{i=1}^{m} C_i b_i(x).$$

Дійсно, нехай $y_i(x)$ – розв'язки відповідних неоднорідних рівнянь, тобто

$$a_0(x){y_i}^{(n)}(x) + a_1(x){y_i}^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y_i(x) \equiv b_i(x).$$

Склавши лінійну комбінацію з рівнянь та їхніх правих частин із коефіцієнтами C_i, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} C_i[a_0(x)y_i^{(n)}(x)+a_1(x)y_i^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y_i(x)] \equiv \sum_{i=1}^{m} C_i b_i(x)$$

або, перегрупувавши доданки, запишемо

$$a_0(x)\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right]^{(n)}+a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right]^{(n-1)}+\dots$$

$$+a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} C_i b_i(x),$$

що й було потрібно довести.

Властивість 3.2.3. Якщо комплексна функція $y=u(x)+iv(x)$ із дійсними елементами є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння з комплексною правою частиною $b(x)=f(x)+ip(x)$, то дійсна частина $u(x)$ є розв'язком рівняння із правою частиною $f(x)$, а уявна частина $v(x)$ є розв'язком рівняння із правою частиною $p(x)$.

Дійсно, як випливає з умови,

$$a_0(x)[u(x)+iv(x)]^{(n)}+a_1(x)[u(x)+iv(x)]^{(n-1)}+\ \dots$$
$$+a_n(x)[u(x)+iv(x)] \equiv f(x)+ip(x).$$

Розкривши дужки, одержимо

$$[a_0(x)u^{(n)}(x)+a_1(x)u^{(n-1)}(x)+\ \dots+a_n(x)u(x)]+$$
$$+i[a_0(x)v^{(n)}(x)+a_1(x)v^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)v(x)]=f(x)+ip(x).$$

Комплексні вирази дорівнюють один одному тоді й тільки тоді, коли дорівнюють одна одній окремо дійсні та уявні частини, тобто

$$a_0(x)u^{(n)}(x)+a_1(x)u^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)u(x) \equiv f(x),$$
$$a_0(x)v^{(n)}(x)+a_1(x)v^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)v(x) \equiv p(x),$$

що й потрібно було довести.

Теорема 3.2.1. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається із загального розв'язку лінійного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Доведення. Нехай $y_{одн} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, а $y_{неодн}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Тоді, як випливає із властивості 3.2.1 розв'язків неоднорідних рівнянь,

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + y_{неодн}(x)$$

буде розв'язком неоднорідного рівняння. Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто вибором коефіцієнтів C_i можна розв'язати довільну задачу Коші

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Дійсно, оскільки $y_{одн} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, то $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лінійно незалежні, а отже, визначник Вронського $W[y_1, y_2, \dots y_n] \neq 0$. Тому неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{неодн}(x_0) \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) = y'_0 - y'_{неодн}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{неодн}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

має єдиний розв'язок для довільних наперед обраних значень $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$. Нехай розв'язком системи буде $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$. Тоді, як випливає із системи, функція

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x) + y_{неодн}(x)$$

є розв'язком поставленої задачі Коші.

Як випливає з теореми для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, треба шукати загальний розв'язок однорідного рівняння, тобто будь-які n лінійно незалежні розв'язки та якийсь частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Розглянемо три методи побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

3.2.2. Метод варіації довільної сталої побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукають у такому самому вигляді, як і розв'язок однорідного, але сталі C_i, $i = \overline{1, n}$ вважають невідомими функціями.

Нехай загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(x)y = 0$$

записано як

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ ... \ + C_n y_n(x).$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(x)y = b(x)$$

шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ ... \ + C_n(x)y_n(x),$$

де $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – невідомі функції. Оскільки підбором n функцій необхідно задовольнити одне рівняння, тобто одну умову, то $n-1$ умову можна накласти довільно. Розглянемо першу похідну від записаного розв'язку

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x)$$

і поставимо вимогу, щоб $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i(x) = 0.$

Розглянемо другу похідну

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x)$$

і поставимо вимогу, щоб $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'(x) = 0.$

Продовжимо процес узяття похідних до $(n-1)$-ї

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x)$$

і поставимо вимогу, щоб $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0.$

На цьому $(n-1)$-ша умова вичерпалася, а для n-ї похідної справедливо

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x).$$

Підставимо взяту функцію та її похідні в неоднорідне диференціальне рівняння

$$a_0(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x)\right] + a_0(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-1)}(x)\right] + \ \ldots$$

$$+ a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}(x)\right] + \ \ldots \ + a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x)\right] = b(x).$$

Оскільки $y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i\,(x)$ – розв'язок однорідного диференціального рівняння, то після скорочення одержимо n-ту умову

$$\left[\sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-1)}(x)\right] = \frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Додаючи перші $(n-1)$ умови, отримаємо систему

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) + \ \ldots \ + C_n' y_n(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)}(x) + C_2' y_2^{(n-2)}(x) + \ \ldots \ + C_n' y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)}(x) + C_2' y_2^{(n-1)}(x) + \ \ldots \ + C_n' y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Оскільки визначником системи є визначник Вронського і він відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок

$$C_1(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(x) & \dots\dots\dots\dots\dots & y_n(x)\\ & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0 & y_2^{(n-2)}(x) & \dots\ \dots\dots\dots & y_n^{(n-2)}(x)\\ \dfrac{b(x)}{a_0(x)} & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}}{W[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n]}dx,\ \dots\ ,$$

$$C_n(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{n-1}(x) & 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots. & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & 0\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \dfrac{b(x)}{a_0(x)}\end{vmatrix}}{W[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n]}dx.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння запишемо як

$$y=\overline{C_1}\,y_1(x)+\overline{C_2}\,y_2(x)+\ \dots\ +\overline{C_n}\,y_n(x)+y_{неодн}(x),$$

де $\overline{C_i}$ – довільні сталі, а

$$y_{неодн}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ \dots\ +C_n(x)y_n(x).$$

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x)$$

і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{одн}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

то частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд

$$y_{неодн}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x).$$

Для знаходження функцій $C_1(x), C_2(x)$ маємо систему

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0\\ C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=\dfrac{b(x)}{a_0(x)}.\end{cases}$$

Звідси

$$C_1(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ \dfrac{b(x)}{a_0(x)} & y_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}dx,\quad C_2(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}y_1(x) & 0\\ y_1'(x) & \dfrac{b(x)}{a_0(x)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}dx.$$

Одержимо $y_{неодн}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ з обчисленими функціями $C_1(x)$ та $C_2(x)$.

3.2.3. Метод Коші

Нехай $y=K(x,s)$ – розв'язок однорідного диференціального рівняння, що задовольняє умови

$$K(s,s)=K_x^{'}(s,s)=\ ...\ =K_x^{(n-2)}(s,s)=0,\ K_x^{(n-1)}(s,s)=1.$$

Тоді функція $y(x)=\int_{x_0}^{x}K(x,s)\dfrac{b(s)}{a_0(s)}ds$ буде розв'язком неоднорідного рівняння, що задовольняє нульові початкові умови $y(x_0)=y'(x_0)=\ ...\ =y^{(n-1)}(x_0)=0.$

Дійсно, розглянемо похідні від функції $y(x)$:

$$y'(x)=\int_{x_0}^{x}K_x^{'}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Оскільки $K(x,x)=0$, то $y'=\int_{x_0}^{x}K_x^{'}(x,s)\dfrac{b(s)}{a_0(s)}ds.$

Аналогічно

$$y''(x)=\int_{x_0}^{x}K_x^{''}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{'}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=\int_{x_0}^{x}K_x^{''}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

……………………………………………………

$$y^{(n-1)}(x)=\int_{x_0}^{x}K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-2)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=$$

$$=\int_{x_0}^{x}K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

$$y^{(n)}(x)=\int_{x_0}^{x}K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-1)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Оскільки $K_x^{(n-1)}(s,s)=1$, то

$$y^{(n)}=\int_{x_0}^{x}K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Підставивши функцію $y(x)$ та її похідні у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0(x)\left[\int_{x_0}^{x}K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}\right]+a_1(x)\left[\int_{x_0}^{x}K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]+$$

$$+a_n(x)\left[\int_{x_0}^{x}K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left[a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \dots\ +a_n(x)K(x,s)\right]\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+$$

$$+b(x)=b(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то

$$a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \dots\ +a_n(x)K(x,s)\equiv 0.$$

У такий спосіб показано, що $y(x)=\int_{x_0}^{x}K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Підставляючи $x=x_0$ у значення $y(x),\ y'(x),\ \dots\ ,\ y^{(n)}(x)$, отримаємо

$$y(x_0)=y'(x_0)=\ \dots\ =y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Для знаходження функції $K(x,s)$ (інтегрального ядра, або ядра Коші) можна використати такий спосіб. Якщо $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, то його загальний розв'язок

$$y_{одн}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком однорідного рівняння, то його слід шукати у вигляді

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x)+\ldots+C_n(s)y_n(x).$$

Відповідно початкові умови

$$K(s,s)=0 \longrightarrow C_1(s)y_1(s)+C_2(s)y_2(s)+\ldots+C_n(s)y_n(s)=0$$

$$K_x'(s,s)=0 \longrightarrow C_1(s)y_1'(s)+C_2(s)y_2'(s)+\ldots+C_n(s)y_n'(s)=0$$

....

$$K_x^{(n-2)}(s,s)=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_1(s)y_1^{(n-2)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-2)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-2)}(s)=0,$$

$$K_x^{(n-1)}(s,s)=1 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_1(s)y_1^{(n-1)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-1)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-1)}(s)=1.$$

Звідси

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(s) & \ldots & y_n(s) \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ 1 & y_2^{(n-1)}(s) & \ldots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W[y_1(s),y_2(s),\ldots,y_n(s)]},$$

$$C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & 0 & \ldots & y_n(s) \\ . & . & \ldots & . \\ y_1^{(n-2)}(s) & 0 & \ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1^{(n-1)}(s) & 1 & \ldots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W[y_1(s),y_2(s),\ldots,y_n(s)]},$$

$$,\ldots,$$

$$C_n(s)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & \ldots & y_{n-1}(s) & 0 \\ . & \ldots & \ldots & . \\ y_1^{(n-2)}(s) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(s) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(s) & \ldots & y_n^{(n-1)}(s) & 1 \end{vmatrix}}{W[y_1(s),y_2(s),\ldots,y_n(s)]}.$$

Ядро $K(x,s)$ запишемо у вигляді

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x)+...+C_n(s)y_n(x)$$

з отриманими функціями $C_1(s),C_2(s),...,C_n(s)$.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x),$$

то функція $K(x,s)$ матиме вигляд

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x),$$

де

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}},\quad C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}}.$$

Звідси

$$K(x,s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}y_1(x)+\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}y_2(x)}{W[y_1(s),y_2(s)]}=$$

$$=\frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}.$$

3.2.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Нехай для простоти викладок $a_0(x)\equiv 1$. Якщо лінійне диференціальне рівняння є рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а $b(x)$ – функція спеціального вигляду, то частинний розв'язок можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

1. Нехай $b(x)$ має вигляд багаточлена, тобто

$$b(x)=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ ...+A_{s-1}x+A_s\,.$$

а) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda\neq 0$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{неодн}=B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ ...+B_{s-1}x+B_s\,,$$

де $B_0,\ ...\ ,B_s$ – невідомі сталі. Тоді

$$y'_{неодн} = sB_0x^{s-1} + (s-1)B_1x^{s-2} + \ ... + B_{s-1},$$
$$y''_{неодн} = s(s-1)B_0x^{s-2} + (s-1)(s-2)B_1x^{s-3} + \ ... + 2\cdot 1\cdot B_{s-2},$$
$$...$$

Підставляючи отримані вирази для похідних у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$\begin{gathered} a_0[...] + \\ ... \\ + a_{n-2}[s(s-1)B_0x^{s-2} + (s-1)(s-2)B_1x^{s-3} + \ ... + 2\cdot 1\cdot B_{s-1}] + \\ + a_{n-1}[sB_0x^{s-1} + (s-1)B_1x^{s-2} + \ ... + B_{s-1}] + \\ + a_n[B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ ... + B_s] = \\ = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ... + A_{s-1}x + A_s. \end{gathered}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, запишемо

$$\begin{array}{r|l} x^s & a_nB_0 = A_0 \\ x^{s-1} & a_nB_1 + sa_{n-1}B_0 = A_1 \\ x^{s-2} & a_nB_2 + (s-1)a_{n-1}B_1 + s(s-1)a_{n-2}B_0 = A_2 \end{array}$$
$$...$$

Оскільки характеристичне рівняння не має нульового кореня, то $a_n \neq 0$. Звідси

$$B_0 = \frac{1}{a_n}A_0, \ B_1 = \frac{1}{a_n}[A_1 - sa_{n-1}B_0], \ ...$$

б) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має нульовий корінь кратністю r. Тоді диференціальне рівняння має вигляд

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ ... \ + a_{n-r}y^{(r)} = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ... \ + A_s.$$

Зробивши заміну $y^{(r)} = z$, отримаємо диференціальне рівняння

$$a_0z^{(n-r)} + a_1z^{(n-r-1)} + \ ... \ + a_{n-r}z = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ... \ + A_s,$$

характеристичне рівняння якого вже не має нульового кореня, тобто повернемося до попереднього випадку. Звідси частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$z_{неодн} = \overline{B_0}\,x^s + \overline{B_1}\,x^{s-1} + \ ... \ + \overline{B_s}.$$

Проінтегрувавши його r разів, одержимо частинний розв'язок вихідного однорідного рівняння

$$y_{неодн} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ ... \ + B_s) x^r.$$

2. Нехай $b(x)$ має вигляд

$$b(x) = e^{px}(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ ... \ + A_s).$$

а) Розглянемо випадок, коли p не є коренем характеристичного рівняння. Зробимо заміну:

$$y = e^{px} z,$$

$$y' = pe^{px} z + e^{px} z' = e^{px}(pz + z'),$$

$$y'' = pe^{px}(pz + z') + e^{px}(pz' + z'') = e^{px}(p^2 z + 2pz' + z''),$$

$$...$$

$$y^{(n)} = e^{px}(p^n z + np^{n-1} z' + \ ... \ + z^{(n)}).$$

Підставивши отримані вирази у вихідне диференціальне рівняння, дістанемо

$$e^{px}[B_0 z^{(n)} + B_1 z^{(n-1)} + \ ... \ + B_n z] = e^{px}[A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ ... \ + A_s].$$

Тут B_i – сталі коефіцієнти, що виражаються через a_i та p.

Скоротивши останнє рівняння на e^{px}, отримаємо рівняння

$$B_0 z^{(n)} + B_1 z^{(n-1)} + \ ... \ + B_n z = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ ... \ + A_s,$$

причому, оскільки p не є коренем характеристичного рівняння, то після заміни $y = e^{px} z$ отримане диференціальне рівняння не матиме коренем характеристичного рівняння $\mu = 0$. Отже, повернулися до випадку 1а. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$z_{неодн} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ ... \ + B_s,$$

а частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння – у вигляді

$$y_{неодн} = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ ... \ + B_s).$$

б) Розглянемо випадок, коли p – корінь характеристичного рівняння кратністю r. Це означає, що після заміни $y = e^{px} z$ і скорочення на e^{px} одержимо диференціальне рівняння, що має коренем характеристичного рівняння число $\mu = 0$ кратністю r, тобто

$$B_0 z^{(n)} + B_1 z^{(n-1)} + \ \dots \ + B_{n-r} z^{(r)} = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ \dots \ + A_s.$$

Як випливає із п. 1б, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$z_{неодн} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + B_s) x^r,$$

а частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння – у вигляді

$$y_{неодн} = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + B_s) x^r.$$

3. Нехай $b(x)$ має вигляд

$$b(x) = e^{px}[P_s(x)\cos qx + Q_l(x)\sin qx],$$

де $P_s(x), Q_l(x)$ – багаточлени степеня s та l, відповідно, і, наприклад, $l \le s$. Використовуючи формулу Ейлера, перетворимо вираз до вигляду

$$b(x) = e^{(p+iq)x} R_s(s) + e^{(p-iq)x} T_s(x),$$

де $R_s(x)$, $T_s(x)$ – багаточлени степеня не вище ніж s. Використовуючи властивості 3.2.2, 3.2.3 розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь, а також випадки 2а, б знаходження частинного розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь, частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

а) $$y_{неодн} = e^{px}[(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s)\cos qx + \\ + (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s)\sin qx],$$

якщо $p \pm iq$ не є коренем характеристичного рівняння;

б) $$y_{неодн} = e^{px}[(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s)\cos qx + \\ + (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s)\sin qx] x^r,$$

якщо $p \pm iq$ є коренем характеристичного рівняння кратністю r.

Наведемо кілька прикладів розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь.

1. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

Загальний розв'язок складається із суми загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного рівнянь.

Розглянемо однорідне рівняння $y''-2y'+y=0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2-2\lambda+1=0$ має корені $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{одн}(x)=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації довільної сталої:

$$y_{част}(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x.$$

Для знаходження функцій $C_1(x), C_2(x)$ отримаємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=0 \\ C_1'(x)e^x+C_2'(x)(xe^x+e^x)=\dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1(x)=\int\frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{x} & xe^x+e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x+e^x \end{vmatrix}}dx=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}}dx=x+\overline{C_1},$$

$$C_2(x)=\int\frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x+e^x \end{vmatrix}}dx=\int\frac{e^{2x}}{xe^{2x}}dx=\ln|x|+\overline{C_2}.$$

Поклавши (для зручності) $\overline{C_1}=0$, $\overline{C_2}=0$, одержимо

$$y_{част}(x)=xe^x+xe^x\ln|x|.$$

Загальний розв'язок

$$y_{заг}(x)=C_1e^x+C_2xe^x+xe^x\ln|x|.$$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

Загальний розв'язок складається із суми загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного рівнянь.

Розглянемо однорідне рівняння $y''+3y'+2y=0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2+3\lambda+2=0$ має корені $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{одн}(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо методом Коші. Ураховуючи загальний розв'язок однорідного рівняння, функцію $K(x,s)$ шукаємо у вигляді

$$K(x,s)=C_1(s)e^{-x}+C_2(s)e^{-2x}.$$

Початкові умови такі:

$$K(s,s)=0 \rightarrow C_1(s)e^{-x}+C_2(s)e^{-2s}=0,$$

$$K'_x(s,s)=1 \rightarrow C_1(s)e^{-x}-2C_2(s)e^{-2s}=1.$$

Звідси

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{-2s}\\ 1 & -2e^{-2s}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-s} & e^{-2s}\\ -e^{-s} & -2e^{-2s}\end{vmatrix}}=\frac{-e^{-2s}}{-e^{-3s}}=e^{s},$$

$$C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}e^{-s} & 0\\ -e^{-s} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-s} & e^{-2s}\\ -e^{-s} & -2e^{-2s}\end{vmatrix}}=\frac{e^{-s}}{-e^{-3s}}=-e^{2s}.$$

Отже, $K(x,s)=e^{s-x}-e^{2(s-x)}$, а частинним розв'язком, що задовольняє нульові початкові умови, буде

$$y_{неод}(x)=\int_{x_0}^{x}[e^{s-x}-e^{2(s-x)}]\frac{1}{e^{s}+1}ds=$$

$$=e^{-x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{s}}{e^{s}+1}ds-e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{2s}}{e^{s}+1}ds=$$

$$= e^{-x}\left[\ln\left|e^{s}+1\right|\Big\|_{s==x_0}^{s=x} \right] - e^{-2x}\left[\int\limits_{x_0}^{x} \frac{e^{s}+1-1}{e^{s}+1} d(e^{s}) \right] =$$

$$= e^{-x}[\ln\left|e^{x}+1\right| - \ln\left|e^{x_0}+1\right|] + +e^{-2x}[(e^{x}-e^{x_0}) - \ln\left|e^{x}+1\right| + \ln\left|e^{x_0}+1\right|].$$

Ураховуючи, що початкові дані не задано, остаточно отримаємо

$$y_{загал}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}\ln\left|e^{x}+1\right| + e^{-2x}\ln\left|e^{x}+1\right|.$$

3. Розв'язати рівняння $y''+2y'+y = x^2+1$.

Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння $y''+2y'+y=0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2+2\lambda+1=0$ має корені $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-1$. Загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Оскільки праворуч стоїть багаточлен другого степеня і характеристичне рівняння не містить нульових коренів, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y_{неодн}(x) = ax^2+bx+c.$$

Звідси $y'_{неодн}(x) = 2ax+b$, $y''_{неодн}(x) = 2a$. Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння

$$2a = 2[2ax+b]+[ax^2+bx+c] = x^2+1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a=1 \\ x & 4a+b=0 \\ 1 & a+2b+c=1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4. \\ c=7 \end{cases}$$

Звідси загальний розв'язок

$$y_{загал}(ч) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 - 4x + 7.$$

4. Розв'язати рівняння $y'''+y''=x+1$.

Розв'язуємо однорідне рівняння $y'''+y''=0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^3+\lambda^2=0$ має корені $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=-1$. Загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}.$$

Оскільки праворуч стоїть багаточлен першого порядку, а характеристичне рівняння має нульовий корінь кратністю 2, то частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y_{неодн}(x) = x^2(ax+b), \text{ або } y_{неодн}(x) = ax^3 + bx^2.$$

Звідси

$$y'_{неодн}(x) = 3ax^2 + 2bx, \quad y''_{неодн}(x) = 6ax + 2b, \quad y'''_{неодн}(x) = 6a.$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння:

$$6a + [6ax + 2b] = x + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{array}{l} x \,|\, 6a = 1 \\ 1 \,|\, 6a + 2b = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = 0 \end{cases}.$$

Звідси загальний розв'язок

$$y_{загал}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{6}x^3.$$

5. Розв'язати рівняння $y'' + y = e^x x$.

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \pm i$. Загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Оскільки праворуч стоїть багаточлен першого порядку, помножений на експоненту, то частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y_{неодн}(x) = e^x(ax+b).$$

Звідси $y'_{неодн}(x) = e^x(ax + a + b)$, $y''_{неодн}(x) = e^x(ax + 2a + b)$.

Підставляємо одержані вирази у диференціальне рівняння:

$$e^x(ax + 2a + b) + e^x(ax + b) = e^x x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах:

$$\begin{array}{l} xe^x \,|\, 2a = 1 \\ e^x \;\; |\, 2a + 2b = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Звідси загальний розв'язок

$$y_{загал}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x (x-1).$$

6. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = e^x x.$

Розв'язуємо однорідне рівняння $y'' - 2y' + y = 0.$ Його характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 1.$ Загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Оскільки праворуч стоїть багаточлен першого порядку, а показник при експоненті є двократним коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y_{неодн}(x) = x^2 e^x (ax+b), \text{ або } y_{неодн}(x) = e^x (ax^3 + bx^2).$$

Звідси

$$y'_{неодн}(x) = e^x (ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx),$$

$$y''_{неодн}(x) = e^x (ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b).$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння:

$$e^x [ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b] -$$

$$-2e^x [ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx] + e^x (ax^3 + bx^2) = e^x x.$$

Після відповідних скорочень прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах:

$$\begin{array}{ll} xe^x & |6a + 4b + 2b = 1 \\ e^x & |2b = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = 0 \end{cases}.$$

Загальний розв'язок

$$y_{загал}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

7. Розв'язати рівняння $y'' - y = x \cos x + \sin x.$

Розв'язуємо однорідне рівняння $y'' - y = 0.$ Його характеристичне рівняння $\lambda^2 - 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = -1.$ Загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{неодн}(x) = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x.$$

Звідси

$$y'_{неодн}(x) = (cx+a+d)\cos x + (-ax-b+c)\sin x,$$

$$y''_{неодн}(x) = (-ax-b+2c)\cos x + (-cx-2a-d)\sin x.$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння:

$$(-ax-b+2c)\cos x + (-cx-2a-d)\sin x - (ax+b)\cos x -$$
$$-(cx+d)\sin x = x\cos x + \sin x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових виразах:

$$\begin{array}{l|l} x\cos x & -2a=1 \\ x\sin x & -2c=0 \\ \cos x & -b+2c-b=0 \\ \sin x & -2a-d-d=1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}.$$

Отже, загальний розв'язок

$$y_{загал}(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x\cos x.$$

8. Розв'язати рівняння $y''+2y'+2y = e^{-x}\sin x$.

Розв'язуємо однорідне рівняння $y''+2y'+2y=0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2+2\lambda+2=0$ має корені $\lambda_{1,2}=-1\pm i$. Загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{одн}(x) = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x.$$

Оскільки $\lambda_{1,2}=-1\pm i$ – корінь кратністю 1 (збігається із правою частиною рівняння), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$y_{неодн}(x) = xe^{-x}[a\cos x + b\sin x].$$

Звідси

$$y'_{неодн}(x) = e^{-x}[(-a+b)x+a]\cos x + e^{-x}[(-a-b)x+b]\sin x,$$

$$y''_{неодн}(x) = e^{-x}\left[-2bx+2b\right]\cos x + e^{-x}\left[2ax-2a-2b\right]\sin x.$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння:

$$e^{-x}[-2bx+2b]\cos x+e^{-x}[2ax-2a-2b]\sin x+$$

$$+2e^{-x}[(-a+b)x+a]\cos x+2e^{-x}[(-a-b)x+b]\sin x+$$

$$+2e^{-x}[ax\cos x+bx\sin x]=e^{-x}\sin x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах:

$$\begin{array}{l} e^{-x}\cos x\,|2a+2b=0 \\ e^{-x}\sin x\,|-2a-2b+b=1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}.$$

Отже, загальний розв'язок

$$y_{загал}(x)=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x+xe^{-x}[-\cos x+\sin x].$$

Наведемо кілька прикладів розв'язання диференціальних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами з використанням пакету Sage.

1. Розв'язати рівняння (показати загальний розв'язок), побудувати поле напрямків і розв'язки задач Коші для $y''+4y'+4y=xe^{2x}$,

$$M_1(1,0,1), M_2(0,0,-1), M_3(-2,0,0), M_4(2,0,0).$$

Код:

```
#пошук загального розв'язку
x = var('x')
y = function('y')(x)
de = diff(y, x, 2) + 4 * diff(y, x) + 4 * y == x * e ^ (2 * x)
solution = desolve(de, y)
#відображення загального розв'язку
show('загальний розв'язок')
solution.show()
#розв'язок задачі Коші
show('розв'язок задач Коші')
solution = desolve(de, y, ics=[1, 0, 1])
solution.show()
solution1 = desolve(de, y, ics=[0, 0, -1])
solution1.show()
solution2 = desolve(de, y, ics=[-2, 0, 0])
solution2.show()
solution3 = desolve(de, y, ics=[2, 0, 0])
solution3.show()
#побудова поля напрямків
x, y = var('x', 'y')
f(x, y) = x * e ^ (2 * x) - 4 * y
```

```
plot = plot_slope_field(f, (x, -5, 5), (y, -5, 5),
headaxislength=3, headlength=3, axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])
#відображення розв'язку задачі Коші та поля напрямків
plot += desolve_rk4(f, y, ics=[1, 0, 1], ivar=x, output=' plot',
end_points=[-5, 5], thickness=3, color='yellow', linestyle = 'dashed')
plot1 = desolve_rk4(f, y, ics=[0, 0, -1], ivar=x, output='plot',
end_points=[-5, 5], thickness=3, color='blue', linestyle = 'solid')
plot2 = desolve_rk4(f, y, ics=[-2, 0, 0], ivar=x, output='plot',
end_points=[-5, 5], thickness=3, color='green', linestyle = 'dashdot')
plot3 = desolve_rk4(f, y, ics=[2, 0, 0], ivar=x, output='plot',
end_points=[-5, 5], thickness=3, color='red', linestyle = 'dotted')
show(plot + plot1 + plot2 + plot3, xmin=-5, xmax=5, ymin=-5, ymax=5)
```

Результат роботи програми:

загальний розвязок

$$\frac{1}{32}(2x-1)e^{(2x)} + (K_2 x + K_1)e^{(-2x)}$$

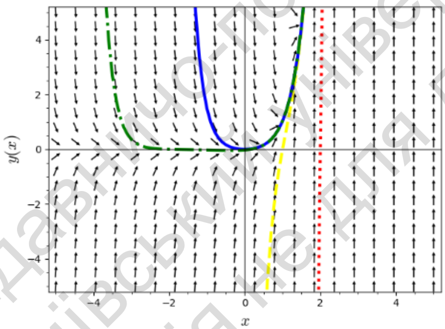
розвязок задач Коші

$$\frac{1}{32}(2x-1)e^{(2x)} - \frac{1}{32}\left(2x\left(3e^4-16e^2\right)-5e^4+32e^2\right)e^{(-2x)}$$

$$\frac{1}{32}(2x-1)e^{(2x)} - \frac{1}{32}(30x-1)e^{(-2x)}$$

$$\frac{1}{32}(2x-1)e^{(2x)} + \frac{1}{32}\left(18xe^{(-8)}+41e^{(-8)}\right)e^{(-2x)}$$

$$\frac{1}{32}(2x-1)e^{(2x)} - \frac{1}{32}\left(14xe^{8}-25e^{8}\right)e^{(-2x)}$$



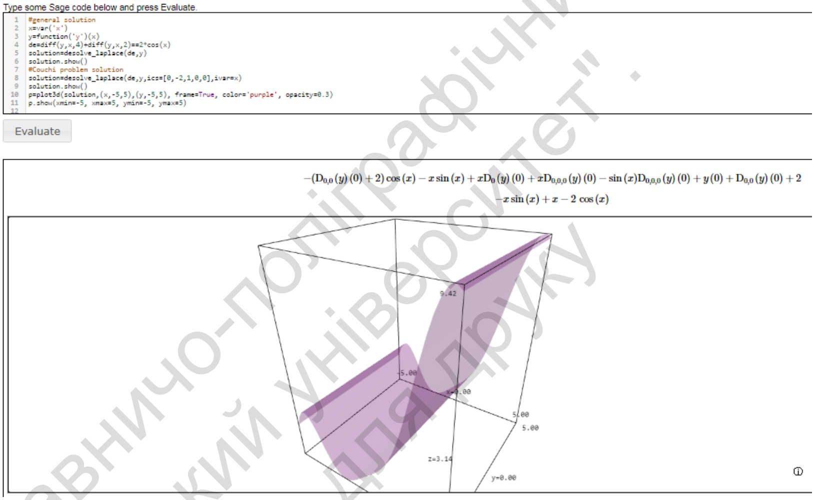
2. Розв'язати рівняння (показати загальний розв'язок), побудувати розв'язок задачі Коші

$$y^{IV}(x) + y''(x) = 2\cos(x), \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = y'''(0) = 0.$$

При розв'язанні цього прикладу використано апарат перетворення Лапласа, який детально буде розглянуто у розд. 8.

Код:

```
#general solution
x=var('x')
y=function('y')(x)
de=diff(y, x, 4)+diff(y, x, 2)==2*cos(x)
solution=desolve_laplace(de,y)
solution.show()
#Couchi problem solution
solution=desolve_laplace(de, y, ics=[0, -2, 1, 0, 0], ivar=x)
solution.show()
p=plot3d(solution,(x,-5,5),(y,-5,5), frame=True, color='purple', opacity=0.3)
p.show(xmin=-5, xmax=5, ymin=-5, ymax=5
```



3. Розв'язати рівняння (показати загальний розв'язок), побудувати поле напрямків і розв'язки задач Коші

$$y''(x) + y(x) = x\sin(x),$$

$$M_1(1,2,3),\ M_2(-2,3,4),\ M_3(-3,-4,-5),\ M_4(4,-5,-6).$$

Код:

```
#general solution
y=function('y')(x)
de=diff(y, x, 2)+y==x*sin(x)
solution=desolve(de, y)
solution.show()
#Couchi problem solution
csol1=desolve(de, y, ics=[1, 2, 3])
```

```
csol1.show()
csol2=desolve(de, y, ics=[-2, 3, 4])
csol2.show()
csol3=desolve(de, y, ics=[-3, -4, -5])
csol3.show()
csol4=desolve(de, y, ics=[4, -5, -6])
csol4.show()
#direction field
x,y=var('x,y')
f(x,y)= x*sin(x)+y
p=plot_slope_field(f,(x,-10,10),(y,-10,10), headaxislength=2, headlength=2)
#plot of Couchi problem solution
p1=desolve_rk4(f, y, ics=[1, 2], ivar=x, output='plot',
end_points=[-10, 10], thickness=2, rgbcolor=hue(0.1), linestyle=':')
p2=desolve_rk4(f, y, ics=[-2, 3], ivar=x, output='plot',
end_points=[-10, 10], thickness=2, rgbcolor=hue(0.3), linestyle='--')
p3=desolve_rk4(f, y, ics=[-3, -4], ivar=x, output='plot',
end_points=[-10, 10], thickness=2, rgbcolor=hue(0.5))
p4=desolve_rk4(f, y, ics=[4, -5], ivar=x, output='plot',
end_points=[-10, 10], thickness=2, rgbcolor=hue(0.7), linestyle='-.')
show(p+p1+p2+p3+p4, xmin=-10, xmax=10, ymin=-10, ymax=10)
```

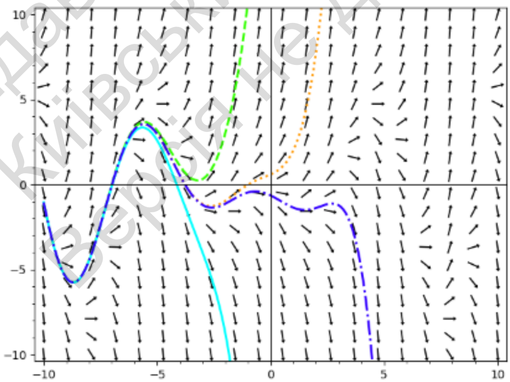
$$-\frac{1}{8}\left(2x^2-1\right)\cos(x)+K_2\cos(x)+K_1\sin(x)+\frac{1}{4}x\sin(x)$$

$$-\frac{1}{8}\left(2x^2-1\right)\cos(x)+\frac{1}{4}x\sin(x)+\frac{\left(\cos(1)^2-4\left(\cos(1)+6\right)\sin(1)+3\sin(1)^2+16\cos(1)\right)\cos(x)}{8\left(\cos(1)^2+\sin(1)^2\right)}+\frac{\left(\cos(1)^2-\left(\cos(1)-8\right)\sin(1)-\sin(1)^2+12\cos(1)\right)\sin(x)}{4\left(\cos(1)^2+\sin(1)^2\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left(2x^2-1\right)\cos(x)+\frac{1}{4}x\sin(x)+\frac{\left(7\cos(2)^2-8\left(\cos(2)-4\right)\sin(2)+9\sin(2)^2+24\cos(2)\right)\cos(x)}{8\left(\cos(2)^2+\sin(2)^2\right)}-\frac{\left(2\cos(2)^2-\left(\cos(2)-12\right)\sin(2)-2\sin(2)^2-16\cos(2)\right)\sin(x)}{4\left(\cos(2)^2+\sin(2)^2\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left(2x^2-1\right)\cos(x)+\frac{1}{4}x\sin(x)+\frac{\left(17\cos(3)^2-4\left(3\cos(3)+10\right)\sin(3)+19\sin(3)^2-32\cos(3)\right)\cos(x)}{8\left(\cos(3)^2+\sin(3)^2\right)}-\frac{\left(3\cos(3)^2-\left(\cos(3)+16\right)\sin(3)-3\sin(3)^2+20\cos(3)\right)\sin(x)}{4\left(\cos(3)^2+\sin(3)^2\right)}$$

$$-\frac{1}{8}\left(2x^2-1\right)\cos(x)+\frac{1}{4}x\sin(x)+\frac{\left(31\cos(4)^2-16\left(\cos(4)-3\right)\sin(4)+33\sin(4)^2-40\cos(4)\right)\cos(x)}{8\left(\cos(4)^2+\sin(4)^2\right)}+\frac{\left(4\cos(4)^2-\left(\cos(4)+20\right)\sin(4)-4\sin(4)^2-24\cos(4)\right)\sin(x)}{4\left(\cos(4)^2+\sin(4)^2\right)}$$



Завдання для самостійної роботи

3. Розв'язати лінійні неоднорідні рівняння:

3.1. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$;

3.2. $y''+y=2\sec^3 x$;

3.3. $y''+4y=2\text{tg}x$;

3.4. $y''-y=\dfrac{x^2-2}{x^3}$;

3.5. $y''+2y'+y=3e^{-x\sqrt{x+1}}$.

Примітка. Якщо рівняння зі сталими коефіцієнтами, а функція $b(x)$ спеціального вигляду, то зручніше використовувати метод невизначених коефіцієнтів.

4. Знайти загальний розв'язок рівнянь:

4.1. $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$;

4.2. $y'''-3y'+2y=e^{-x}(4x^2+4x-10)$;

4.3. $y^{(4)}+8y''+16y=\cos x$;

4.4. $y^{(5)}+y'''=x^2-1$;

4.5. $y^{(4)}-y=xe^x+\cos x$;

4.6. $y^{(4)}+2y''+y=x^2\cos x$;

4.7. $y^{(4)}-y=5e^x\sin x+x^4$;

4.8. $y^{(4)}+5y''+4y=\sin x\cos 2x$;

4.9. $y'''-4y''+3y'=x^2xe^{2x}$;

4.10. $y^{(4)}+y''=7x-3\cos x$;

4.11. $y'''-y''-y'+y=3e^x+5x\sin x$;

4.12. $y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin 2x+2x^2$;

4.13. $y'''+y'=\sin x+x\cos x$;

4.14. $y'''-y=x^3-1$;

4.15. $y'''+y''=x^2+1+3xe^x$;

4.16. $y''' + y'' + y' + y = xe^{x}$;

4.17. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$;

4.18. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^{x}$;

4.19. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$;

4.20. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^{x}$;

4.21. $y^{(4)} + y'' = x^{2} + x$;

4.22. $y''' - 3y' + 2y = (2x^{2} - x)e^{x} + \cos x$;

4.23. $y^{(4)} - y = 5e^{x}\cos x + 3$;

4.24. $y^{(5)} - y''' = x^{2} + \cos x$;

4.25. $y^{(4)} - 2y'' + y' = e^{x}$;

4.26. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^{3}$;

4.27. $y^{(4)} + y''' = \cos 3x$.

РОЗДІЛ 4
Системи диференціальних рівнянь

Для багатьох прикладних задач необхідно визначити одразу кілька невідомих функцій із певної кількості диференціальних рівнянь, тобто знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь.

4.1. Загальна теорія

Співвідношення

$$\begin{cases} F_1(\dot{x}_1,\, \dot{x}_2,\, \dots \dot{x}_n,\, x_1,\, x_2,\, \dots\, ,x_n;t) = 0 \\ F_2(\dot{x}_1,\, \dot{x}_2,\, \dots \dot{x}_n,\, x_1,\, x_2,\, \dots\, ,x_n;t) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(\dot{x}_1,\, \dot{x}_2,\, \dots \dot{x}_n,\, x_1,\, x_2,\, \dots\, ,x_n;t) = 0 \end{cases}$$

називається *системою n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку*. Якщо система розв'язана відносно похідних і має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2,\, \dots\, , x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2,\, \dots\, , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2,\, \dots\, , x_n, t) \end{cases},$$

то вона називається *системою в нормальній формі*.

Означення 4.1.1. *Розв'язком системи диференціальних рівнянь* називається набір n неперервно диференційованих функцій $x_1(t), \dots ,x_n(t)$, що тотожно задовольняють кожне з рівнянь системи.

У загальному випадку розв'язок системи залежить від n довільних сталих і має вигляд $x_1(t, C_1,\, \dots\, ,C_n),\, \dots\, ,x_n(t, C_1,\, \dots\, ,C_n)$. Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку ставиться у такий спосіб: потрібно знайти розв'язок, що задовольняє початкові умови (умови Коші): $x_1(t_0)=x_1^0,\ \ldots\ ,x_n(t_0)=x_n^0$.

Означення 4.1.2. Розв'язок $x_1(t,C_1,\ldots,C_n),\ldots,\ x_n(t,C_1,\ldots,C_n)$ називається *загальним*, якщо за рахунок вибору сталих $C_1,\ \ldots,C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь досить важливим є поняття інтеграла системи. Залежно від гладкості (тобто диференційованості) можна розглядати два означення інтеграла.

Означення 4.1.3. 1) Функція $F(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n,t)$, що є сталою вздовж розв'язків системи, називається *інтегралом системи.*

2) Функція $F(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n,t)$, повна похідна якої внаслідок системи тотожно дорівнює нулю, називається *інтегралом системи*.

Для лінійних рівнянь існує поняття лінійної залежності й незалежності розв'язків. Для нелінійних рівнянь (систем рівнянь) аналогічним поняттям є функціональна незалежність.

Означення 4.1.4. Інтеграли $F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$, $F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$, $F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$, $\ldots$, $F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$ називаються *функціонально незалежними*, якщо не існує функції n змінних $\Phi(z_1,\ldots,\ z_n)$ такої, що

$$\Phi(F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,t),\ldots,F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,t))\equiv 0.$$

Теорема 4.1.1. Для того, щоб інтеграли $F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$, $F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,t),\ldots F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$ системи звичайних диференціальних рівнянь були функціонально незалежними, необхідно й достатньо, щоб визначник Якобі був відмінний від тотожного нуля, тобто

$$\frac{D(F_1,F_2,\ \ldots\ ,F_n)}{D(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n)}\neq 0.$$

Доведення наводиться в курсі математичного аналізу.

Означення 4.1.5. Якщо $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$ – інтеграл системи диференціальних рівнянь, то рівність $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)=C$ називається *першим інтегралом*.

Означення 4.1.6. Сукупність n функціонально незалежних інтегралів називається *загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь*.

Власне кажучи, загальний інтеграл – це загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у неявному вигляді.

Теорема 4.1.2 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші). Щоб система диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної, мала єдиний розв'язок, що задовольняє умови Коші $x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \dots\ ,\ x_n(t_0) = x_n^0,$ достатньо, щоб:

1) функції $f_1, f_2,\ \dots\ , f_n$ були неперервними за змінними $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n,\ t$ в околі точки $x_1^0, x_2^0,\ \dots\ , x_n^0, t_0$;

2) функції $f_1, f_2,\ \dots\ , f_n$ задовольняли умову Ліпшица за аргументами $x_1, x_2,\ \dots\ , x_n$ у тому самому околі.

Зауваження. Умову Ліпшица можна замінити більш грубою, але такою, що перевіряється легше, умовою існування обмежених частинних похідних, тобто

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right| \le M,\ i, j = 1,2,\ \dots\ , n.$$

4.1.1. Геометрична інтерпретація розв'язків

Назвемо $n+1$-вимірний простір змінних $x_1, x_2,\ \dots\ , x_n, t$ *розширеним фазовим простором* R^{n+1}. Тоді розв'язок $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t),\ \dots\ , x_n = x_n(t)$ визначає у просторі R^{n+1} деяку криву, яка називається *інтегральною кривою*. Загальний розв'язок (чи загальний інтеграл) визначає сім'ю інтегральних кривих, що всюди щільно заповнюють деяку область $D \subset R^n$ (область існування та єдиності розв'язків). Задача Коші ставиться як виділення із сім'ї інтегральних кривих окремої кривої, що проходить через задану початкову точку

$$M(x_1^0, x_2^0,\ \dots\ , x_n^0, t_0) \in D.$$

4.1.2. Механічна інтерпретація розв'язків

У евклідовому просторі R^n змінних $x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)$ розв'язок $x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t), \ \dots \ , \ x_n = x_n(t)$ визначає закон руху деякою траєкторією залежно від часу t. За такої інтерпретації функції $f_1, \ f_2, \ \dots \ , \ f_n$ є складовими швидкості руху, простір зміни перемінних називається фазовим простором, система – динамічною, а крива $x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t), \ \dots \ , \ x_n = x_n(t)$, по якій відбувається рух, – фазовою траєкторією. Фазова траєкторія є проєкцією інтегральної кривої на фазовий простір.

4.1.3. Зведення одного диференціального рівняння вищого порядку до системи рівнянь першого порядку

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Розглянемо заміну змінних

$$x \Rightarrow t, \ y \Rightarrow x_1,$$

$$\frac{dy}{dx} \Rightarrow x_2, \ \dots \ , \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \Rightarrow x_n.$$

Дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n) \end{cases}.$$

4.1.4. Зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння вищого порядку

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \\ \dot{x}_2 = f_2\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \end{cases}$$

і задано її розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ \dots \ , x_n = x_n(t).$ Якщо цей розв'язок підставити в перше рівняння, то отримаємо тотожність, яку можна диференціювати:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt}.$$

Підставивши замість $\dfrac{dx_i(t)}{dt}$ їхні значення, одержимо

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_i =$$

$$= F_2\left(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n\right)$$

Знову диференціюємо це рівняння і отримуємо

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} f_i = F_3\left(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n\right).$$

Продовжуючи процес далі, одержимо

$$\frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}\left(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n\right),$$

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n\left(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n\right).$$

Отримали систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \\ \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_2\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \\ \dfrac{d^n x_1}{dt^n} = F_n\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right). \end{cases}$$

Припустимо, що $\dfrac{D\left(f_1, F_2, \ \dots \ , F_{n-1}\right)}{D\left(x_2, x_3, \ \dots \ , x_n\right)} \neq 0$. Тоді систему перших $(n-1)$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \\ \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_2\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}\left(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t\right) \end{cases}$$

можна розв'язати відносно останніх $(n-1)$ змінних $x_2, x_3, \ \dots \ , x_n$ і одержати

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}\right) \\ x_3 = \varphi_3\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n\left(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}\right). \end{cases}$$

Підставивши одержані вирази в останнє рівняння, запишемо

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n\left(t, x_1, \varphi_2\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \ \dots \ ,\right.$$

$$\left.\varphi_n\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right)\right),$$

або, після перетворень,

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right),$$

і одержимо одне диференціальне рівняння n-го порядку.

У загальному випадку система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \end{cases}$$

зводиться до одного рівняння n-го порядку

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right)$$

і системи $(n-1)$ рівнянь зв'язку

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right) \\ x_3 = \varphi_3\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right). \end{cases}$$

Зауваження. Було зроблено припущення, що $\dfrac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0.$ Якщо цю умову не виконано, то можна зводити систему диференціальних рівнянь першого порядку до рівняння відносно інших змінних, наприклад відносно x_2.

4.1.5. Інтегровані комбінації

Означення 4.1.7. *Інтегрованою комбінацією* називається диференціальне рівняння, отримане шляхом перетворень із системи диференціальних рівнянь, яке можна легко інтегрувати:

$$d\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Одна комбінація, що інтегрується, дає можливість одержати одне кінцеве рівняння $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$, яке є першим інтегралом системи.

Геометрично перший інтеграл є n-вимірною поверхнею в $(n+1)$-вимірному просторі, що цілком складається з інтегральних кривих.

Якщо знайдено k інтегрованих комбінацій, то одержуємо k перших інтегралів

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1 \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_k. \end{cases}$$

Якщо інтеграли незалежні, то хоча б один із визначників

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} \neq 0.$$

Звідси із системи можна виразити k невідомих функцій $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ через інші та, підставивши їх у вихідну систему, понизити порядок до $(n-k)$ рівнянь. Якщо $n = k$ і всі інтеграли незалежні, то одержимо загальний інтеграл системи.

Найпоширенішим засобом знаходження комбінацій, що інтегруються, є використання систем у симетричному вигляді.

Систему диференціальних рівнянь, яку записано в нормальній формі

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1\left(x_1, x_2,\ \dots\ , x_n, t\right) \\ \dot{x}_2 = f_2\left(x_1, x_2,\ \dots\ , x_n, t\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n\left(x_1, x_2,\ \dots\ , x_n, t\right) \end{cases},$$

можна переписати як

$$\frac{dx_1}{f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n, t\right)} = \frac{dx_2}{f_2\left(x_1, x_2, \dots, x_n, t\right)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n\left(x_1, x_2, \dots, x_n, t\right)} = \frac{dt}{1}.$$

За такої форми запису всі змінні $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ рівнозначні.

Система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{X_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)} = \frac{dx_2}{X_2\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)}$$

називається *системою у симетричному вигляді*.

При знаходженні комбінацій, що інтегруються, найчастіше використовують властивість пропорційності, а саме: для систем у симетричному вигляді справедлива рівність

$$\frac{dx_1}{X_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)} = \frac{dx_2}{X_2\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)} =$$

$$= \frac{k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + \dots + k_n dx_n}{k_1 X_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) + k_2 X_2\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) + \dots + k_n X_n\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)}.$$

4.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь. Загальні положення

Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 +\ \dots\ + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 +\ \dots\ + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n1} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 +\ \dots\ + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

називається *лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь*.

Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n1} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

називається *лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь*.

Якщо ввести векторні позначення

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) \ \ a_{12}(t) \ \dots \ a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \ \ a_{22}(t) \ \dots \ a_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}(t) \ \ a_{n2}(t) \ \dots \ a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

то лінійну неоднорідну систему можна переписати як

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),$$

а лінійну однорідну систему – як

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Якщо функції $a_{ij}(t), \ f_i(t), \ i, j = \overline{1, n}$ неперервні в околі точки $(x_0, t_0) = \left(x_1^0, x_2^0, \ \dots \ , x_n^0, t_0\right)$, то виконано умови теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші та існує єдиний розв'язок

$$x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t), \ \dots \ , x_n = x_n(t)$$

системи рівнянь, що задовольняє початкові дані

$$x_1(t_0) = x_1^0, \ x_2(t_0) = x_2^0, \ \dots \ , x_n(t_0) = x_n^0.$$

4.2.1. Властивості розв'язків лінійних однорідних систем

Розглянемо основні властивості розв'язків систем лінійних неоднорідних рівнянь.

Властивість 4.2.1. Якщо вектор $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком лінійної однорідної системи, то й

$$Cx(t) = \begin{pmatrix} Cx_1(t) \\ Cx_2(t) \\ \dots \\ Cx_n(t) \end{pmatrix},$$

де C – стала скалярна величина, також є розв'язком цієї системи.

Дійсно, за умовою $\dot{x}(t) - A(t)x(t) \equiv 0$. Однак тоді й

$$\frac{d}{dt}\left[Cx(t)\right] - A(t)\left[Cx(t)\right] = C\left[\dot{x}(t) - A(t)x(t)\right] \equiv 0,$$

оскільки дорівнює нулю вираз у дужках, тобто $Cx(t)$ є розв'язком однорідної системи.

Властивість 4.2.2. Якщо дві векторні функції

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$$

є розв'язками однорідної системи, то їхня сума також буде розв'язком однорідної системи.

Дійсно, за умовою $\dot{x}_1(t) - A(t)x_1(t) \equiv 0$ і $\dot{x}_2(t) - A(t)x_2(t) \equiv 0$. Однак тоді й

$$\frac{d}{dt}\left[x_1(t) + x_2(t)\right] - A(t)\left[x_1(t) + x_2(t)\right] =$$
$$= \left[\dot{x}_1(t) - A(t)x_1(t)\right] + \left[\dot{x}_2(t) - A(t)x_2(t)\right] \equiv 0,$$

тому що дорівнюють нулю вирази в дужках, тобто $x_1(t)+x_2(t)$ є розв'язком однорідної системи.

Властивість 4.2.3. Якщо вектори

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, \; x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

є розв'язками однорідної системи, то їхня лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами також буде розв'язком однорідної системи.

Дійсно, за умовою $\dot{x}_i(t)-A(t)x_i(t)\equiv 0, \; i=\overline{1,n}.$ Однак тоді й

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\right]-A(t)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{n} C_i\left[\dot{x}_i(t)-A(t)x_i(t)\right]\equiv 0,$$

тому що дорівнює нулю кожний із доданків, тобто $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ є розв'язком однорідної системи.

Властивість 4.2.4. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $u(t)+iv(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна та уявна частини є розв'язками системи.

Дійсно, за умовою

$$\frac{d}{dt}[u(t)+iv(t)]-A(t)[u(t)+iv(t)]\equiv 0.$$

Розкривши дужки і зробивши перетворення, одержимо

$$[\dot{u}(t)-A(t)u(t)]+i[\dot{v}(t)-A(t)v(t)]\equiv 0.$$

А комплексний вираз дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли дорівнюють нулю дійсна й уявна частини, тобто

$$\dot{u}(t)-A(t)u(t)\equiv 0, \; \dot{v}(t)-A(t)v(t)\equiv 0,$$

що й потрібно було довести.

Означення 4.2.1. Вектори

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix},\ x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix},\ \dots,\ x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

називаються *лінійно залежними на відрізку* $t\in[a,b]$, якщо існують сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$, що одночасно не дорівнюють нулю і такі, що $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\ \dots\ +C_nx_n(t)\equiv 0$ при $t\in[a,b]$.

Якщо тотожність справедлива лише при $C_i=0,\ i=\overline{1,n},$ то вектори лінійно незалежні.

Означення 4.2.2. Визначник, що складається із векторів $x_1(t), x_2(t),\ \dots\ , x_n(t)$, тобто

$$W[x_1,\ \dots\ ,x_n]=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

називається *визначником Вронського*.

Теорема 4.2.1. Якщо векторні функції $x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t)$ лінійно залежні, то визначник Вронського тотожно дорівнює нулю.

Доведення. За умовою існують не всі рівні нулю $C_1, C_2,\ \dots\ ,C_n$ такі, що $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\ \dots\ +C_nx_n(t)\equiv 0$ при $t\in[a,b]$. Розписавши покоординатно, одержимо

$$\begin{cases} C_1x_{11}(t)+C_2x_{12}(t)+\ \dots\ +C_nx_{1n}(t)\equiv 0 \\ C_1x_{21}(t)+C_2x_{22}(t)+\ \dots\ +C_nx_{2n}(t)\equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1x_{n1}(t)+C_2x_{n2}(t)+\ \dots\ +C_nx_{nn}(t)\equiv 0 \end{cases}.$$

А однорідна система має ненульовий розв'язок $C_1, C_2,\ \dots\ ,C_n$ тоді й тільки тоді, коли визначник дорівнює нулю, тобто

$$W[x_1, \ ... \ , x_n] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & ... & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & ... & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & ... & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \equiv 0, \ t \in [a,b].$$

Теорема 4.2.2. Якщо розв'язки $x_1(t), \ ... \ , x_n(t)$ лінійної однорідної системи лінійно незалежні, то визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці $t \in [a,b]$.

Доведення. Нехай, від супротивного, існує точка $t_0 \in [a,b]$ і $W[x_1(t_0), \ ... \ , x_n(t_0)] = 0.$

Тоді система однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \ ... \ + C_n x_{1n}(t_0) = 0 \\ C_1 x_{21}(t_0) + C_2 x_{22}(t_0) + \ ... \ + C_n x_{2n}(t_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \ ... \ + C_n x_{nn}(t_0) = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок $C_1^0, C_2^0, \ ... \ , C_n^0$. Розглянемо лінійну комбінацію розв'язків з отриманими коефіцієнтами

$$x(t) = C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \ ... \ + C_n^0 x_n(t).$$

Відповідно до властивості 4.2.3 ця комбінація буде розв'язком. Крім того, як випливає із системи алгебраїчних рівнянь, для отриманих $C_1^0, C_2^0, \ ... \ , C_n^0$: $x(t_0) \equiv 0, \quad t_0 \in [a,b]$. Однак розв'язком, що задовольняє такі умови, є $x \equiv 0$. І внаслідок теореми існування та єдиності ці два розв'язки збігаються, тобто $x(t) \equiv 0$ при $t \in [a,b]$, або

$$C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \ ... \ + C_n^0 x_n(t) \equiv 0,$$

або розв'язки $x_1(t), \ ... \ , x_n(t)$ лінійно залежні, що суперечить умові теореми.

Таким чином, $W[x_1, \ ... \ , x_n] \neq 0$ у жодній точці $t \in [a,b]$, що й потрібно було довести.

Теорема 4.2.3. Для того, щоб розв'язки $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ були лінійно незалежні, необхідно й достатньо, щоб $W[x_1(t), \ldots, x_n(t)] \neq 0$ у жодній точці $t \in [a,b]$.

Доведення. Випливає з попередніх двох теорем.

Теорема 4.2.4. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи можна зобразити як лінійну комбінацію n лінійно незалежних розв'язків.

Доведення. Як випливає із властивості 4.2.3, лінійна комбінація розв'язків також буде розв'язком. Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто завдяки вибору коефіцієнтів $C_1, \ldots, C_n$ можна розв'язати будь-яку задачу Коші $x(t_0) = x_0$ або, у координатній формі,

$$x_1(t_0) = x_1^0, \ \ldots, x_n(t_0) = x_n^0.$$

Оскільки розв'язки $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ лінійно незалежні, то визначник Вронського відмінний від нуля. Отже, система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \ \ldots \ + C_n x_{1n}(t_0) = x_1^0 \\ C_1 x_{21}(t_0) + C_2 x_{22}(t_0) + \ \ldots \ + C_n x_{2n}(t_0) = x_2^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \ \ldots \ + C_n x_{nn}(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$. Тоді лінійна комбінація

$$x(t) = C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \ \ldots \ + C_n^0 x_n(t)$$

є розв'язком поставленої задачі Коші. Теорему доведено.

Наслідок. Максимальна кількість незалежних розв'язків дорівнює кількості рівнянь.

Це випливає з теореми про загальний розв'язок системи однорідних рівнянь, тому що будь-який інший розв'язок може бути зображений у вигляді лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків.

Означення 4.2.3. Матриця, складена з будь-яких n лінійно незалежних розв'язків, називається *фундаментальною матрицею розв'язків системи*.

Якщо лінійно незалежними розв'язками є

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \ldots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \ldots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \ldots,\ x_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \ldots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

то матриця

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

буде фундаментальною матрицею розв'язків.

Як випливає з попередньої теореми, загальний розв'язок можна зобразити як $x_{одн}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$, де C_i – довільні сталі. Якщо ввести вектор $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_n \end{pmatrix}$, то загальний розв'язок можна записати як $x_{одн}(t) = X(t)C$.

4.2.2. Формула Якобі

Нехай $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідної системи, $W[x_1, \ldots, x_n]$ – визначник Вронського. Обчислимо похідну визначника Вронського:

$$\frac{d}{dt} W[x_1, \ldots, x_n] = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x'_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x'_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x'_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x'_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}+\ \dots\ +\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x'_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x'_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Оскільки для похідних виконується співвідношення

$$\begin{cases} x'_{11}(t)=\alpha_{11}x_{11}(t)+\alpha_{12}x_{12}(t)+\ \dots\ +\alpha_{1n}x_{1n}(t) \\ x'_{12}(t)=\alpha_{11}x_{21}(t)+\alpha_{12}x_{22}(t)+\ \dots\ +\alpha_{1n}x_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_{1n}(t)=\alpha_{11}x_{n1}(t)+\alpha_{12}x_{n2}(t)+\ \dots\ +\alpha_{1n}x_{nn}(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_{21}(t)=\alpha_{21}x_{11}(t)+\alpha_{22}x_{21}(t)+\ \dots\ +\alpha_{2n}x_{n1}(t) \\ x'_{22}(t)=\alpha_{21}x_{12}(t)+\alpha_{22}x_{22}(t)+\ \dots\ +\alpha_{2n}x_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_{2n}(t)=\alpha_{21}x_{1n}(t)+\alpha_{22}x_{2n}(t)+\ \dots\ +\alpha_{2n}x_{nn}(t), \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{cases} x'_{n1}(t)=\alpha_{n1}x_{11}(t)+\alpha_{n2}x_{21}(t)+\ \dots\ +\alpha_{nn}x_{n1}(t) \\ x'_{n2}(t)=\alpha_{n1}x_{12}(t)+\alpha_{n2}x_{22}(t)+\ \dots\ +\alpha_{nn}x_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_{nn}(t)=\alpha_{n1}x_{1n}(t)+\alpha_{n2}x_{2n}(t)+\ \dots\ +\alpha_{nn}x_{nn}(t), \end{cases}$$

то після підстановки одержимо

$$\frac{d}{dt}W[x_1,\ \dots\ ,x_n]=$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha_{11}x_{11}(t)+\alpha_{12}x_{12}(t)+\ \dots\ +\alpha_{1n}x_{1n}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \alpha_{11}x_{21}(t)+\alpha_{12}x_{22}(t)+\ \dots\ +\alpha_{1n}x_{2n}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{11}x_{n1}(t)+\alpha_{12}x_{n2}(t)+\ \dots\ +\alpha_{1n}x_{nn}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}+$$

$$
+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \alpha_{21}x_{11}(t)+\alpha_{22}x_{21}(t)+\ \dots\ +\alpha_{2n}x_{n1}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & \alpha_{21}x_{12}(t)+\alpha_{22}x_{22}(t)+\ \dots\ +\alpha_{2n}x_{n2}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \\ x_{1n}(t) & \alpha_{21}x_{1n}(t)+\alpha_{22}x_{2n}(t)+\ \dots\ +\alpha_{2n}x_{nn}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ \dots
$$

$$
+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n-1\,1}(t) & \alpha_{n1}x_{11}(t)+\alpha_{n2}x_{21}(t)+\ \dots\ +\alpha_{nn}x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & \dots & x_{n-1\,2}(t) & \alpha_{n1}x_{12}(t)+\alpha_{n2}x_{22}(t)+\ \dots\ +\alpha_{nn}x_{n2}(t) \\ \dots\dots & & & \dots\dots\dots\dots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{n-1\,n}(t) & \alpha_{n1}x_{1n}(t)+\alpha_{n2}x_{2n}(t)+\ \dots\ +\alpha_{nn}x_{nn}(t). \end{vmatrix}
$$

Розкривши кожний із визначників і зважаючи на те, що визначники з однаковими стовпцями дорівнюють нулю, одержимо

$$
\frac{d}{dt}W[x_1,\ \dots\ ,x_n]=a_{11}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}+
$$

$$
+a_{22}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}+\dots+a_{nn}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}=
$$

$$
=(a_{11}+a_{22}+\ \dots\ +a_{nn})\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}=
$$

$$
=SpA\cdot\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}=SpA\cdot W[x_1,\ \dots\ ,x_n],
$$

де $SpA=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$,

або

$$\frac{d}{dt}W[x_1,\ \dots\ ,x_n] = SpA \cdot W[x_1,\ \dots\ ,x_n].$$

Розділивши змінні, одержимо

$$\frac{dW[x_1,\ \dots\ ,x_n]}{W[x_1,\ \dots\ ,x_n]} = SpA \cdot dt.$$

Проінтегруємо в межах $t_0 \le s \le t$,

$$\ln W[x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t)] - \ln W[x_1(t_0),\ \dots\ ,x_n(t_0)] = \int_{t_0}^{t} SpAdt,$$

або

$$W[x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t)] = W[x_1(t_0),\ \dots\ ,x_n(t_0)]e^{\int_{t_0}^{t} SpAdt}.$$

Узагалі кажучи, доведення виконували у припущенні, що система рівнянь може залежати від часу, тобто

$$W[x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t)] = W[x_1(t_0),\ \dots\ ,x_n(t_0)]e^{\int_{t_0}^{t} SpA(t)dt}.$$

Отримана формула називається *формулою Якобі*.

4.3. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots\ + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots\ + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots\ + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

де a_{ij}, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ – сталі величини, називається *лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами*. У матричному вигляді вона записується

$$\dot{x} = Ax.$$

4.3.1. Розв'язання систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера

Розглянемо один із методів побудови розв'язку систем зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок системи шукаємо у вигляді вектора

$$x(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1 e^{\lambda x}\\ \alpha_2 e^{\lambda x}\\ \ldots\\ \alpha_n e^{\lambda x}\end{pmatrix}.$$

Підставивши його в систему диференціальних рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases}\alpha_1\lambda e^{\lambda x}=a_{11}\alpha_1\lambda e^{\lambda x}+a_{12}\alpha_2\lambda e^{\lambda x}+\ \ldots\ +a_{1n}\alpha_n\lambda e^{\lambda x}\\ \alpha_2\lambda e^{\lambda x}=a_{21}\alpha_1\lambda e^{\lambda x}+a_{22}\alpha_2\lambda e^{\lambda x}+\ \ldots\ +a_{2n}\alpha_n\lambda e^{\lambda x}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n\lambda e^{\lambda x}=a_{n1}\alpha_1\lambda e^{\lambda x}+a_{n2}\alpha_2\lambda e^{\lambda x}+\ \ldots\ +a_{nn}\alpha_n\lambda e^{\lambda x}\end{cases}.$$

Скоротимо всі члени в усіх рівняннях на $e^{\lambda x}\neq 0$ і перенесемо їх праворуч. Запишемо

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ \ldots\ +a_{1n}\alpha_n=0\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+\ \ldots\ +a_{2n}\alpha_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ \ldots\ +(a_{nn}-\lambda)\alpha_n=0\end{cases}.$$

Отримана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda_1 & a_{12}\alpha_2 & a_{1n}\alpha_n\\ a_{21}\alpha_1 & a_{22}-\lambda & a_{2n}\alpha_n\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}\alpha_1 & a_{n2}\alpha_2 & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Це рівняння також може бути записане у векторно-матричній формі $\det(A-\lambda E)=0$ і називається *характеристичним* (чи *віковим*) рівнянням. Розкриємо його:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ \dots \ + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів. Розглянемо різні випадки.

1. Усі корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$ (власні числа матриці A) дійсні й різні. Підставляючи їх по черзі в систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ \dots \ + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda_i)\alpha_2 + \ \dots \ + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ \dots \ + (a_{nn}-\lambda_i)\alpha_n = 0 \end{cases},$$

одержуємо відповідні ненульові розв'язки системи

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \dots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix}, \ \alpha^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \dots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \alpha^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \dots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix},$$

що є власними векторами, які відповідають власним числам λ_i, $i=\overline{1,n}.$ У такий спосіб одержимо n розв'язків

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} \\ \dots \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, \ x_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x} \\ \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x} \\ \dots \\ \alpha_n^2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \ \dots, \ x_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots \\ \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

причому, оскільки $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$ різні, а $\alpha^1, \alpha^2, \ \dots \ , \alpha^n$ – відповідні до них власні вектори, то розв'язки $x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)$ лінійно незалежні й загальний розв'язок системи

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t),$$

або, у векторно-матричній формі запису,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots & & & \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, \ \dots \ , C_n$ – довільні сталі.

2. Нехай $\lambda = p \pm iq$ – пара комплексно-спряжених коренів. Візьмемо один із них, наприклад $\lambda = p + iq$. Комплексному власному числу відповідає комплексний власний вектор

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + is_1 \\ r_2 + is_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_n + is_n \end{pmatrix}$$

і, відповідно, розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1) e^{(p+iq)t} \\ (r_2 + is_2) e^{(p+iq)t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n) e^{(p+iq)t} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи залежність $e^{(p+iq)t} = e^{pt}(\cos qt + i \sin qt)$, перетворимо розв'язок до

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1) e^{pt} (\cos qt + i \sin qt) \\ (r_2 + is_2) e^{pt} (\cos qt + i \sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n) e^{pt} (\cos qt + i \sin qt) \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\sin qt + s_1\cos qt) \\ e^{pt}(r_2\sin qt + s_2\cos qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\sin qt + s_n\cos qt) \end{pmatrix} =
$$

$$
= u(t) + iv(t).
$$

Як випливає із властивості 4.2.4 розв'язків однорідних систем, якщо комплексна функція $u(t)+iv(t)$ дійсного аргументу є розв'язком однорідної системи, то окремо її дійсна й уявна частини також будуть розв'язками, тобто комплексним власним числам $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$
u(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix},
$$

$$
v(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt + s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt + s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt + s_n\sin qt) \end{pmatrix}.
$$

3. Якщо характеристичне рівняння має корінь λ кратністю γ, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\gamma = \lambda$, то розв'язок системи рівнянь

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1^1 + \alpha_1^2 t + \dots + \alpha_1^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ (\alpha_2^1 + \alpha_2^2 t + \dots + \alpha_2^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\alpha_n^1 + \alpha_n^2 t + \dots + \alpha_n^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \end{pmatrix}.
$$

Підставивши його у вихідне диференціальне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо $\gamma\cdot n$ рівнянь, що містять $\gamma\cdot n$ невідомих. Через те, що корінь характеристичного рівняння λ має кратність γ, ранг отриманої системи $\gamma n-\gamma=\gamma(n-1)$. Уводячи γ довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_\gamma$ і розв'язуючи систему, отримаємо

$$\alpha_i^j=\alpha_i^j(C_1,C_2, \ldots ,C_\gamma), \ i=\overline{1,n}\ , \ j=\overline{1,\gamma}.$$

4.3.2. Розв'язання систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами матричним методом

Досить універсальним методом розв'язання лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами є *матричний метод*.

Розглянемо лінійну систему зі сталими коефіцієнтами, записану у векторно-матричному вигляді

$$\dot{x}(t)=Ax,\ x\in R^n.$$

Робимо невироджене перетворення $x=Sy,\ y\in R^n, \det S\neq 0,$ де вектор y – нова невідома векторна функція. Тоді рівняння набуде вигляду

$$S\dot{y}=ASy \text{ або } \dot{y}=S^{-1}ASy\,.$$

Для довільної матриці A завжди існує неособлива матриця S, що зводить її до жорданової форми, тобто

$$S^{-1}AS=\Lambda,$$

де Λ – жорданова форма матриці A. Тоді система диференціальних рівнянь набуває вигляду $\dot{y}=\Lambda y,\ y\in R^n$.

Складемо характеристичне рівняння матриці A:

$$\det(A-\lambda E)=0, \text{ або } \lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n=0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів. Розглянемо різні випадки.

1. Нехай $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – дійсні різні числа. Тоді матриця Λ має вигляд

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1\, 0 \ldots 0\\ 0\,\lambda_2 \ldots 0\\ \ldots\ldots\ldots\\ 0\ \ 0 \ldots \lambda_n\end{bmatrix}$$

і перетворена система диференціальних рівнянь розпадається на n незалежних рівнянь $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1,\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2,\ \ldots, \dot{y}_n = \lambda_n y_n$. Розв'язуючи кожне окремо, отримаємо

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, y_n = C_n e^{\lambda_n t},$$

або, у матричному вигляді,

$$y = e^{\Lambda t} C,$$

де $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 \quad e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ 0 \quad 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_n \end{pmatrix}$.

Звідси розв'язок вихідного рівняння

$$x = S e^{\Lambda t} C.$$

Для знаходження матриці S треба розв'язати матричне рівняння $S^{-1} A S = \Lambda$, або $AS = SA$, де Λ – жорданова форма матриці A. Якщо матрицю S записати як

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n^1 \alpha_n^2 \ldots \alpha_n^n \end{bmatrix},$$

то для кожного зі стовпчиків $s_i^T = (\alpha_1^i \alpha_2^i \ldots \alpha_n^i)$ матричне рівняння перетвориться до $A s_i = \lambda_i s_i,\ \ i = \overline{1, n}$.

Таким чином, у випадку різних дійсних власних чисел матриця S є набором n власних векторів, що відповідають різним власним числам.

2. Нехай $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ – комплексний корінь. Тоді відповідна клітина Жордана має вигляд $\Lambda_{1,2} = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$, а перетворена система диференціальних рівнянь –

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = p y_1 + q y_2 \\ \dot{y}_2 = -q y_1 + p y_2. \end{cases}$$

Неважко перевірити, що розв'язок отриманої системи диференціальних рівнянь

$$y_1 = c_1 e^{pt}\cos qt + c_2 e^{pt}\sin qt,$$

$$y_2 = -c_1 e^{pt}\sin qt + c_2 e^{pt}\cos qt,$$

або, у матричному вигляді,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{pt}\cos qt & e^{pt}\sin qt \\ -e^{pt}\sin qt & e^{pt}\cos qt \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, комплексно-спряженим власним числам відповідає розв'язок $y = e^{\Lambda t}C$,

де $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{pt}\cos qt & e^{pt}\sin qt \\ -e^{pt}\sin qt & e^{pt}\cos qt \end{bmatrix}.$

3. Нехай λ – корінь кратністю $m \le n$, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \lambda$, і йому відповідають $r \le m$ лінійно незалежних векторів. Тоді клітина Жордана, що відповідає цьому власному числу, має вигляд

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c} \lambda 0 \ldots 0 \mid 0 \ldots 0 \\ 0 \lambda \ldots 0 \mid 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \;\ldots \mid \ldots\ldots \\ 0,\ldots\lambda \mid 0 \ldots 0 \\ \hline 0\ldots 0 \mid \lambda 1 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \mid 0 \lambda \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \;\ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots 0 \mid 00.\lambda \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} r \\ \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m-r \end{array},$$

а перетворена підсистема, що відповідає власному числу λ, розпадається на дві підсистеми:

$$\dot{y}_1 = \Lambda_1 y_1,\; y_1 \in R^r, \quad \dot{y}_2 = \Lambda_2 y_2,\; y_2 \in R^{m-r},$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda 0 \ldots 0 \\ 0 \lambda \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots \lambda \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda 1 \ldots 0 \\ 0 \lambda \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots \lambda \end{bmatrix}.$$

Розв'язок першої знаходимо з використанням зазначеного в п. 1 підходу.

Розглянемо другу підсистему. Запишемо її в координатному вигляді

$$\begin{cases} \dot{y}_{21} = \lambda y_{21} + y_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{2,m-r-1} = \lambda y_{2,m-r-1} + y_{2,m-r} \\ \dot{y}_{2,m-r} = \lambda y_{2,m-r} \end{cases}.$$

Розв'язок останнього рівняння цієї підсистеми

$$y_{2,m-r} = c_{2,m-r} e^{\lambda t}.$$

Підставимо його в передостаннє рівняння. Отримаємо

$$\dot{y}_{2,m-r-1} = \lambda y_{2,m-r-1} + c_{2,m-r} e^{\lambda t}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідних рівнянь, тобто

$$y_{2,m-r-1} = \overset{o}{y}_{2,m-r-1} + \overline{y}_{2,m-r-1}.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\overset{o}{y}_{2,m-r-1} = c_{2,m-r-1} e^{\lambda t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$\overline{y}_{2,m-r-1} = Ate^{\lambda t},$$

де A – невідома стала.

Підставивши його в неоднорідне рівняння, одержимо

$$Ae^{\lambda t} + A\lambda te^{\lambda t} = A\lambda te^{\lambda t} + c_{2,m-r-1} e^{\lambda t}.$$

Звідси $A = c_{2,m-r-1}$ і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{2,m-r-1} = c_{2,m-r-1} e^{\lambda t} + c_{2,m-r} te^{\lambda t}.$$

Піднявшись ще на один крок уверх, отримаємо

$$y_{2,m-r-2} = c_{2,m-r-2} e^{\lambda t} + c_{2,m-r-1} te^{\lambda t} + c_{2,m-r} \frac{1}{2!} e^{\lambda t}.$$

Продовжуючи процес далі, матимемо

$$y_{2,1} = c_{2,1}e^{\lambda t} + c_{2,2}te^{\lambda} + \ldots + c_{2,m-r}\frac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!}e^{\lambda t}$$

або, у векторно-матричному вигляді,

$$y_2(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \; te^{\lambda t} \ldots . \dfrac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 \quad e^{\lambda t} \ldots . \dfrac{t^{m-r-2}}{(m-r-2)!}e^{\lambda t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots\ldots\ldots\ldots e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \ldots . \\ c_{2,m-r} \end{pmatrix}.$$

Додавши першу підсистему, одержимо

$$y_m = \begin{bmatrix} e^{\Lambda_1 t} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & e^{\Lambda_2 t} \end{bmatrix} C_m, \quad e^{\Lambda_1 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \; 0 \ldots 0 \\ 0 \; e^{\lambda t} \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \; 0 \ldots\ldots e^{\lambda t} \end{bmatrix},$$

$$e^{\Lambda_2 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \; te^{\lambda t} \ldots . \dfrac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 \quad e^{\lambda t} \ldots . \dfrac{t^{m-r-2}}{(m-r-2)!}e^{\lambda t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots\ldots\ldots\ldots e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_{22} \\ \ldots . \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Для останніх двох випадків матрицю S знаходимо як розв'язок матричного рівняння $AS = S\Lambda$.

Зауваження. Якщо власні числа дійсні та різні, то обидва методи еквівалентні. Якщо власні числа комплексні, то краще використовувати метод Ейлера, а якщо кратні – то матричний метод.

Наведемо кілька прикладів розв'язання систем однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. Розв'язати рівняння $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

Застосуємо метод Ейлера.

Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Коренями його будуть $\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$ Оскільки

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}_{\lambda=3} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

то матриця має один власний вектор. Тому розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = (\alpha_1^1 + \alpha_1^2 t)e^{3t}, \ \ y = (d_2^1 + d_2^2 t)e^{3t}.$$

Підставимо в систему

$$3e^{3t}(\alpha_1^1 + \alpha_1^2 t) + \alpha_1^2 e^{3t} = 2(\alpha_1^1 + \alpha_1^2 t)e^{3t} + (\alpha_2^1 + \alpha_2^2 t)e^{3t},$$

$$3e^{3t}(\alpha_2^1 + \alpha_2^2 t) + \alpha_2^2 e^{3t} = -(\alpha_1^1 + \alpha_1^2 t)e^{3t} + 4(\alpha_2^1 + \alpha_2^2 t)e^{3t}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових членах, одержимо дві системи:

$$\begin{cases} 3\alpha_1^2 = 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \\ 3\alpha_2^2 = -\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3\alpha_1^2 + \alpha_1^2 = 2\alpha_1^1 + \alpha_2^1 \\ 3\alpha_2^1 + \alpha_{12}^2 = -\alpha_1^1 + 4\alpha_2^1 \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \\ -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \end{cases}, \ \begin{cases} -\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = \alpha_1^2 \\ -\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = \alpha_2^2 \end{cases}.$$

З першої системи отримуємо $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = c_1.$

Підставивши ці значення у другу систему, одержимо $-\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = c_1.$ Поклавши $\alpha_1^1 = c_2,$ дістанемо $\alpha_2^1 = c_1 + c_2.$ Отже,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_2 + c_1 t)e^{3t} \\ (c_1 + c_2 + c_1 t)e^{3t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} te^{3t} \\ (1+t)e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} te^{3t} & e^{3t} \\ (1+t)e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Наступні три приклади систем розв'яжемо матричним методом.

2. Розв'язати рівняння $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Його характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$ Звідси

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \; e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Розв'язуємо матричне рівняння

$$AS = S\Lambda, \text{ або } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Воно розпадається на два:

$$\begin{cases} 2\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = \alpha_1^1 \\ 3\alpha_1^1 + 4\,\alpha_2^1 = \alpha_2^1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 5\alpha_1^2 \\ 3\alpha_1^2 + 4\,\alpha_2^2 = 5\alpha_2^2 \end{cases}.$$

Після перенесення всіх членів ліворуч одержимо

$$\begin{cases} \alpha_1^1 + \alpha_2^1 = \\ 3\alpha_1^1 + 3\,\alpha_2^1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \\ 3\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1^1 = 1, \alpha_2^1 = -1, \alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 3.$

Отже, загальний розв'язок

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати систему $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Коренями його будуть $\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$ Звідси

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix}.$$

Матричне рівняння

$$AS = S\Lambda, \text{ або } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розпишемо його поелементно:

$$\begin{cases} 2\alpha_1^1 + \alpha_2^1 = \alpha_1^1 \\ 3\alpha_1^1 + 4\,\alpha_2^1 = \alpha_2^1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha_1^1 + 2\alpha_1^2 \\ -2\alpha_1^2 + 3\,\alpha_2^2 = \alpha_2^1 + 2\alpha_2^2 \end{cases}.$$

На відміну від попереднього прикладу (і це істотно ускладнює обчислення) система не розщеплюється на дві незалежні підсистеми. Після перенесення всіх членів в один бік одержимо систему

$$\begin{cases} -\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_1^2 = 0 \\ -2\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_2^2 = 0 \\ -\alpha_1^1 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \\ -\alpha_2^1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \end{cases}.$$

Помножимо перше рівняння на -2 і, склавши його із другим, підставимо на місце другого. Далі помножимо перше рівняння на -1 і, склавши із третім, підставимо його на місце третього. Одержимо систему

$$\begin{cases} -\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_1^2 = 0 \\ -\alpha_2^1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \\ -\alpha_2^1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \\ -\alpha_2^1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \end{cases}.$$

Останні два рівняння можна відкинути. Залишається

$$\begin{cases} -\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_1^2 = 0 \\ -\alpha_2^1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0 \end{cases}.$$

Покладаємо $\alpha_1^2=\alpha_2^2=1$. Тоді $\alpha_2^1=-1, \alpha_1^1=0$. Отже,

$$S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\cos t & e^{2t}\sin t\\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-e^t\sin t & e^{2t}\cos t\\ -e^{2t}(\cos t+\sin t) & e^{2t}(\cos t-\sin t)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}.$$

4. Розв'язати систему $\begin{cases}\dot{x}=2x+y\\ \dot{y}=-x+4y.\end{cases}$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \text{або}\ \lambda^2-6\lambda+9=0.$$

Коренями його будуть $\lambda_1=\lambda_2=3$. Оскільки

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & 4-\lambda\end{bmatrix}_{\lambda=3}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=1,$$

то матриця має один власний вектор і клітина Жордана має вигляд $\Lambda=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, а матрична експонента – $e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}e^{3t} & te^{3t}\\ 0 & e^{3t}\end{bmatrix}$.

Матричне рівняння

$$AS=S\Lambda,\ \text{або}\ \begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2\\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2\\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Розпишемо його поелементно:

$$\begin{cases}2\alpha_1^1+\alpha_2^1=3\alpha_1^1\\ -\alpha_1^1+4\,\alpha_2^1=3\alpha_2^1\end{cases},\quad \begin{cases}2\alpha_1^2+\alpha_2^2=\alpha_1^1+3\alpha_1^2\\ -\alpha_1^2+4\,\alpha_2^2=\alpha_2^1+3\alpha_2^2\end{cases}.$$

На відміну від комплексних коренів, можна розв'язати спочатку першу підсистему, а потім другу.

У першій підсистемі

$$\begin{cases}-\alpha_1^1+\alpha_2^1=0\\ -\alpha_1^1+\alpha_2^1=0\end{cases}.$$

Звідси $\alpha_1^1=\alpha_2^1=1$.

Підставивши отримані значення у другу підсистему, одержимо

$$\begin{cases} -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \\ -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \end{cases}.$$

Звідси $\alpha_2^2 = 1, \alpha_1^2 = 0.$

Отже, отримали

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{5t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{5t} \\ e^{3t} & (t+1)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Наведемо кілька прикладів розв'язання однорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами з використанням пакету Sage.

1. Розв'язати систему рівнянь (показати загальний розв'язок), побудувати поле напрямків, записати розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = x - y - z \\ y' = x + y \\ z' = 3x + z \end{cases}, \quad M(0,1,1,1).$$

Код:

```
#general solution
show("General solution")
x=var('x')
U=function('U')(x)
y=function('y')(x)
z=function('z')(x)
de1=diff(U,x)==U-y-z
de2=diff(y,x)==U+y
de3=diff(z,x)==3*U+z
solution=desolve_system([de1,de2,de3], [U,y,z], ivar=x)
solution[0].rhs().show()
solution[1].rhs().show()
solution[2].rhs().show()
#Couchi problem solution
show("Couchi problem solution")
solution=desolve_system([de1,de2,de3],
[U,y,z], ics=[0,1,1,1], ivar=x)
solution[0].rhs().show()
solution[1].rhs().show()
solution[2].rhs().show()
sX=solution[0].rhs()
```

```
sY=solution[1].rhs()
sZ=solution[2].rhs()
p=plot_vector_field3d((sX,sY,sZ), (x,-1,1),(y,-1,1),(z,-1,1))
#Graphics3d Object
p.show(xmin=-10, xmax=10, ymin=-10, ymax=10)
```

Evaluate

General solution

$$\frac{1}{2}\left(2U(0)\cos(2x) - (y(0)+z(0))\sin(2x)\right)e^{x}$$

$$\frac{1}{4}\left((y(0)+z(0))\cos(2x) + 2U(0)\sin(2x)\right)e^{x} + \frac{1}{4}(3y(0)-z(0))e^{x}$$

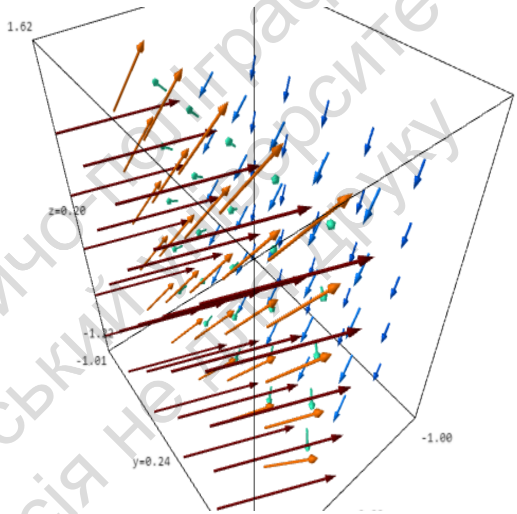
$$\frac{3}{4}\left((y(0)+z(0))\cos(2x) + 2U(0)\sin(2x)\right)e^{x} - \frac{1}{4}(3y(0)-z(0))e^{x}$$

Couchi problem solution

$$(\cos(2x) - \sin(2x))e^{x}$$

$$\frac{1}{2}(\cos(2x)+\sin(2x))e^{x} + \frac{1}{2}e^{x}$$

$$\frac{3}{2}(\cos(2x)+\sin(2x))e^{x} - \frac{1}{2}e^{x}$$



2. Розв'язати систему рівнянь (показати загальний розв'язок), побудувати поле напрямків:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}.$$

Код:

```
# Загальний розв'язок рівняння
t = var('t')
x = function('x')(t)
y = function('y')(t)
z = function('z')(t)
de1 = diff(x, t) == 3*x - y + z
de2 = diff(y, t) == x + y + z
de3 = diff(z, t) == 4*x - y + 4*z
solution = desolve_system([de1, de2, de3], [x, y, z])
show("Загальний розв'язок")
show(solution[0])
show(solution[1])
show(solution[2])
# Поле напрямків
show("Поле напрямків")
x,y,z=var('x y z')
p = plot_vector_field3d((3*x - y + z, x + y + z, 4*x - y + 4*z),
(x, -1, 1), (y, -1, 1), (z, -1, 1),
enter_arrows=True, colors=['red','green','blue'])
p.show()
```

Evaluate

#799

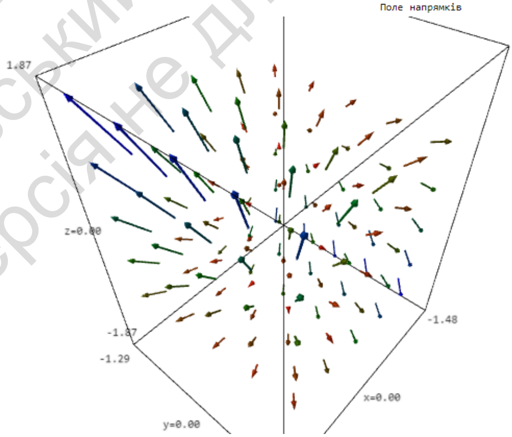
Загальний розв'язок

$$x(t) = \frac{1}{12}\left(5x(0) - 2y(0) + 3z(0)\right)e^{(5t)} + \frac{1}{3}\left(x(0) - y(0)\right)e^{(2t)} + \frac{1}{4}\left(x(0) + 2y(0) - z(0)\right)e^{t}$$

$$y(t) = \frac{1}{12}\left(5x(0) - 2y(0) + 3z(0)\right)e^{(5t)} - \frac{2}{3}\left(x(0) - y(0)\right)e^{(2t)} + \frac{1}{4}\left(x(0) + 2y(0) - z(0)\right)e^{t}$$

$$z(t) = \frac{1}{4}\left(5x(0) - 2y(0) + 3z(0)\right)e^{(5t)} - \left(x(0) - y(0)\right)e^{(2t)} - \frac{1}{4}\left(x(0) + 2y(0) - z(0)\right)e^{t}$$

Поле напрямків



4.4. Лінійні неоднорідні системи

З підрозділу 4.2 пригадаємо, що система диференціальних рівнянь, записана як

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ \dots\ + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ \dots\ + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n1} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ \dots\ + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

або, у векторно-матричному вигляді,

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),$$

називається системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

4.4.1. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних систем

Розглянемо основні властивості розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь.

Властивість 4.4.1. Якщо вектор

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \dots \\ \bar{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

є розв'язком лінійної неоднорідної системи, а

$$x_0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \\ \dots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$$

– розв'язком відповідної лінійної однорідної системи, то сума $\bar{x}(t) + x_0(t)$ є розв'язком лінійної неоднорідної системи.

Дійсно, за умовою

$$\dot{\bar{x}}(t) - A(t)\bar{x}(t) \equiv f(t) \ \text{ і } \ \dot{x}_0(t) - A(t)x_0(t) \equiv 0.$$

Але тоді й

$$\frac{d}{dt}\left[\overline{x}(t)+x_0(t)\right]-A(t)\left[\overline{x}(t)+x_0(t)\right]=\left[\frac{d}{dt}\overline{x}(t)-A(t)\overline{x}(t)\right]+$$

$$+\left[\frac{d}{dt}x_0(t)-A(t)x_0(t)\right]\equiv f(t),$$

тобто $\overline{x}(t)+x_0(t)$ є розв'язком неоднорідної системи.

Властивість 4.4.2 (принцип суперпозиції). Якщо вектори

$$x_i=\begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ \ldots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix},\ \ i=\overline{1,n}$$

є розв'язками лінійних неоднорідних систем $\dot{x}=A(t)x+f_i(t),\ \ i=\overline{1,n}$,

де $f_i(t)=\begin{pmatrix} f_{1i}(t) \\ \ldots\ldots \\ f_{ni}(t) \end{pmatrix}$, то вектор $x(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i x_i(t)$, де C_i – довільні

сталі, буде розв'язком лінійної неоднорідної системи

$$\dot{x}=A(t)x+\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(t).$$

Дійсно, за умовою виконуються n тотожностей

$$\dot{x}_i(t)-A(t)x_i(t)\equiv f_i(t).$$

Склавши лінійну комбінацію з лівих і правих частин, одержимо

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)\right]-A(t)\left[\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_i\left[\dot{x}_i(t)-A(t)x_i(t)\right]\equiv\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(t),$$

тобто лінійна комбінація $x(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i x_i(t)$ буде розв'язком системи $\dot{x}=A(t)x+\sum\limits_{i=1}^{n}C_i f_i(t)$.

Властивість 4.4.3. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами

$$x(t)=u(t)+iv(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ \dots\\ u_n(t)\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}v_1(t)\\ \dots\\ v_n(t)\end{pmatrix}$$

є розв'язком неоднорідної системи

$$\dot{x}=A(t)x+f(t),$$

де $f(t)=p(t)+iq(t)$, $p(t)=\begin{pmatrix}p_1(t)\\ \dots\dots\\ p_n(t)\end{pmatrix}$, $q(t)=\begin{pmatrix}q_1(t)\\ \dots\dots\\ q_n(t)\end{pmatrix}$,

то окремо дійсна та уявна частини є розв'язками системи.

Дійсно, за умовою

$$\frac{d}{dt}[u(t)+iv(t)]-A(t)[u(t)+iv(t)]\equiv p(t)+iq(t).$$

Розкривши дужки і перегрупувавши доданки, одержимо

$$[\dot{u}(t)-A(t)u(t)]+i[\dot{v}(t)-A(t)v(t)]\equiv p(t)+iq(t).$$

Однак комплексні вирази дорівнюють один одному тоді й тільки тоді, коли дорівнюють одна одній дійсні та уявні частини, що й було потрібно довести.

Теорема 4.4.1 (про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи). Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи складається із суми загального розв'язку однорідної системи та якого-небудь частинного розв'язку неоднорідної системи.

Доведення. Нехай $x_0(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)$ – загальний розв'язок однорідної системи та $\bar{x}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідної. Тоді, як випливає із властивості 4.4.1, їхня сума $x(t)+\bar{x}(t)$ буде розв'язком неоднорідної системи.

Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто підбором сталих C_i, $i=\overline{1,n}$ можна розв'язати довільну задачу Коші

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ \dots\ ,x_n(t_0)=x_n^0.$$

Оскільки $x_0(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ є загальним розв'язком однорідного рівняння, то вектори $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ лінійно незалежні та $W[x_1(t), \ldots, x_n(t)] \neq 0$, і система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \ldots + C_n x_{1n}(t_0) = x_1^0 - \bar{x}_1(t_0) \\ C_1 x_{21}(t_0) + C_2 x_{22}(t_0) + \ldots + C_n x_{2n}(t_0) = x_2^0 - \bar{x}_2(t_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \ldots + C_n x_{nn}(t_0) = x_n^0 - \bar{x}_n(t_0) \end{cases}$$

має єдиний розв'язок C_i^0, $i = \overline{1,n}$.

Тоді лінійна комбінація $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i^0 x_i(t) + \bar{x}(t)$ з отриманими сталими C_i^0, $i = \overline{1,n}$ є розв'язком поставленої задачі Коші.

4.4.2. Побудова частинного розв'язку неоднорідної системи методом варіації довільних сталих

Як випливає з останньої теореми, для побудови загального розв'язку неоднорідної системи потрібно розв'язати однорідну і знайти частинний розв'язок неоднорідної системи. Розглянемо метод, який називається *методом варіації довільної сталої*.

Нехай маємо систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

та $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, x_i(t)$ – загальний розв'язок однорідної системи.

Розв'язок неоднорідної системи будемо шукати в такому самому вигляді, але вважати C_i не сталими, а невідомими функціями, тобто

$$C_i = C_i(t) \text{ і } x_{неодн}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t),$$

або, у матричній формі,

$$x_{неодн}(t) = X(t)C(t),$$

де $X(t)$ – фундаментальна матриця розв'язків, $C(t)$ – вектор з невідомих функцій.

Підставивши $x_{неодн}(t) = X(t)C(t)$ у систему, отримаємо

$$\frac{d}{dt}X(t)\cdot C(t) + X(t)\frac{dC(t)}{dt} =$$
$$= A(t)X(t)C(t) + f(t),$$

або

$$\left[\frac{d}{dt}X(t) - A(t)X(t)\right]\cdot C(t) + X(t)\frac{dC(t)}{dt} = f(t).$$

Оскільки $X(t)$ – фундаментальна матриця, тобто матриця, складена з розв'язків, то

$$\frac{d}{dt}X(t) - A(t)X(t) \equiv 0$$

і залишається система рівнянь $X(t)C'(t) = f(t)$.

Розписавши її покоординатно, одержимо

$$\begin{cases} C'_1\, x_{11}(t) + C'_2\, x_{12}(t) + \ \dots\ + C'_n\, x_{1n}(t) = f_1(t) \\ C'_1\, x_{21}(t) + C'_2\, x_{22}(t) + \ \dots\ + C'_n\, x_{2n}(t) = f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C'_1\, x_{n1}(t) + C'_2\, x_{n2}(t) + \ \dots\ + C'_n\, x_{nn}(t) = f_n(t). \end{cases}$$

Оскільки визначником системи є визначник Вронського і він не дорівнює нулеві, то система має єдиний розв'язок і функції $C_i(t)$ визначаються в такий спосіб:

$$C_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & x_{12}(t) & x_{1n}(t) \\ f_2(t) & x_{22}(t) & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n(t) & x_{n2}(t) & x_{nn}(t) \end{vmatrix}}{W[x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)]}\,dt,$$

$$C_2(t)=\int\frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & f_1(t) & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & f_2(t) & x_{2n}(t)\\ \dots & \dots & \dots\\ x_{n1}(t) & f_n(t) & x_{nn}(t)\end{vmatrix}}{W[x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t)]}dt,$$

$$C_n(t)=\int\frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & f_1(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & f_2(t)\\ \dots & \dots & \dots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & f_n(t)\end{vmatrix}}{W[x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t)]}dt.$$

Звідси частинний розв'язок неоднорідної системи

$$x_{неодн}=\sum_{i=1}^{n}C_i(t)x_i(t).$$

Для лінійної неоднорідної системи на площині

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+f_1(t)\\ \dot{x}_2=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+f_2(t)\end{cases}$$

метод варіації довільної сталої реалізується таким чином.

Нехай $X(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\end{bmatrix}$ – фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи. Тоді частинний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді

$$\begin{cases}C'_1\,x_{11}(t)+C'_2\,x_{12}(t)=f_1(t)\\ C'_1\,x_{21}(t)+C'_2\,x_{22}(t)=f_2(t).\end{cases}$$

Звідси

$$C_1(t)=\int\frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & x_{12}(t)\\ f_2(t) & x_{22}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\end{vmatrix}}dt,\quad C_2(t)=\int\frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & f_1(t)\\ x_{21}(t) & f_2(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\end{vmatrix}}dt.$$

Загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

4.4.3. Формула Коші

Нехай $X(t,t_0)$ – фундаментальна система, нормована при $t = t_0$, тобто $X(t_0,t_0) = E$, де E – одинична матриця. Загальний розв'язок однорідної системи

$x(t) = X(t,t_0)C.$

Вважаючи C невідомою вектором-функцією і повторюючи викладення методу варіації довільної сталої, одержимо

$$X(t,t_0)C'(t) = f(t).$$

Звідси $\dfrac{dC(t)}{dt} = X^{-1}(t,t_0)f(t).$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$C(t) = C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau.$$

Тут C – вектор зі сталих, отриманий при інтегруванні системи. Підставивши останній отриманий вираз у загальний розв'язок системи, одержимо

$$x(t) = X(t,t_0)[C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau] =$$

$$= X(t,t_0)C + \int_{t_0}^{t} X(t,t_0)X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau.$$

Якщо $X(t,t_0)$ – фундаментальна матриця, нормована при $t = t_0$, то $X(t,t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$. Звідси

$$X(t,t_0)X^{-1}(\tau,t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)[X(\tau)X^{-1}(t_0)]^{-1} =$$

$$= X(t)X^{-1}(\tau) = X(t,\tau).$$

Підставивши початкові значення $x(t_0) = x_0$ і з огляду на те, що $X(t_0, t_0) = E$, одержимо

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, t_0)X^{-1}(\tau, t_0) f(\tau) d\tau,$$

тобто формулу Коші загального розв'язку неоднорідного рівняння.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння, що задовольняє нульову початкову умову, має вигляд

$$x_{неодн}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Якщо система зі сталою матрицею A, то

$$X(t, t_0) = X(t - t_0), \; X(t, \tau) = X(t - \tau),$$

а формула Коші

$$x(t) = X(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

4.4.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо система лінійних диференціальних рівнянь містить сталі коефіцієнти, а векторна функція $f(t)$ має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Доведення існування частинного розв'язку зазначеного вигляду аналогічне доведенню для лінійних рівнянь вищих порядків.

1. Нехай кожна з компонент вектора $f(x)$ є багаточленом степеня не більше ніж s, тобто

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots\dots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \dots + A_{s-1}^1 t + A_s^1 \\ A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \dots + A_{s-1}^2 t + A_s^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \dots + A_{s-1}^n t + A_s^n \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, то частинний розв'язок шукаємо в такому самому вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^1 t \ \ + B_s^1 \\ B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^2 t \ \ + B_s^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^n t \ \ + B_s^n \end{pmatrix},$$

де вже всі багаточлени правої частини є багаточленами порядку s.

б) Якщо характеристичне рівняння має нульовий корінь кратністю r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді багаточлена степеня $s+r$, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + B_{s+r}^1 \\ B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + B_{s+r}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \ \ldots \ + B_{s+r}^n \end{pmatrix}.$$

При цьому перші $(s+1)n$ коефіцієнтів B_i^j, $i = \overline{0,s}$, $j = \overline{1,n}$ знаходимо точно, а інші – з точністю до сталих інтегрування $C_1, \ \ldots \ , C_n$, що входять у загальний розв'язок однорідних систем.

2. Нехай $f(t)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \ldots\ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^1 t + A_s^1) \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^2 t + A_s^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^n t + A_s^n) \end{pmatrix},$$

де багаточлени правої частини є багаточленами порядку не більше ніж s.

а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення p, тобто $\lambda_i \neq p$, $i = \overline{1,n}$, то частинний розв'язок шукаємо в такому самому вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^1 t + B_s^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^2 t + B_s^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^n t + B_s^n) \end{pmatrix},$$

де вже всі багаточлени правої частини є багаточленами порядку s.

б) Якщо p є коренем характеристичного рівняння кратністю r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = p$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r}^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r}^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \ldots + B_{s+r}^n) \end{pmatrix}.$$

Як у попередньому пункті, перші $(s+1)n$ коефіцієнтів B_i^j, $i = \overline{0,s}$, $j = \overline{1,n}$ знаходимо точно, а інші – з точністю до сталої інтегрування $C_1, \ldots, C_n$.

3. Нехай $f(t)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \ldots\ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^1 t + A_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^2 t + A_s^2)\cos qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^n t + A_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^1 t + B_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^2 t + B_s^2)\sin qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^n t + B_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

Тут у всіх багаточленів правої частини різний порядок, але не вище ніж s.

а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення $p \pm iq$, то частинний розв'язок шукаємо в такому самому вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^s + C_1^1 t^{s-1} + \ldots + C_{s-1}^1 t + C_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^s + C_1^2 t^{s-1} + \ldots + C_{s-1}^2 t + C_s^2)\cos qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(C_0^n t^s + C_1^n t^{s-1} + \ldots + C_{s-1}^n t + C_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^s + D_1^1 t^{s-1} + \ ...\ + D_{s-1}^1 t \ \ + D_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^s + D_1^2 t^{s-1} + \ ...\ + D_{s-1}^2 t \ \ + D_s^2)\sin qt \\ .... \\ e^{pt}(D_0^n t^s + D_1^n t^{s-1} + \ ...\ + D_{s-1}^n t \ \ + D_s^n)\sin qt \end{pmatrix},$$

де вже всі багаточлени правої частини є багаточленами порядку s.

б) Якщо $p \pm iq$ є коренем характеристичного рівняння кратністю r, то частинний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ ...... \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^{s+r} + C_1^1 t^{s+r-1} + \ ...\ + C_{s+r}^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^{s+r} + C_1^2 t^{s+r-1} + \ ...\ + C_{s+r}^2)\cos qt \\ .... \\ e^{pt}(C_0^n t^{s+r} + C_1^n t^{s+r-1} + \ ...\ + C_{s+r}^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^{s+r} + D_1^1 t^{s+r-1} + \ ...\ + D_{s+r}^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^{s+r} + D_1^2 t^{s+r-1} + \ ...\ + D_{s+r}^2)\sin qt \\ .... \\ e^{pt}(D_0^n t^{s+r} + D_1^n t^{s+r-1} + \ ...\ + D_{s+r}^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

Наведемо кілька прикладів розв'язання систем неоднорідних рівнянь.

1. Розв'язати систему неоднорідних рівнянь методом варіації довільної сталої:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Розв'язуємо спочатку однорідну систему. Її характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = -1.$$

Розв'яжемо її (наприклад) матричним методом. Маємо

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Матричне рівняння $AS = S\Lambda$ набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Звідси маємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} -4\alpha_1^1 - 2\alpha_2^1 = 0 \\ 6\alpha_1^1 + 3\alpha_2^1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -4\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 = -\alpha_1^2 \\ 6\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 = -\alpha_2^2 \end{cases}.$$

Їхніми розв'язками будуть

$$\alpha_1^1 = 1, \ \alpha_2^1 = -2, \ \alpha_1^2 = -2, \ \alpha_2^2 = 3.$$

Розв'язок однорідної системи

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

Функції $C_1(t), \ C_2(t)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(t) - 2C_2'(t)e^{-t} = \dfrac{2}{e^t - 1} \\ -2C_1'(t) + 3C_2'(t)e^{-t} = \dfrac{-3}{e^t - 1} \end{cases}.$$

Звідси

$$C_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{2}{e^t - 1} & -2e^{-t} \\ \dfrac{-3}{e^t - 1} & 3e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{vmatrix}} dt = 0 + \overline{C}_1,$$

$$C_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{2}{e^t - 1} \\ -2 & \dfrac{-3}{e^t - 1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{vmatrix}} dt = \int \frac{\dfrac{1}{e^t - 1}}{-e^{-t}} dt = -\int \frac{e^t}{e^t - 1} dt =$$

$$= -\ln\left|e^t - 1\right| + \overline{C}_2 .$$

Поклавши $\overline{C}_2 = 0,\ \overline{C}_2 = 0,$ одержимо

$$C_1(t) \equiv 0,\ \ C_2(t) = -\ln\left|e^t - 1\right|.$$

Отже, частинний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\ln\left|e^t - 1\right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \ln\left|e^t - 1\right| \\ -3e^{-t} \ln\left|e^t - 1\right| \end{pmatrix},$$

а загальний –

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ -2 & 3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \ln\left|e^t - 1\right| \\ -3e^{-t} \ln\left|e^t - 1\right| \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати систему неоднорідних рівнянь за допомогою формули Коші:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -3x + 4y + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$$

Розв'язуємо спочатку однорідну систему. Її характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,\ \ \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = -1.$$

Розв'язуємо матричним методом. Маємо

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \ e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Матричне рівняння $AS = S\Lambda$ набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Одержуємо дві системи:

$$\begin{cases} -\alpha_1^1 + 2\alpha_2^1 = \alpha_1^1 \\ -3\alpha_1^1 + 4\alpha_2^1 = \alpha_2^1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 = 2\alpha_1^2 \\ -3\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 = 2\alpha_2^2 \end{cases}.$$

Їхніми розв'язками будуть

$$\alpha_1^1 = 1,\ \ \alpha_2^1 = 1,\ \ \alpha_1^2 = 2,\ \ \alpha_2^2 = 3.$$

Розв'язок однорідної системи

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & 3e^{2t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна матриця лінійної однорідної системи, нормована в точці $t = 0$, має вигляд

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & 3e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (3-2e^t)e^t & -2(1-e^t)e^t \\ 3(1-e^t)e^t & (-2+3e^t)e^t \end{bmatrix}.$$

Використовуючи формулу Коші, одержимо частинний розв'язок, який задовольняє нульові початкові умови:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} (3-2e^t)e^t & -2(1-e^t)e^t \\ 3(1-e^t)e^t & (-2+3e^t)e^t \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{3s}}{e^{2s}+1} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^t \frac{-2(1-t^{t-s})e^{t+2s}}{e^{2s}+1} ds \\ \displaystyle\int_0^t \frac{(-2+3t^{t-s})e^{t+2s}}{e^{2s}+1} ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle -2e^t\int_0^t \frac{e^{2s}}{e^{2s}+1} ds + 2e^t\int_0^s \frac{e^{2s}}{e^{2s}+1} ds \\ \displaystyle -2e^t\int_0^t \frac{e^{2s}}{e^{2s}+1} ds + 3e^t\int_0^s \frac{e^{2s}}{e^{2s}+1} ds \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} -e^t \ln\left|e^{2s}+1\right| + 2e^{2t}\operatorname{arctg} e^s \\ -e^t \ln\left|e^{2s}+1\right| + 3e^{2t}\operatorname{arctg} e^s \end{matrix}\Bigg|_{s=0}^{s=t} =$$

$$=\begin{pmatrix} -e^t\left[\ln\left|e^{2s}+1\right|-\ln 2\right]+2e^{2t}\left[\operatorname{arctg}e^t-\dfrac{\pi}{4}\right] \\ -e^t\left[\ln\left|e^{2s}+1\right|-\ln 2\right]+3e^{2t}\left[\operatorname{arctg}e^t-\dfrac{\pi}{4}\right] \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи у формі Коші

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} (3-2e^t)e^t & -2(1-e^t)e^t \\ 3(1-e^t)e^t & (-2+3e^t)e^t \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} -e^t\left[\ln\left|e^{2s}+1\right|-\ln 2\right]+2e^{2t}\left[\operatorname{arctg}e^t-\dfrac{\pi}{4}\right] \\ -e^t\left[\ln\left|e^{2s}+1\right|-\ln 2\right]+3e^{2t}\left[\operatorname{arctg}e^t-\dfrac{\pi}{4}\right] \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо шукати розв'язок не у формі Коші, то він матиме простіший вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} e^t & 2e^t \\ e^t & 3e^t \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -e^t\ln\left|e^{2s}+1\right|+2e^{2t}\operatorname{arctg}e^t \\ -e^t\ln\left|e^{2s}+1\right|+3e^{2t}\operatorname{arctg}e^t \end{pmatrix}.$$

3. Знайти загальний розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_1+t. \end{cases}$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1=0,\;\; \lambda_1=1,\;\; \lambda_2=-1.$$

Оскільки воно не містить нульових коренів, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}.$$

Підставивши його в систему, отримаємо $\begin{cases} a=ct+d \\ c=at+b+t. \end{cases}$

Прирівнявши коефіцієнти при членах з однаковими степенями, отримаємо $0=C$, $0=a+1$, $a=d$, $c=b$. Звідси $a=-1$, $c=0$, $b=0$, $d=-1$, а частинний розв'язок

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти загальний розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2 + t. \end{cases}$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0, \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 5.$$

Оскільки є один нульовий корінь, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + et + f \end{pmatrix}.$$

Підставляємо його в неоднорідну систему:

$$\begin{cases} 2a + b = at^2 + bt + c + 2(dt^2 + et + f) \\ 2dt + e = 2(at^2 + bt + c) + 4(dt^2 + et + f) + t. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при членах з однаковими степенями:

$$\begin{cases} 0 = a + 2d \\ 0 = 2a + 4d \end{cases}, \begin{cases} 2a = b + 2e \\ 2d = 2b + 4e + 1 \end{cases}, \begin{cases} b = c + 2f \\ e = 2c + 4f \end{cases}.$$

Помноживши перше рівняння у другій підсистемі на -2 та склавши його із другим рівнянням, одержимо $-4a+2d=1$. Разом із першим рівнянням першої системи отримаємо $\begin{cases} a + 2d = 0 \\ -4a + 2d = 1. \end{cases}$ Звідси $a = -\dfrac{1}{5}$, $d = -\dfrac{1}{10}$. Отже, перше рівняння другої підсистеми $b + 2e = -\dfrac{2}{5}$.

Помноживши перше рівняння останньої підсистеми на 2 і віднявши друге рівняння, матимемо $2b - e = 0.$ З одержаних двох рівнянь дістанемо $b = -\frac{2}{25},\quad e = -\frac{4}{25}.$ Остання підсистема дає співвідношення $c = -\frac{2}{25} - 2f.$ Отже, частинний розв'язок

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}t^2 - \frac{2}{25}t - \frac{2}{25} - 2f \\ -\frac{1}{10}t^2 - \frac{4}{25}t + f \end{pmatrix}.$$

Стала f входить у загальний розв'язок однорідної системи й точно не визначається. Поклавши $f = 0,$ одержимо

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}t^2 - \frac{2}{25}t - \frac{2}{25} \\ -\frac{1}{10}t^2 - \frac{4}{25}t \end{pmatrix}.$$

5. Знайти частинний розв'язок системи за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + e^t \\ \dot{x}_2 = -x_1 + te^t. \end{cases}$$

Складаємо характеристичне рівняння однорідної системи

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0,\quad \lambda_1 = \pm i.$$

Оскільки одиниця не є коренем, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at + b)e^t \\ (ct + d)e^t \end{pmatrix}.$$

Підставляємо його в неоднорідну систему, одержуємо

$$\begin{cases} ae^t + (at + b)e^t = (ct + d)e^t + e^t \\ ce^t + (ct + d)e^t = -(at + b)e^t + te^t. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах, отримуємо

$$\begin{cases} a = c \\ c = -a + 1, \end{cases} \begin{cases} a + b = d + 1 \\ e = 2c + 4f. \end{cases}$$

Розв'язавши, матимемо $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{2}$.

Отже, частинний розв'язок

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}te^t \\ \frac{1}{2}(t+1)e^t \end{pmatrix}.$$

6. Знайти частинний розв'язок системи за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - e^t \\ \dot{x}_2 = x_1 + te^t. \end{cases}$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0, \ \ \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_1 = -1.$$

Оскільки таке рівняння має коренем одиницю із кратністю один, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at^2 + bt + c)e^t \\ (dt^2 + et + f)e^t \end{pmatrix}.$$

Підставляємо його в однорідну систему, отримуємо

$$\begin{cases} (2at + b)e^t + (at^2 + bt + c)e^t = (dt^2 + et + f)e^t + e^t \\ (2dt + e)e^t + (dt^2 + et + f)e^t = (at^2 + bt + c)e^t + te^t \end{cases}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах і дістаємо

$$\begin{cases} a = d \\ d = a \end{cases}, \begin{cases} 2a + b = e \\ 2d + e = b + 1 \end{cases}, \begin{cases} b + c = f + 1 \\ e + f = c \end{cases}.$$

З першої підсистеми одержуємо $a = d$. Підставляємо отримане значення у другу систему:

$$\begin{cases} 2a + b - e = 0 \\ 2a + e - b = 1 \end{cases}.$$

Склавши два рівняння, одержуємо $a=\frac{1}{4},\ b-e=-\frac{1}{2}.$

Склавши два рівняння останньої підсистеми, маємо $b+e=1.$ Звідси $b=\frac{1}{4},\ e=\frac{3}{4},\ f=c-\frac{3}{4}.$ Отже, частинний розв'язок

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t+c)e^t \\ (\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}+c)e^t \end{pmatrix}.$$

Поклавши $c=0,$ остаточно отримуємо

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(t^2+t)e^t \\ \frac{1}{4}(t^2+3t-3)e^t \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальні розв'язки неоднорідних систем:

1.1. $\begin{cases} \dot{x}=y+\mathrm{tg}^2 t-1 \\ \dot{y}=-x+\mathrm{tg}t \end{cases};$ 1.2. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y+e^t \\ \dot{y}=-2x+2t \end{cases};$

1.3. $\begin{cases} \dot{x}=x-y+\dfrac{1}{\cos t}; \\ \dot{y}=2x-y \end{cases}$ 1.4. $\begin{cases} \dot{x}=x+2y \\ \dot{y}=x-5\sin t \end{cases};$

1.5. $\begin{cases} \dot{x}=3x-y \\ \dot{y}=2x-y+15e^t\sqrt{t} \end{cases};$ 1.6. $\begin{cases} \dot{x}=3x-4y \\ \dot{y}=x-3y+3e^t \end{cases};$

1.7. $\begin{cases} \dot{x}=y+2e^t \\ \dot{y}=x+t^2 \end{cases};$ 1.8. $\begin{cases} \dot{x}=2x-y \\ \dot{y}=-2x+y+18t \end{cases};$

1.9. $\begin{cases} \dot{x}=y-5\cos t \\ \dot{y}=2x+y \end{cases};$ 1.10. $\begin{cases} \dot{x}=x+2y+16teht \\ \dot{y}=2x-2y \end{cases};$

1.11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$; 1.12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8 \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$;

1.13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$; 1.14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$;

1.15. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$; 1.16. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$;

1.17. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 1 \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$; 1.18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2e^{t} \end{cases}$;

1.19. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$; 1.20. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$;

1.21. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^{t} \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$; 1.22. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -x + 2y - 5e^{t}\sin t \end{cases}$.

РОЗДІЛ 5
Лінійні однорідні рівняння зі змінними коефіцієнтами

У цьому розділі розглянуто основні можливості аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а також певні типи рівнянь, які допускають зведення до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Особливу увагу приділено чисельно-аналітичним методам розв'язання диференціальних рівнянь, зокрема методу малого параметра, і використанню степеневих і узагальнених степеневих рядів. Наведено мінімально необхідні відомості з теорії коливань і порівнянь, двоточкові крайові задачі та методику їх розв'язань як із застосуванням функції Гріна, так і без неї, а також мінімальні відомості про задачі на власні числа (Штурма – Ліувілля). Матеріал розділу стане в нагоді студентам при подальшому вивченні математичної фізики, основ нелінійної динаміки, моделювання динамічних систем.

5.1. Зведення диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами до рівнянь зі сталими коефіцієнтами

5.1.1. Необхідні умови зведення диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами до рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Лінійне рівняння зі змінними коефіцієнтами називається звідним, якщо за допомогою заміни аргументу $x = \varphi(t)$ його вдається звести до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо умови звідності лінійного однорідного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами n-го порядку

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (5.1.1)$$

до рівняння зі сталими коефіцієнтами. Використовуватимемо властивість інваріантності лінійних однорідних рівнянь відносно довільної зміни аргументу $x=\varphi(t)$. Виконаємо підстановку $t=\psi(x)$. Отримаємо

$$\begin{gathered} y'_x=y'_t\cdot\psi'_x \\ y''_{x^2}=y''_{t^2}\cdot[\psi'_x]^2+y'_t\cdot\psi''_{x^2} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (5.1.2) \\ y_{x^n}{}^{(n)}=y_{t^n}{}^{(n)}[\psi'_x]^n+\ldots+y'_t\cdot\psi_{x^n}{}^{(n)}. \end{gathered}$$

Підставимо співвідношення (5.1.2) в (5.1.1). Тоді рівняння набуде вигляду

$$y_{t^n}{}^{(n)}\cdot[\psi'_x]^n+\ldots+p_n(x)y=0,$$

або, після відповідних перетворень,

$$y_{t^n}{}^{(n)}+\ldots+\frac{p_n(x)}{[\psi'_x]^n}y=0. \qquad (5.1.3)$$

Звідси випливає таке: якщо заміною $t=\psi(x)$ рівняння зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами, то виконується залежність

$$\frac{p_n(x)}{[\psi'_x]^n}=\text{const}.$$

Отже, якщо диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами можна звести заміною $t=\psi(x)$ до рівняння зі сталими коефіцієнтами, то використовуємо заміну

$$\psi(x)=c\int\sqrt[n]{p_n(x)}dx.$$

5.1.2. Формула Абеля

Розглянемо спосіб отримання загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0,$$

якщо відомий один частинний розв'язок. Для цього будемо застосовувати формулу Остроградського – Ліувілля. Нехай, якимось чином відомо, що $y_1(x)$ – один із розв'язків цього рівняння. Тоді за формулою Остроградського – Ліувілля матимемо

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y \\ y_1'(x) & y' \end{vmatrix} = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розкривши визначник, одержимо

$$y' y_1(x) - y y_1'(x) = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розділивши ліву й праву частини останнього виразу на $y_1^2(x)$, запишемо

$$\frac{y' y_1(x) - y y_1'(x)}{y_1^2(x)} = C_2 \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx},$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1(x)}\right) = C_2 \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Проінтегрувавши останній вираз, одержимо

$$\frac{y}{y_1(x)} = C_2 \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1.$$

Остаточно загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку набуде вигляду

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 \left\{ y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx \right\}.$$

Отримана формула називається *формулою Абеля*. Вона дозволяє за допомогою одного відомого розв'язку знайти загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння другого порядку.

5.1.3. Лінійне рівняння Ейлера

Рівняння Ейлера записують як

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = 0, \qquad (5.1.4)$$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ – сталі. Умови теореми існування та єдиності розв'язку виконуються на проміжках $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$.

Будемо шукати розв'язок рівняння (5.1.4) в області $0 < x < +\infty$. Як видно з попереднього підрозділу, умовою звідності рівняння (5.1.4) до рівняння зі сталими коефіцієнтами є

$$\frac{p_n}{x^n} = [\psi'(x)]^n.$$

Звідси треба робити заміну

$$\psi(x) = c\int \sqrt[n]{\frac{p_n}{x^n}}dx = c\ln x.$$

Якщо покласти $c = \dfrac{1}{\sqrt[n]{p_n}}$, то $\psi(x) = \ln x$. Отже, якщо лінійне однорідне рівняння (5.1.4) зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами, то лише заміною $t = \ln x$ або $x = e^t$.

Дійсно, маємо

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = y'_t e^{-t}, \quad y''_{x^2} = y''_{t^2} t'_x e^{-t} - y'_t e^{-t} t'_x = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t},$$

$$y'''_{x^3} = (y'''_{t^3} - y''_{t^2})t'_x e^{-2t} - 2(y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t} t'_x = (y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t)e^{-3t},$$

$$\ldots$$

$$y_{x^n}{}^{(n)} = [y_{t^n}{}^{(n)} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,y'_t]e^{-nt}. \qquad (5.1.5)$$

Підставивши значення похідних із (5.1.5) у рівняння (5.1.4), отримаємо

$$e^{nt}[y_{t^n}{}^{(n)} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,y'_t]e^{-nt} + \cdots + p_{n-2}e^{2t}[y''_{t^2} - y'_t]e^{-2t} +$$

$$+ p_{n-1}e^t \cdot y'_t \cdot e^{-t} + p_n y = 0.$$

Після зведення подібних отримаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + \overline{p}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \overline{p}_{n-1}y' + \overline{p}_n y = 0.$$

Зауваження. Якщо розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (5.1.3) $y = e^{\lambda t}$ і $t = \ln x$, то розв'язок рівняння Ейлера (5.1.4) треба шукати у вигляді $y = x^{\lambda}$. Звідси

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \ldots,$$
$$y^{(n)} = \lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)x^{\lambda-n}. \qquad (5.1.6)$$

Підставимо значення похідних із (5.1.6) у (5.1.4) і отримаємо рівняння

$$x^n \cdot \lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)x^{\lambda-n} + p_1 x^{n-1}\cdot\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot$$
$$(\lambda-n+2)x^{\lambda-n+1} + \ldots + p_{n-1}x\cdot\lambda x^{\lambda-1} + p_n x^{\lambda} = 0. \tag{5.1.7}$$

Скоротивши його на x^{λ}, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1) + p_1\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+2) + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \tag{5.1.8}$$

Розглянемо три випадки.

1. Усі корені характеристичного рівняння (5.1.8) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – різні дійсні числа. Тоді їм відповідають n лінійно незалежних розв'язків

$$y_1(x) = x^{\lambda_1}, \quad y_2(x) = x^{\lambda_2}, \ldots, y_n(x) = x^{\lambda_n},$$

а загальний розв'язок диференціального рівняння (5.1.6) набуває вигляду

$$y_{одн}(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \cdots + c_n x^{\lambda_n}.$$

2. Серед коренів рівняння (5.1.6) є пара комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = p \pm iq$. Тоді

$$u(x) = x^{p+iq} = x^p e^{iq\ln x} = x^p[\cos(q\ln x) + i\sin(q\ln x)],$$
$$v(x) = x^{p-iq} = x^p e^{-iq\ln x} = x^p[\cos(q\ln x) - i\sin(q\ln x)].$$

Двом комплексно-спряженим кореням $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідають два лінійно незалежні розв'язки

$$y_1(x) = x^p\cos(q\ln x), \quad y_2(x) = x^p\sin(q\ln x).$$

3. Корені є кратними: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \lambda$:

а) нехай λ – дійсний корінь ($m \le n$). Оскільки для перетвореного рівняння зі сталими коефіцієнтами лінійно незалежними розв'язками будуть

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = te^{\lambda t}, \ldots, y_m(t) = t^{m-1}e^{\lambda t},$$

то розв'язки диференціального рівняння (5.1.4) набудуть вигляду

$$y_1(x) = x^{\lambda}, \quad y_2(x) = x^{\lambda}\ln x, \ldots, y_m(x) = x^{\lambda}(\ln x)^{m-1};$$

б) якщо $\lambda = p \pm iq$ – комплексний корінь ($m \le n$), то відповідні лінійно незалежні розв'язки рівняння (5.1.4) будуть мати вигляд

$$y_1(x) = x^p \cos(q \ln x),$$
$$y_2(x) = x^p \ln x \cdot \cos(q \ln x),$$
$$\cdots$$
$$y_m(x) = x^p (\ln x)^{m-1} \cdot \cos(q \ln x),$$
$$y_{m+1}(x) = x^p \sin(q \ln x),$$
$$y_{m+2}(x) = x^p \ln x \cdot \sin(q \ln x),$$
$$\cdots$$
$$y_{2m}(x) = x^p (\ln x)^{m-1} \cdot \sin(q \ln x).$$

5.1.4. Рівняння Ейлера – Лагранжа

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{gathered}(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots \\ + p_{n-1}(ax+b)y' + p_n y = 0,\end{gathered} \qquad (5.1.9)$$

де a, b, p_i, $i = \overline{1,n}$ – сталі. Рівняння (5.1.9) називається *рівнянням Ейлера – Лагранжа*. Аналогічно рівнянню Ейлера розв'язок шукаємо, використовуючи підстановку

$$y(x) = (ax+b)^{\lambda}. \qquad (5.1.10)$$

Підставивши функцію (5.1.10) та її похідні в (5.1.9) і скоротивши рівняння на $(ax+b)^{\lambda}$, отримаємо характеристичне рівняння, яке набуває вигляду алгебраїчного рівняння n-го порядку. Залежно від коренів характеристичного рівняння розглядають три випадки (корені дійсні, різні; комплексні; кратні) і, залежно від них, як і для рівняння Ейлера, отримують лінійно незалежні розв'язки.

5.1.5. Рівняння Чебишова

Розглянемо частинний випадок рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \qquad (5.1.11)$$

Це рівняння називається *рівнянням Чебишова*. Для нього умови теореми існування та єдиності розв'язку виконуються на трьох проміжках: $-\infty < x < -1$, $-1 < x < +1$, $+1 < x < +\infty$.

Розглянемо проміжок $x \in (-1, +1)$. Зробимо заміну $x = \cos t$. Тоді

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -y'_t \cdot \frac{1}{\sin t},$$

$$y''_{x^2} = -y''_{t^2} \cdot t'_x \frac{1}{\sin t} + y'_t \frac{\cos t}{\sin^2 t} \cdot t'_x = -\left(\frac{y''_{t^2}}{\sin t} - \frac{y'_t \cos t}{\sin^2 t} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sin t} \right) =$$

$$= \frac{y''_{t^2}}{\sin^2 t} - \frac{y'_t \cos t}{\sin^3 t}. \tag{5.1.12}$$

Підставимо значення похідних із (5.1.12) у рівняння (5.1.11) і отримаємо диференціальне рівняння

$$(1 - x^2)\left[\frac{y''_{t^2}}{\sin^2 t} - \frac{y'_t \cos t}{\sin^3 t} \right] - \cos t \left[-\frac{y'_t}{\sin t} \right] + n^2 y = 0,$$

або лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y''_{t^2} + n^2 y = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$y = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt,$$

а загальний розв'язок вихідного рівняння (5.1.10) набуває вигляду

$$y = c_1 \cos(n \arccos x) + c_2 \sin(n \arccos x).$$

Частковим розв'язком є поліном n-го степеня

$$T_n = \cos(n \arccos x),$$

який називається *поліномом Чебишова*.

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

1. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \ y_1(x) = x,$$

якщо відомий один розв'язок.

За формулою Абеля

$$y_2(x) = x\left[\int \frac{1}{x} e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} dx\right] = x\left[\int \frac{1}{x^2} e^{\ln\left|x^2+1\right|} dx\right] =$$

$$= x\left[\int \frac{x^2+1}{x^2} dx\right] = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$

Звідси загальний розв'язок набуває вигляду

$$y(x) = C_1 x + C_2 (x^2 - 1).$$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Ейлера

$$x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y = x^{\lambda}.$$

Продиференціюємо його:

$$y' = \lambda x^{\lambda-1},\quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}.$$

Підставимо отримані вирази у вихідне рівняння, дістанемо

$$\lambda(\lambda-1)x^{\lambda} + 4\lambda x^{\lambda} - 4x^{\lambda} = 0.$$

Після скорочення на x^{λ} отримаємо характеристичне рівняння $\lambda(\lambda-1) + 4\lambda - 4 = 0$. Його коренями будуть $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$. Отже, загальний розв'язок набуде вигляду

$$y = C_1 \frac{1}{x^4} + C_2 x.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Ейлера – Лагранжа

$$(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y = (x+1)^{\lambda}.$$

Знайдемо похідні

$$y' = \lambda(x+1)^{\lambda-1},\quad y'' = \lambda(\lambda-1)(x+1)^{\lambda-2}.$$

Підставимо їх у рівняння і отримаємо

$$\lambda(\lambda-1)(x+1)^{\lambda} - 2\lambda(x+1)^{\lambda} + 2\left(x+1\right)^{\lambda} = 0.$$

Характеристичне рівняння набуде вигляду

$$\lambda(\lambda-1)-2\lambda+2=0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1=2,\ \ \lambda_2=1.$ Отже, загальним розв'язком буде

$$y=C_1(x+1)^2+C_2(x+1).$$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Чебишова

$$(1-x^2)y''-xy'+4y=0.$$

Використаємо заміну

$$x=\cos t.$$

Знайдемо похідні

$$y'_x=-y'_t\cdot\frac{1}{\sin t},\ \ y''_{x^2}=\frac{y''_{t^2}}{\sin^2 t}-\frac{y'_t\cos t}{\sin^3 t}.$$

Підставимо їх у вихідне рівняння. Після перетворень отримаємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''_{t^2}+4y=0.$$

Відповідне характеристичне рівняння набуде вигляду

$$\lambda^2+4=0.$$

Його коренями будуть $\lambda_{1,2}=\pm 2i.$ Отже, загальним розв'язком зведеного рівняння буде

$$y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t.$$

Звідси загальним розв'язком вихідного рівняння є

$$y=C_1\cos(2\arccos x)+C_2\sin(2\arccos x).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь за допомогою одного відомого:

1.1. $x^2(x+1)y''-2y=0,\ \ y_1(x)=1+\dfrac{1}{x};$

1.2. $y''-2(1+\mathrm{tg}^2(x)y=0,\ \ y_1(x)=\mathrm{tg}x;.$

1.3. $xy''+2y'-xy=0,\ \ y_1(x)=\dfrac{e^x}{x};$

1.4. $(e^x+1)y''-2y'+e^x y=0,\ \ y_1(x)=e^x-1;$

1.5. $y''-y'\operatorname{tg}x+2y=0,\ \ y_1(x)=\sin x.$

2. Знайти загальний розв'язок, якщо частинний розв'язок підібрати у вигляді поліному або $y_1(x)=e^{ax}$:

2.1. $(2x+1)y''+4xy'-4y=0;$

2.2. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0;$

2.3. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=0;$

2.4. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=0;$

2.5. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0;$

2.6. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0;$

2.7. $xy''-(2x+1)y'+2y=0;$

2.8. $x(x-1)y''-xy'+y=0;$

2.9. $x^2\ln xy''-xy'+y=0;$

2.10. $(x^2-1)y''+(x-3)y'-y=0.$

3. Знайти загальний розв'язок однорідних рівнянь Ейлера та Ейлера – Лагранжа:

3.1. $x^2y''+2xy'-6y=0;$

3.2. $x^2y''+xy'-y=0;$

3.3. $x^2y''-xy'=0;$

3.4. $(3x+1)^2y''-2(3x+1)y'+4y=0;$

3.5. $(x+7)^2y''+3(x+7)y'-3y=0;$

3.6. $x^3y'''+xy'-y=0;$

3.7. $x^2y'''-2y'=0;$

3.8. $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0;$

3.9. $x^2y''-4xy'=0;$

3.10. $x^2y''-xy'-3y=0;$

3.11. $(1-x)^2y''-(1-x)y'+81y=0.$

4. Знайти загальний розв'язок неоднорідних рівнянь Ейлера та Ейлера – Лагранжа:

4.1. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$;

4.2. $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x^3$;

4.3. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$;

4.4. $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$;

4.5. $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$;

4.6. $x^3 y'' - 2xy = 6\ln x$.

5.2. Перетворення в лінійних рівняннях

У цьому підрозділі наведено деякі основні перетворення, що виконують у лінійних однорідних рівняннях другого порядку.

5.2.1. Зведення лінійного рівняння другого порядку до канонічного вигляду

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \qquad (5.2.1)$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$ – неперервні функції, визначені на проміжку $[a,b]$. Зробимо лінійну заміну шуканої функції

$$y = \alpha(x)z, \qquad (5.2.2)$$

де z – нова невідома функція. Після диференціювання отримаємо

$$y' = \alpha'(x)z + \alpha(x)z', \quad y'' = \alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z''.$$

Підставивши (5.2.2) в (5.2.1), матимемо

$$[\alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z''] + p_1(x)[\alpha'(x)z + \alpha(x)z'] +$$
$$+ p_2(x)\alpha(x)z = 0,$$

або

$$z'' + \left[\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p_1(x)\right]z' + \left[\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + p_1(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p_2(x)\right]z = 0. \qquad (5.2.3)$$

Виберемо множник $\alpha(x)$ так, щоб коефіцієнт при z' перетворювався на нуль, тобто виконувалась умова

$$\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)}+p_1(x)=0.$$

Звідси, розв'язавши отримане диференціальне рівняння, матимемо

$$\alpha(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx}.$$

Продиференціюємо функцію $\alpha(x)$:

$$\alpha'(x)=-\frac{p_1(x)}{2}e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx},$$

$$\alpha''(x)=\left[-\frac{p_1(x)}{2}+\frac{p_1^2(x)}{4}\right]e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx}. \qquad (5.2.4)$$

Підставивши вирази з (5.2.4) у рівняння (5.2.3), отримаємо

$$z''+\left[-\frac{p_1(x)}{2}+\frac{p_1^2(x)}{4}-p_1(x)\frac{p_1(x)}{2}+p_2(x)\right]z=0,$$

або

$$z''+I(x)z=0, \qquad (5.2.5)$$

де $I(x)=-\frac{p_1(x)}{2}-\frac{p_1^2(x)}{4}+p_2(x)$. Функція $I(x)$ називається *інваріантом* рівняння (5.2.1). Якщо отримане рівняння (5.2.5) інтегрується у квадратурах, то інтегрується у квадратурах і вихідне диференціальне рівняння (5.2.1).

5.2.2. Рівняння Бесселя

Розглянемо диференціальне рівняння

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, \qquad (5.2.6)$$

де n – довільна стала, $x>0$. Таке диференціальне рівняння називається *рівнянням Бесселя*. Перепишемо його як

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0,$$

де $p_1(x)=\frac{1}{x}$, $p_2(x)=\frac{x^2-n^2}{x^2}$. Для цього рівняння інваріант набуває вигляду

$$I(x) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}\right] - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x^2}\right] + 1 - \frac{n^2}{x^2} = 1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}.$$

У випадку $n = \pm\frac{1}{2}$ підстановка

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx} z = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx} z = \frac{z}{\sqrt{x}}$$

зводить рівняння Бесселя (5.2.6) до рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$z'' + z = 0. \tag{5.2.7}$$

Воно має загальний розв'язок

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

отже, загальним розв'язком вихідного диференціального рівняння (5.2.6) при $n = \pm\frac{1}{2}$ буде

$$y = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Перепишемо його як

$$y = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x),$$

де функції $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ та $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ називаються *функціями Бесселя з півцілим індексом*, а, відповідно, рівняння (5.2.6) – *рівнянням Бесселя з півцілим індексом*.

5.2.3. Самоспряжений вигляд лінійного рівняння другого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$p(x)y'' + p'(x)y + p_2(x)y = 0,$$

або

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + p_2(x)y = 0\,. \tag{5.2.8}$$

Диференціальне рівняння (5.2.8) називається *рівнянням другого порядку у самоспряженому вигляді*. Покажемо, що будь-яке однорідне рівняння другого порядку

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (5.2.9)$$

з неперервними на проміжку $x \in [a, b]$ коефіцієнтами можна звести до самоспряженого вигляду. Помножимо рівняння (5.2.9) на функцію $\mu(x)$:

$$p_0(x)\mu(x)y'' + p_1(x)\mu(x)y' + p_2(x)\mu(x)y = 0. \qquad (5.2.10)$$

Виберемо функцію $\mu(x)$ так, щоб

$$p_1(x)\mu(x) = [p_0(x)\mu(x)]',$$

або

$$p_1(x)\mu(x) = p_0'(x)\mu(x) + p_0(x)\mu'(x).$$

Отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$p_0(x)\frac{d\mu(x)}{dx} = [p_1(x) - p_0'(x)]\mu(x).$$

Розділимо змінні:

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \left[\frac{p_1(x)}{p_0(x)} - \frac{p_0'(x)}{p_0(x)}\right]dx.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$\ln|\mu(x)| = \int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx - \ln|p_0(x)| + C.$$

Покладемо сталу $C = 0$, тоді

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}.$$

Підставимо в (5.2.10) одержане значення $\mu(x)$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y' + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y = 0,$$

або

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+Q(x)y=0,$$

де

$$P(x)=e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx},\;\; Q(x)=\frac{p_2(x)}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}.$$

5.2.4. Зведення лінійного однорідного рівняння другого порядку до рівнянь Ріккаті

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0.$$

Зробимо заміну

$$y=e^{\int udx},\;\; y'=e^{\int udx}u,\;\; y''=e^{\int udx}(u'+u^2), \quad (5.2.11)$$

де $u(x)$ – нова невідома функція. Після підстановки отримаємо

$$e^{\int udx}(u'+u^2)+p_1(x)e^{\int udx}u+p_2(x)e^{\int udx}=0.$$

Скоротимо на $e^{\int udx}$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$u'+p_1(x)u+u^2=-p_2(x).$$

Це рівняння називається *рівнянням Ріккаті*.

Зауважимо, що виконується і обернене твердження: будь-яке рівняння Ріккаті

$$y'+p_1(x)y+r(x)y^2=f(x)$$

можна звести до однорідного лінійного рівняння другого порядку.

Слід зазначити, що рівняння Ріккаті в загальному вигляді у квадратурах не інтегрується і, аналогічно, у квадратурах не інтегрується лінійне диференціальне рівняння другого порядку.

Диференціальне рівняння Лежандра

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

на проміжку y_0' є самоспряженим, його можна записати у самоспряженому вигляді

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0.$$

Рівняння Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Розглянемо інтервал $x \in (0, +\infty)$. Зведемо рівняння Бесселя до самоспряженого вигляду. Маємо

$$p_0(x) = x^2, \ \ p_1(x) = x \ \ p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k.$$

Звідси функція $\mu(x)$ набуває вигляду

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}.$$

Домножимо рівняння Бесселя на одержану функцію $\mu(x)$:

$$xy'' + y' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0.$$

Звідси рівняння Бесселя в самоспряженій формі набуває вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + (x - \frac{n^2}{x})y = 0.$$

Наведемо приклад розв'язання рівняння другого порядку.

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + xy' - (2x^2 + 1)y = 0.$$

Використовуючи підстановку

$$y = e^{\int u dx}, \ \ y' = e^{\int u dx} u, \ \ y'' = e^{\int u dx}(u' + u^2),$$

зводимо лінійне рівняння до рівняння Ріккаті

$$z' = -z^2 - xz + 2x^2 + 1.$$

Можна впевнитися, що частинним розв'язком цього рівняння є

$$z_1(x) = x.$$

Застосувавши заміну, отримуємо частинний розв'язок вихідного диференціального рівняння

$$y_1(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Другий частинний розв'язок і, відповідно, загальний розв'язок можна знайти, використовуючи формулу Абеля.

Завдання для самостійної роботи

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Бесселя

5.1. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/16)y = 0.$

6. Заміною $y = \alpha(x)z$ звести рівняння до канонічного вигляду і спробувати розв'язати:

6.1. $x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0;$

6.2. $x^2 y'' - 4xy' + (6 - x^2)y = 0;$

6.3. $(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0;$

6.4. $x^2 y'' + 2x^2 y' + (x^2 - 2)y = 0;$

6.5. $x^2 y'' + y' + xy = 0.$

5.3. Інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку за допомогою степеневих рядів

Одним з універсальних методів знаходження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами є метод рядів.

5.3.1. Зображення розв'язків лінійних однорідних рівнянь другого порядку за допомогою степеневих рядів

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (5.3.1)$$

з коефіцієнтами $p(x)$ і $q(x)$, які можуть бути зображені як розклад у ряди Тейлора в околі точки x_0 :

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k.$$

Якщо в околі $|x-x_0|<\rho$ ряди збігаються, то існує єдиний розв'язок диференціального рівняння, який може бути зображений у вигляді

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x-x_0)^k,$$

причому цей розв'язок задовольняє умову Коші

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0',$$

де y_0, y_0' – довільні наперед задані значення. Коефіцієнти c_k, $k = 0,1,2,...$ ряду можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Дійсно, нехай для простоти $x_0 = 0$, тоді

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \;\; p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \;\; q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k.$$

Звідси

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}, \;\; y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2}. \tag{5.3.2}$$

Підставимо значення похідних із (5.3.2) у рівняння (5.3.1) і отримаємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2} +$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = 0.$$

Змінимо порядок підсумовування в першій і третій сумах:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k\right) +$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = 0.$$

За формулою добутку рядів матимемо

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_{n-k} b_n\right)x^k.$$

Використовуючи цю залежність у другому і третьому доданках, перепишемо рівняння як

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} p_{n-k}(n+1)c_{n+1}\right)x^k +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} q_{k-n}c_n\right)x^k = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при однакових степенях x^k, $k = 0,1,2,\ldots$, отримаємо

$$c_{k+2}(k+2)(k+1) + \sum_{n=0}^{k} p_{n-k}(n+1)c_{n+1} + \sum_{n=0}^{k} q_{k-n}c_n = 0,$$

або

$$\begin{array}{c|l} & 2\cdot 1\cdot c_2 + p_0\cdot c_1 + q_0\cdot c_0 = 0 \\ k=0 & 3\cdot 2\cdot c_3 + \left(p_1\cdot c_1 + p_0\cdot 2\cdot c_2\right) + \left(q_1\cdot c_0 + q_0\cdot c_1\right) = 0 \\ k=1 & 4\cdot 3\cdot c_4 + \left(p_2\cdot c_1 + p_1\cdot 2\cdot c_2 + p_0\cdot 3\cdot c_3\right) + \\ k=2 & +\left(q_2\cdot c_0 + q_1\cdot c_1 + q_0\cdot c_2\right) = 0 \\ \ldots & \quad\ldots \end{array}$$

Оскільки коефіцієнт при c_k дорівнює $k(k-1)\neq 0$, то всі c_k, $k = 2,3,\ldots$ однозначно обчислюються через c_0 та c_1. Звідси загальний розв'язок буде мати вигляд

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – два лінійно незалежні розв'язки з повністю визначеними коефіцієнтами.

Розглянемо два часткові розв'язки з одиничними початковими умовами:

1) $y_1(x)$: $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$;

2) $y_2(x)$: $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$.

Оскільки визначник Вронського

$$W[y_1(0), y_2(0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему і загальний розв'язок можна записати як

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

5.3.2. Зображення розв'язків у вигляді узагальнених степеневих рядів

Нехай точка x_0 буде особливою для функцій $p(x)$ та $q(x)$, тобто функції в околі цієї точки не розкладаються у степеневий ряд. Розглянемо умови, за яких розв'язок $y(x)$ рівняння (5.3.1) можна зобразити у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = (x - x_0)^{\rho} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{5.3.3}$$

де ρ – деякий числовий параметр.

Теорема 5.3.1. Для того, щоб розв'язок $y(x)$ рівняння (5.3.1) можна було зобразити як узагальнений степеневий ряд (5.3.3), достатньо, щоб рівняння (5.3.1) можна було зобразити у вигляді

$$y'' + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k}{x - x_0} y' + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^2} y = 0, \tag{5.3.4}$$

де p_0, q_0 і q_1 одночасно не дорівнюють нулю.

Доведення. Нехай для простоти $x_0 = 0$ і рівняння (5.3.4) набуває вигляду

$$y'' + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k}{x} y' + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k x^k}{x^2} y = 0.$$

Його можна переписати як

$$x^2 y'' + x\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right) y' + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right) y = 0. \tag{5.3.5}$$

Розв'язок рівняння (5.3.5) будемо шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Після диференціювання матимемо

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho + k) x^{\rho + k - 1},$$

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^{\rho+k-2}. \qquad (5.3.6)$$

Підставимо похідні з (5.3.6) у рівняння (5.3.5) і отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^{\rho+k}+(\sum_{k=0}^{\infty}p_k x^k)(\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)x^{\rho+k})+$$

$$+(\sum_{k=0}^{\infty}q_k x^k)(\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{\rho+k})=0.$$

Використовуючи наведену вище формулу добутку рядів, отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^{\rho+k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty}p_{k-n}c_n(p+n))x^{\rho+k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty}q_{k-n}c_n)x^{\rho+k}=0.$$

Скоротимо на x^{ρ} та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x^k, $k=0,1,2...$, до нуля:

$$\begin{array}{r|l} k=0 & [\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0]\cdot c_0=0, \\ & \ldots \\ \ldots & \\ k=k & c_k(\rho+k)(\rho+k-1)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{k-n}c_n(p+n)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_{k-n}c_n=0. \end{array}$$

Оскільки $c_0\neq 0$, то з першого рівняння маємо

$$\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0. \qquad (5.3.7)$$

Таке рівняння називається *визначальним*. Неважко помітити, що

$$p_0=\lim_{x_0\to 0}xp(x),\ \ q_0=\lim_{x_0\to 0}x^2p(x).$$

Розглянемо такі випадки:

1. Корені ρ_1 і ρ_1 визначального рівняння (5.3.7) дійсні й різні. Нехай $\rho_1>\rho_2$. Тоді завжди існує розв'язок

$$y_1(x)=x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^1x^k.$$

Цей розв'язок називається *основним*.

Якщо $S = \rho_1 - \rho_2$ не є цілим додатним числом, то існує ще один розв'язок

$$y_2(x) = x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 x^k.$$

2. Якщо серед коренів рівняння існують комплексні корені

$$\rho = a \pm ib \; y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho + k)(\rho + k - 1) x^{\rho + k - 2},$$

то, використовуючи залежність

$$x^{a \pm ib} = x^a (\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)),$$

отримаємо два лінійно незалежні розв'язки

$$y_1(x) = x^a \cos(b \ln x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k^1 x^k,$$

$$y_2(x) = x^a \sin(b \ln x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 x^k.$$

3. Якщо корені кратні $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, то один із розв'язків набуває вигляду узагальненого степеневого ряду

$$y_1(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Знайдемо другий частковий розв'язок для випадку, коли $S = \rho_1 - \rho_2$ – ціле додатне число або нуль (тобто корені кратні). Використаємо формулу Абеля. За цією формулою другий розв'язок

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx, \qquad (5.3.8)$$

де $y_1(x)$ – відомий перший частинний розв'язок, який може бути зображений як узагальнений степеневий ряд

$$y_1(x) = x^{\rho_1} P_1(x),$$

де $P_1(x)$ – функція, що набуває вигляду ряду Тейлора з ненульовим вільним членом. Оскільки

$$p(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^{k-1},$$

то

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^{k-1}} = e^{-p_0 \ln x} e^{-\int \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^{k-1}} =$$

$$= e^{-\rho_0 \ln x} e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{k} x^k} = e^{-\rho_0} P_2(x),$$

де $P_2(x)$ – функція, що набуває вигляду ряду Тейлора з ненульовим вільним членом. Далі маємо

$$\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} = \frac{x^{-p_0} P_2(x)}{x^{2\rho_1} P_1^2(x)} = x^{-(p_o + 2\rho_1)} P_3(x),$$

де $P_3(x)$ – також функція, що набуває вигляду ряду Тейлора з ненульовим вільним членом. Оскільки визначальне рівняння записується як

$$\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0,$$

або

$$\rho^2 + (\rho_0 - 1)\rho + q_0 = 0,$$

то, за теоремою Вієта,

$$\rho_1 + \rho_2 = p_0 + 1,$$

або

$$p_0 = 1 - \rho_1 - \rho_2.$$

Тому можна записати

$$\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} = x^{-(1+\rho_1-\rho_2)} P_3(x) = \frac{P_3(x)}{x^{1+s}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{x^{1+s}} =$$

$$= \frac{a_0}{x^{1+s}} + \frac{a_1}{x^s} + \ldots + \frac{a_s}{x} + a_{s+1} + a_{s+2} x + \ldots,$$

де s набуває цілого додатного значення. Змінивши значення коефіцієнтів, перепишемо отриманий вираз як

$$\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} = \frac{\gamma_{-(1+s)}}{x^{1+s}} + \frac{\gamma_{-s}}{x^s} + \ldots + \frac{\gamma_{-1}}{x} + \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots$$

Використовуючи зображення (5.3.8), випишемо другий частковий розв'язок $y_2(x)$ рівняння:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx =$$

$$=x^{\rho_1}P_1(x)\int[\frac{\gamma_{-(1+s)}}{x^{1+s}}+\frac{\gamma_{-s}}{x^s}+\ldots+\frac{\gamma_{-1}}{x}+\gamma_0+\gamma_1 x+\ldots]dx=$$

$$=x^{\rho_1}P_1(x)[\frac{\gamma_{-(1+s)}}{-sx^s}+\frac{\gamma_{-s}}{(-s+1)x^s}+\ldots+\gamma_{-1}\ln x+\gamma_0 x+\frac{\gamma_1}{2}x^2+\ldots],$$

або

$$y_2(x)=\gamma_{-1}x^{\rho_1}P_1(x)\ln x+x^{\rho_1-s}P_1(x)[\frac{\gamma_{-(1+s)}}{-s}+\frac{\gamma_{-s}}{(-s+1)}x+\ldots].$$

Оскільки $\rho_1-s=\rho_2$, $\gamma_{-(1+s)}\neq 0$, то у випадку, коли $s=\rho_1-\rho_2$ не є цілим додатним числом, другий частковий розв'язок набуває вигляду

$$y_2(x)=x^{\rho_2}P_4(x)+\gamma_{-1}x^{\rho_1}P_1(x)\ln x.$$

Аналогічно знаходимо другий частковий розв'язок для кратних коренів

$$y_2(x)=x^{\rho}P_4(x)+\gamma_{-1}\ln x^{\rho}P_1(x).$$

Наведемо кілька прикладів чисельно-аналітичного розв'язання рівнянь другого порядку.

1. Розв'язати рівняння за допомогою степеневих рядів

$$y''-x^2y=0. \qquad (5.3.9)$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$$

Продиференціюємо цей розв'язок:

$$y'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\ldots,$$

$$y''(x)=2c_2+3\cdot 2c_3x+4\cdot 3c_4x^2+\ldots \qquad (5.3.10)$$

Підставимо (5.3.10) у (5.3.9), отримаємо

$$2c_2+3\cdot 2c_3x+4\cdot 3c_4x^2+\ldots-x^2(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots)=0.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x до нуля:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & 7\cdot 8\cdot c_7-c_3=0\\
x^6 & 8\cdot 7\cdot c_8-c_4=0\\
x^7 & 9\cdot 8\cdot c_9-c_5=0\\
x^8 & 10\cdot 9\cdot c_{10}-c_8=0\\
x^9 & 11\cdot 10\cdot c_{11}-c_7=0
\end{array}$$

Звідси

$$c_2 = 0,\ \ c_3 = 0,\ \ c_4 = -\frac{1}{3\cdot 4}c_0,\ \ c_5 = \frac{1}{4\cdot 5}c_1,\ \ c_6 = \frac{1}{5\cdot 6}c_2 = 0,$$

$$c_7 = \frac{1}{6\cdot 7}c_3 = 0,\ \ c_8 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}c_0,\ \ c_9 = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}c_1,$$

$$c_{10} = \frac{1}{9\cdot 10}c_6 = 0,\ \ c_{11} = \frac{1}{10\cdot 11}c_7 = 0.$$

Розв'язок набуде вигляду

$$y(x) = c_0(1 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^8 + ...) +$$

$$+c_1(x + \frac{1}{4\cdot 5}x^5 + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^9 + ...).$$

2. Розв'язати рівняння

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

за допомогою узагальнених степеневих рядів.

Розв'язок будемо шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = c_0x^{\rho} + c_1x^{\rho+1} + c_2x^{\rho+2} + c_3x^{\rho+3} + ...$$

Продиференціюємо цей розв'язок:

$$y'(x) = c_0\rho x^{\rho-1} + c_1(\rho+1)x^{\rho} + c_2(\rho+2)x^{\rho+1} +$$

$$+c_3(\rho+3)x^{\rho+2} + ... + y''(x) =$$

$$= c_0\rho(\rho-1)x^{\rho-2} + c_1(\rho+1)\rho x^{\rho-1} + c_2(\rho+2)(\rho+1)x^{\rho\cdot} +$$

$$+c_3(\rho+3)(\rho+2)x^{\rho+1} + ...$$

Підставимо значення похідних y' та y'' у початкове рівняння:

$$x(c_0\rho(\rho-1)x^{\rho-2} + c_1(\rho+1)\rho x^{\rho-1} + c_2(\rho+2)(\rho+1)x^{\rho\cdot} +$$

$$+c_3(\rho+3)(\rho+2)x^{\rho+1} + ...) + 2(c_0\rho x^{\rho-1} + c_1(\rho+1)x^{\rho} +$$

$$+c_2(\rho+2)x^{\rho+1} + c_3(\rho+3)x^{\rho+2} + ...) +$$

$$+x(c_0x^{\rho} + c_1x^{\rho+1} + c_2x^{\rho+2} + c_3x^{\rho+3} + ...) = 0.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x до нуля:

$$
\begin{array}{c|l}
x^{\rho-1} & c_0\big(\rho(\rho-1)+2\rho\big)=0 \\
x^{\rho} & c_1\big((\rho+1)\rho+2(\rho+1)\big)=0 \\
x^{\rho+1} & c_2\big((\rho+2)(\rho+)+2(\rho+2)\big)=0 \\
x^{\rho+2} & c_3\big((\rho+3)(\rho+2)+2(\rho+3)\big)+c_1=0 \\
\ldots & \ldots \\
x^{\rho+k-1} & c_k\big((\rho+k)(\rho+k-1)+2(\rho+k)\big)+c_{k-2}=0
\end{array}
$$

Звідси

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{(\rho+k)(\rho+k+1)},\ k=2,3,\ldots$$

Визначальне рівняння набуває вигляду $\rho(\rho-1)+2\rho=0$. Отже, $\rho(\rho+1)=0$. Воно має корені $\rho_1=0$, $\rho_2=-1$.

Підставимо перший корінь $\rho_1=0$ у систему, отримаємо

$$c_1\cdot 2=0,\ c_2(2\cdot 1+2\cdot 2)+c_0=0,\ c_3(3\cdot 2+2\cdot 3)+c_1=0,$$
$$c_4(4\cdot 3+2\cdot 4)+c_2=0,\ c_5(5\cdot 4+2\cdot 5)+c_3=0,\ldots$$

Звідси маємо, що непарні коефіцієнти дорівнюють нулю:

$$c_1=c_3=c_5=\ldots=c_{2k+1}=\ldots=0.$$

Парні ж набувають вигляду

$$c_2=-\frac{1}{2(1+2)}c_0=-\frac{1}{3!}c_0,$$

$$c_4=-\frac{1}{4(3+2)}c_2=-\frac{1}{5\cdot 4}c_2=\frac{1}{5!}c_0,$$

$$c_6=-\frac{1}{6(5+2)}c_4=-\frac{1}{7\cdot 6}c_4=\frac{1}{7!}c_0,\ldots,$$

а перший розв'язок – вигляду

$$y_1(x)=c_0(1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\ldots)=c_0\frac{\sin x}{x}.$$

Підставимо перший корінь $\rho_2=-1$ у систему, отримаємо

$$c_1\cdot 2+c_0=0,\ c_3(2\cdot 1+2\cdot 2)+c_1=0,\ c_4(3\cdot 2+2\cdot 23+c_2=0,$$
$$c_5(4\cdot 3+2\cdot 4)+c_3=0,\ c_6(5\cdot 4+2\cdot 5)+c_4=0,\ldots$$

Звідси

$$c_2 = -\frac{1}{2!}c_0,\ \ c_3 = -\frac{1}{2(1+2)}c_1 = -\frac{1}{3!}c_1,$$

$$c_4 = -\frac{1}{3(2+2)}c_0 = \frac{1}{4!}c_0,\ \ c_5 = -\frac{1}{4(3+2)}c_3 == \frac{1}{5!}c_1,$$

$$c_6 = -\frac{1}{5(4+2)}c_4 = -\frac{1}{6!}c_0.$$

Другий розв'язок набуває вигляду

$$y_2(x) = c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots\right) +$$

$$+c_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots\right) = c_0\frac{\cos x}{x} + c_1\frac{\sin x}{x}.$$

Оскільки функція $\dfrac{\sin x}{x}$ є першим розв'язком, то з другого розв'язку достатньо врахувати лише $\dfrac{\cos x}{x}$. Отже, загальний розв'язок

$$y(x) = c_0\frac{\cos x}{x} + c_1\frac{\sin x}{x}.$$

Завдання для самостійної роботи

7. Знайти розв'язок рівнянь, використовуючи степеневі ряди:

7.1. $y'' - xy - 2y = 0;$

7.2. $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0;$

7.3. $(1+x^2)y'' + 5xy' + 3y = 0;$

7.4. $(x^2 - x + 1)y'' + (4x-2)y' + 2y = 0;$

7.5. $(1-x)y'' - 2xy' + y = 0;$

7.6. $y'' - xy' + xy = 0;$

7.7. $y'' - y\sin x = 0;$

7.8. $xy'' + y\ln(1-x) = 0.$

8. Знайти розв'язок рівнянь, використовуючи узагальнені степеневі ряди:

8.1. $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0;$

8.2. $x^2y'' + 2y' - (x^2 + 2x + 2)y = 0;$

8.3. $x^2y'' - x^2y' + (x-2)y = 0;$

8.4. $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0;$

8.5. $xy'' - xy' - y = 0;$

8.6. $xy'' + y' - xy = 0.$

5.4. Рівняння Бесселя

Багато задач астрономії, фізики, механіки зводяться до рівняння Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \tag{5.4.1}$$

або

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2 - n^2)}{x^2}y = 0.$$

У цьому рівнянні $p_0 = 1$, $q_0 = -n^2$. Випишемо визначальне рівняння

$$\rho(\rho - 1) + 1 \cdot \rho - n^2 = 0,$$

або

$$\rho^2 - n^2 = 0. \tag{5.4.2}$$

Його коренями є $\rho_1 = n$, $\rho_2 = -n$, $s = \rho_1 - \rho_2 = 2n$. Можливі такі випадки:

1. Якщо $S = 2n$ не дорівнює цілому додатному числу або не є нулем, то існують два лінійно незалежні розв'язки у вигляді узагальнених степеневих рядів.

2. Якщо $S = 2n$ – ціле додатне число або $n = 0$, тобто $\rho_1 = \rho_2 = 0$, то один частковий розв'язок набуває вигляду звичайного степеневого ряду, а другий містить логарифмічний член.

Будемо шукати розв'язок рівняння Бесселя у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k}, \;\; c_0 \neq 0. \tag{5.4.3}$$

Візьмемо похідні

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho+k) x^{\rho+k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho+k)(\rho+k-1) x^{\rho+k-2}.$$

Підставивши отримані вирази у диференціальне рівняння (5.4.1), отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k)(\rho+k-1) c_k x^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k) c_k x^{\rho+k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 c_k x^{\rho+k} = 0.$$

Скоротивши отримане рівняння на x^{ρ}, матимемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\rho+k)^2 - n^2] c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = 0.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при однакових степенях x^k, $k = 0,1,2\ldots$, дістанемо

$$\begin{array}{r|l}
x^0 & (\rho^2 - n^2) c_0 = 0, \\
x^1 & [(\rho+1)^2 - n^2] c_1 = 0, \\
x^2 & [(\rho+2)^2 - n^2] c_2 + c_0 = 0, \\
\ldots & \ldots \\
x^k & [(\rho+k)^2 - n^2] c_k + c_{k-2} = 0.
\end{array}$$

З першого рівняння отримаємо $\rho_1 = n$, $\rho_2 = -n$.

Розглянемо розв'язок, що відповідає першому кореню $\rho_1 = n$. Підставимо його в отриману ітераційну процедуру, матимемо

$$
\begin{array}{r|l}
x^0 & [(n+1)^2 - n^2]c_1 = 0 \to (2n+1)c_1 = 0, \\
x^1 & [(n+2)^2 - n^2]c_2 + c_0 = 0 \to (2\cdot 2n + 2^2)c_2 + c_0 = 0, \\
x^2 & [(n+3)^2 - n^2]c_3 + c_1 = 0 \to (2\cdot 3n + 3^2)c_3 + c_1 = 0, \\
\ldots & \ldots \\
x^k & [(n+k)^2 - n^2]c_k + c_{k-2} = 0 \to (2\cdot kn + k^2)c_k + c_{k-2} = 0.
\end{array}
$$

Загальна ітераційна залежність набуде вигляду

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2n+k)}, \quad k = 2,3,\ldots.$$

Випадок $n = \pm\frac{1}{2}$ було розглянуто раніше, тому будемо вважати, що $n \neq \pm\frac{1}{2}$.

Отже, перше рівняння дає $c_1 = 0$. Звідси всі непарні коефіцієнти також нульові, тобто $c_{2k+1} = 0,\ k = 2,3,\ldots$

Парні коефіцієнти визначаються залежністю

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k(2n+2k)} = -\frac{c_{2k-2}}{2^2 k(n+k)}, \quad k = 1,2,\ldots$$

або

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2\cdot 1\cdot (n+1)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2\cdot 2\cdot (n+2)} = \frac{c_0}{2^4\cdot 2!\cdot (n+1)(n+2)}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{2^2\cdot 3\cdot (n+3)} = -\frac{c_0}{2^6\cdot 3!\cdot (n+1)(n+2)(n+3)}$$

$\ldots$

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{2^{2k}\cdot k!\cdot (n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+k)}. \quad (5.4.4)$$

Підставимо отримані значення (5.4.4) у (5.4.3) і отримаємо

$$y(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_0}{2^{2k} k!(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)} x^{2k}.$$

Ряд збіжний для всіх значень $0 < x < +\infty$. Перепишемо його як

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_0 \cdot 2^n}{k!(n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot (n+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \quad (5.4.5)$$

Виберемо сталу c_0:

$$c_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)},$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \ \ (\alpha > 0),$$

де $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція. Оскільки для гамма-функції виконується різницеве рівняння

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

то розв'язок (5.4.5) можна переписати як

$$y_1(x) = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \quad (5.4.6)$$

Функція $J_n(x)$ називається *функцією Бесселя першого роду n-го порядку*. Вона є одним із лінійно незалежних розв'язків рівняння Бесселя.

Розглянемо рівняння Бесселя нульового порядку

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Для цілих k виконується

$$\Gamma(k+1) = k!.$$

Перший частковий розв'язок цього рівняння набуває вигляду

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Знайдемо другий частковий розв'язок рівняння Бесселя загального вигляду (5.4.1). Його будемо шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду, який відповідає значенню $\rho_2 = -n$:

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-n}.$$

Щоб знайти коефіцієнти c_k, випишемо залежність

$$\begin{array}{l|l} x^0 & [(-n+1)^2-n^2]c_1=0 \to (-2n+1)c_1=0 \\ x^1 & [(-n+2)^2-n^2]c_2+c_0=0 \to (-2\cdot 2n+2^2)c_2+c_0=0 \\ x^2 & [(-n+3)^2-n^2]c_3+c_1=0 \to (-2\cdot 3n+3^2)c_3+c_1=0 \to c_3=0 \\ \ldots & \ldots \\ x^k & [(-n+k)^2-n^2]c_k+c_{k-2}=0 \to (-2\cdot kn+k^2)c_k+c_{k-2}=0 \end{array}$$

Перше рівняння дає $c_1=0$. Звідси всі непарні коефіцієнти також нульові, а парні виражаються залежністю

$$c_{2k}=-\frac{c_{2k-2}}{2^2k(-n+k)}.$$

Якщо $k\neq n$, тобто n – неціле число, то всі коефіцієнти c_n знаходимо однозначно для будь-якого c_0. Нехай (для зручності)

$$c_0=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}.$$

Тоді другий частковий розв'язок рівняння Бесселя набуває вигляду

$$y_2(x)=J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}.$$

Отже, якщо n – неціле число, то загальним розв'язком рівняння Бесселя є сума його часткових розв'язків

$$y=c_1J_n(x)+c_2J_{-n}(x).$$

Нехай ε – ціле додатне значення. Тоді при

$$c_{2k}=-\frac{c_{2k-2}}{2^2k(-n+k)}\to\infty$$

і другий частковий розв'язок має логарифмічний вигляд.

Для знаходження другого розв'язку використовують *метод збурень*. Суть його полягає в такому. Параметру n диференціального рівняння (5.4.1) надають мале збурення $\varepsilon>0$. Отримують розв'язок рівняння $y(x,\varepsilon)$ і величину ε спрямовують до нуля. Якщо отримане граничне значення є розв'язком рівняння, то воно і є шуканим розв'язком.

Розглянемо "збурене" рівняння Бесселя

$$x^2y'' + xy' + [x^2 - (n-\varepsilon)^2]y = 0, \ \ 0 < \varepsilon < 1. \qquad (5.4.7)$$

Оскільки $(n-\varepsilon)$ не є цілим додатним числом, то диференціальне рівняння (5.4.7) має два лінійно незалежні розв'язки

$$y_1(x) = J_{n-\varepsilon}(x), \ \ y_2(x) = J_{-(n-\varepsilon)}(x).$$

Побудуємо розв'язок у вигляді

$$Y_{n-\varepsilon} = \frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(x) - J_{(n-\varepsilon)}(x)}{\varepsilon} \qquad (5.4.8)$$

– лінійної комбінації функцій Бесселя. Як випливає із властивостей розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння, лінійна комбінація розв'язків також буде розв'язком. Далі спрямовуємо $\varepsilon \to 0$. Якщо існує границя

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Y_{n-\varepsilon}(x) = Y_n(x),$$

то це і буде другим розв'язком рівняння Бесселя. Для знаходження границі запишемо $Y_{n-\varepsilon}(x)$ у розгорнутому вигляді

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-n+\varepsilon+2k} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(n-\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{n+\varepsilon+2k} = S_1(x,\varepsilon) + S_2(x,\varepsilon).$$

Розіб'ємо першу суму на два доданки:

$$S_1(x,\varepsilon) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-n+\varepsilon+2k} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+(-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-n+\varepsilon+2k}.$$

Замінивши порядок підсумовування у другій сумі, отримаємо

$$S_1(x,\varepsilon) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+n)!\,\Gamma(\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-n+\varepsilon+2k} = S_{11}(x,\varepsilon) + S_{12}(x,\varepsilon).$$

Об'єднавши дві суми $S_{12}(x,\varepsilon)$ і $S_2(x,\varepsilon)$, отримаємо

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = S_{11}(x,\varepsilon) + [S_{12}(x,\varepsilon) + S_{22}(x,\varepsilon)] =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\varepsilon} F_k(\varepsilon,x)(x/2)^{n+2k},$$

де

$$F_k(\varepsilon,x) =$$

$$= \frac{1}{(k+n)!\Gamma(\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{\varepsilon} - \frac{1}{k!\Gamma(n-\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)}(x/2)^{\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}(x/2)^{-\varepsilon}.$$

Знайдемо границю $Y_{n-\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \to 0$. Для знаходження границі першої суми $S_{11}(x,\varepsilon)$ використаємо властивість

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Підставивши замість α значення $\alpha = n-\varepsilon-k$, отримаємо

$$\Gamma(-n+\varepsilon+k+1) = \Gamma(1-(n-\varepsilon-k)) = \frac{\pi}{\Gamma(n-\varepsilon-k)\sin((n-\varepsilon-k)\pi)}.$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin((n-\varepsilon-k)\pi)\Gamma(n-\varepsilon-k)}{\pi\varepsilon} =$$

$$= \cos[(n-k)\pi]\Gamma(n-k) = (-1)^{n-k+1}\Gamma(n-k), \ \ k = 0,1,\dots,n-1.$$

Для знаходження границі другої суми зробимо таке: оскільки $F_n(0) = 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_k(\varepsilon,x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_k(\varepsilon,x) - F_k(0,x)}{\varepsilon} = F_k'(\varepsilon,x)\big|_{\varepsilon=0}.$$

Тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_k(\varepsilon,x)}{\varepsilon} = F_k'(0,x) = \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+n+1)\Gamma^2(k+1)} + \frac{\ln(x/2)}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} -$$

$$-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma^2(n+k+1)}+\frac{\ln(x/2)}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)}[\ln(x/2)-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}].$$

Звідси випливає, що

$$Y_n(x)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}(x/2)^{-n+2k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(n+k)!}[\ln(x/2)-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}](x/2)^{n+2k}.$$

Отримана функція $Y_n(x)$ називається *функцією Бесселя другого роду*. Вона дає другий частковий розв'язок рівняння Бесселя у випадку, коли n – ціле додатне число. Цей розв'язок містить $\ln(x)$ із коефіцієнтом $\gamma_{-1}=2.$

Загальний розв'язок рівняння Бесселя, коли n – ціле додатне число, може бути записаний як

$$y=c_1J_n(x)+c_2Y_n(x).$$

Розглянемо рівняння Бесселя для випадку $n=0$, тобто коли

$$xy''+y'+xy=0. \qquad (5.4.9)$$

Першим частковим розв'язком рівняння (5.4.9), як було показано вище, буде функція $J_0(x)$. Щоб знайти другий частковий розв'язок, розглянемо, як і у випадку, коли n – ціле додатне число, "збурене" рівняння

$$xy''+y'+(x^2-\varepsilon^2)y=0,$$

де $0<\varepsilon<1.$ Побудуємо розв'язок як

$$Y_{-\varepsilon}=\frac{J_\varepsilon(x)-J_{-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}$$

і також знайдемо границю $Y_{-\varepsilon}$ при $\varepsilon\to 0$ $y(x,\varepsilon).$ Матимемо

$$Y_{-\varepsilon}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{\varepsilon+2k}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-\varepsilon+k+1)\varepsilon}(x/2)^{-\varepsilon+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{F_k(\varepsilon,x)}{k!\varepsilon}(x/2)^{2k},$$

де

$$F_k(\varepsilon, x) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon + k + 1)\varepsilon}(x/2)^{\varepsilon} - \frac{1}{(n - \varepsilon + k + 1)\varepsilon}(x/2)^{-\varepsilon}.$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_k(\varepsilon, x)}{\varepsilon} = F_k'(0, x) =$$

$$= \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma^2(k+1)} + \frac{\ln(x/2)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma^2(k+1)} + \frac{\ln(x/2)}{\Gamma(k+1)} =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(k+1)}[\ln(x/2) - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}].$$

Звідси випливає, що

$$Y_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} Y_{-\varepsilon}(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}[\ln(x/2) - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}](x/2)^{2n}.$$

При цьому загальний розв'язок рівняння Бесселя може бути записаний як

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x),$$

де $Y_0(x)$ – функція Бесселя другого роду нульового порядку.

5.5. Метод малого параметра

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y, \varepsilon), \tag{5.5.1}$$

яке залежить від малого параметра ε. Основна ідея методу полягає в тому, що розв'язок рівняння (5.5.1) ми шукаємо у вигляді розкладу у степеневий ряд за параметром ε. Якщо функція $f(\cdot)$ аналітична за всіма змінними, то метод малого параметра називають *регулярним*.

Розробка методу належить А. Пуанкаре та А. М. Ляпунову, тому спочатку він називався *методом Ляпунова – Пуанкаре*.

Для рівняння першого порядку (5.5.1) має місце таке твердження.

Теорема 5.5.1. Нехай функція $f(x, y, \varepsilon)$ неперервна і має неперервні та рівномірно обмежені частинні похідні довільного порядку при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, $-\infty < y < +\infty$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, а задача Коші $y(x_0) = y_0$ для диференціального рівняння $y' = f(x, y, 0)$ має єдиний розв'язок $y = y_0(x)$. Тоді на проміжку $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ задача Коші $y(x_0) = y_0$ для вихідного диференціального рівняння $y' = f(x, y, \varepsilon)$ має єдиний розв'язок $y = y(x, \varepsilon)$, який може бути зображений як ряд за степенями малого параметра

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots$$

При цьому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(x,\varepsilon) = y_0(x).$$

Алгоритм побудови функцій $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ такий. Зобразимо $y(x,\varepsilon)$ як формальний ряд

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots$$

і підставимо його у вихідне диференціальне рівняння. Отримаємо

$$y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \varepsilon^2 y_2'(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n'(x) + \ldots =$$
$$= f(x, y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots, \varepsilon).$$

Розкладемо праву частину в ряд за малим параметром:

$$f(x, y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots, \varepsilon) = f(x, y_0(x), 0) +$$
$$+ \left[\frac{\partial f(x, y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots, \varepsilon)}{\partial y} (y_1(x) + 2\varepsilon y_2(x) + 3 y_3(x) + \ldots) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f(x, y_0(x) + \varepsilon y_2(x) + \ldots, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \varepsilon +$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 f(x, y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots, \varepsilon)}{\partial y^2} (y_1(x) + 2\varepsilon y_2(x) + 3\varepsilon^2 y_3(x) + \ldots)^2 + \right.$$
$$+ \frac{\partial^2 f(x, y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots, \varepsilon)}{\partial y \partial \varepsilon} (y_1(x) + 2\varepsilon y_2(x) + 3\varepsilon^2 y_3(x) + \ldots) +$$
$$+ \frac{\partial f(x, y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots, \varepsilon)}{\partial y} (2 \cdot 1 y_2(x) + 3 \cdot 2\varepsilon y_3(x) + \ldots) +$$

$$+\frac{\partial^2 f(x, y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+...,\varepsilon)}{\partial y \partial \varepsilon}(y_1(x)+2\varepsilon y_2(x)+3\varepsilon^2 y_3(x)+...)+$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x, y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+...,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0}\varepsilon^2+...$$

Отримали диференціальне рівняння

$$y_0'(x)+\varepsilon y_1'(x)+\varepsilon^2 y_2'(x)+...+\varepsilon^n y_n'(x)+...=f(x, y_0(x),0)+$$

$$+\left[\frac{\partial f(x, y_0(x),0)}{\partial y}y_1(x)+\frac{\partial f(x, y_0(x),0)}{\partial \varepsilon}\right]\varepsilon+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 f(x, y_0(x),0)}{\partial y^2}y_1^2(x)+2\frac{\partial^2 f(x, y_0(x),0)}{\partial y \partial \varepsilon}y_1(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x, y_0(x),0)}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial f(x, y_0(x),0)}{\partial y}2y_2(x)\right]\varepsilon^2+...$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε^n, $n=0,1,2,...,$ отримаємо послідовність диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^0:\ y_0'(x)=f(x, y_0(x),0),$$

$$\varepsilon^1: y_1'(x)=\frac{\partial f(x, y_0(x),0)}{\partial y}y_1(x)+\frac{\partial f(x, y_0(x),0)}{\partial \varepsilon},$$

$$\varepsilon^2: y_2'(x)=\frac{\partial^2 f(x, y_0(x),0)}{\partial y^2}y_1^2(x)+2\frac{\partial^2 f(x, y_0(x),0)}{\partial y \partial \varepsilon}y_1(x, y_0(x),0)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(x, y_0(x),0)}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial f(x, y_0(x),0)}{\partial y}2y_2(x)+$$

....

Початковими умовами для диференціальних рівнянь будуть

$$y_0(x_0)=y_0,\ \ y_1(x_0)=0,\ \ y_2(x_0)=0,...,\ \ y_n(x_0)=0,...$$

Доводимо, що ряд

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+...+\varepsilon^n y_n(x)+...$$

з отриманими коефіцієнтами $y_n(x)$, $n=0,1,2,...$ збігається рівномірно в деякому околі $x_0-h\le x\le x_0+h$.

Розглянутий підхід побудови розв'язків $y(x,\varepsilon)$ рівняння з малим параметром ε давав непогані практичні результати, але теоретично обґрунтований був лише у 30-ті роки XX сторіччя.

Розкладання розв'язку за малим параметром використовував ще Пуассон при дослідженні задачі про коливання маятника. Метод Пуассона полягав у такому. Нехай треба знайти коливальний розв'язок рівняння, що містить малий параметр ε, яке має вигляд

$$y'' + \omega^2 y = f(x) + \varepsilon F(x, y, y').$$

Розв'язок, який задовольняє рівняння з точністю до величини порядку ε^{n+1}, шукаємо у вигляді n-ї частинної суми ряду

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots$$

Розклавши функцію $F(x, y, y')$ у ряд за змінними y, y' в околі розв'язку $y_0(x)$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$n = 0: \quad y_0'' + \omega^2 y_0 = f(x),$$

$$n = 1: \quad y_1'' + \omega^2 y_1 = F(x, y_0(x), y_0'(x)),$$

$$n = 2: \quad y_2'' + \omega^2 y_2 = F_y'(x, y_0(x), y_0'(x)) y_1(x) + F_{y'}'(x, y_0(x), y_0'(x)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отримана зліченна система є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, у яких праві частини обчислюються за допомогою розв'язків попередніх рівнянь.

Наведемо кілька прикладів розв'язання рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

1. Знайти 2 – 3 члени розкладу за степенями малого параметра

$$y'(x) = 4\varepsilon x - y^2(x), \quad y(1) = 1.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots$$

Підставляємо його в диференціальне рівняння і отримуємо

$$y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \varepsilon^2 y_2'(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n'(x) + \ldots =$$

$$= 4\varepsilon x - (y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \ldots)^2.$$

Розкривши дужки у правій частині, матимемо

$$y_0'(x)+\varepsilon y_1'(x)+\varepsilon^2 y_2'(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n'(x)+\ldots=$$

$$=4\varepsilon x-(y_0^2(x)+\varepsilon^2 y_1^2(x)+\varepsilon^4 y_2^4(x)+\ldots$$

$$+2\varepsilon y_0(x)y_1(x)+2\varepsilon^2 y_0(x)y_2(x)+\ldots).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε:

$$\varepsilon^0: \quad y_0'(x)=-y_0^2(x), \quad y_0(1)=1,$$

$$\varepsilon^1: \quad y_1'(x)=4x-2y_0(x)y_1(x), \quad y_1(1)=0,$$

$$\varepsilon^2: \quad y_2'(x)=-y_1^2(x)-2y_0(x)y_2(x), \quad y_2(1)=0$$

....

Розв'язок першого рівняння набуває вигляду

$$\frac{dy_0}{dx}=-y_0^2(x) \rightarrow -\frac{dy_0}{y_0^2}=dx \rightarrow \frac{1}{y_0}=x+C \rightarrow y_0(x)=\frac{1}{x+C}.$$

Підставивши першу початкову умову $y_0(1)=1$, отримаємо

$$y_0(x)=\frac{1}{x}.$$

Підставимо отриманий розв'язок у друге диференціальне рівняння. Матимемо

$$y_1'(x)=4x-2\frac{1}{x}y_1(x),$$

або

$$\frac{dy_1}{dx}+2\frac{1}{x}y_1(x)=4x$$

– лінійне неоднорідне рівняння. Його розв'язком буде

$$y_1(x)=e^{-2\int\frac{dx}{x}}\left(\int e^{2\int\frac{dx}{x}}4x\,dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int 4x^3dx+C\right)=\frac{x^4+C}{x^2}.$$

Підставивши в нього другу початкову умову $y_1(1)=0$, отримаємо

$$y_1(x)=\frac{x^4-1}{x^2}.$$

Підставимо отриманий розв'язок $y_1(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$ у третє диференціальне рівняння. Матимемо

$$y_2'(x)=-\frac{(x^4-1)^2}{x^2}-2\frac{1}{x}y_2(x),$$

або

$$\frac{dy_2}{dx}+2\frac{1}{x}y_2(x)=-\frac{(x^4-1)^2}{x^2}.$$

Його розв'язок набуває вигляду

$$y_2(x)=e^{-2\int\frac{dx}{x}}\left(-\int e^{2\int\frac{dx}{x}}\frac{(x^4-1)}{x^2}dx+C\right)=$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(-\int(x^4-1)dx+C\right)=\frac{x-\frac{1}{5}x^5+C}{x^2}.$$

Ураховуючи початкові умови $y_2(1)=0$, отримаємо

$$y_2(x)=\frac{x-\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{5}}{x^2}.$$

Остаточно

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{x}+\varepsilon\frac{x^4-1}{x^2}+\varepsilon^2\frac{x-\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{5}}{x^2}+\ldots$$

2. Знайти наближений періодичний розв'язок із періодом, що дорівнює періоду правої частини рівняння

$$x''(t)+3x(t)=2\sin t+\varepsilon(x'(t))^2.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\ldots+\varepsilon^n x_n(t)+\ldots$$

Підставляємо його в диференціальне рівняння і отримуємо

$$x_0''(t)+\varepsilon x_1''(t)+\varepsilon^2x_2''(t)+\ldots+\varepsilon^n x_n''(t)+\ldots+$$

$$+3(x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\ldots+\varepsilon^n x_n(t)+\ldots)=$$

$$=2\sin t+\varepsilon(x_0'(t)+\varepsilon x_1'(t)+\varepsilon^2x_2'(t)+\ldots+\varepsilon^n x_n'(t)+\ldots)^2.$$

Перепишемо його, розкривши дужку у правій частині:

$$x_0''(t)+\varepsilon x_1''(t)+\varepsilon^2 x_2''(t)+\ldots+\varepsilon^n x_n''(t)+\ldots+$$
$$+3(x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots+\varepsilon^n x_n(t)+\ldots)=$$
$$=2\sin t+\varepsilon(x_0'^2(t)+\varepsilon^2 x_1'^2(t)+\ldots+2\varepsilon x_0'(t)x_1'(t)+2\varepsilon^2 x_0'(t)x_2'(t)+\ldots).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\varepsilon^0: \quad x_0''(t)+3x_0(t)=2\sin t,$$
$$\varepsilon^1: \quad x_1''(t)+3x_1(t)=x_0'^2(t),$$
$$\varepsilon^2: \quad x_2''(t)+3x_2(t)=2x_0'(t)x_1'(t),$$
....

Загальним розв'язком першого рівняння буде

$$x_0(t)=C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t+A\sin t+B\cos t.$$

Періодичний розв'язок із періодом правої частини початкового рівняння 2π набуде вигляду

$$x_0(t)=A\sin t+B\cos t.$$

Підставивши його в перше диференціальне рівняння для знаходження невідомих коефіцієнтів, отримаємо

$$-A\sin t-B\cos t+3(A\sin t+B\cos t)=2\sin t.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, матимемо

$$A=1, \quad B=0.$$

Отже, $x_0(t)=\sin t$.

Розглянемо друге рівняння, підставивши в нього знайдений попередній результат:

$$x_1''(t)+3x_1(t)=\cos^2 t,$$

або, інакше,

$$x_1''(t)+3x_1(t)=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Загальним розв'язком другого рівняння буде

$$x_1(t)=C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t+C\sin 2t+D\cos 2t+E.$$

Періодичним розв'язком із періодом правої частини 2π може бути тільки $x_1(t)=C\sin 2t+D\cos 2t+E$. Підставивши його у друге диференціальне рівняння, отримаємо

$$-4C\sin 2t-4D\cos 2t+3(C\sin 2t+D\cos 2t+E)=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, знайдемо невідомі константи

$$D=-1/2,\quad C=0,\quad E=1/6.$$

Отже, $x_1(t)=-\tfrac{1}{2}\cos 2t+1/6.$

Остаточно отримуємо

$$x(t,\varepsilon)=\sin t+\varepsilon(1/6-\tfrac{1}{2}\cos 2t)+\ldots$$

3. Розв'язати рівняння з малим параметром

$$xy'=\mu x^2+\ln y,\quad y(1)=1.$$

Робимо заміну $y(x)=z(x)+1$.

Отримуємо диференціальне рівняння

$$xz'=\mu x^2+\ln(z+1),\quad z(1)=0.$$

Оскільки відомий розклад

$$\ln(z+1)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots,$$

то після підстановки отримуємо

$$xz'=\mu x^2+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots,\quad z(1)=0.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді розкладу за степенями малого параметра

$$z(x,\mu)=z_0(x)+\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots$$

Оскільки початкові умови нульові

$$z(1,\mu)=z_0(1)+\mu z_1(1)+\mu^2 z_2(1)+\ldots\equiv 0,$$

то, відповідно,

$$z_0(1)=0,\quad z_1(1)=0,\quad z_2(1)=0,\ldots$$

Підставивши їх у рівняння, отримуємо

$$x[z_0'(x)+\mu z_1'(x)+\mu^2 z_2'(x)+\ldots]=\mu x^2+$$

$$+[z_0(x)+\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots]-$$

$$-\frac{1}{2}[z_0(x)+\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots]^2+$$

$$+\frac{1}{3}[z_0(x)+\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots]^3-$$

$$-\frac{1}{4}[z_0(x)+\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots]^4+\ldots,\quad z(1,\mu)\equiv 0.$$

1) При μ^0 маємо

$$xz_0'(x)=z_0(x)-\frac{1}{2}z_0^2(x)+\frac{1}{3}z_0^3(x)-\ldots,$$

або

$$xz_0'(x)=\ln\left(z_0(x)+1\right),\quad z_0(1)=0.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dz_0(x)}{\ln[z_0(x)+1]}=\frac{dx}{x},\quad z_0(1)=0.$$

Інтеграл не береться!!!

Неважко побачити, що розв'язком розглядуваного рівняння, який задовольняє нульову умову, є тотожний нуль, тобто $z_0(x)\equiv 0$. Отже, наше рівняння в нових змінних спрощується і набуває вигляду

$$x[\mu z_1'(x)+\mu^2 z_2'(x)+\ldots]=\mu x^2+[\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots]-$$

$$-\frac{1}{2}[\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots]^2+\ +\frac{1}{3}[\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots]^3-$$

$$-\frac{1}{4}[z_0(x)+\mu z_1(x)+\mu^2 z_2(x)+\ldots]^4+\ldots,$$

$$z(1,\mu)\equiv 0.$$

2) При μ^1 маємо

$$xz_1'(x)=x^2+z_1(x),\quad z_1(1)=0,$$

або лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$z_1'(x)-\frac{1}{x}z_1(x)=x.$$

За формулою Коші його розв'язком буде

$$z_1(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}xdx+c\right]=x\left[\int\frac{1}{x}xdx+c\right]=x[x+c].$$

Початкові умови $z_1(1) = 1[1+c] = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1$. Звідси

$$z_1(x) = x(x-1).$$

3) При μ^2 маємо

$$xz_2'(x) = z_2(x) - \frac{1}{2}x^2(x-1)^2, \quad z_2(1) = 0,$$

або

$$z_2'(x) - \frac{1}{x}z_2(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)^2.$$

За формулою Коші розв'язком рівняння буде

$$z_2(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[-\frac{1}{2}\int e^{-\int \frac{1}{x}dx} x(x-1)^2\,dx + c\right] =$$

$$= x\left[-\frac{1}{2}\int (x-1)^2\,dx + c\right] = x\left[-\frac{1}{6}(x-1)^3 + c\right].$$

Підставивши початкові умови $z_2(1) = 0$, отримаємо $c = 0$.

Звідси $z_2(x) = -\dfrac{1}{6}x(x-1)^3$.

Отже, $y(x,\mu) = 1 + \mu(x^2 - x) + \mu^2\dfrac{x(1-x)^3}{6} + O(\mu^3)$.

Завдання для самостійної роботи

9. Знайти перші члени розкладу розв'язку за степенями малого параметра ε:

9.1. $y' = 2/y - 5\varepsilon x, \quad y(1) = 2;$

9.2. $xy' = \ln y + \varepsilon x^2, \quad y(1) = 1;$

9.3. $y' = (6/x)\varepsilon - y^2, \quad y(1) = 1 + 3\varepsilon;$

9.4. $y' = e^{y-x} + \varepsilon y, \quad y(0) = -\varepsilon;$

9.5. $y'' + \varepsilon x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

9.6. $y'' + \varepsilon y^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

9.7. $y'' + \varepsilon \sin x = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

9.8. $xy'' + \cos y + \varepsilon \cos 2x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

9.9. $xy' + \varepsilon - y^2 = 0, \quad y(0) = 1;$

9.10. $y' + \varepsilon y + x = 0, \quad y(0) = 1;$

9.11. $y' - \varepsilon x - y = 0, \quad y(0) = 0;$

9.12. $y'' + y^2 - \varepsilon \cos x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

10. Знайти наближений періодичний розв'язок із періодом, що дорівнює періоду правої частини рівняння:

10.1. $\ddot{x} + 5x = \cos t + \varepsilon x^2;$

10.2. $\ddot{x} + 3x + x^3 = 2\varepsilon \cos t;$

10.3. $\ddot{x} + x^2 = 1 + \varepsilon \sin t;$

10.4. $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \sin 2t.$

5.6. Лінійні рівняння другого порядку і коливальні процеси

Нехай матеріальна точка масою $m > 0$ рухається вздовж осі Ox під дією сили bx, яка притягує її до початку координат, сили опору середовища $a\dfrac{dx}{dt}$ та зовнішньої сили, що напрямлена вздовж осі Ox і дорівнює $F(t)$.

Використовуючи другий закон Ньютона, отримаємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dx}{dt} - bx + F(t).$$

Перепишемо його як

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t),$$

де $h = \dfrac{a}{2m} \ge 0, \ \omega^2 = \dfrac{b}{2m} \ge 0, \ f(t) = \dfrac{F(t)}{m}.$

5.6.1. Вільні коливання

Розглянемо вільні коливання (без дії зовнішньої сили)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+\omega^2 x=0. \qquad (5.6.1)$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2+2h\lambda+\omega^2(x)=0.$$

Розглянемо такі випадки:

1. Нехай $h=0$, тобто коливання відбувається у середовищі, що не має опору. Тоді

$$\lambda^2+\omega^2=0 \text{ і } \lambda_{1,2}=\pm i\omega.$$

Загальний розв'язок рівняння (5.6.1)

$$x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t, \qquad (5.6.2)$$

або

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi),$$

де A – амплітуда, а φ – початкова фаза, які визначаються з початкових умов

$$x(0)=x_0,\ \ x'(0)=x_0'. \qquad (5.6.3)$$

Підставимо (5.6.3) у загальний розв'язок (5.6.2) і отримаємо значення амплітуди та початкової фази

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{(x_0')^2}{\omega^2}},\ \ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\omega x_0}{x_0'}.$$

Отже, коливальні процеси у середовищі, що не має опору, можна описати залежністю

$$x(t)=\sqrt{x_0^2+\frac{(x_0')^2}{\omega^2}}\cdot\sin\left(\omega t+\operatorname{arctg}\frac{\omega x_0}{x_0'}\right).$$

Такий процес називається *гармонічними коливаннями* з періодом $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, частотою ω та амплітудою $A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{(x_0')^2}{\omega^2}}$.

2. Нехай коливання відбуваються у середовищі з опором ($h>0$ – коефіцієнт тертя). Тоді характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 x = 0 \qquad (5.6.4)$$

має корені $\lambda_1,\ \lambda_2$. Можливі такі випадки.

а) Якщо $h^2 - \omega^2 > 0,$ то характеристичне рівняння (5.6.4) має два дійсні різні від'ємні корені

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2},$$

а загальним розв'язком буде

$$x(t) = c_1 e^{-(h+\sqrt{h^2-\omega^2})t} + c_2 e^{-(h-\sqrt{h^2-\omega^2})t}.$$

Оскільки

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2} < 0,\ \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2} < 0,$$

то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Графік розв'язку зображено на рис. 5.6.1.

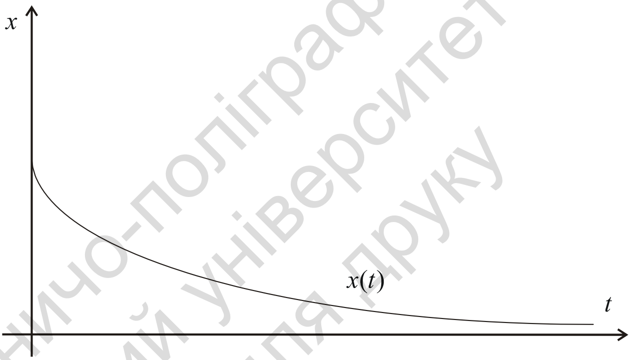


Рис. 5.6.1

Рух при цьому називається *аперіодичним.*

б) Якщо $h^2 = \omega^2,$ то $\lambda_1 = \lambda_2 = -h < 0.$ Загальним розв'язком буде

$$x(t) = c_1 e^{-ht} + c_2 t e^{-ht}.$$

Графік розв'язку зображено на рис. 5.6.2. Рух при цьому також називається *аперіодичним*, оскільки $x(t) \to 0$ при $t \to \infty,$ але при $t = t^*,$ де $t^* = \dfrac{1}{h} - \dfrac{c_1}{c_2},$ відбувається "викид" амплітуди.

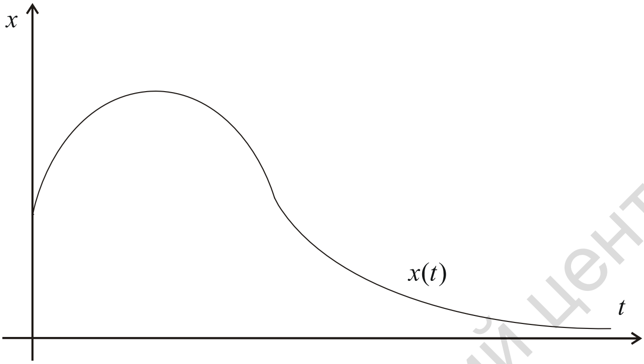


Рис. 5.6.2

в) Якщо $h^2-\omega^2<0$, то характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені

$$\lambda_{1,2}=-h\pm i\sqrt{\omega^2-h^2}.$$

Загальним розв'язком буде

$$x(t)=c_1e^{-ht}\cos\omega_1 t+c_2e^{-ht}\sin\omega_2 t,\;\; \omega_1=\sqrt{\omega^2-h^2},$$

або

$$x(t)=Ae^{-ht}\cdot\sin\left(\omega_1 t+\varphi\right).$$

Графік розв'язку зображено на рис. 5.6.3.

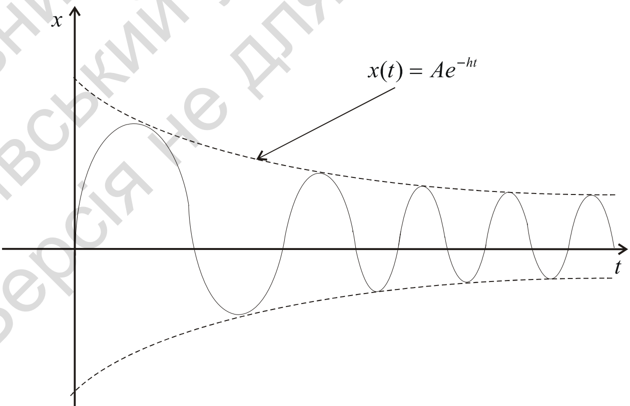


Рис. 5.6.3

Рух при цьому називається *затухаючим гармонічним коливанням* із періодом $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - h^2}}$ і частотою $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$.

5.6.2. Вимушені коливання

Дослідимо диференціальне рівняння, яке описує динаміку вимушених коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t), \tag{5.6.5}$$

тобто коливань під дією зовнішньої сили $f(t)$.

Розглянемо часткові випадки рівняння (5.6.5).

1. Рівняння вимушених коливань у середовищі, яке не має опору:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t). \tag{5.6.6}$$

Зобразимо загальний розв'язок рівняння (5.6.6) у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння, записаного за допомогою методу Коші:

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \varphi\right) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds.$$

Оскільки ядро Коші для однорідного диференціального рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

має вигляд

$$K(t,s) = c_1(s)\cos\omega t + c_2(s)\sin\omega t = \frac{\sin\omega(t-s)}{\omega},$$

то загальний розв'язок перепишемо як

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \varphi\right)\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s)f(s)ds. \tag{5.6.7}$$

Звідси частковим розв'язком, який задовольняє нульові початкові умови $x_{част}(0) = 0$, $x'_{част}(0) = 0$, є

$$x_{част}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s) f(s) ds. \qquad (5.6.8)$$

Розв'язок (5.6.8) називається *вимушеним коливанням* під дією зовнішньої сили. Як видно з (5.6.7), загальний розв'язок складається із *власних коливань точки* під дією внутрішньої сили і *вимушених коливань*, які виникли під дією зовнішньої сили.

Зовнішня сила часто має синусоїдальний вигляд. Розглянемо коливання

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = M\sin\Omega t\,. \qquad (5.6.9)$$

Можливі такі випадки.

2. Нехай $\omega \neq \Omega$, тоді частковий розв'язок рівняння (5.6.9) будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$x_{част}(t) = a\sin\Omega t + b\cos\Omega t. \qquad (5.6.10)$$

Знайдемо похідні

$$x'_{част}(t) = a\Omega\cos\Omega t - b\Omega\sin\Omega t,$$

$$x''_{част}(t) = -a\Omega^2\sin\Omega t - b\Omega^2\cos\Omega t. \qquad (5.6.11)$$

Підставимо значення похідних (5.6.10) та функції (5.6.11) у вихідне диференціальне рівняння (5.6.9):

$$-a\Omega^2\sin\Omega t - b\Omega^2\cos\Omega t + \omega^2[a\sin\Omega t + b\cos\Omega t] = M\sin\Omega t.$$

Звідси невідомі коефіцієнти набудуть вигляду

$$b = 0,\;\; a = \frac{M}{\omega^2 - \Omega^2}. \qquad (5.6.12)$$

Використовуючи отримані значення (5.6.12), перепишемо частковий розв'язок (5.6.10) як

$$x_{част}(t) = \frac{M}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\Omega t,$$

а загальний розв'язок диференціального рівняння (5.6.9) набуде вигляду

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{M}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\Omega t.$$

3. Нехай $\omega = \Omega$. Тоді частковий розв'язок диференціального рівняння (5.6.9) будемо шукати у вигляді

$$x_{част}(t) = at\sin\Omega t + bt\cos\Omega t. \qquad (5.6.13)$$

Знайдемо похідні від функції (5.6.13)

$$x'_{част}(t) = a\sin\Omega t + b\cos\Omega t + a\Omega t\cos\Omega t - b\Omega t\sin\Omega t,$$

$$x''_{част}(t) = 2(a\Omega\cos\Omega t - b\Omega\sin\Omega t) - a\Omega^2 t\sin\Omega t - b\Omega^2 t\cos\Omega t. \quad (5.6.14)$$

Підставимо значення функції та її похідних із (5.6.13) та (5.6.14) у диференціальне рівняння (5.6.9) і отримаємо

$$2(a\Omega\cos\Omega t - b\Omega\sin\Omega t) - a\Omega^2 t\sin\Omega t - b\Omega^2 t\cos\Omega t +$$

$$+\omega^2[at\sin\Omega t + bt\cos\Omega t] = M\sin\Omega t.$$

Оскільки $\omega = \Omega$, то після скорочення отримаємо значення коефіцієнтів

$$a = 0,\ \ b = -\frac{M}{2\Omega}. \quad (5.6.15)$$

Підставимо їх у значення часткового розв'язку (5.6.13) і отримаємо

$$x_{част}(t) = -\frac{M}{2\Omega}t\cos\Omega t.$$

Загальним розв'язком рівняння (5.6.9) буде

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) - \frac{M}{2\Omega}t\cos\Omega t.$$

Отже, у випадку $\omega = \Omega$ отримали коливання з необмежено зростаючою амплітудою. Це явище називаються *резонансом* між власними коливаннями та зовнішньою силою.

Рівняння вимушених коливань у середовищі з опором має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t).$$

Аналогічно попередньому випадку загальний розв'язок можна подати сумою розв'язків

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds.$$

Розглядаючи випадки $h^2 - \omega^2 > 0$, $h^2 - \omega^2 = 0$, $h^2 - \omega^2 < 0$, можна отримати розв'язок однорідного рівняння і ядро Коші, відповідно, для кожного із цих трьох випадків.

Якщо функція $f(t)$ має синусоїдальний вигляд, то для знаходження розв'язку можна використовувати метод невизначених коефіцієнтів.

Завдання для самостійної роботи

11. Побудувати фундаментальну систему розв'язків у точці $x = 0$:

11.1. $y'' + k^2 y = 0$:

а) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

б) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

11.2. $y'' + k^2 y = 0$:

а) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

б) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

5.7. Коливальні та неколивальні розв'язки в рівняннях другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Теорема Штурма

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{5.7.1}$$

Дослідимо можливість існування перетинів розв'язку з віссю абсцис, які будемо називати *нулями розв'язку*.

Твердження 5.7.1. Ненульовий розв'язок $y(x)$ рівняння (5.7.1) може лише перетинати вісь Ox. Розв'язок не може дотикатися осі Ox.

Дійсно, нехай, від супротивного, він дотикається осі Ox. Оскільки в точці дотику

$$y(x^*) = y'(x^*) = 0,$$

то, використовуючи теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, отримаємо, що розв'язком є лише $y(x) \equiv 0$, що суперечить вихідним припущенням про перетин осі.

Отже, ненульовий розв'язок при переході через нуль змінює знак. Чим більше кількість нулів розв'язку, тим частіше змінюється його знак. Це явище називають *сильним коливанням*.

Твердження 5.7.2. Усі нулі на проміжку $(x_0 - h, x_0 + h)$ є ізольованими, тобто існує $\delta > 0,$ для якого на проміжку $(x_0 - h, x_0 + h)$ розв'язок рівняння (5.7.1) дорівнює нулю лише в точці x_0.

Дійсно, нехай, від супротивного, точка x_0 є *точкою згущення*, тобто існує послідовність $\{x_n\}$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

і для довільного n буде виконуватись

$$y(x_n) = 0\,,\; n = 1, 2, ...$$

Однак за означенням похідної для довільної послідовності $x_n \to x_0,$ $n = 1, 2, ...$ похідною в точці x_0 є границя

$$y'(x_0) = \lim_{n\to 0} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Оскільки точки $x_n,$ $n = 1, 2, ...$ є нулями, то $y(x_n) = 0.$ Отже,

$$y'(x_0) = \lim_{n\to 0} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0,$$

тобто $y(x_0) = 0$ та $y'(x) = 0.$ Використовуючи теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, маємо, що в цьому випадку розв'язком є лише тотожний нуль, тобто $y(x) \equiv 0,$ а це суперечить припущенню про ненульовий розв'язок. Таким чином, на довільному проміжку $x \in (\alpha, \beta)$ розв'язок $y(x)$ змінює знак лише скінченну кількість разів.

Розглянемо диференціальне рівняння в канонічній формі зі сталим коефіцієнтом

$$y'' + qy = 0,\;\; q = \text{const}. \tag{5.7.2}$$

Дослідимо можливість коливання розв'язків рівняння (5.7.2) залежно від величини q.

1. Нехай $q < 0.$ Тоді загальний розв'язок рівняння (5.7.2) набуває вигляду

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-q}x} + c_2 e^{-\sqrt{-q}x},$$

а довільний частковий розв'язок на довільному інтервалі (α, β) може мати не більше одного нуля.

2. Нехай $q = 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (5.7.2) набуває вигляду

$$y(x) = c_1 + c_2 x.$$

Аналогічно попередньому випадку частковий розв'язок може мати не більше одного нуля.

3. Нехай $q > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (5.7.2) набуває вигляду

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{q} x + c_2 \sin \sqrt{q} x.$$

Довільний частковий розв'язок рівняння (5.7.2) становить гармонічні коливання і на інтервалі (α, β), довжина якого більша за $\dfrac{2\pi}{\sqrt{q}}$, має принаймні два нулі.

Розв'язок $y(x)$ диференційного рівняння (5.7.2) називається *коливальним* на інтервалі (α, β), якщо він має на ньому принаймні два нулі. У протилежному випадку розв'язок називається *неколивальним*.

Відомо, що диференціальне рівняння другого порядку (5.7.1) можна звести до диференціального рівняння

$$y'' + q(x) y = 0, \qquad (5.7.3)$$

тобто досліджувати коливання розв'язків рівняння (5.7.3) можна аналогічно дослідженню розв'язків рівняння (5.7.1).

Теорема 5.7.1. Якщо функція $q(x)$ на інтервалі (α, β) неперервна і задовольняє умову

$$q(x) \le 0, \quad x \in (\alpha, \beta), \qquad (5.7.4)$$

то довільний ненульовий розв'язок рівняння (5.7.4) буде неколивальним на цьому інтервалі (α, β).

Доведення. Будемо доводити теорему від супротивного. Нехай існує розв'язок $y(x)$, який є коливальним, тобто існують точки x_0, x_1 такі, що

$$\alpha < x_0 < x_1 < \beta,$$

для яких виконується

$$y(x_0) = y(x_1) = 0.$$

Нехай, для визначеності, $y(x)>0$ при $x\in(x_0,x_1)$. Тоді $y(x_0)=0$ та $y(x)>0$ для $x\in(x_0,x_1)$. Отже, для похідної буде виконуватись $y'(x_0)\geq 0$. Крім того, $y'(x_0)\neq 0$.

Інакше, використовуючи теорему про існування та єдиність розв'язку, отримаємо $y''+y=0$. Матимемо $z''+4z=0$. Перепишемо рівняння (5.7.3) як $y''=-q(x)y$.

Використаємо умову (5.7.4). Оскільки $q(x)\geq 0$, $y>0$, то на інтервалі (x_0,x_1) похідна функції в точці x_0 невід'ємна, тобто $y'(x_0)\geq 0$. Отже, $y'(x)$ на цьому інтервалі не спадає. Звідси

$$y'(x)\geq y'(x_0)>0 \text{ при } x\in(x_0,x_1).$$

Використаємо формулу скінченних приростів

$$y(x_1)-y(x_0)=y'(\xi)(x_1-x_0),\ \ \xi\in(x_0,x_1).$$

Оскільки, за припущенням, $y(x_0)=y(x_1)=0$, то ліва частина рівності дорівнює нулю, а права строго додатна, що неможливо. Тому припущення про існування коливального на інтервалі (α,β) розв'язку неправильне. Теорему доведено.

Покажемо, що умови коливання розв'язків рівнянь зі сталими коефіцієнтами аналогічні умовам коливання розв'язків рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Розглянемо диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''+qy=0,\ \ q>0 \tag{5.7.5}$$

і двома лінійно незалежними розв'язками

$$y_1(x)=\cos\sqrt{qx},\ \ y_2(x)=\sin\sqrt{qx}.$$

Між двома послідовними нулями одного розв'язку лежить один і лише один нуль іншого розв'язку, тобто нулі розв'язків розділяють один одного.

Покажемо, що цією властивістю володіють і коливальні розв'язки рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Теорема 5.7.2 (Штурма). Нулі двох лінійно незалежних розв'язків однорідного лінійного рівняння (5.7.1) взаємно розділяють один одного.

Доведення. Нехай $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – два лінійно незалежні розв'язки однорідного диференціального рівняння (5.7.1), причому

$y_1(x)$ має два послідовні нулі $y_1(x_0)=y_1(x_1)=0.$ Доведемо, що існує єдина точка $\overline{x}\in(x_0,x_1),$ у якій $y_2(\overline{x})=0.$

Доводити будемо від супротивного. Нехай $y_2(x)\neq 0$ для $x\in(x_0,x_1)$ і, для визначеності, $y_2(x)>0.$ На кінцях інтервалу (x_0,x_1) маємо

$$y_2(x_0)\neq 0,\quad y_2(x_1)\neq 0,$$

інакше визначник Вронського $W[y_1(x),y_2(x)]$ у точках x_0, x_1 перетворюється на нуль, що суперечить умові лінійної незалежності розв'язків. Нехай, для визначеності,

$$W[y_1(x),y_2(x)]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}>0 \text{ для } x\in(x_0,x_1).$$

Поділимо праву та ліву частини рівності на $y_2^2(x)$:

$$\frac{W[y_1(x),y_2(x)]}{y_2^2(x)}=\frac{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}{y_2^2(x)}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)$$

та проінтегруємо отриману рівність:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{W[y_1(x),y_2(x)]}{y_2^2(x)}dx=\frac{y_1(x_0)}{y_2(x_0)}-\frac{y_1(x_1)}{y_2(x_1)}.$$

Оскільки, за припущенням, x_0 та x_1 – нулі функції $y(x),$ то права частина рівності дорівнює нулю, а це суперечить умові $W[y_1(x),y_2(x)]>0.$ Отже, припущення неправильне та існує точка $\overline{x}\in(x_0,x_1),$ для якої $y_2(\overline{x})=0.$

Доведемо, що ця точка буде єдиною. Нехай, від супротивного, існує точка $\hat{x},$ яка задовольняє

$$x_0<\overline{x}<\hat{x}<x_1 \text{ і } y_2(\hat{x})=0.$$

Тоді на проміжку $(\overline{x},\hat{x})$ маємо $y_2(\overline{x})=y_2(\hat{x})=0$ та $y_1(x)>0.$ Звідси, використовуючи доведене вище, маємо, що існує точка $x^*\in(\overline{x},\hat{x}),$ для якої $y_1(x^*)=0,$ що суперечить припущенню про послідовність нулів у точках x_0 та x_1. Теорему доведено.

За допомогою теореми Штурма можна отримати таке твердження.

Лема 5.7.1. Два лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння є коливальними на інтервалі (α, β), якщо один із них має на цьому інтервалі більше двох нулів.

5.8. Теорія порівняння

Розглянемо два диференціальні рівняння другого порядку
$$y'' + y = 0 \text{ та } z'' + 4z = 0. \qquad (5.8.1)$$

Ці рівняння мають розв'язки
$$y_1 = \cos x, \;\; y_2 = \sin x \text{ та } y_1 = \cos 2x, \;\; y_2 = \sin 2x.$$

Порівняємо коливання розв'язків диференціальних рівнянь (5.8.1). Між будь-якими двома нулями з розв'язків першого рівняння міститься принаймні один нуль із розв'язків іншого рівняння.

Аналогічний результат має місце і для рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Розглянемо диференціальні рівняння другого порядку
$$y'' + q_1(x)y = 0 \text{ та } z'' + q_2(x)z = 0, \qquad (5.8.2)$$
де $q_1(x)$, $q_2(x)$ – неперервні на інтервалі (α,β) функції.

Теорема 5.8.1 (порівняння). Якщо коефіцієнти рівнянь (5.8.2) задовольняють умову
$$q_2(x) \geq q_1(x)$$
та існують точки, у яких
$$q_2(x) > q_1(x),$$
то між двома послідовними нулями довільного розв'язку першого рівняння (5.8.2) $y = y(x)$ міститься принаймні один нуль довільного розв'язку $z = z(x)$ другого рівняння (5.8.2).

Доведення. Нехай x_0, x_1 – дві послідовні точки, для яких $y(x_0) = y(x_1) = 0$, і для довільного $x \in (x_0, x_1)$ виконується $y(x) > 0$. Покажемо, що існує хоч одна точка $\overline{x} \in (x_0, x_1)$, для якої $z(\overline{x}) = 0$.

Нехай, від супротивного, для довільного $x \in (x_0, x_1)$ виконується $z(x) > 0$ і на кінцях інтервалу
$$z(x_0) \geq 0, \;\; z(x_1) \geq 0.$$

Підставимо розв'язки $y(x)$ та $z(x)$ у відповідні рівняння (5.8.2). Отримаємо

$$y''(x)+q_1(x)y(x)\equiv 0 \text{ та } z''(x)+q_2(x)z(x)\equiv 0.$$

Помноживши першу рівність на $z(x)$, а другу на $y(x)$ та віднявши від першої другу, матимемо

$$z(x)[y''(x)+q_1(x)y(x)]-y(x)[z''(x)+q_2(x)z(x)]=0,$$

або

$$\frac{d}{dx}[y'(x)z(x)-z'(x)y(x)]=-[q_1(x)-q_2(x)]y(x)z(x). \quad (5.8.3)$$

Проінтегрувавши рівняння (5.8.3) на проміжку $[x_0,x_1]$, отримаємо

$$[y'(x_1)z(x_1)-y'(x_0)y(x_0)]-[z'(x_1)y(x_1)-z'(x_0)y(x_0)]=$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}[q_1(x)-q_2(x)]y(x)z(x)dx. \quad (5.8.4)$$

Використовуючи умову $y(x_0)=y(x_1)=0$, перепишемо рівність як

$$y'(x_1)z(x_1)-y'(x_0)z(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}[q_2(x)-q_1(x)]y(x)z(x)dx. \quad (5.8.5)$$

За умовою $y(x)>0$ на інтервалі (x_0,x_1), отже,

$$y'(x_0)>0, \quad y'(x_1)<0.$$

Ураховуючи припущення

$$z(x_0)\ge 0, \quad z(x_1)\ge 0,$$

отримаємо, що ліва частина рівності (5.8.5) недодатна. За умовами теореми існують точки $x\in(x_0,x_1)$, у яких $q_2(x)>q_1(x)$. Звідси права частина строго додатна. Отримана суперечність доводить існування принаймні однієї точки $\overline{x}\in(x_0,x_1)$, у якій $z(\overline{x})=0$.

Зауваження 5.8.1. Розв'язок другого рівняння більше коливається, ніж розв'язок першого.

Зауваження 5.8.2. Нехай x_0 – спільний нуль двох розв'язків, тобто $y(x_0)=z(x_0)=0$, та x_1 – наступний нуль розв'язку $y(x)$. Якщо на інтервалі (x_0,x_1) виконується умова $q_2(x)\ge q_1(x)$ та існують точки, де $q_2(x) > q_1(x)$, то найближчий праворуч нуль $\bar{x}$ розв'язку $z(x)$ розташований лівіше ніж x_1, тобто $x_0 < \bar{x} < x_1$.

Кажуть, що друге рівняння більш коливальне, ніж перше.

Розглянемо рівняння зі сталим коефіцієнтом

$$y'' + \omega^2 y = 0. \tag{5.8.6}$$

Розв'язки рівняння (5.8.6)

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

є коливальними на проміжку $x_0 \le x \le x_1$, якщо

$$x_1 - x_0 > \frac{\pi}{\varpi}.$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{5.8.7}$$

де $q(x)$ – неперервна функція на $x \in [a,b]$. Позначимо

$$M = \max_{x\in[a,b]} \{q(x)\} > 0,\ \ m = \min_{x\in[a,b]} \{q(x)\} > 0.$$

Застосуємо сформульовану теорему 5.8.1 послідовно до рівнянь

$$y'' + my = 0,\ \ z'' + q(x)z = 0$$

та

$$y'' + My = 0,\ \ z'' + q(x)z = 0.$$

Отримаємо, що відстань між двома послідовними нулями довільного розв'язку рівняння (5.8.7) не більша ніж $\pi/\sqrt{m}$ та не менша ніж $\pi/\sqrt{M}$.

Розглянемо рівняння Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,\ \ x > 0.$$

Використаємо заміну $y = z/\sqrt{x}$. Рівняння зводиться до

$$z'' + q(x)z = 0,\ \ q(x) = 1 - \frac{n^2 - 1/4}{x}.$$

Звідси маємо таке:

якщо $n^2 < 1/4$, то $q(x) > 1$;

якщо $n^2 > 1/4$, то $q(x) < 1$.

Порівнюючи з рівнянням $y'' + y = 0$, отримаємо такі випадки:

1) якщо $-1/2 < n < 1/2$, то відстань між сусідніми нулями менша ніж π;

2) якщо $n > 1/2$ та $n < -1/2$, то відстань між сусідніми нулями менша ніж π;

3) якщо $n = \pm 1/2$, то відстань між сусідніми нулями дорівнює π.

Цей висновок підтверджується функцією Бесселя для $n = \pm 1/2$. Загальний розв'язок для цього випадку набуває вигляду

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi}\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi}\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Завдання для самостійної роботи

12. Використовуючи теорему порівнянь, оцінити зверху та знизу відстань між сусідніми нулями довільного розв'язку, який не дорівнює тотожно нулю, диференціальних рівнянь на заданому проміжку:

12.1. $y'' + 5xy = 0, \quad 10 \le x \le 50;$

12.2. $y'' + x^2 y = 0, \quad 20 \le x \le 45;$

12.3. $e^x y'' - y = 0, \quad 5 \le x \le 10;$

12.4. $y'' - xy' + y = 0, \quad 4 \le x \le 25;$

12.5. $y'' + (x+1)^2 y = 0, \quad 2 \le x \le 7.$

5.9. Крайові задачі. Функція Гріна

Як відомо, загальний розв'язок диференціального рівняння n-го порядку

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y = b(x)$$

залежить від n довільних сталих. Зокрема, розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = b(x) \qquad (5.9.1)$$

має вигляд

$$y_{заг} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_{част}(x)$$

і залежить від двох сталих c_1, c_2, які можна знайти з початкових умов $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Така постановка задачі називається *задачею Коші*, а початкові умови – відповідно *умовами Коші*. Інколи ставиться інша (*крайова*) задача, у якій умови задаються не в одній, а принаймні у двох точках. Для рівняння другого порядку умови також задаються у двох точках. Вони можуть бути такими:

1) $y(x_0) = u_0$, $y(x_1) = u_1$ – крайові умови першого роду;

2) $y'(x_0) = u_0$, $y'(x_1) = u_1$ – крайові умови другого роду; (5.9.2)

3) $\begin{cases} \alpha_1 y(x_0) + \beta_1 y'(x_0) = u_0 \\ \alpha_2 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = u_1 \end{cases}$ – крайові умови третього роду.

Задача знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння (5.9.1) із використанням однієї із крайових умов називається *крайовою задачею*. Задачі такого типу ставлять для диференціальних рівнянь, починаючи із другого порядку.

Якщо в лінійному диференційному рівнянні (5.9.1) права частина нульова, тобто $b(x) \equiv 0$, то крайова задача називається *однорідною*, інакше – *неоднорідною*.

На відміну від задач Коші, крайова задача навіть для лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами може мати нескінченну кількість розв'язків. Розглянемо крайову задачу для лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Розв'язком крайової задачі буде сім'я кривих

$$y = c \sin x$$

з довільною сталою c.

Твердження 5.9.1. Неоднорідну крайову задачу (5.9.1), (5.9.2) за рахунок заміни невідомої функції завжди можна звести до задачі з нульовими крайовими умовами.

Дійсно, зробимо в рівнянні (5.9.1) заміну

$$y = y_1 + \varphi(x),$$

де y_1 – нова невідома функція, функцію $\varphi(x)$ виберемо так, щоб функція y_1 задовольняла нульові крайові умови, тобто $\varphi(x)$ має задовольняти поставлені крайові умови. Нехай маємо крайові умови першого роду

$$y(0) = u_0, \quad y(l) = u_1.$$

Тоді покладемо $\varphi(x) = u_0 + \dfrac{x}{l}(u_1 - u_0)$ і виконаємо заміну

$$y(x) = y_1(x) + u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0).$$

Звідси рівняння (5.9.1) набуде вигляду

$$a_0(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1 = b_1(x),$$

де

$$b_1(x) = b(x) - a_2(x)[u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0)] - a_1(x)\frac{1}{l}(u_1 - u_0),$$

а крайові умови – вигляду

$$y_1(0) = y_1(l) = 0.$$

Будемо розглядати неоднорідну крайову задачу з нульовими крайовими умовами для рівняння, записаного в самоспряженому вигляді

$$L(x) \equiv \frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y = f(x), \tag{5.9.3}$$

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \;\; \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) = 0, \tag{5.9.4}$$

де функції $p(x)$ і $q(x)$ набувають вигляду

$$p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}, \quad p(x) = -\frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Розв'язком крайової задачі будемо називати двічі неперервно диференційовану на проміжку $[0,l]$ функцію $y(x)$, яка тотожно задовольняє диференційне рівняння і нульові крайові умови. Надалі будемо розглядати невироджений випадок, який характеризується тим, що однорідна крайова задача з нульовими крайовими умовами (5.9.3), (5.9.4) має лише нульовий розв'язок.

Зауваження 5.9.1. Нехай однорідна крайова задача (при $f(x) \equiv 0$) має лише розв'язок, що тотожно дорівнює нулю, тобто $y(x) \equiv 0$. Тоді, якщо розв'язок неоднорідної крайової задачі існує, то він *єдиний*.

Доведення. Дійсно, нехай, від супротивного, існують два розв'язки неоднорідної крайової задачі $y_1(x)$ та $y_2(x)$. Однак тоді різниця цих розв'язків $y_1(x) - y_2(x)$ буде розв'язком однорідної крайової задачі. А оскільки за умовою розв'язком однорідної крайової задачі є лише тотожний нуль, то $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ та $y_1(x) \equiv y_2(x)$, що і треба було довести.

Розглянемо розв'язання неоднорідної крайової задачі. Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (9.1), яке задовольняє нульові початкові умови $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ (умови Коші), використовується формула Коші

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s) \frac{b(s)}{a_0(s)} ds.$$

Тут $K(x,s)$ – розв'язок однорідного рівняння, який задовольняє умови

$$K(x,s)\big|_{x=s} = 0, \;\; K'_x(x,s)\big|_{x=s} = 1.$$

Функція $K(x,s)$ називається *функцією Коші* (*оператором Коші*, *інтегральним ядром Коші*).

Покажемо, що аналогічне інтегральне зображення має і розв'язок крайової задачі, але вже із функцією $G(x,s)$, яку називають функцією Гріна.

Означення 5.9.1. *Функцією Гріна* крайової задачі з нульовими крайовими умовами називається функція від двох змінних $G(x,s)$, яка визначена на прямокутнику $[0,l] \times [0,l]$ і при кожному фіксованому $\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0$ задовольняє такі умови:

1) при $x \neq s$ функція $G(x,s)$ за змінною x задовольняє однорідне рівняння

$$\frac{d}{dx} G(x,s)[p(x)G(x,s)] - q(x)G(x,s) = 0;$$

2) при $x=0$ та $x=l$ для довільного $s\in[0,l]$ функція $G(x,s)$ задовольняє нульові крайові умови, тобто $G(0,s)\equiv 0$, $G(l,s)\equiv 0$;

3) якщо $x=s$, то функція Гріна неперервна, а її похідна за змінною x має розрив першого роду зі стрибком $\dfrac{1}{p(x)}$, тобто

$$G(s+0,s)=G(s-0,s),\ \ G'_x(s+0,s)-G'_x(s-0,s)=\frac{1}{p(s)}.$$

Використовуючи функцію Гріна, розв'язок крайової задачі можна записати в інтегральному вигляді (аналогічно формулі Коші).

Дійсно, нехай $y=\varphi(x)$ – розв'язок неоднорідної крайової задачі, а $G(x,s)$ є функцією Гріна. Тоді рівняння (5.9.3) набуває вигляду

$$\frac{d}{dx}[p(x)\varphi'(x)]-q(x)\varphi(x)\equiv f(x),$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)G'_x(x)]-q(x)G(x)\equiv 0.$$

Помножимо першу тотожність на $G(x,s)$, а другу на $\varphi(x)$. Віднявши від першої другу, отримаємо

$$G(x,s)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi'(x)]-\varphi(x)\frac{d}{dx}[p(x)G'_x(x,s)]=f(x)G(x,s).$$

Перепишемо ліву частину таким чином:

$$G(x,s)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi'(x)]-\varphi(x)\frac{d}{dx}[p(x)G'_x(x,s)]=$$

$$=G(x,s)p'(x)\varphi'(x)+G(x,s)p(x)\varphi''(x)-p'(x)\varphi(x)G'_x(x,s)-$$

$$-p(x)\varphi(x)G''_{xx}(x,s)=\frac{d}{dx}[p(x)(G(x,s)\varphi'(x)-\varphi(x)G'_x(x,s)].$$

Отримаємо

$$\frac{d}{dx}[p(x)(G(x,s)\varphi'(x)-\varphi(x)G'_x(x,s)]\equiv f(x)G(x,s).$$

Проінтегруємо отриману рівність у межах $0\le x\le s-\varepsilon$ та $s+\varepsilon\le x\le l$:

$$p(s-\varepsilon)[G(s-\varepsilon,s)\varphi'(s-\varepsilon)-\varphi(s-\varepsilon)G'_x(s-\varepsilon,s)]-$$

$$-p(0)[G(0,s)\varphi'(0)-\varphi(0)G'_x(0,s)]+$$

$$+p(l)[G(l,s)\varphi'(l)-\varphi(l)G'_x(l,s)]-$$
$$-p(s+\varepsilon)[G(s+\varepsilon,s)\varphi'(s+\varepsilon)-\varphi(s+\varepsilon)G'_x(s+\varepsilon,s)]=$$
$$=\int_0^{s-\varepsilon} f(x)G(x,s)dx+\int_{s+\varepsilon}^{l} f(x)G(x,s)dx.$$

Використовуючи нульові крайові умови
$$\varphi(0)=0,\ \ G(0,s)\equiv 0,\ \ \varphi(l)=0,\ \ G(l,s)\equiv 0,$$
перепишемо останнє співвідношення:
$$p(s-\varepsilon)[G(s-\varepsilon,s)\varphi'(s-\varepsilon)-\varphi(s-\varepsilon)G'_x(s-\varepsilon,s)]-$$
$$-p(s+\varepsilon)[G(s+\varepsilon,s)\varphi'(s+\varepsilon)-\varphi(s+\varepsilon)G'_x(s+\varepsilon,s)]=$$
$$=\int_0^{s-\varepsilon} f(x)G(x,s)dx+\int_{s+\varepsilon}^{l} f(x)G(x,s)dx.$$

Виконаємо граничний перехід $\varepsilon\to 0$. Матимемо
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{p(s-\varepsilon)[G(s-\varepsilon,s)\varphi'(s-\varepsilon)-\varphi(s-\varepsilon)G'_x(s-\varepsilon,s)]-$$
$$-p(s+\varepsilon)[G(s+\varepsilon,s)\varphi'(s+\varepsilon)-\varphi(s+\varepsilon)G'_x(s+\varepsilon,s)]\}=\int_0^l f(x)G(x,s)dx.$$

Ураховуючи неперервність функції Гріна $G(x,s)$ та стрибок похідної $G'_x(x,s)$ при $x=s$, отримаємо
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{p(s-\varepsilon)[G(s-\varepsilon,s)\varphi'(s-\varepsilon)-\varphi(s-\varepsilon)G'_x(s-\varepsilon,s)]-$$
$$-p(s+\varepsilon)[G(s+\varepsilon,s)\varphi'(s+\varepsilon)-\varphi(s+\varepsilon)G'_x(s+\varepsilon,s)]\}=\varphi(s).$$

Звідси
$$\int_0^l f(x)G(x,s)dx=\varphi(s),$$
що і треба було показати.

Розглянемо метод побудови функції Гріна. Нехай $y_1(x)$ – розв'язок рівняння
$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)]-q(x)y(x)=0, \qquad (5.9.5)$$
який задовольняє ліву крайову умову
$$\alpha_1 y(0)+\beta_1 y'(0)=0. \qquad (5.9.6)$$

Унаслідок теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші такий ненульовий розв'язок $y_1(x)$ завжди існує. Наприклад, для початкових умов (5.9.6) можна покласти

$$y_1(0) = -c\beta_1,\ \ y_1'(0) = c\alpha_1,$$

де c – довільна невідома.

$y_2(x)$ – також ненульовий розв'язок диференціального рівняння (5.9.5), який задовольняє праву крайову умову

$$\alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) = 0. \qquad (5.9.7)$$

Розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно незалежні та задовольняють тільки свої крайові умови. Функцію Гріна будемо будувати у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} G_1(x,s) = c_1 y_1(x), & 0 \le x \le s, \\ G(x,s) = c_2 y_2(x), & s < x < l. \end{cases} \qquad (5.9.8)$$

Графічне зображення функції Гріна наведено на рис. 5.9.1.

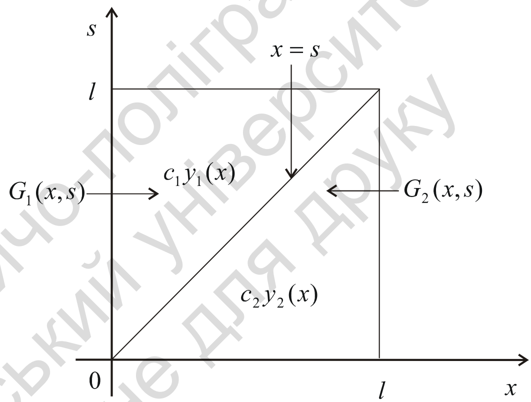


Рис. 5.9.1

Побудована функція при $x \ne s$ задовольняє однорідне диференціальне рівняння (5.9.5) та нульові крайові умови (5.9.6), (5.9.7), тобто перші дві умови функції Гріна. Виберемо сталі c_1 та c_2 так, щоб виконувалась третя умова

$$c_1 y_1(s) = c_2 y_2(s),\ \ c_2 y_2'(s) - c_1 y_1'(s) = \frac{1}{p(s)}. \qquad (5.9.9)$$

Оскільки визначник системи (5.9.9) є визначником Вронського, то система (5.9.9) має єдиний розв'язок

$$c_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -y_2(s) \\ -\dfrac{1}{p(s)} & -y_2'(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s) & -y_2(s) \\ y_1'(s) & -y_2'(s) \end{vmatrix}}=\frac{y_2(s)}{p(s)W[y_1(s),y_2(s)]},$$

$$c_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & 0 \\ y_1'(s) & -\dfrac{1}{p(s)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s) & -y_2(s) \\ y_1'(s) & -y_2'(s) \end{vmatrix}}=\frac{y_1(s)}{p(s)W[y_1(s),y_2(s)]}.$$

Звідси функція Гріна (5.9.8)

$$G(x,s)=\begin{cases} G_1(x,s)=\dfrac{y_1(x)y_2(s)}{p(s)W[y_1(s),y_2(s)]}, & 0\le x\le s, \\ G_2(x,s)=\dfrac{y_1(s)y_2(x)}{p(s)W[y_1(s),y_2(s)]}, & s<x<l. \end{cases} \tag{5.9.10}$$

З вигляду функції Гріна (5.9.10) випливає її симетричність.

Має місце таке твердження.

Теорема 5.9.1. Якщо однорідна крайова задача (5.9.5) з нульовими крайовими умовам (5.9.6), (5.9.7) має тільки нульовий розв'язок, то для довільної неперервної на $x\in[0,l]$ функції $f(x)$ розв'язок неоднорідної крайової задачі (5.9.3) існує і записується як

$$y(x)=\int_0^l G(x,s)f(s)ds. \tag{5.9.11}$$

Доведення. Переконаємось, що отриманий вираз є розв'язком крайової задачі. Зобразимо інтеграл сумою двох інтегралів

$$y(x)=\int_0^x G_2(x,s)f(s)ds+\int_x^l G_1(x,s)f(s)ds,$$

де

$$G_1(x,s)=\frac{y_1(x)y_2(s)}{p(s)W[y_1(s),y_2(s)]},\quad G_2(x,s)=\frac{y_1(s)y_2(x)}{p(s)W[y_1(s),y_2(s)]}.$$

Перехід через границю $x=s$ можна записати як

$$G_1(x,x)=G_2(x,x),$$

або

$$G_1(s,s)=G_2(s,s). \tag{5.9.12}$$

Умова стрибка

$$\frac{d}{dx}G_2(x,s)|_{x=s}-\frac{d}{dx}G_1(x,s)|_{x=s}=\frac{1}{p(s)}. \tag{5.9.13}$$

Використовуючи співвідношення (5.9.12), (5.9.13), обчислимо похідні функції $y(x)$:

$$y'(x)=G_2(x,x)f(x)+\int_0^x G'_{2x}(x,s)f(s)ds-$$

$$-G_1(x,x)f(x)+\int_x^l G'_{1x}(x,s)f(s)ds=$$

$$=\int_0^x G'_{2x}(x,s)f(s)ds+\int_x^l G'_{1x}(x,s)f(s)ds,$$

$$y''(x)=G'_{2x}(x,x)f(x)+\int_0^x G''_{2xx}(x,s)f(s)ds-$$

$$-G'_{1x}(x,x)f(x)+\int_x^l G''_{1xx}(x,s)f(s)ds=$$

$$=\frac{f(x)}{p(x)}+\int_0^x G''_{2xx}(x,s)f(s)ds+\int_x^l G''_{1xx}(x,s)f(s)ds.$$

Перевіримо, чи є функція $y(x)$ розв'язком рівняння. Для цього підставимо її у вихідне рівняння. Отримаємо

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy(x)}{dx}]-q(x)y(x)=p(x)y''(x)+p'(x)y'(x)-q(x)y(x)=$$

$$=p(x)[\frac{f(x)}{p(x)}+\int_0^x G''_{2xx}(x,s)f(s)ds+\int_x^l G''_{1xx}(x,s)f(s)ds]+$$

$$+p'(x)[\int_0^x G'_{2x}(x,s)f(s)ds+\int_x^l G'_{1x}(x,s)f(s)ds]-$$

$$-q(x)[\int_0^x G_2(x,s)f(s)ds+\int_x^l G_1(x,s)f(s)ds]=$$

$$=f(x)+\int_0^l [p(x)G''_{xx}(x,s)+p'(x)G'_x(x,s)-q(x)G(x,s)]f(s)ds.$$

Оскільки за означенням функція Гріна є розв'язком однорідного рівняння, то інтеграл тотожно дорівнює нулю. Тому

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)]\equiv f(x).$$

Отже, функція (5.9.11) є розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (5.9.3). Оскільки функція Гріна $G(x,s)$ задовольняє нульові крайові умови (5.9.6), (5.9.7) для кожного фіксованого $s\in[0,l]$ за змінною x, то і розв'язок $y(x)$ також задовольняє ці умови. Теорему доведено.

Завдання для самостійної роботи

13. Розв'язати крайову задачу

$$y''-y=e^{2x},\quad y(0)=1,\quad y(1)=1$$

без використання функції Гріна.

14. Розв'язати крайову задачу

$$y''+y=1,\quad y(0)=1,\quad y(\pi/2)=2$$

за допомогою функції Гріна.

15. Знайти розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють крайові умови, без використання функції Гріна:

15.1. $y''+y=x,\quad y(0)=0,\quad y'(1)=1;$

15.2. $y''-y'=4x,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0;$

15.3. $y''+y'-5=0,\quad y(0)=0,\quad y'(1)=1;$

15.4. $y''-2y=8,\quad y(0)=2,\quad y'(1)=0;$

15.5. $y''+y=5,\quad y'(0)=1,\quad y(\pi)=1.$

16. Знайти розв'язок крайової задачі за допомогою функції Гріна:

16.1. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$

16.2. $y'' + 2y' = f(x), \quad y'(0) = 1, \quad y(\pi) = 0;$

16.3. $y'' + 2xy = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 1;$

16.4. $y'' - y' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$

16.5. $x^2 y'' - y = f(x), \quad y(0) = 2, \quad y'(1) = 1.$

5.10. Задачі на власні числа

Важливим класом крайових задач є *задачі на власні числа*. Ці задачі містять невизначені параметри, які слід знайти таким чином, щоб відповідні крайові задачі мали ненульові розв'язки. Задачі такого типу використовують при розв'язанні рівнянь у частинних похідних.

Розглянемо диференціальні рівняння другого порядку

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad (5.10.1)$$

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \;\; \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) = 0, \qquad (5.10.2)$$

де $p(t)$ – додатна неперервно диференційована на $x \in [0, l]$ функція, $q(x)$ та $\rho(x)$ – неперервні на $x \in [0, l]$ функції. Значення параметра λ, за яких крайова задача має ненульові розв'язки, називаються *власними числами*, а відповідні розв'язки – *власними функціями крайової задачі*, або *задачі Штурма – Ліувілля*.

5.10.1. Властивості власних чисел і функцій

Розглянемо основні властивості власних чисел і відповідних власних функцій.

Властивість 5.10.1. Множина власних чисел задачі Штурма – Ліувілля (5.10.1), (5.10.2) не більш ніж зліченна.

Доведення. Оскільки лінійне рівняння має неперервні коефіцієнти та лінійно залежить від параметра λ, то існують його два лінійно незалежні розв'язки $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$. Загальним розв'язком буде

$$y(x,\lambda) = c_1 y_1(x,\lambda) + c_2 y_2(x,\lambda).$$

Нехай, наприклад, задані крайові умови першого роду. Тоді сталі c_1, c_2 визначають із системи рівнянь

$$c_1 y_1(0,\lambda) + c_2 y_2(0,\lambda) = 0,$$
$$c_1 y_1(l,\lambda) + c_2 y_2(l,\lambda) = 0.$$

Однорідна система має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли визначник (Вронського крайової задачі) дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} y_1(0,\lambda) & y_2(0,\lambda) \\ y_1(l,\lambda) & y_2(l,\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Визначник Вронського є аналітичною функцією від λ, отже, він має не більш ніж зліченну кількість ізольованих нулів. А множина власних чисел задачі Штурма – Ліувілля (5.10.1), (5.10.2) є підмножиною множини нулів визначника Вронського. Отже, множина власних чисел задачі Штурма – Ліувілля не більш ніж зліченна.

Властивість 5.10.2. Власні функції задачі Штурма – Ліувілля (5.10.1), (5.10.2), які відповідають різним власним числам, ортогональні з вагою $\rho(x)$ на проміжку $x \in [0,l]$, тобто

$$\int_0^l \rho(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0, \ \ \lambda_m \neq \lambda_n.$$

Доведення. Нехай різним власним числам $\lambda_m \neq \lambda_n$ відповідають власні функції $\varphi_n(x)$ та $\varphi_m(x)$, тобто

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right] - q(x)\varphi_n(x) + \lambda_n \rho(x)\varphi_n(x) \equiv 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\right] - q(x)\varphi_m(x) + \lambda_m \rho(x)\varphi_m(x) \equiv 0.$$

Домножимо першу тотожність на $\varphi_m(x)$, а другу на $\varphi_n(x)$ та віднімемо від першої рівності другу. Отримаємо

$$\left\{\varphi_m(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]-\varphi_n(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}\right]\right\}+$$
$$+(\lambda_n-\lambda_m)\rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)=0,$$

або

$$\frac{d}{dx}[p(x)(\varphi_m(x)\varphi_n'(x)-\varphi_n(x)\varphi_m'(x))]+(\lambda_n-\lambda_m)\rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\equiv 0.$$

Проінтегруємо отриману тотожність у межах $x\in[0,l]$:

$$p(x)(\varphi_m(x)\varphi_n'(x)-\varphi_n(x)\varphi_m'(x))\big|_{x=0}^{x=l}+$$
$$+(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l\varphi_n(x)\varphi_m(x)\rho(x)dx=0.$$

Оскільки $\varphi_n(x)$ та $\varphi_m(x)$ задовольняють крайові умови (5.10.2) та $\lambda_n\neq\lambda_m$, то отримаємо

$$\int_0^l\varphi_n(x)\varphi_m(x)\rho(x)dx=0,$$

що і треба було довести.

Властивість 5.10.3. Нехай $\rho(x)>0.$ Тоді власні числа задачі Штурма – Ліувілля (5.10.1), (5.10.2) дійсні.

Доведення.

Нехай, від супротивного, власне число є комплексним:

$$\lambda=\mu+i\nu. \tag{5.10.3}$$

Тоді йому відповідає комплексна власна функція

$$y(x,\lambda)=u(x,\lambda)+iv(x,\lambda). \tag{5.10.4}$$

Дійсно, нехай комплексному власному числу відповідає дійсна власна функція, тобто

$$\nu(x,\lambda)\equiv 0. \tag{5.10.5}$$

Тоді за визначенням

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right]-q(x)u(x)+(\mu+i\nu)\rho(x)u(x)\equiv 0.$$

Комплексний вираз дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли нулю дорівнюють дійсна та уявна частини. Використовуючи припущення (5.10.5), отримаємо $\nu\rho(x)u(x,\lambda)\equiv 0.$ Оскільки $\rho(x)>0,$ то це можливо лише при $u(x,\lambda)\equiv 0,$ що суперечить визначенню власної функції.

Далі маємо таке. Якщо (5.10.3), (5.10.4) – відповідно власне число та власна функція, то спряженому власному числу

$$\overline{\lambda} = \mu - i\nu \tag{5.10.6}$$

відповідає спряжена власна функція

$$\overline{y}(x,\lambda) = u(x,\lambda) - iv(x,\lambda). \tag{5.10.7}$$

Дійсно, оскільки $y(x,\lambda) = u(x,\lambda) + iv(x,\lambda)$ та $\lambda = \mu + i\nu$ є власною функцією та власним числом, відповідно, то, підставивши їх у рівняння, отримаємо

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\big(u(x,\lambda)+iv(x,\lambda)\big)\right] - q(x)\big(u(x,\lambda)+iv(x,\lambda)\big) +$$
$$+(\mu+i\nu)\big(u(x,\lambda)+iv(x,\lambda)\big) \equiv 0.$$

Виділимо дійсну та уявну частини:

$$\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x,\lambda)\right] - q(x)u(x,\lambda) + \mu u(x,\lambda) - \nu v(x,\lambda)\right\} +$$
$$+i\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}v(x,\lambda)\right] - q(x)v(x,\lambda) + \nu u(x,\lambda) + \mu v(x,\lambda)\right\} \equiv 0.$$

Комплексний вираз дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли окремо дорівнюють нулю дійсна та уявна частини, тобто

$$\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x,\lambda)\right] - q(x)u(x,\lambda) + \mu u(x,\lambda) - \nu v(x,\lambda)\right\} = 0,$$
$$\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}v(x,\lambda)\right] - q(x)v(x,\lambda) + \nu u(x,\lambda) + \mu v(x,\lambda)\right\} = 0.$$

Підставимо спряжену функцію $\overline{y}(x,\lambda)$ і спряжене число $\overline{\lambda}$ в рівняння. Отримаємо

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\big(u(x,\lambda)-iv(x,\lambda)\big)\right] - q(x)\big(u(x,\lambda)-iv(x,\lambda)\big) +$$
$$+(\mu+i\nu)\big(u(x,\lambda)-iv(x,\lambda)\big) =$$
$$=\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x,\lambda)\right] - q(x)u(x,\lambda) + \mu u(x,\lambda) - \nu v(x,\lambda)\right\} -$$
$$-i\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}v(x,\lambda)\right] - q(x)v(x,\lambda) + \mu v(x,\lambda) + \nu u(x,\lambda)\right\} \equiv 0,$$

оскільки комплексні вирази дорівнюють нулю тоді й тільки тоді, коли нулю дорівнюють їхні дійсні та уявні частини. Використовуючи властивість ортогональності функцій (5.10.4), (5.10.6), отримаємо

$$\int_0^l \rho(x)y(x,\lambda)\overline{y}(x,\lambda)dx = \int_0^l \rho(x)[u^2(x,\lambda)+v^2(x,\lambda)]dx \equiv 0,$$

а це суперечить умові $\rho(x) \ge 0.$ Отже, припущення неправильне і власні числа задачі Штурма – Ліувілля дійсні.

Властивість 5.10.4. Нехай $q(x) \ge 0,\ \ p(x) \ge 0,$ а крайові умови є крайовими умовами першого роду, тобто $y(0) = y(l) = 0.$ Тоді всі власні числа задачі Штурма – Ліувілля (5.10.1) додатні.

Доведення. Нехай $\varphi_n(x)$ – власна функція, а λ_n – відповідне власне число, тобто виконується тотожність

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right] - q(x)\varphi_n(x) + \lambda_n\rho(x)\varphi_n(x) \equiv 0.$$

Домножимо тотожність на $\varphi_n(x)$ та проінтегруємо її на проміжку $x \in [0,l]$:

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]\varphi_n(x)dx - \int_0^l q(x)\varphi_n^2(x)dx + \lambda_n\int_0^l \rho(x)\varphi_n^2(x)dx = 0.$$

Перетворимо перший інтеграл, узявши його по частинах:

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]\varphi_n(x)dx = \varphi_n(x)\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]\Bigg|_0^l -$$

$$-\int_0^l p(x)(\varphi_n'(x))^2\,dx.$$

Оскільки задача містить нульові крайові умови, то отримуємо рівняння

$$\lambda_n\int_0^l \rho(x)\varphi_n^2(x)dx = \int_0^l q(x)\varphi_n^2(x)dx + \int_0^l p(x)(\varphi_n'(x))^2\,dx,$$

і, якщо $q(x) \ge 0,\ \ p(x) \ge 0,$ то рівність виконується лише при $\lambda_n > 0,\ \ n = 1,2,\ldots$

Властивість 5.10.5. Власні числа задачі Штурма – Ліувілля (5.10.1), (5.10.2) прості, тобто кожному власному числу відповідає лише одна власна функція.

Доведення. Нехай, від супротивного, одному власному числу λ відповідають дві власні функції $y_1(x,\lambda)$ та $y_2(x,\lambda)$, тобто виконуються тотожності

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_1(x,\lambda)}{dx}\right]-q(x)y_1(x,\lambda)+\lambda\rho(x)y_1(x,\lambda)\equiv 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_2(x,\lambda)}{dx}\right]-q(x)y_2(x,\lambda)+\lambda\rho(x)y_2(x,\lambda)\equiv 0.$$

Домножимо першу тотожність на $y_2(x,\lambda)$, другу на $y_1(x,\lambda)$ і віднімемо першу від другої. Отримаємо

$$y_2(x,\lambda)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_1(x,\lambda)}{dx}\right]-y_1(x,\lambda)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_2(x,\lambda)}{dx}\right]\equiv 0,$$

або

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_2(x,\lambda)y_1'(x,\lambda)-y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda)\right)\right]\equiv 0.$$

Звідси

$$\frac{d}{dx}p(x)W\left[y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda)\right]\equiv 0.$$

Проінтегруємо цю тотожність на проміжку $[0,x]$:

$$\int_0^x\frac{d}{dx}p(x)W[y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda)]dx=$$

$$=p(x)W[y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda)]-p(0)W[y_1(0,\lambda),y_2(0,\lambda)]=0.$$

Використовуючи крайові умови $y_1(0,\lambda)=y_2(0,\lambda)=0$, отримаємо

$$W[y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda)]=0,$$

а це суперечить лінійній незалежності розв'язків $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$.

Властивість 5.10.6. Якщо $\rho(x)\neq 0$, $x\in[0,l]$, то множина власних чисел задачі Штурма – Ліувілля (5.10.1), (5.10.2) обмежена знизу.

Доведення. Розглянемо задачу на власні числа на множині функцій $y(x)$, які нормовані з вагою $\rho(x)$, тобто задовольняють умови

$$\int_0^l \rho(x) y^2(x) dx = 1.$$

Це обмеження не є суттєвим, оскільки, якщо $y(x)$ є розв'язком однорідного рівняння, то при довільній сталій c функція $cy(x)$ також буде його розв'язком.

Домножимо рівняння (5.10.1) на $y(x)$ та проінтегруємо на проміжку $x \in [0,l]$:

$$\int_0^l \lambda\rho(x) y^2(x) dx = \int_0^l q(x) y^2(x) dx - \int_0^l y(x) \frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] dx.$$

Використовуючи введені обмеження, проінтегруємо останній інтеграл по частинах:

$$\lambda = \int_0^l q(x) y^2(x) dx - y(x) \frac{d}{dx}[p(x) \frac{dy(x)}{dx}] \Bigg|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l \rho(x) (y'(x))^2 dx,$$

звідки

$$\lambda = -y(l) y'(l) p(l) + y(0) y'(0) p(0) + \int_0^l [q(x) y^2(x) + p(x)(y'(x))^2] dx.$$

Для першої та другої крайових задач вираз

$$\sigma = y(0) y'(0) p(0) - y(l) y'(l) p(l)$$

дорівнює нулю. Ураховуючи, що $\rho(x) \neq 0$, маємо

$$\lambda = \int_0^l [q(x) y^2(x) + p(x)(y'(x))^2] dx \geq$$

$$\geq \int_0^l q(x) y^2(x) dx = \int_0^l \frac{q(x)}{\rho(x)} \rho(x) y^2(x) dx \geq \int_0^l M\rho(x) y^2(x) dx \geq Ml.$$

Властивість 5.10.7. При $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ задача Штурма – Ліувілля (5.10.1), (5.10.2) має зліченну кількість власних чисел.

Доведення. Нехай унаслідок неперервності функцій $p(x)$, $\rho(x)$, $q(x)$ виконуються двосторонні нерівності

$$0 < p_* \leq p(x) \leq p^*, \ \ 0 < \rho_* \leq \rho(x) \leq \rho^*, \ \ q_* \leq q(x) \leq q^*.$$

Перепишемо рівняння (5.10.1) як

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0$$

і розглянемо мажорантну і мінорантну задачі Штурма – Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left[p_*\frac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho^*-q_*]y=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p^*\frac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho_*-q^*]y=0.$$

Якщо виконуються умови

$$\mu^*=\frac{\lambda\rho^*-q_*}{p_*}>0,\ \ \mu_*=\frac{\lambda\rho_*-q^*}{p^*}>0,$$

то рівняння мають фундаментальні системи розв'язків

$$y_1^*(x)=\sin\sqrt{\mu^*}x,\ \ y_2^*(x)=\cos\sqrt{\mu^*}x,$$

$$y_{1*}(x)=\sin\sqrt{\mu_*}x,\ \ y_{2*}(x)=\cos\sqrt{\mu_*}x.$$

Загальним розв'язком рівнянь буде

$$y^*(x)=c_1\sin\sqrt{\mu^*}x+\ c_2\cos\sqrt{\mu^*}x,$$

$$y_*(x)=c_3\sin\sqrt{\mu_*}x+\ c_4\cos\sqrt{\mu_*}x.$$

Крайові умови для першого рівняння

$$y^*(0)=c_2=0,$$

$$y^*(l)=c_1\sin\sqrt{\mu^*}l+\ c_2\cos\sqrt{\mu^*}l=0.$$

Звідси

$$\sin\sqrt{\mu^*}l=0,\ \ \sqrt{\mu^*}l=k\pi,\ \ \mu^*=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ \ k=0,\pm1,\pm2,...$$

Аналогічно для другого розв'язку також буде

$$y_*(0)=\ c_4=0,\ \ y_*(l)=c_3\sin\sqrt{\mu_*}l+\ c_4\cos\sqrt{\mu_*}l=0.$$

Звідси

$$\sin\sqrt{\mu_*}l=0,\ \ \sqrt{\mu_*}l=k\pi,\ \ \mu_*=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ \ k=0,\pm1,\pm2,...$$

Відповідно власними числами і власними функціями обох крайових задач будуть

$$\lambda_k^* = q_* + p_* \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \; k = 1, 2, ..., \; y_k^*(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$\lambda_{*k} = q^* + p^* \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \; k = 1, 2, ..., \; y_k^*(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Мажорантна та мінорантна задачі Штурма – Ліувілля мають зліченну кількість власних чисел, а за теоремою порівняння таку саму кількість власних чисел і власних функцій має початкова задача (5.10.1), (5.10.2).

Отже, задача Штурма – Ліувілля (5.10.1), (5.10.2) породжує нескінченну послідовність взаємно ортогональних функцій з вагою $\rho(x)$. Для довільних функцій $f(x)$, інтегрованих із квадратом на відрізку

$$\int_0^l \rho(x) f^2(x) dx < \infty,$$

можна побудувати відповідний ряд Фур'є

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x, \lambda_n),$$

де $y_n(x, \lambda_\nu)$, $n = 1, 2, ...$ – власні функції задачі Штурма – Ліувілля (10.1), (10.2),

$$c_n = \frac{\int_0^l \rho(x) f(x) y_n(x, \lambda_n) dx}{\int_0^l \rho(x) y_n^2(x, \lambda_n) dx}, \; n = 1, 2, ...$$

– коефіцієнти Фур'є.

Теорема 5.10.1 (Стєклова). Довільну двічі неперервно диференційовану на відрізку $x \in [0, l]$ функцію $f(x)$, яка задовольняє нульові крайові умови, можна розкласти в абсолютно і рівномірно збіжний ряд за власними функціями задачі Штурма – Ліувілля

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x,\lambda_n),$$

де

$$c_n=\frac{\int_0^l \rho(x) f(x) y_n(x,\lambda_n)dx}{\int_0^l \rho(x) y_n^2(x,\lambda_n)dx},\quad n=1,2,...$$

Якщо власні функції $y_n(x,\lambda_n)$ ортонормовані, тобто

$$\int_0^l \rho(x) y_n^2(x,\lambda_n)dx=1,$$

то система $\{y_n(x,\lambda_n)\}$ називається *ортонормованою* і функція $f(x)$ розкладається в ряд за ортонормованою системою функцій.

5.10.2. Рівняння коливання струни

Розглянемо диференціальне рівняння малих коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.10.8}$$

з нульовими крайовими умовами

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0, \tag{5.10.9}$$

тобто на краях струна защеплена. Початкові умови

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=f(x),\ \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=F(x). \tag{5.10.10}$$

Тут $f(x)$, $F(x)$ – визначені на інтервалі $[0,l]$ функції, причому $f(0)=f(l)=0$. Будемо шукати розв'язок як добуток двох функцій (метод Фур'є)

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{5.10.11}$$

де $X(x)\neq 0$, $T(t)\neq 0$. Використовуючи нульові крайові умови (5.10.9), для функції $X(x)$ матимемо також нульові крайові умови

$$X(0)=0,\ \ X(l)=0. \tag{5.10.12}$$

Підставимо (5.10.11) в (5.10.8) і отримаємо

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

або

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (5.10.13)$$

Ця рівність виконується тотожно для довільних x та t. Права частина рівності (5.10.13) не залежить від t, а ліва від x. Це можливо тоді й тільки тоді, коли обидві частини будуть дорівнювати однаковій сталій $-\lambda$, тобто

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Звідси отримуємо два однорідні лінійні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad (5.10.14)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \qquad (5.10.15)$$

Знайдемо ненульовий розв'язок $X(x)$ рівняння (5.10.14), який задовольняє нульові крайові умови (5.10.12).

Розглянемо такі випадки.

1. Нехай $\lambda < 0.$ Тоді характеристичне рівняння

$$p^2 + \lambda = 0$$

має дійсні різні корені

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}.$$

Загальним розв'язком рівняння буде

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Використовуючи нульові крайові умови (5.10.12), матимемо

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-l}x} + c_2 e^{-\sqrt{-l}x} = 0 \end{cases}.$$

Звідси $c_1 = c_2 = 0,$ тому рівняння має лише нульовий розв'язок

$$X(x) \equiv 0.$$

2. Нехай $\lambda = 0.$ Тоді рівняння (5.10.14) набуде вигляду

$$X'' = 0.$$

Його загальним розв'язком буде

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Використаємо крайові умови (5.10.12)

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \cdot l + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Звідси $c_1 = c_2 = 0.$

І знову рівняння має лише нульовий розв'язок

$$X(x) \equiv 0.$$

3. Нехай $\lambda > 0.$ Тоді характеристичне рівняння (5.10.14) має суто уявні корені

$$p_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Загальним розв'язком у цьому випадку буде

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Використаємо крайові умови (5.10.12)

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}.$$

Для того, щоб розв'язок був ненульовим (нехай $c_2 \neq 0$), треба, щоб $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ при $\lambda > 0.$ Звідси отримаємо

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \ \ k = 1, 2, ...$$

Отже, за цих значень $\lambda_k,\ \ k = 1, 2, ...$ рівняння (5.10.14) має ненульовий розв'язок

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, \ \ k = 1, 2, ...$$

Підставимо отримані значення $\lambda = \lambda_k,\ \ k = 1, 2, ...$ у рівняння (5.10.15):

$$T'' + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння набуде вигляду

$$T_k = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t,$$

де A_k, B_k – довільні сталі.

Підставивши знайдені розв'язки $X(x)=X_k(x)$ та $T(t)=T_k(t)$ в (5.10.11), отримаємо

$$u_k(x,t)=\left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x. \qquad (5.10.16)$$

Ці функції задовольняють рівняння (5.10.8) та крайові умови (5.10.9) для довільних A_k, B_k.

Підставимо (5.10.16) у ряд $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)$ і отримаємо розв'язок рівняння (5.10.8)

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x. \qquad (5.10.17)$$

Знайдемо сталі A_k, B_k, за яких розв'язок буде задовольняти початкові умови (5.10.10).

Нехай $t=0$. Підставимо першу початкову умову з (5.10.10) у рівняння (5.10.17) і отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x=f(x). \qquad (5.10.18)$$

Продиференціюємо (5.10.17) за t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}\left(-A_k\sin\frac{ak\pi}{l}t+B_k\cos\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x. \qquad (5.10.19)$$

Підставимо $t=0$ в (5.10.19) і, використовуючи другу початкову умову, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}B_k\sin\frac{k\pi}{l}x=F(x). \qquad (5.10.20)$$

Розклади (5.10.18) та (5.10.20) є розкладами Фур'є функцій $f(x)$ та $F(x)$, які задані на інтервалі $[0,l]$, у ряди Фур'є по синусах. Звідси отримаємо значення коефіцієнтів A_k, B_k:

$$\left.\begin{aligned}A_k&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx,\\ B_k&=\frac{2}{ak\pi}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx\end{aligned}\right\},\quad k=1,2,...$$

За цих значень A_k, B_k формула (5.10.17) дає шуканий розв'язок рівняння коливань (5.10.8) із крайовими умовами (5.10.9) і початковими умовами (5.10.10). Якщо функції $f(x)$ та $F(x)$ неперервно диференційовані тричі та двічі, відповідно, то ряди рівномірно збігаються. Знайдений розв'язок (5.10.17) – єдиний.

Розв'язок (5.10.17) можна записати як

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin\frac{k\pi}{l}x\sin\left(\frac{ak\pi}{l}t+\varphi_k\right),$$

він становить суму нескінченної кількості коливань. Кожне із цих коливань має період $\frac{2l}{ak}$, амплітуду $M_k \sin\frac{k\pi}{l}x$ та початкову фазу φ.

РОЗДІЛ 6
Теорія стійкості руху

Створюючи прилади чи конструкції, які відповідають певним умовам, необхідно знати, як буде поводитися об'єкт за невеликого перерозподілу сил або за зміни початкових умов. Об'єкт, експлуатаційні параметри якого не реагують на зміни, називають *стійким*.

Створюючи диференціальну модель деякої прикладної задачі, зазвичай цікавляться не загальним, а частковим розв'язком диференціального рівняння, тобто розв'язком, який задовольняє певні початкові умови. Останні зазвичай беруть з емпіричного досвіду, тому за їхню абсолютну точність ручатися не можна. Маючи це на увазі, інколи припускають, що незначні зміни початкових умов викликають незначну зміну самого розв'язку, інакше кажучи, розв'язок неперервно залежить від початкових умов.

Проте часто незначні зміни початкових умов зумовлюють істотні відхилення розв'язків. Такі розв'язки називають *нестійкими*. Вони навіть наближено не описують явище чи процес, які розглядаються. Отже, одним із основних є питання стійкості розв'язків диференціальних рівнянь щодо різного роду збурень їхніх вхідних даних, тобто неточностей задання цих даних (початкових даних, правих частин рівнянь тощо).

Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь є предметом вивчення теорії стійкості розв'язків. Теорія стійкості застосовується в багатьох наукових сферах, зокрема природознавстві, механіці, екології, біології, економіці тощо.

6.1. Фазовий портрет на площині

Знайти розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь вдається далеко не завжди. Тому, щоб проаналізувати поведінку динаміки системи, зазвичай використовують якісні методи досліджень, до яких належать теорія стійкості руху та класифікація точок спокою.

Означення 6.1.1. Геометричне зображення поведінки траєкторій системи диференціальних рівнянь називається *фазовим портретом*.

Прийнято стрілками на траєкторіях показувати напрямок руху рухомої точки. На рис. 6.1.1 наведено приклади фазових портретів систем.

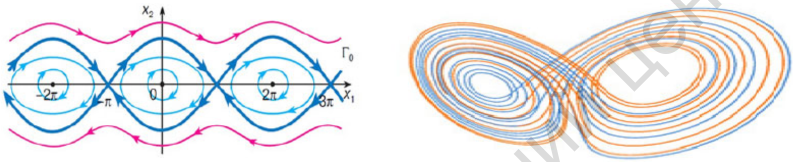


Рис. 6.1.1

6.1.1. Загальні означення

При побудові математичної моделі реального явища зазвичай деякі властивості цього явища ідеалізують або опускають. Тому постає питання, чи адекватно математична модель описує явище.

Нехай математична модель зображена у вигляді системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dot{y}_2 = F_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots \\ \dot{y}_n = F_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (6.1.1)$$

з початковими умовами

$$y_1(t_0) = y_1^0, \;\; y_2(t_0) = y_2^0, \;\; \dots, \;\; y_n(t_0) = y_n^0.$$

Ці умови є результатами вимірів і, отже, отримані з деякими помилками. Тому необхідно визначити вплив помилок (збурень) на розв'язок системи. Якщо малі зміни початкових даних здатні сильно змінити розв'язок, то отримана математична модель, що є системою звичайних диференціальних рівнянь, навіть приблизно не може описати досліджуване явище.

Перепишемо систему диференціальних рівнянь (6.1.1) у більш компактному вигляді

$$\dot{y} = F(y,t). \qquad (6.1.2)$$

Розв'язок системи рівнянь (6.1.2)

$$y = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ – векторна функція, що складається із n неперервно диференційованих функцій $\varphi^T(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$.

Будемо застосовувати одну з норм евклідового простору R^n:

$$\|\varphi(t) - y(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i(t) - \varphi_i(t))^2}.$$

Означення 6.1.2. Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (6.1.2) називається *стійким за Ляпуновим* (рівномірно за часом), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $y = y(t)$ системи (6.1.1) при $t > t_0$ буде виконуватись $\|\varphi(t) - y(t)\| < \varepsilon$ при $\|\varphi(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ (рис. 6.1.2).

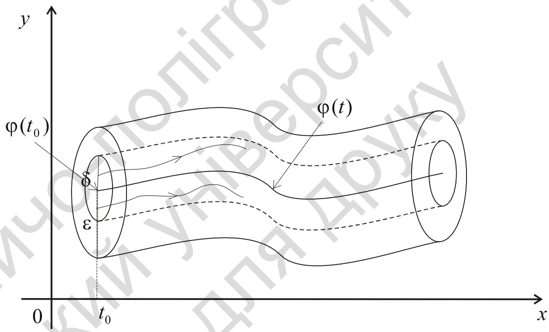


Рис. 6.1.2

Означення 6.1.3. Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (6.1.2) називається *асимптотично стійким* (рівномірно за часом), якщо він стійкий за Ляпуновим і $\lim\limits_{t \to \infty} \|\varphi(t) - y(t)\| = 0$.

Область $\Delta(t_0) = \left\{ y(t_0) : \lim\limits_{t \to \infty} \|\varphi(t) - y(t)\| = 0 \right\}$ називається *областю асимптотичної стійкості* (рис. 6.1.3).

Означення 6.1.4. Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (6.1.2) називається *нестійким*, якщо для скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує хоча б один розв'язок $\bar{y}(t)$ такий, що при деякому $T > t_0$ буде виконуватись $\|\varphi(T) - y(T)\| > \varepsilon,$ хоча $\|\varphi(t_0) - y(t_0)\| < \delta,$ де $\delta > 0$ – як завгодно мала величина (рис. 6.1.4).

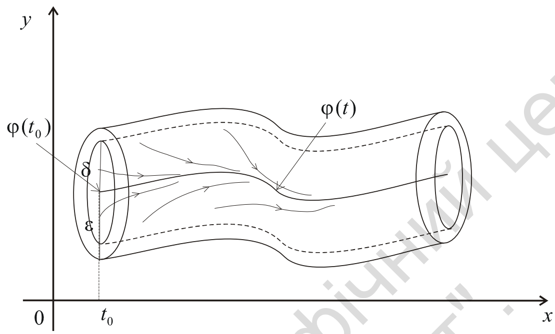


Рис. 6.1.3

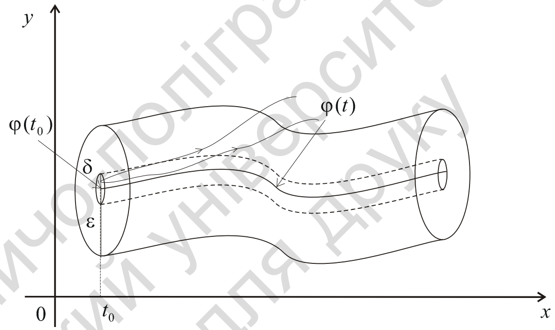


Рис. 6.1.4

Дослідження стійкості розв'язку $\varphi(t)$ системи (6.1.2) завжди можна звести до дослідження стійкості нульового розв'язку (точки спокою) деякої іншої системи. Зробимо заміну

$$y = \varphi(t) + x,$$

де x – нова невідома векторна функція. Після заміни система диференціальних рівнянь (6.1.2) набуде вигляду

$$\dot{\varphi}(t) + \dot{x} = F(\varphi(t) + x, t). \qquad (6.1.3)$$

Оскільки $\varphi(t)$ є розв'язком системи (6.1.2), то

$$\dot{\varphi}(t) \equiv F(\varphi(t), t). \qquad (6.1.4)$$

Підставимо (6.1.4) у (6.1.3) і отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = F(\varphi(t) + x, t) - F(\varphi(t), t),$$

або

$$\dot{x} = f(x,t),\ \ f\left(x,t\right) = F\left(\varphi\left(t\right) + x, t\right) - F\left(\varphi\left(t\right), t\right). \qquad (6.1.5)$$

Оскільки $f(0,t) = F(\varphi(t),t) - F(\varphi(t),t) \equiv 0$, то $x(t) \equiv 0$ є розв'язком системи (6.1.5). Отже, дослідження стійкості розв'язку $\varphi(t)$ системи (6.1.2) зводиться до дослідження стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (6.1.5).

Означення 6.1.5. Отримана система диференціальних рівнянь (6.1.5) називається *системою рівнянь збурень*.

6.1.2. Найпростіші типи точок спокою на площині

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на площині

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \qquad (6.1.6)$$

Дослідимо розташування і вигляд траєкторій в околі точки спокою $x = 0,\ y = 0$ системи (6.1.6). Розглянемо такі випадки.

І. Нехай визначник Δ системи (6.1.6) не дорівнює нулю, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Тоді характеристичне рівняння системи

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0 \qquad (6.1.7)$$

не має нульових коренів, тобто $\lambda_{1,2} \neq 0$. Розглянемо такі випадки.

1.1. Корені $\lambda_1,\ \lambda_2$ рівняння (6.1.7) дійсні, різні та одного знака. Тоді розв'язком системи (6.1.6) буде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\lambda_2 t} \\ \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

де $(\alpha_1, \alpha_2)^T,\ (\beta_1, \beta_2)^T$ – власні вектори, які відповідають власним числам $\lambda_1,\ \lambda_2$.

а) Якщо $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,$ то точка спокою $x = 0,\ \ y = 0$ системи (6.1.6) асимптотично стійка. За наявності множників $e^{-\lambda_1 t},\ \ e^{-\lambda_2 t}$ видно, що $x(t) \to 0,\ \ y(t) \to 0$ при $t \to +\infty.$

Стан рівноваги називається *стійким вузлом* (рис. 6.1.5). Фазові траєкторії є параболами, які розділені двома прямими. Першу пряму можна знайти, прирівнявши $c_1 = 0.$ Звідси

$$x = c_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t},\ \ y = c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

або

$$y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x.$$

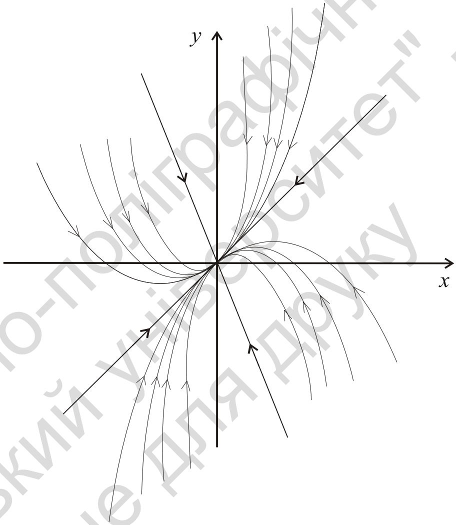


Рис. 6.1.5

Друга пряма відповідає випадку $c_2 = 0.$ Звідси

$$x = c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t},\ \ y = c_1 \alpha_2 e^{\lambda_1 t},$$

або

$$y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x.$$

б) Нехай $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 > 0.$ Цей випадок переходить у попередній при заміні t на $-t.$ Отже, траєкторії мають такий самий вигляд, як і в попередньому випадку, але рух по траєкторіях скерований у протилежному напрямку. Стан рівноваги називається *нестійким вузлом* (рис. 6.1.6).

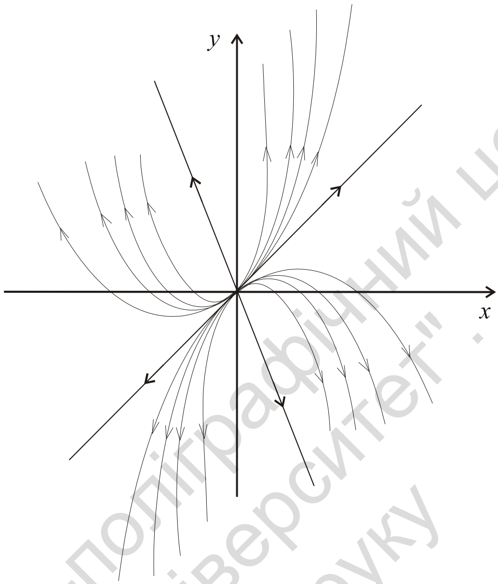


Рис. 6.1.6

1.2. Нехай корені λ_1, λ_2 дійсні, різних знаків, наприклад $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Розв'язок системи також має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\lambda_2 t} \\ \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

При $c_1 = 0$ одержуємо

$$x = c_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad y = c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Траєкторія, яка відповідає цьому розв'язку, має вигляд прямої $y = \dfrac{\beta_2}{\beta_1} x$ і, оскільки $\lambda_2 < 0$, то рух по прямій направлений до початку координат.

Аналогічно при $c_2 = 0$ одержуємо розв'язок

$$x = c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = c_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Траєкторія, яка відповідає цьому розв'язку, описується рівнянням $y = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x$ і, оскільки $\lambda_1 > 0$, то рух по цій другій прямій направлений від початку координат. Ці дві прямі називаються *сепаратрисами (стійкою та нестійкою)*.

Інші траєкторії мають вигляд гіпербол, а стан рівноваги називається *сідлом* (рис. 6.1.7).

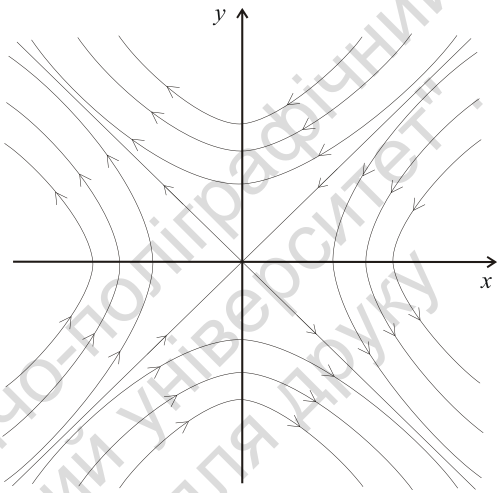


Рис. 6.1.7

1.3. Нехай корені $\lambda_{1,2} = p \pm iq, \;\; q \neq 0$ рівняння (6.1.7) комплексні. Його загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(f_1(c_1,c_2)\cos qt + g_1(c_1,c_2)\sin qt) \\ e^{pt}(f_2(c_1,c_2)\cos qt + g_2(c_1,c_2)\sin qt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{pt}\sin(\varphi + qt) \\ Be^{pt}\cos(\varphi + qt) \end{pmatrix}.$$

Можливі такі випадки:

а) $p < 0, \;\; q \neq 0.$

Траєкторії зображують у вигляді спіралей, що асимптотично прямують до стану рівноваги, який називається *стійким фокусом* (рис. 6.1.8).

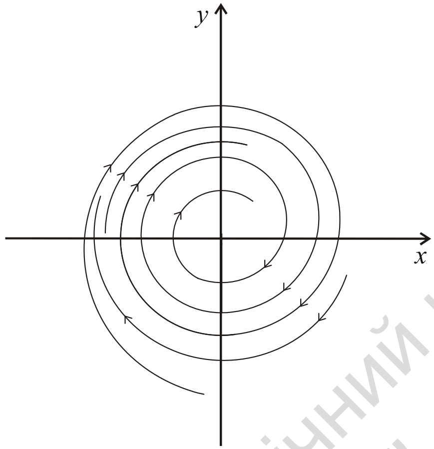


Рис. 6.1.8

б) $p>0,\ q\neq 0.$

Цей випадок є частковим випадком від попереднього при заміні t на $-t$. Траєкторії мають такий самий вигляд, як і в попередньому випадку, але рух по траєкторіях направлений від центра рівноваги. Такий стан називається *нестійким фокусом* (рис. 6.1.9).

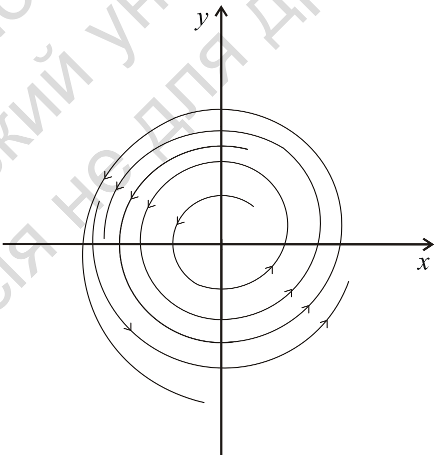


Рис. 6.1.9

1.4. Нехай корені $\lambda_{1,2} \neq \pm iq$ характеристичного рівняння (6.1.7) суто уявні, а його розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1(c_1,c_2)\cos qt + g_1(c_1,c_2)\sin qt) \\ (f_2(c_1,c_2)\cos qt + g_2(c_1,c_2)\sin qt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\sin(\varphi + qt) \\ B\cos(\varphi + qt) \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи описує рух по замкнутих кривих навколо початку координат. Стан рівноваги називається *центром* (рис. 6.1.10).

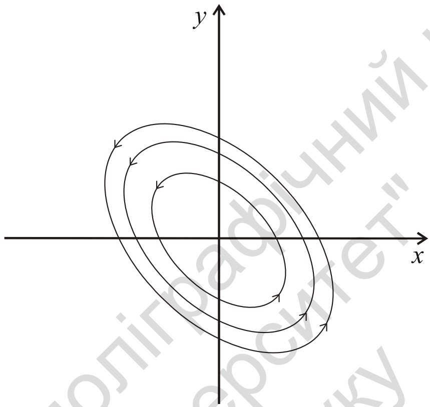


Рис. 6.1.10

1.5. Нехай корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ рівняння (6.1.7) кратні, дійсні, а його розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + \beta_1 t)e^{\lambda t} \\ (a_2 + \beta_2 t)e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

а) Нехай параметри системи (6.1.6) такі, що жорданова форма матриці має суто діагональний вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

тобто $\operatorname{rang}[A - \lambda E] = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0.$

У цьому випадку $\beta_1 = \beta_2 = 0.$ Тоді розв'язком буде

$$x = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad y = \alpha_2 e^{\lambda t}.$$

Можливі два випадки:

• $\lambda < 0$. Траєкторії є прямими, які проходять через початок координат. Оскільки $\lambda < 0$, то $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Стан рівноваги називається *стійким дикритичним вузлом* (рис. 6.1.11).

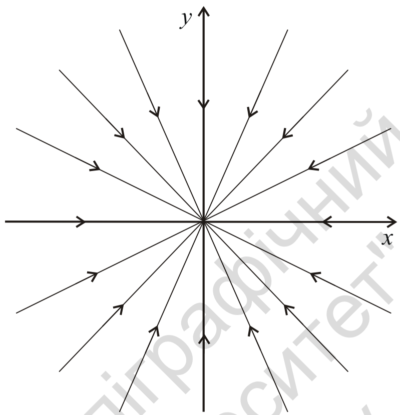


Рис. 6.1.11

• $\lambda > 0$. Траєкторії мають аналогічний вигляд, але рух направлений у протилежному напрямку від центра координат. Точка спокою називається *нестійким дикритичним вузлом* (рис. 6.1.12).

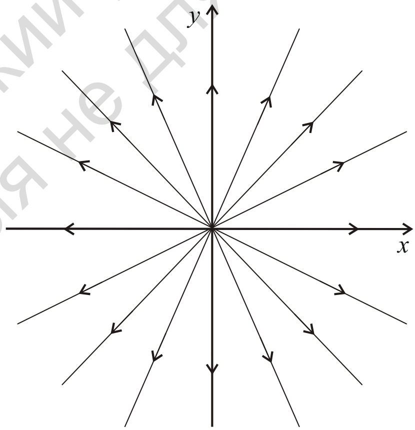


Рис. 6.1.12

б) Нехай параметри системи (6.1.6) такі, що жорданова форма матриці має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

тобто $\operatorname{rang}[A - \lambda E] = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 1$. Тоді розв'язком буде

$$x = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{\lambda t}, \quad y = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{\lambda t}.$$

Можливі два випадки:

• $\lambda < 0$. Траєкторії є параболами, які однією стороною "злиплись" із прямою. Пряма відповідає випадку $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Оскільки $\lambda < 0$, то $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Стан рівноваги називається *виродженим стійким вузлом* (рис. 6.1.13).

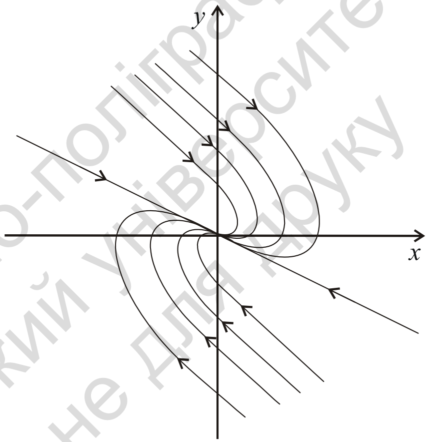


Рис. 6.1.13

• $\lambda > 0$. Траєкторії мають вигляд, аналогічний попередньому випадку, але рух направлений у протилежному напрямку, тобто від центра. Особлива точка називається *нестійким виродженим вузлом* (рис. 6.1.14).

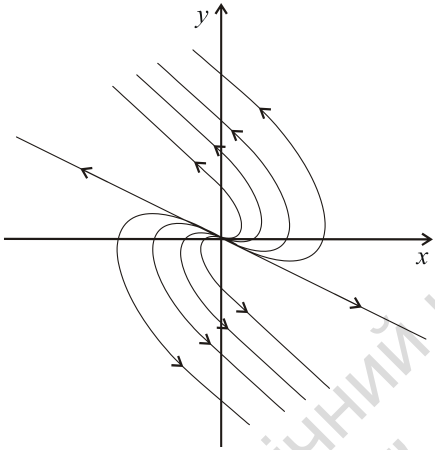


Рис. 6.1.14

II. Нехай визначник Δ системи (6.1.6) дорівнює нулю, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0. \qquad (6.1.8)$$

Тоді характеристичне рівняння (6.1.7) набуде вигляду

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda = 0 \qquad (6.1.9)$$

і матиме хоча б один нульовий корінь $\lambda = 0$.

2.1. Нехай коренями рівняння (6.1.9) є $\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 \neq 0$. Тоді розв'язком системи є

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\lambda_2 t} \\ \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

або

$$\frac{x - c_1\alpha_1}{y - c_1\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \;\; y = c_1\left[a_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1}a_1\right] + \frac{\beta_2}{\beta_1}x.$$

Розв'язок є сім'єю паралельних прямих із коефіцієнтом нахилу $\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$.

Із залежності (6.1.8) маємо, що рядки визначника лінійно залежні, тому

$$ax + by = k(cx + dy).$$

Пряма $ax + by = 0$ є особливою прямою, яка перетинає сім'ю паралельних прямих.

а) Нехай $\lambda_2 < 0$. Тоді рух по прямих сім'ї спрямований до особливої прямої (рис. 6.1.15).

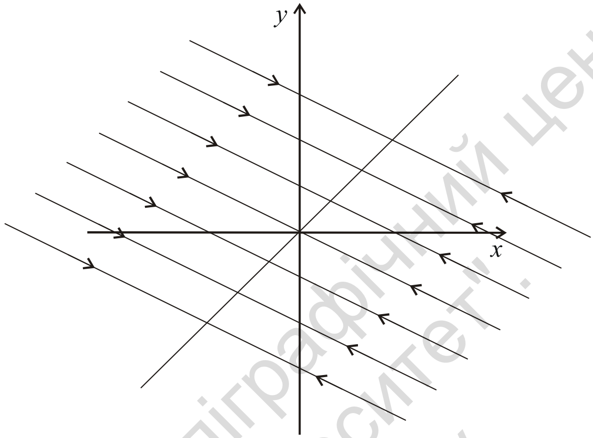


Рис. 6.1.15

б) Нехай $\lambda_2 > 0$. Тоді рух за прямими сім'ї прямує від особливої прямої (рис. 6.1.16).

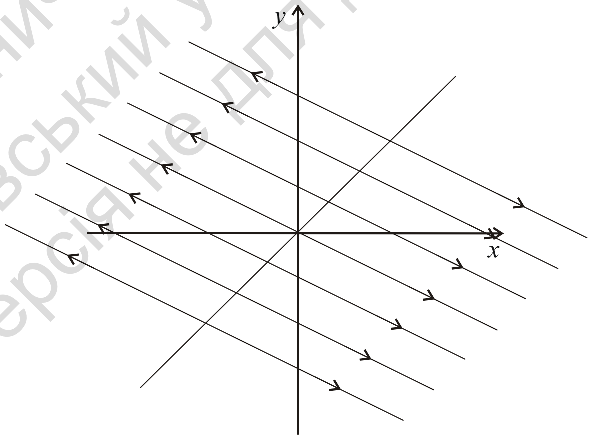


Рис. 6.1.16

2.2. Нехай обидва корені характеристичного рівняння (6.1.9) нульові, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Загальний розв'язок має вигляд прямих, але особлива пряма не перетинає їх, а є однією з них і проходить через початок координат. Стан рівноваги нестійкий (рис. 6.1.17).

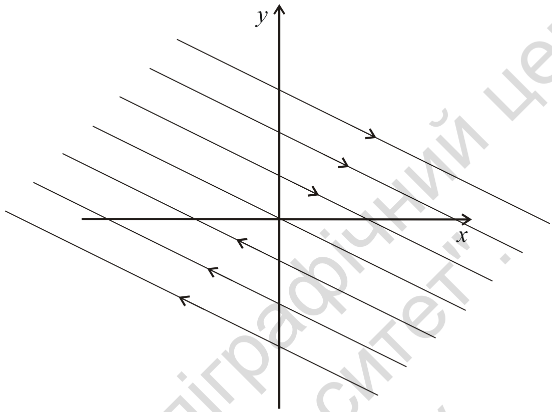


Рис. 6.1.17

Позначимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0, \quad \sigma = d + a.$$

Тоді в площині виміру параметрів (σ, Δ) залежності типів положення рівноваги можна зобразити як на рис. 6.1.18.

Оскільки характеристичне рівняння у введених позначеннях зображується як

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

то

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}].$$

Крива $\Delta = \dfrac{1}{4}\sigma^2$ називається *біфуркаційною кривою*. Терміном *біфуркація* позначаємо різку зміну якісного портрета системи.

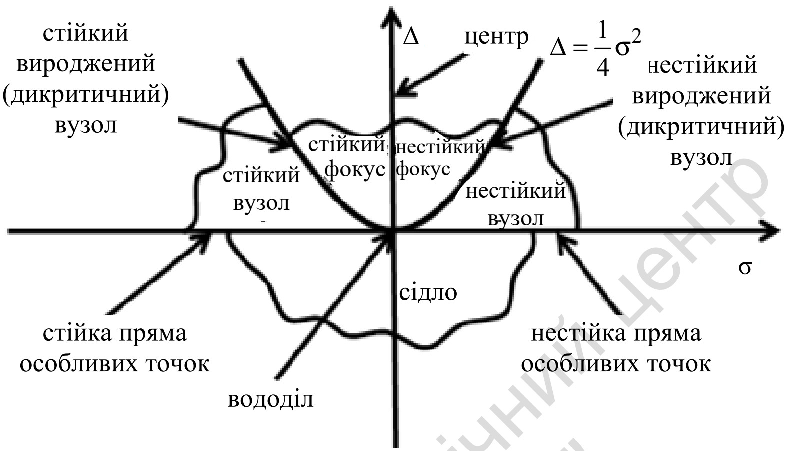


Рис. 6.1.18

6.1.3. Побудова фазового портрета нелінійної системи на площині загалом

За загальною теорією Пуанкаре – Ляпунова якісний портрет динамічної системи на площині визначається особливими точками, періодичними траєкторіями і розташуванням їх між собою.

Конструктивних критеріїв знаходження періодичних траєкторій не існує. Їх пошук та побудова потребують окремих досліджень.

Загальна методика побудови фазового портрета на площині полягає в такому.

Розглянемо спочатку лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}. \tag{6.1.10}$$

1. Розв'яжемо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}. \tag{6.1.11}$$

Розв'язки (x_i, y_i), $i \in I$ системи (6.1.11) будуть особливими точками.

2. Візьмемо точку (x_k, y_k). Розкладемо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ у ряд Тейлора в околі точки (x_k, y_k) з точністю до лінійного наближення і запишемо систему як

$$\dot{x} = P(x_k, y_k) + \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_k, y_k)} (x - x_k) + \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_k, y_k)} (y - y_k) + $$
$$+ R_1(x,y),$$
$$\dot{y} = Q(x_k, y_k) + \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_k, y_k)} (x - x_k) + \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_k, y_k)} (y - y_k) + $$
$$+ R_2(x,y).$$

Оскільки (x_k, y_k) – особлива точка, то $P(x_k, y_k) = 0$, $Q(x_k, y_k) = 0$ і, перепозначивши

$$\left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_k, y_k)} = a_k,\ \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_k, y_k)} = b_k,$$
$$\left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_k, y_k)} = c_k,\ \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_k, y_k)} = d_k,$$

одержимо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = a_k (x - x_k) + b_k (y - y_k) + R_1(x,y) \\ \dot{y} = c_k (x - x_k) + d_k (y - y_k) + R_2(x,y) \end{cases}.$$

3. Відкинемо нелінійні члени $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ та одержимо систему лінійного наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = a_k (x - x_k) + b_k (y - y_k) \\ \dot{y} = c_k (x - x_k) + d_k (y - y_k) \end{cases}.$$

За теоремою 6.5.1 (Ляпунова про лінійне наближення), якщо корені характеристичного рівняння одержаної системи лінійного наближення не мають нульових дійсних частин, то в достатньо малому околі особливої точки (x_k, y_k) фазовий портрет лінеаризованої системи збігається із фазовим портретом вихідної нелінійної системи.

4. Будуємо фазові портрети в околі кожної із особливих точок (якщо дійсна частина системи лінійного наближення не дорівнює нулю).

5. Збираємо окремі фазові портрети у фазовий портрет системи загалом.

Наведемо кілька прикладів побудови точок спокою на площині, частину яких проілюструємо за допомогою пакету Sage.

1. Побудувати фазовий портрет лінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = -5 < 0$. Точка спокою – стійкий вузол (рис. 6.1.19).

Знайдемо відповідні власні вектори:

а) $\lambda_1 = -2$, $\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$, звідки $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$.

б) $\lambda_2 = -5$, $\begin{cases} 2\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases}$, звідки $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$.

У такий спосіб знайдемо дві прямі, розташовані на відповідних власних векторах:

$$\frac{1}{2}x - y = 0, \quad x + y = 0.$$

Інші траєкторії є гілками парабол.

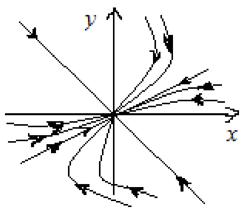


Рис. 6.1.19

Власне число $\lambda_1 = -2$ менше за абсолютною величиною власного числа $\lambda_2 = -5$, тому інтегральні криві прилягають своєю опуклістю до прямої $\frac{1}{2}x - y = 0$, яка відповідає власному числу λ_1.

2. Побудувати фазовий портрет лінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 6y \end{cases}.$$

Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = -5 < 0$. Точка спокою – сідло (рис. 6.1.20).

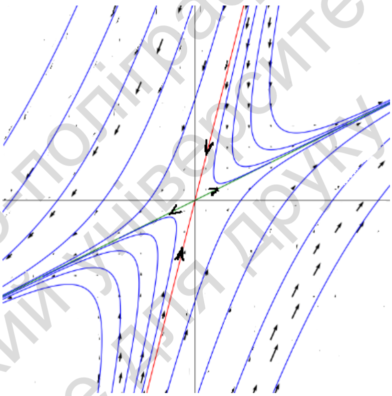


Рис. 6.1.20

Знайдемо відповідні власні вектори:

а) $\lambda_1 = 2$, $\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 = 0 \end{cases}$, звідки $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$.

б) $\lambda_2 = -5$, $\begin{cases} 8\beta_1 - 2\beta_2 = 0 \\ 4\beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases}$, звідки $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 4$.

Отже, на власному векторі, що відповідає $\lambda_1 = 2 < 0$, розташована сепаратриса, по якій рух відбувається від центра, а на власному векторі, що відповідає $\lambda_2 = -5 < 0$, – сепаратриса, по якій рух відбувається до центра.

У чвертях, на які розділили площину сепаратриси, траєкторії є гіперболами, а рух по них повторює напрямок руху по сепаратрисах.

Наведемо код програми Sage, що реалізує розглянутий приклад, і результат його роботи (рис. 6.1.21).

Код:

```
#Задання та знаходження загального розв'язку системи
A = matrix([[3, -2], [4, -6]])
A.eigenvalues()
t = var('t')
x = function('x')(t)
y = function('y')(t)
X = vector([x, y])
syst = [diff(X[i], t) == (A*X)[i] for i in range(2)]
show(desolve_system(syst, [x, y]))
desolve_system(syst, [x, y])
#Знаходження сепаратрис. Також ми знайдемо прямі, що
проходять #посередині між сепаратрисами (з коефіцієнтами
k_bisect_1 та #k_bisect_2).
#Уздовж цих прямих ми будемо з рівномірним кроком змінювати
#початкові умови, щоб траєкторії на графіку були більш-менш
#рівномірно розподілені.
x, y, k = var('x y k')
X = vector([x, y])
P = 3*x -2*y
Q = 4*x -6*y
eq_sep = (Q/P).substitute(y == k*x) == k
k = solve(eq_sep, k)
k_bisect_1 = (k[0].rhs() + k[1].rhs())*1/2
k_bisect_2 = -k_bisect_1
# Побудова графіків сепаратрис і векторного поля, породженого
#системою
g = Graphics()
g += plot(k[0].rhs()*x, -10, 10, color='red')
g += plot(k[1].rhs()*x, -10, 10, color='green')
g += plot_vector_field((P, Q), (x, -10, 10), (y, -10, 10))
# Побудова графіків деяких фазових траєкторій
x = function('x')(t)
y = function('y')(t)
X = vector([x, y])
syst = [diff(X[i], t) == (A*X)[i] for i in range(2)]
```

```
for i in range(-5, 5):
x_t, y_t = desolve_system(syst, [x, y], ics=[0, i, k_bisect_1*i])
g += parametric_plot((x_t.rhs(), y_t.rhs()), (t, -1, 1), color='blue',figsize=10)
for i in range(-5, 5):
x_t, y_t = desolve_system(syst, [x, y], ics=[0, i, k_bisect_2*i])
g += parametric_plot((x_t.rhs(), y_t.rhs()), (t, -1, 1), color='blue',figsize=10)
g.show(xmin = -10, xmax=10, ymin= -10, ymax=10)
```

Evaluate

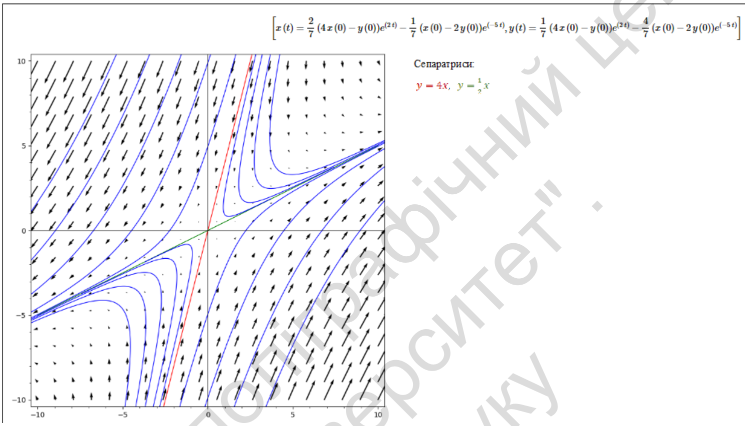


Рис. 6.1.21

3. Побудувати фазовий портрет лінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Його коренями будуть

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Точка спокою – нестійкий фокус (рис. 6.1.22).

Візьмемо довільну точку площини $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Вектор швидкості в цій точці $\dot{x}\big|_{(1,0)} = 0$, $\dot{y}\big|_{(1,0)} = -2$. Рух відбувається по спіралях, які розгортаються за годинниковою стрілкою.

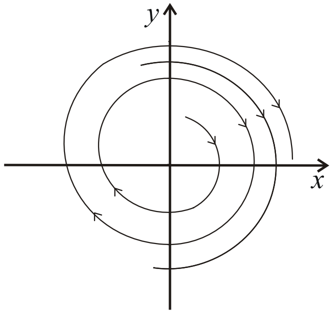


Рис. 6.1.22

4. Побудувати фазовий портрет лінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}.$$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

має суто уявні корені $\lambda_{1,2} = \pm i.$ Точка спокою – центр (рис. 6.1.23).

Візьмемо довільну точку площини $x_0 = 1, \quad y_0 = 0.$ Вектор швидкості в цій точці $\dot{x}\big|_{(1,0)} = 1, \; \dot{y}\big|_{(1,0)} = 2.$ Траєкторії мають вигляд замкнених кривих, рух по яких відбувається проти годинникової стрілки.

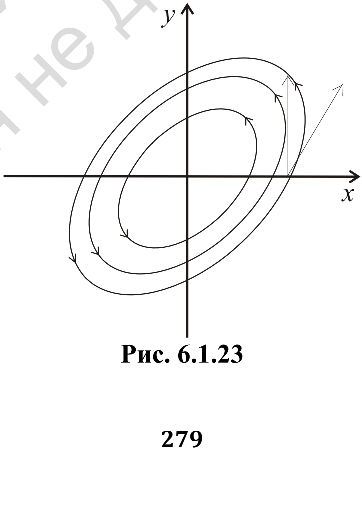


Рис. 6.1.23

5. Побудувати фазовий портрет лінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}.$$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$$

має кратні дійсні корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$

$$\text{rang}[A-\lambda E] = \begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Перепишемо систему як рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Підставимо рівняння прямої $y = kx.$ Одержимо $k = k,$ тобто всі функції вигляду $y = kx$ є розв'язками рівняння. Стан рівноваги – нестійкий дикритичний вузол (рис. 6.1.24).

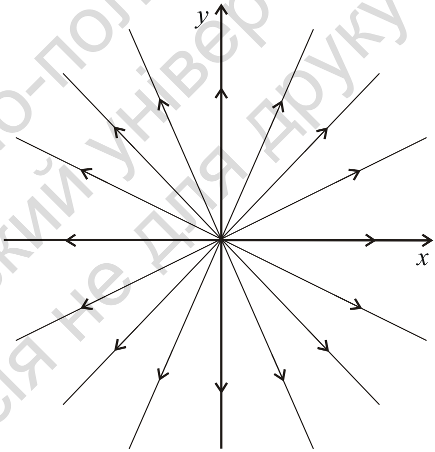


Рис. 6.1.24

6. Побудувати фазовий портрет лінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}.$$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

має кратні від'ємні дійсні корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

$$\text{rang}[A - \lambda E] = \begin{bmatrix} -3+1 & 2 \\ -2 & 1+1 \end{bmatrix} = 1.$$

Перепишемо систему як рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+y}{-3x+2y}.$$

Підставимо рівняння прямої $y = kx$, одержимо

$$k = \frac{-2+k}{-3+2k},$$

звідки

$$2k^2 - 4k + 2 = 0,$$

а розв'язки мають вигляд

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Отже, рівняння прямої $y = x$.

Візьмемо ізокліну (лінію одного рівня) $\dfrac{dy}{dx} = 0$. Вона описується рівнянням $y = 2x$, тобто цю пряму інтегральні криві перетинають під нульовим кутом. Оскільки власні числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$, то в цьому випадку особлива точка – стійкий вироджений вузол (рис. 6.1.25).

7. Побудувати фазовий портрет лінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -6x + 4y \end{cases}.$$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda = 0$$

має дійсні різні корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 7$.

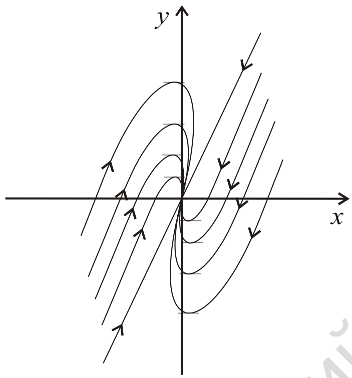


Рис. 6.1.25

Перепишемо систему як рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x + 4y}{3x - 2y},$$

звідки

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} y = -2x + c \\ y = \dfrac{3}{2}x. \end{cases}$$

Отже, траєкторії є сім'єю прямих $y = -2x + c$, яку перетинає особлива пряма $y = \frac{3}{2}x$ (рис. 6.1.26). Оскільки $\lambda_2 = 7 > 0$, то напрямок руху по траєкторіях відбувається від особливої прямої.

8. Побудувати фазовий портрет лінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -4x + 2y \end{cases}.$$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

має кратні нульові корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

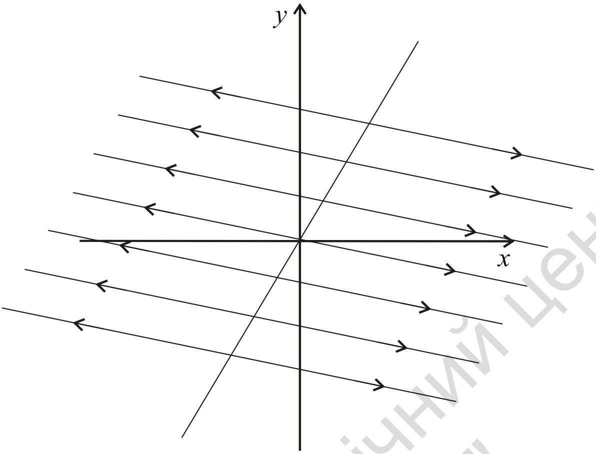


Рис. 6.1.26

Перепишемо систему як рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4x+2y}{-2x+y},$$

звідки

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2 \\ -2x+y=0\end{cases},$$

або

$$\begin{cases}y=2x+c \\ y=2x\end{cases}.$$

Отже, траєкторії є сім'єю прямих $y=2x+c$, а особлива пряма є однією із цієї сім'ї і проходить через початок координат $y=2x$, тобто відповідає одній із них (при $c=0$) (рис. 6.1.27).

Для визначення напрямку руху візьмемо точку $x_0=1$, $y_0=0$. Вектор швидкості $\dot{x}\big|_{(1,0)}=-2$, $\dot{y}\big|_{(1,0)}=-4$ направлений ліворуч і вниз, тому рух по траєкторіях направлений вгору, якщо траєкторії розташовані вище особливої прямої, і вниз для траєкторій, розташованих нижче неї.

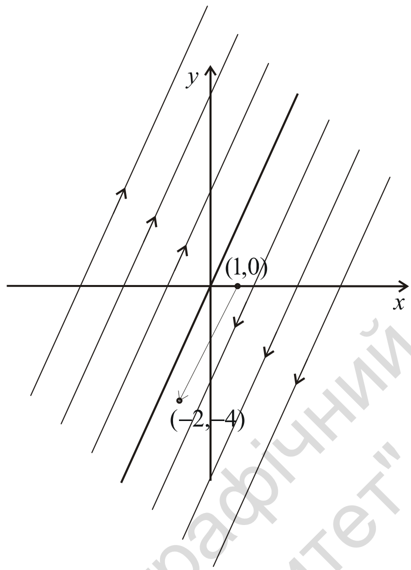


Рис. 6.1.27

Наведемо тепер текст *універсальної* програми на Sage, яка враховує біфуркаційну картинку, зображену на рис. 6.1.18. Формально її можна використовувати для побудови фазового портрета будь-якої з вищеперерахованих точок спокою лінійних стаціонарних систем на площині.

Код:

```
# Вхідні дані A, B, C, D змінюються залежно від умови
# Наша система має вигляд x' == A * x + B * y, y' == C * x + D * y
# Якщо system правильна, то розв'язок шукаємо як x(t), y(t).
# Інакше – y(x)
A = -3
B = 2
C = 1
D = -4
system = true
# Знаходимо загальний розв'язок у потрібному нам вигляді
if not system:
 y = function('y')(x)
 de = diff(y, x) – (C * x + D * y) / (A * x + B * y)
 solution = desolve(de, y)
 solution.show()
```

```
else:
 t = var('t')
 x = function('x')(t)
 y = function('y')(t)
 dx = diff(x, t) == A * x + B * y
 dy = diff(y, t) == C * x + D * y
 x_t, y_t = desolve_system([dx, dy], [x, y])
 show(x_t)
 show(y_t)
# Будуємо фазовий портрет
x,y = var('x,y')
f(x,y) = A * x +B * y
g(x,y) = C * x + D * y
plot = streamline_plot((f, g), (x, -10, 10), (y, -10, 10), density=1.45)
# Знаходимо корені характеристичного рівняння
char_eq = (A – x) * (D – x) – B * C
char_roots = []
for root in solve(char_eq, x, solution_dict=True):
 char_roots.append(root[x])
# Перевіряємо, чи є нульові корені
zero = false
for root in char_roots:
 if root == 0:
 zero = true
# Знаходимо власні вектори
# Note: у V крім векторів записані також відповідні власні
# значення, але їх не завжди можна рахувати точно, на відміну від
# попереднього #блоку, де використана функція solve()
M = matrix([[A, B], [C, D]])
V = M.eigenvectors_right()
# Перевіряємо, чи корені характеристичного рівняння дійсні
if char_roots[0] in RR:
 # Перевіряємо, чи не є особлива точка дикритичним вузлом
 if not (A == D and B == 0 and C == 0):
 for v in V:
# Будуємо особливу пряму, якщо немає нульових коренів
# Якщо ж нульовий корінь є, то будуємо особливу пряму тільки # для
нього
if not zero or v[0] == 0:
plot += implicit_plot(v[1][0][1]*x==v[1][0][0]*y,(x, -10, 10), (y, -10, 10))
# Відображаємо графіки
plot.show(xmin=-10, xmax=10, ymin=-10, ymax=10, axes=True)
```

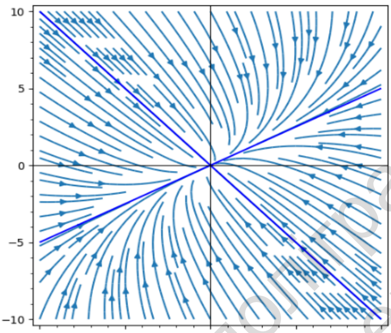
Покажемо результати роботи *універсальної* програми для деяких із вищенаведених розв'язаних аналітично прикладів.

У випадку задання коефіцієнтів системи $A = -3$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -4$ (приклад **1**) отримаємо таке зображення результату на екрані комп'ютера:

Evaluate

$$x(t) = \frac{2}{3}(x(0) + y(0))e^{(-2t)} + \frac{1}{3}(x(0) - 2y(0))e^{(-5t)}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(x(0) + y(0))e^{(-2t)} - \frac{1}{3}(x(0) - 2y(0))e^{(-5t)}$$

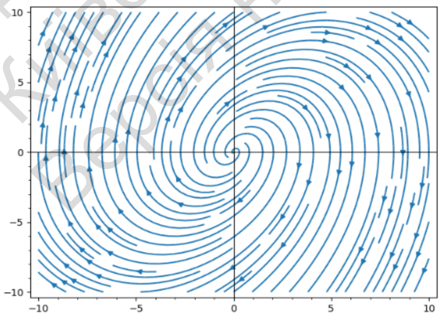


У випадку задання коефіцієнтів системи $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$, $D = 1$ (приклад **3**) отримаємо таке зображення результату на екрані комп'ютера:

Evaluate

$$x(t) = -\frac{1}{7}\left(\sqrt{7}(x(0) - 2y(0))\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) - 7\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)x(0)\right)e^{\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

$$y(t) = -\frac{1}{7}\left(\sqrt{7}(4x(0) - y(0))\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) - 7\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)y(0)\right)e^{\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

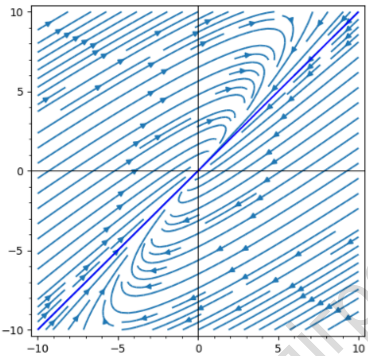


У випадку задання коефіцієнтів системи $A = -3$, $B = 2$, $C = -2$, $D = 1$ (приклад **6**) отримаємо таке зображення результату на екрані комп'ютера:

Evaluate

$$x(t) = -2te^{(-t)}x(0) + 2te^{(-t)}y(0) + e^{(-t)}x(0)$$

$$y(t) = -2te^{(-t)}x(0) + 2te^{(-t)}y(0) + e^{(-t)}y(0)$$

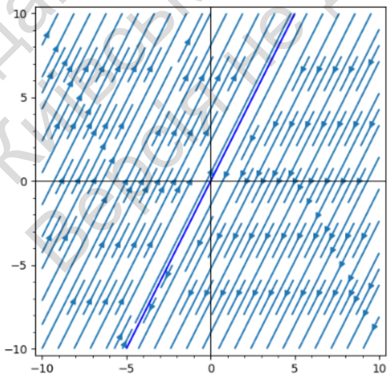


У випадку задання коефіцієнтів системи $A = -2$, $B = 1$, $C = -4$, $D = 2$ (приклад **8**) отримаємо таке зображення результату на екрані комп'ютера:

Evaluate

$$x(t) = -2tx(0) + ty(0) + x(0)$$

$$y(t) = -4tx(0) + 2ty(0) + y(0)$$



9. Побудувати фазовий портрет нелінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y^2 + x^2 - 2 \end{cases}$$ на площині.

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 + x^2 - 2 = 0 \end{cases},$$

знаходимо особливі точки. Ними будуть $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$.

Розкладемо нелінійну систему з точністю до лінійного наближення в околі особливої точки $M_0(x_0, y_0)$:

$$\dot{x} = P(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) +$$

$$+ R_1(x,y) = 1(x - x_0) - 1(y - y_0) + R_1(x,y),$$

$$\dot{y} = Q(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) +$$

$$+ R_2(x,y) = 2x\,|_{x=x_0} (x - x_0) + 2y\,|_{y=y_0} (y - y_0) + R_2(x,y).$$

1. Підставивши першу точку $M_1(1,1)$, дістанемо

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1) - (y-1) + R_1(x,y) \\ \dot{y} = 2(x-1) + 2(y-1) + R_2(x,y) \end{cases}.$$

Побудуємо систему лінійного наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1) - (y-1) \\ \dot{y} = 2(x-1) + 2(y-1) \end{cases}.$$

Отримаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0,$$

звідки

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Положення рівноваги – нестійкий фокус.

Для зручності зробимо паралельне перенесення

$$x = x_1 + 1,\ \ y = y_1 + 1\,.$$

Візьмемо точку $x_1 = 1,\ \ y_1 = 0$ у зміщеній системі координат. Отримаємо вектор швидкості $\dot{x}\big|_{(1,0)} = 1,\ \ \dot{y}\big|_{(1,0)} = 2.$

Локальний фазовий портрет в околі точки $M_1(1,1)$ має вигляд спіралі, яка розкручується проти годинникової стрілки (рис. 6.1.28).

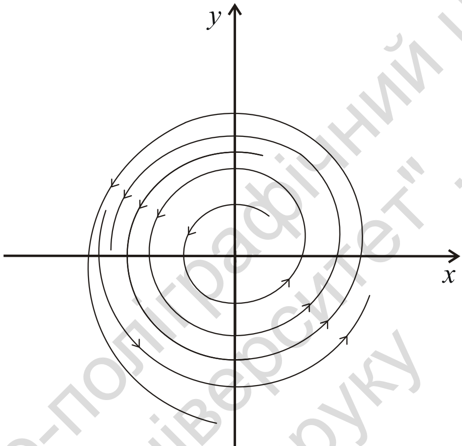


Рис. 6.1.28

2. Розглянемо другу особливу точку $M_2(-1,-1)$. Підставивши її значення у вираз для першої похідної, дістанемо

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1) - (y+1) + R_1(x, y) \\ \dot{y} = -2(x+1) - 2(y+1) + R_2(x, y) \end{cases}.$$

Побудуємо систему лінійного наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1) - (y+1) \\ \dot{y} = -2(x+1) - 2(y+1) \end{cases}.$$

Отримаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 4 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2},\ \ \lambda_1 \approx -2,5,\ \ \lambda_2 \approx 1,5.$$

Положення рівноваги – сідло.

Для зручності виконаємо паралельне перенесення

$$x = x_2 - 1,\ \ y = y_2 - 1$$

та обчислимо рівняння сепаратрис для зміщеної системи

$$y_2 = kx_2.$$

Підставивши останній вираз у диференціальне рівняння, отримаємо

$$k = \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{-2x_2 - 2y_2}{x_2 - y_2} = \frac{-2x_2 - 2kx_2}{x_2 - kx_2} = \frac{-2-2k}{1-k}.$$

Звідси

$$k^2 - 3k - 2 = 0,\ \ k_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2},\ \ k_1 \approx 3,5,\ \ k_2 \approx -0,5.$$

Отримали рівняння сепаратрис $y_2 = 3,5x_2$, $y_2 = -0,5x_2$.

Візьмемо точку $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ у зміщеній системі координат. Отримаємо вектор швидкості $\dot{x}\big|_{(1,0)} = 1$, $\dot{y}\big|_{(1,0)} = -2$.

Локальний фазовий портрет в околі точки $M_2(-1,-1)$ – сідло з нестійкими сепаратрисами у другій і четвертій чвертях і стійкими – у першій і третій (рис. 6.1.29).

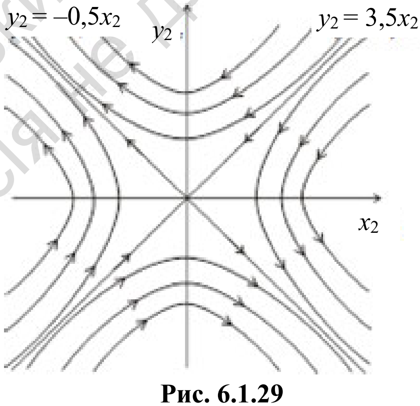


Рис. 6.1.29

Поєднавши два фазові портрети в один, отримаємо такий (рис. 6.1.30):

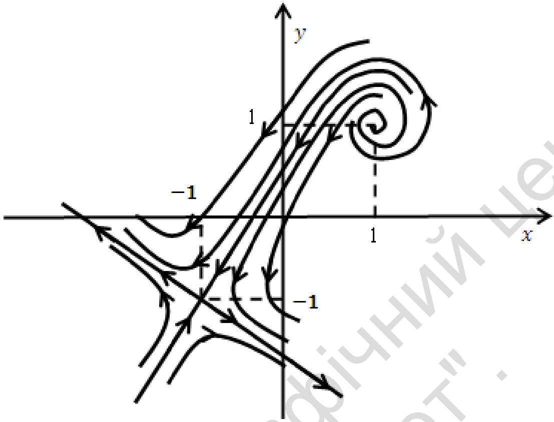


Рис. 6.1.30

Для розв'язання цього прикладу також з успіхом можна використати пакет Sage. Наведений нижче код програми можна застосовувати для побудови фазових портретів на площині для систем диференціальних рівнянь із квадратичною правою частиною.

Код:

```
#Побудова фазових портретів квадратичних систем
def get_dot_coords_from_equation(equation):
#Функція, яка з рівнянь, що задають значення координат, повертає
ці значення
return [equation[0].rhs(), equation[1].rhs()]
def get_real_special_dots_coordinates(special_dots_equations):
# Функція, що повертає список, у якому зберігаються точки
# з дійснозначними координатами
coords_list = []
#Проходимо по кожній особливій точці
for i in range(len(special_dots_equations)):
current_coords =
get_dot_coords_from_equation(special_dots_equations[i])
#Перевіряємо дійснозначність і додаємо у список дійснозначних
if(current_coords[0].imag()==0):
coords_list.append(current_coords)
return coords_list
def get_approx_function(initial_function, special_dot):
```

```
#Повертає функцію лінійного наближення з даної функції та осо-
бливої точки
x0 = special_dot[0]
y0 = special_dot[1]
#Беремо похідну від функції за кожною змінною
diff_x_function(x,y) = diff(initial_function, x)
diff_y_function(x,y) = diff(initial_function, y)
#Підставляємо у похідні значення особливої точки
x_component = diff_x_function(x0,y0)
y_component = diff_y_function(x0,y0)
return [x_component, y_component]
def get_approx_system(eq_x, eq_y, special_dot):
#Повертає лінійне наближення заданих функцій з особливою точкою:
#Рівняння функцій у зміщеній системі координат за допомогою списку
#компонент
# Координати центра нової системи координат
#Координати особливої точки
x0 = special_dot[0]
y0 = special_dot[1]
x_components = get_approx_function(eq_x, special_dot)
y_components = get_approx_function(eq_y, special_dot)
#Компоненти лінійно наближених функцій
matrix_components = x_components + y_components
deltha = [x0, y0]
return [matrix_components, deltha]
def build_plot(matrix_components, dot_coordinates):
#Для заданої особливої точки і лінійно наближених рівнянь похідної:
#Розв'язує і показує розв'язок відповідної системи диф. рівнянь
#Повертає графік із фазовим портретом
plot = Graphics()
#Перетворюємо аргументи до більш зручного вигляду
A = matrix_components[0]
B = matrix_components[1]
C = matrix_components[2]
D = matrix_components[3]
x_center = dot_coordinates[0]
y_center = dot_coordinates[1]
# Знаходимо загальний розв'язок у потрібному нам вигляді
t = var('t')
x = function('x')(t)
y = function('y')(t)
dx = diff(x, t) == A * (x-x_center) + B * (y-y_center)
dy = diff(y, t) == C * (x-x_center) + D * (y-y_center)
x_t, y_t = desolve_system([dx, dy], [x, y])
show(x_t)
show(y_t)
```

```
# Будуємо фазовий портрет
x,y = var('x,y')
f(x,y) = A * (x - x_center) + B * (y - y_center)
g(x,y) = C * (x - x_center) + D * (y - y_center)
plot += streamline_plot((f, g), (x, -10, 10), (y, -10, 10), density=0.7)
# Знаходимо корені характеристичного рівняння
char_eq = (A - x) * (D - x) - B * C
char_roots = []
for root in solve(char_eq, x, solution_dict=True):
char_roots.append(root[x])
# Перевіряємо чи є нульові корені
zero = false
for root in char_roots:
if root == 0:
zero = true
# Знаходимо власні вектори
# Note: в V крім векторів записані також відповідні власні значення
# але вони не завжди рахуються точно на відміну від попереднього блоку
# де використана функція solve()
M = matrix([[A, B], [C, D]])
V = M.eigenvectors_right()
# Перевіряємо чи корені характеристичного рівняння дійсні
if char_roots[0] in RR:
# Перевіряємо чи не є особлива точка дикритичним вузлом
if not (A == D and B == 0 and C == 0):
for v in V:
# Будуємо особливу пряму, якщо немає нульових коренів
# Якщо ж нульовий корінь є, то будуємо особливу пряму тільки для нього
if not zero or v[0] == 0:
plot += implicit_plot(v[1][0][1]*(x - x_center)==v[1][0][0]*(y - y_center),(x, -10, 10), (y, -10, 10))
return plot
def build_single_dot(coordinates, index):
#Повертає графік з побудованою та проіндексованою точкою
x0 = coordinates[0]
y0 = coordinates[1]
plot = Graphics()
#Додаємо точку
plot += point(coordinates, rgbcolor=(255,255,255), size=20)
#Додаємо підпис
plot += text(f'M{index}', (x0 + 1/2, y0 - 1/2), rgbcolor=(255,255,255))
```

```
return plot
def build_plots(eq_x, eq_y, real_special_dots):
#Для усіх особливих точок і лінійно наближених рівнянь похідної
#Розв'язує і показує розв'язок відповідної системи диф. рівнянь
#Рисує усі фазові портрети
plots = Graphics()
#Знаходимо кількість особливих точок
limit = len(real_special_dots)
#Проходимо по кожній особливій точці
for i in range(limit):
matrix_components, dot_coordinates = get_approx_system(eq_x, eq_y,
real_special_dots[i])
plot = build_plot(matrix_components, dot_coordinates)
plot += build_single_dot(dot_coordinates, i)
plots += plot
# Відображаємо графіки
plots.show(xmin=-10, xmax=10, ymin=-10, ymax=10, axes=True)
#######################
# Вхідні дані - Ax, Bx, Cx, Dx, Ex, Fx, Ay, By, Cy, Dy, Ey, Fy
#Значення похідних від 'x' і 'y' задаються таким чином:
#eq_x = Ax(x^2) + Bx(y^2) + Cx(xy) + Dx(x) + Ex(y) + Fx
#eq_y = Ay(x^2) + By(y^2) + Cy(xy) + Dy(x) + Ey(y) + Fy
#Тут потрібно задати вхідні дані
Ax = 0
Bx = 0
Cx = 2
Dx = 0
Ex = -4
Fx = -8
Ay = -1
By = 4
Cy = 0
Dy = 0
Ey = 0
Fy = 0
x = var('x')
y = var('y')
eq_y = Ay*(x^2) + By*(y^2) + Cy*(x*y) + Dy*(x) + Ey*(y) + Fy
eq_x = Ax*(x^2) + Bx*(y^2) + Cx*(x*y) + Dx*(x) + Ex*(y) + Fx
#Розв'язуємо систему диференційних рівнянь,
#виділяємо розв'язки – особливі точки
special_dots = solve([eq_x==0,eq_y==0],x,y)
```

```
#Із особливих точок обираємо дійснозначні
real_special_dots = get_real_special_dots_coordinates(special_dots)

#Для дійснозначних особливих точок показуємо розв'язки
#і будуємо фазові портрети
build_plots(eq_x, eq_y, real_special_dots)
```

Нижче на рисунку представлено скрін екрана з результатами роботи вищенаведеної програми для прикладу **9**.

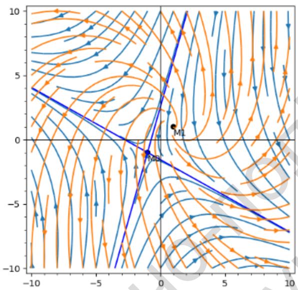
Evaluate

$$x(t) = \frac{1}{17}\left(\sqrt{17}(3x(0) - 2y(0) + 1)\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}t\right) + 17(x(0)+1)\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}t\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}t\right)} - 1$$

$$y(t) = -\frac{1}{17}\left(\sqrt{17}(4x(0) + 3y(0) + 7)\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}t\right) - 17(y(0)+1)\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}t\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}t\right)} - 1$$

$$x(t) = -\frac{1}{7}\left(\sqrt{7}(x(0) + 2y(0) - 3)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) - 7(x(0)-1)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)\right)e^{\left(\frac{3}{2}t\right)} + 1$$

$$y(t) = \frac{1}{7}\left(\sqrt{7}(4x(0) + y(0) - 5)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) + 7(y(0)-1)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)\right)e^{\left(\frac{3}{2}t\right)} + 1$$



Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати фазовий портрет лінійної системи:

1.1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases};$ 1.2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases};$

1.3. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 4y \end{cases};$ 1.4. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases};$

1.5. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases};$ 1.6. $\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases};$

1.7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x \end{cases};$ 1.8. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -x - y \end{cases};$

1.9. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$;

1.10. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$;

1.11. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$;

1.12. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$;

1.13. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$;

1.14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$;

1.15. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$;

1.16. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$;

1.17. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$.

2. Побудувати фазовий портрет нелінійної системи на площині:

2.1. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$;

2.2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2 \end{cases}$;

2.3. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1 \\ \dot{y} = y + \sqrt{1 + x^2} \end{cases}$;

2.4. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1 - x - x^2) - \ln 3 \end{cases}$;

2.5. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$;

2.6. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$;

2.7. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y - 2} - 2 \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + y) \end{cases}$.

6.2. Стійкість лінійних систем

Розглянемо в цьому підрозділі системи лінійних диференціальних рівнянь. Для них умови стійкості можна сформулювати більш конструктивно. Якщо ж системи мають сталі коефіцієнти, то конструктивність зберігається й у випадку достатньо великої розмірності.

6.2.1. Стійкість лінійних неоднорідних систем

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = A(t)y + f(t)\,. \tag{6.2.1}$$

Нехай

$$\dot{x} = A(t)x \tag{6.2.2}$$

– відповідна до неї однорідна система. Тут $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор розв'язків системи, $f(t)$ – неперервна векторна функція, $t_0 \le t < \infty$.

Означення 6.2.1. Лінійна система (6.2.1) називається *стійкою за Ляпуновим (асимптотично стійкою)*, якщо всі її розв'язки $x(t)$ стійкі за Ляпуновим (асимптотично стійкі).

Зауваження 6.2.1. Як буде показано нижче, у лінійних системах усі розв'язки одночасно або стійкі, або нестійкі. Цей факт не має місця для нелінійних систем, у яких одні розв'язки можуть бути стійкими, а інші – ні.

Теорема 6.2.1. Лінійна неоднорідна система (6.2.1) буде стійкою (асимптотично стійкою) тоді й тільки тоді, коли нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ відповідної однорідної системи (6.2.2) є стійким (асимптотично стійким).

Доведення. Нехай $y = \varphi(t)$ – фіксований розв'язок неоднорідної системи (6.2.1).

Зробимо заміну $y = \varphi(t) + x.$ Одержимо

$$\dot{\varphi}(t) + \dot{x} = A(t)(\varphi(t) + x) + f(t).$$

Оскільки $\varphi(t)$ – розв'язок неоднорідної системи, тобто

$$\dot{\varphi}(t) \equiv \mathrm{A}(t)\varphi(t) + f(t),$$

то після скорочення отримаємо лінійну однорідну систему

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Тепер дослідження стійкості довільного розв'язку $y = \varphi(t)$ неоднорідної системи (6.2.1) переходить у дослідження стійкості однорідної системи (6.2.2), тобто стійкість довільного розв'язку $y = \varphi(t)(t)$ еквівалентна стійкості нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ однорідної системи (6.2.2).

Зауваження 6.2.2. Стійкість довільного розв'язку неоднорідної системи (6.2.1) не залежить від векторної функції $f(t)$, а цілком визначається матрицею $A(t)$.

6.2.2. Стійкість лінійних однорідних систем

Розглянемо однорідну систему зі змінною матрицею (6.2.2). Покажемо, що стійкість системи еквівалентна обмеженості всіх її розв'язків.

Теорема 6.2.2. Лінійна однорідна система (6.2.2) стійка за Ляпуновим тоді й тільки тоді, коли всі її розв'язки $x = x(\mathrm{t})$ обмежені.

Доведення. Достатність. Нехай довільний розв'язок $x = x(\mathrm{t})$ однорідної системи (6.2.2) є обмеженим. Зобразимо загальний розв'язок як

$$x_{однор.}(t) = \mathrm{X}(t,t_0)x_0,$$

де $\mathrm{X}(t,t_0)$ – фундаментальна матриця, нормована при $t = t_0$. Оскільки всі розв'язки обмежені, то існує $\mathrm{M} > 0$ таке, що

$$\left|\mathrm{X}(t,t_0)\right| \le \mathrm{M},\ \ t_0 \le t < +\infty.$$

Звідси

$$\left|x(t)\right| \le \mathrm{X}(t,t_0)\left|x_0\right| \le \mathrm{M}\left|x_0\right| < \varepsilon,$$

якщо

$$\left|x_0\right| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}} = \delta(\varepsilon).$$

Розв'язок $x(t) \equiv 0$ стійкий за Ляпуновим, отже, стійкі всі розв'язки системи (6.2.2), тому й система (6.2.2) є стійкою.

Необхідність. Нехай, від супротивного, існує необмежений розв'язок $z(t)$ та $z_0 = z(t_0) \ne 0$. Розглянемо частинний розв'язок

$$x(t) = \frac{z(t)}{z_0}\frac{\delta}{2}.$$

Для нього буде виконуватись

$$\left|x(t_0)\right| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

причому внаслідок необмеженості розв'язку $z(t)$ при деякому $\mathrm{T} > t_0$ він буде як завгодно великим і

$$\left|x(T)\right| = \frac{\left|z(T)\right|}{\left|z_0\right|}\frac{\delta}{2} > \varepsilon, \ \ \mathrm{T} > t_0.$$

Отже, нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ є нестійким, тобто система є нестійкою, що суперечить умові.

Теорема 6.2.3. Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь (6.2.2) асимптотично стійка тоді й тільки тоді, коли всі її розв'язки $x(t)$ прямують до нуля при $t \to +\infty$, тобто

$$\lim x(t) = 0, \ \ t \to +\infty.$$

Доведення. Необхідність. Нехай однорідна система (6.2.2) асимптотично стійка. Тоді всі її розв'язки асимптотично стійкі. Асимптотично стійким буде і нульовий розв'язок, тобто для довільного розв'язку $x(t)$ буде виконуватись

$$\lim x(t) = 0, \ \ t \to +\infty\,.$$

Достатність. Покажемо, що якщо всі розв'язки прямують до нуля, то лінійна система (6.2.2) асимптотично стійка.

Розглянемо довільний розв'язок $x(t)$, який задовольняє початкову умову $x_0 = x(t_0) \neq 0$. Запишемо його як

$$x(t) = \xi(t)\frac{|\,x(t_0)\,|}{\frac{1}{2}\Delta},$$

де $\xi(t) = \dfrac{\Delta}{2}\dfrac{x(t)}{|\,x(t_0)\,|}$.

Оскільки для $\xi(t)$ виконується умова

$$|\,\xi(t_0)\,| = \frac{\Delta}{2} < \Delta,$$

то буде виконуватися

$$\lim \xi(t) = 0, \ t \to +\infty.$$

Звідси і для $x(t)$ також буде

$$\lim x(t) = 0, \ t \to +\infty,$$

оскільки від $\xi(t)$ воно відрізняється тільки сталим множником.

Зауваження 6.2.3. Якщо лінійна система (6.2.2) асимптотично стійка, то областю її стійкості є весь простір. Для нелінійної системи не існує поняття *стійка система.* Якщо система нелінійна, то можливі випадки, коли нульовий розв'язок є стійким, але існують також нестійкі розв'язки. До того ж можливі випадки, коли всі розв'язки системи прямують до нуля, але нульовий розв'язок не є стійким. Отже, для нелінійних систем треба розглядати стійкість кожного розв'язку окремо.

6.3. Стійкість лінійних систем зі сталою матрицею

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = Ax, \tag{6.3.1}$$

де A – матриця зі сталими коефіцієнтами. Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$.

Теорема 6.3.1. Для лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами можливі такі випадки.

1. Для того, щоб нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ лінійної системи із сталими коефіцієнтами (6.3.1) був асимптотично стійким, необхідно й достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння системи (6.3.1) мали від'ємну дійсну частину, тобто $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$, $i = \overline{1,n}$.

2. Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння системи (6.3.1) має додатну дійсну частину, тобто існує λ_s таке, що $\mathrm{Re}\,\lambda_s(A) > 0$, то нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (6.3.1) є нестійким.

3. Для того, щоб розв'язок $x(t) \equiv 0$ лінійної системи із сталими коефіцієнтами (6.3.1) був стійким за Ляпуновим, необхідно й достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння системи (6.3.1) мали недодатну дійсну частину, тобто $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) \le 0$, $i = \overline{1,n}$, причому числа з нульовою дійсною частиною мали б прості елементарні дільники, тобто клітина Жордана зводилася до одного елемента.

Доведення. Загальний розв'язок однорідної системи (6.3.1)

$$x(t)\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t),$$

де $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ – лінійно незалежні розв'язки, c_i, $i=\overline{1,n}$ – довільні сталі.

Розглянемо такі випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння λ_i, $i=\overline{1,n}$ дійсні та різні, то розв'язки матимуть вигляд

$$x_i(t)=\begin{pmatrix} \alpha_1^i e^{\lambda_i t} \\ \cdots \\ \alpha_n^i e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ комплексно-спряжені, тобто $\lambda_{1,2}=p\pm iq$, то відповідні до них розв'язки матимуть вигляд

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ \cdots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix},\ x_2(t)=\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt + s_1\sin qt) \\ \cdots \\ e^{pt}(r_n\cos qt + s_n\sin qt) \end{pmatrix}.$$

3. Якщо корені кратні, тобто $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_\gamma=\lambda$, то їм відповідають розв'язки

$$x(t)=\begin{pmatrix} (\alpha_1^1+\alpha_1^2 t+\ldots+\alpha_1^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ \cdots \\ (\alpha_n^1+\alpha_n^2 t+\ldots+\alpha_n^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо таке.

1. Для того, щоб виконувалась умова

$$\|x(t)\|\to 0,\ t\to\infty,$$

необхідно й достатньо, щоб показник експоненти був від'ємним, тобто $\mathrm{Re}\lambda_i(A)<0$.

2. Якщо хоча б один показник експоненти додатний, тобто $\operatorname{Re}\lambda_s(A) > 0,$ то вибором сталих c_i завжди можна знайти розв'язки $x(t)$ такі, що

$$\|x(t)\| \to \infty, \ \ t \to \infty,$$

тобто розв'язок $x(t) \equiv 0$ буде нестійким.

3. Для будь-якої матриці A існує неособлива матриця S така, що $SAS^{-1} = \Lambda,$ де Λ – жорданова форма. Якщо клітини Жордана, що відповідають кореню з нульовою дійсною частиною, тобто з $\operatorname{Re}\lambda_i(A) = 0,$ складаються з одного елемента, то для кратних коренів відсутні члени зі степенями $t^i,\ i = \overline{1, \gamma - 1}.$ Тому при $t \to \infty$ будь-який розв'язок $\|x(t)\|$ не зростає. Звідси нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ буде стійким за Ляпуновим.

Отже, для дослідження стійкості лінійної системи зі сталими коефіцієнтами треба розкрити характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

переписати його як

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (6.3.2)$$

і дослідити корені отриманого полінома.

Теорема 6.3.2 *(необхідна умова стійкості).* Якщо характеристичне рівняння (6.3.2) має корені з від'ємною дійсною частиною, то всі коефіцієнти характеристичного рівняння (6.3.2) додатні, тобто $p_i > 0,\ \ i = \overline{1, n}$.

Доведення. Нехай характеристичне рівняння (6.3.2) має корені з від'ємною дійсною частиною

$$\lambda_j = -\alpha_j \pm i\beta_j, \ \ j = \overline{1, s}$$

$$\text{та } \lambda_k = -\gamma_r, \ \operatorname{Re}\lambda_s(A) > 0, \ k = \overline{1, r}, \ 2s + r = n.$$

Використовуючи теорему алгебри про зображення багаточлена, отримаємо

$$\prod_{j=1}^{s}(\lambda+\alpha_j+i\beta_j)(\lambda+\alpha_j-i\beta_j)\prod_{k=1}^{r}(\lambda+\gamma_k)=0,$$

або

$$\prod_{j=1}^{s}(\lambda^2+2\alpha_j\lambda+\alpha_j^2+\beta_j^2)\prod_{k=1}^{r}(\lambda+\gamma_k)=0.$$

Оскільки величини $\lambda_j>0$, $\gamma_k>0$ (умова асимптотичної стійкості), то, розкривши добуток, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n=0,$$

у якого всі коефіцієнти $p_i>0$, $i=\overline{1,n}$.

Наведемо приклад дослідження системи зі сталими коефіцієнтами з розв'язанням.

Дослідити на стійкість лінійну систему

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x-y\\ \dot{y}=-4y\end{cases}.$$

Обчислимо характеристичний поліном

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ 0 & -4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+8=0.$$

Звідси його коренями будуть

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-4.$$

З теореми про асимптотичну стійкість маємо, що нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий.

Завдання для самостійної роботи

3. Дослідити стійкість лінійних систем:

3.1. $\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=y\end{cases};$ 3.2. $\begin{cases}\dot{x}=4y\\ \dot{y}=-x\end{cases};$

3.3. $\begin{cases}\dot{x}=x+2y\\ \dot{y}=3x+2y\end{cases};$ 3.4. $\begin{cases}\dot{x}=x\\ \dot{y}=x+4y\end{cases};$

3.5. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 5y \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$;   3.6. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y \\ \dot{y} = y \end{cases}$;

3.7. $\begin{cases} \dot{x} = 5x \\ \dot{y} = 4x \end{cases}$.

4. Визначити значення параметра, за якого нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий:

4.1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = ax - 8y \end{cases}$;   4.2. $\begin{cases} \dot{x} = 8x + ay \\ \dot{y} = y \end{cases}$;

4.3. $\begin{cases} \dot{x} = ax + 5y \\ \dot{y} = ax \end{cases}$.

6.4. Критерії стійкості лінійних стаціонарних систем. Критерій Гурвіца. Критерій Михайлова

У цьому підрозділі розглянемо конструктивні критерії перевірки на стійкість лінійних стаціонарних систем. Як було показано в попередньому підрозділі, критерієм стійкості (асимптотичної стійкості) є розташування дійсних частин коренів характеристичного рівняння.

Нехай із коефіцієнтів характеристичного рівняння

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (6.4.1)$$

сформована так звана *матриця Гурвіца*

$$\Gamma = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{2n+1} & p_{2n} & p_{2n-1} & p_{2n-2} & \ldots & p_n \end{bmatrix},$$

де p_i, $i = \overline{1,n}$ – дійсні коефіцієнти, усі $p_i \equiv 0$ при $i > n$. Має місце такий критерій асимптотичної стійкості.

Теорема 6.4.1 *(критерій Гурвіца).* Для того, щоб характеристичне рівняння (6.4.1) мало корені з від'ємною дійсною частиною, необхідно й достатньо, щоб усі головні діагональні мінори матриці Гурвіца були додатні, тобто

$$\Delta_1 = p_1 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} > 0,\ \ldots\ \Delta_n > 0.$$

Наслідок 6.4.1. Розглянемо характеристичне рівняння системи другого порядку, тобто

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0.$$

Для системи другого порядку необхідною і достатньою умовою асимптотичної стійкості є додатність коефіцієнтів $p_1 > 0,\ \ p_2 > 0.$

Дійсно, для системи другого порядку матриця Гурвіца має вигляд

$$\Gamma = \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix},$$

а за сформульованим критерієм Гурвіца умовою стійкості є $\Delta_1 = p_1 > 0,\ \ \Delta_2 = p_1 p_2 > 0.$ Звідси $p_1 > 0,\ \ p_2 > 0.$

Іноді, особливо в технічних задачах, зручно користуватися так званими *частотними критеріями*.

Перепишемо ліву частину характеристичного рівняння (6.4.1) як поліном

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1}z + p_n = 0, \qquad (6.4.2)$$

де $p_i,\ \ i = \overline{1,n}$ – дійсні коефіцієнти. Крива $\omega = f(i\omega),$ де $0 \le \omega < \infty,$ $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, називається *годографом Михайлова*.

Лема 6.4.1. Нехай $f(z)$ – поліном n-го порядку, який не має суто уявних коренів. Тоді кут повороту проти ходу годинникової стрілки ненульового вектора $\omega = f(i\omega)$ при $0 \le \omega < +\infty$ становить

$$\mathrm{Arg} f(i\omega) = \frac{\pi}{2}(n - 2m),$$

де m – кількість коренів полінома $f(z)$ з додатною дійсною частиною.

На базі цієї леми формулюється критерій стійкості Михайлова.

Теорема 6.4.2 (критерій Михайлова). Для того, щоб характеристичне рівняння мало корені з від'ємною дійсною частиною, необхідно й достатньо, щоб кут повороту проти годинникової стрілки вектора $\omega = f(i\omega)$ при зміні $0 \le \omega < +\infty$ становив

$$\Delta \mathrm{Arg} f(i\omega) = \frac{\pi}{2} n.$$

Розглянемо поліном другого порядку

$$f(z) = z^2 + p_1 z + p_2 .$$

Підставимо $z = i\omega$ у праву частину й одержимо

$$f(i\omega) = (i\omega)^2 + p_1(i\omega) + p_2 = (-\omega^2 + p_2) + ip_1(\omega).$$

Точки перетину годографом осей координат такі:

$$\omega_0 = 0, \ \ \omega_1 = \sqrt{p_2}, \ \ 0 \le \omega < +\infty.$$

Звідси маємо, що $p_2 > 0$. Далі

$$f(i\omega_0) = p_2, \ \ f(i\omega_1) = ip_1\sqrt{p_2}.$$

Звідси умови стійкості $p_1 > 0, \ \ p_2 > 0$, оскільки за цих умов виконується

$$\lim_{\omega \to +\infty} \Delta \mathrm{Arg} f(i\omega) = \frac{\pi}{2} 2.$$

Розглянемо поліном третього порядку

$$f(z) = z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 .$$

Підставимо $z = i\omega$ у праву частину й одержимо

$$f(i\omega) = -i\omega^3 - p_1\omega^2 + p_2 i\omega + p_3 = (-p_1\omega^2 + p_3) + i(-\omega^2 + p_2)\omega.$$

Точки перетину годографом осей координат такі:

$$\omega_0 = 0, \ \ \omega_1 = \sqrt{\frac{p_3}{p_1}}, \ \ \omega_2 = \sqrt{p_2}, \ \ 0 \le \omega < +\infty.$$

Оскільки ω_1 та ω_2 мають бути дійсними, то $\dfrac{p_3}{p_1} > 0, \ \ p_2 > 0$.

Далі

$$f(i\omega_0) = p_3, \ \ f(i\omega_1) = i\sqrt{\frac{p_3}{p_1}}\left(p_2 - \frac{p_3}{p_1}\right),$$

$$f(i\omega_2) = -(p_1 p_2 - p_3).$$

Оскільки для стійкості необхідно й достатньо

$$\lim_{\omega \to +\infty} \Delta \mathrm{Arg} f(i\omega) = \frac{\pi}{2} 2,$$

то умови стійкості можна записати як

$$p_3 > 0, \ \ p_1 > 0, \ \ p_2 - \frac{p_3}{p_1} > 0, \ \ p_1 p_2 - p_3 > 0.$$

Розглянемо кілька прикладів дослідження систем зі сталими коефіцієнтами на стійкість із розв'язанням.

1. Використовуючи критерій Гурвіца, дослідити на стійкість систему із характеристичним рівнянням

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

З наведеного рівняння випливає, що $p_1 = 1, \ \ p_2 = 1, \ \ p_3 = 2$.

Матриця Гурвіца має вигляд

$$\Gamma = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Звідси $\Delta_1 = 1 > 0, \ \ \Delta_2 = 1 - 2 < 0, \ \ \Delta_3 = 2\Delta_2 < 0.$ Отже, система з таким характеристичним рівнянням нестійка.

2. Використовуючи критерій Гурвіца, дослідити на стійкість систему із характеристичним рівнянням

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0.$$

З наведеного рівняння випливає, що $p_1 = 2, \ \ p_2 = 2, \ \ p_3 = 3.$

Матриця Гурвіца має вигляд

$$\Gamma = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Звідси $\Delta_1 = 2 > 0, \ \ \Delta_2 = 4 - 3 > 0, \ \ \Delta_3 = 3\Delta_2 > 0.$ Отже, система з таким характеристичним рівнянням асимптотично стійка.

3. Використовуючи критерій Гурвіца, дослідити, за яких значень параметрів характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 2 = 0$$

має корені з від'ємною дійсною частиною.

З наведеного рівняння випливає, що $p_1 = a, \ \ p_2 = b, \ \ p_3 = 2.$

Матриця Гурвіца має вигляд

$$\Gamma = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & b & a \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Звідси $\Delta_1 = a,\ \Delta_2 = ab - 2,\ \Delta_3 = 2(ab-2)$. При $a > 0,\ ab - 2 > 0$ система з таким характеристичним рівнянням асимптотично стійка. У просторі параметрів маємо область стійкості (рис. 6.4.1).

Рис. 6.4.1

Завдання для самостійної роботи

5. Використовуючи критерій Гурвіца (або Михайлова), дослідити корені характеристичного рівняння:

5.1. $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0;$

5.2. $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0;$

5.3. $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0;$

5.4. $\lambda^5 + \lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0;$

5.5. $\lambda^4 + 8\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 2 = 0;$

5.6. $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0;$

5.7. $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0;$

5.8. $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0;$

5.9. $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0.$

6. Використовуючи критерій Гурвіца, дослідити, за яких значень параметрів характеристичне рівняння має корені з від'ємною дійсною частиною:

6.1. $\lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda + b = 0;$

6.2. $\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + \lambda + 1 = 0;$

6.3. $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + a = 0;$

6.4. $\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + \lambda + b = 0;$

6.5. $\lambda^4 + a\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b = 0;$

6.6. $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + a\lambda + b = 0;$

6.7. $\lambda^4 + \lambda^3 + a\lambda^2 + \lambda + b = 0.$

6.5. Стійкість нульового розв'язку нелінійних систем

Розглянемо нелінійну систему

$$\dot{x} = f(x,t), \ \ x = (x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (6.5.1)$$

або

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t), \ \ i = \overline{1,n},$$

де $f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ та $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $i,k = \overline{1,n}$ – неперервні функції при $t_0 \le t < \infty$. Нехай $f(0,t) \equiv 0$, тобто $x(t) \equiv 0$ є розв'язком системи.

Дослідження стійкості методом лінійного наближення

Дослідимо нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ на стійкість, використовуючи лінійне наближення. Ідея методу полягає в такому. Функції $f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ розкладають у ряд в околі початку координат і залишають лише лінійні члени. Отримана система називається *лінеаризованою.* Висновок про стійкість нульового розв'язку нелінійної системи роблять, виходячи зі стійкості нульового розв'язку лінеаризованої системи.

Нехай система (6.5.1) після виділення лінійної частини має вигляд

$$\dot{x} = A(t)x + R(x,t), \qquad (6.5.2)$$

тоді система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{6.5.3}$$

називається *системою лінійного наближення*. Дослідження стійкості нульового розв'язку вихідної нелінійної системи (6.5.1) проводять за допомогою такої теореми.

Теорема 6.5.1. Нехай система (6.5.3) стаціонарна, тобто матриця A не залежить від t і нелінійні члени задовольняють нерівність

$$\|R(x,t)\| \le N\|x\|^{\alpha+1}, \quad N > 0, \quad \alpha > 0.$$

1. Якщо всі корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини, тобто $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0,$ то нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ вихідної нелінійної системи (6.5.1) буде асимптотично стійким.

2. Якщо знайдеться хоча б один корінь із додатною дійсною частиною, тобто λ_s такий, що $\operatorname{Re}\lambda_s(A) > 0,$ то нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ вихідної нелінійної системи (6.5.1) буде нестійким.

3. Якщо $\operatorname{Re}\lambda_i(A) \le 0,$ $i = \overline{1,n}$ та існує хоча б один корінь λ_s такий, що $\operatorname{Re}\lambda_s(A) = 0,$ то про стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (6.5.1) нічого не можна сказати. Це так званий *критичний випадок*.

Розглянемо кілька прикладів дослідження нелінійних систем на стійкість із розв'язанням.

1. За допомогою методу лінійного наближення дослідити стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^{y} \end{cases}.$$

Розкладемо праві частини в ряд з точністю до лінійного наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y}\Big|_{(0,0)} + e^{x+2y}\Big|_{(0,0)} \cdot x + 3\sin 3x\Big|_{(0,0)} y + R_1(x,y) \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x}\Big|_{(0,0)} + \dfrac{8}{2\sqrt{4+8x}}\Bigg|_{(0,0)} \cdot x - 2e^{y}\Big|_{(0,0)} - 2e^{y}\Big|_{(0,0)} \cdot y + R_2(x,y) \end{cases}.$$

Відкинувши члени порядків вище першого, одержимо

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}.$$

Характеристичне рівняння лінеаризованої системи

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = -2 < 0.$$

Звідси нульовий розв'язок вихідної нелінійної системи нестійкий.

2. За допомогою методу лінійного наближення дослідити, за яких значень параметрів буде стійким нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2 \\ \dot{y} = x + by + xy \end{cases}.$$

Лінійне наближення запишемо як

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y \\ \dot{y} = x + by \end{cases}.$$

Характеристичне рівняння матриці лінійного наближення

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -2 \\ 1 & b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab+2) = 0.$$

Необхідна й достатня умова асимптотичної стійкості

$$-(a+b) > 0, \quad ab + 2 > 0.$$

У площині параметрів отримаємо область асимптотичної стійкості (рис. 6.5.1).

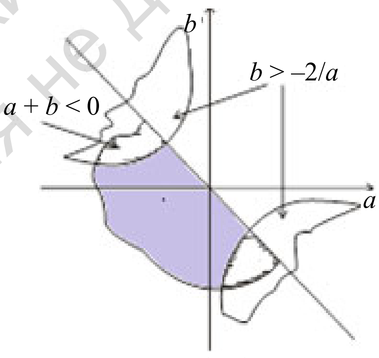


Рис. 6.5.1

Завдання для самостійної роботи

7. Використовуючи теорему Ляпунова про стійкість за лінійним наближенням, дослідити нульові розв'язки систем на стійкість:

7.1. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + x^2 \\ \dot{y} = y + xy + y^4 \end{cases}$; 7.2. $\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = 1 - \cos x \end{cases}$;

7.3. $\begin{cases} \dot{x} = e^x + 2y - \sin 4x \\ \dot{y} = \sqrt{1+x} + e^{2y} \end{cases}$; 7.4. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^5 - 1 + \cos x \\ \dot{y} = \sin x + \sin 3y \end{cases}$;

7.5. $\begin{cases} \dot{x} = y - \ln 4x + \sin 4y \\ \dot{y} = e^{3x} + \operatorname{tg} y \end{cases}$; 7.6. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4xy \\ \dot{y} = 3\sin(x+y) \end{cases}$;

7.7. $\begin{cases} \dot{x} = \ln y + x \\ \dot{y} = 4x + 5y^2 \end{cases}$.

8. Визначити значення параметра, за якого нульовий розв'язок є асимптотично стійким:

8.1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = ax - 4\sin y \end{cases}$; 8.2. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + x^2 \\ \dot{y} = y + xy + y^4 \end{cases}$;

8.3. $\begin{cases} \dot{x} = \ln ay + x \\ \dot{y} = ax + 5y^2 \end{cases}$.

6.6. Основні поняття другого методу Ляпунова

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n), \tag{6.6.1}$$

де $f(x,t)$ та $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ – неперервні функції при $t_0 \le t < \infty,$ до того ж $f(0,t) \equiv 0,$ тобто система має нульовий розв'язок.

Основна ідея другого методу О. М. Ляпунова полягає в тому, що стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (6.6.1) визначається з поведінки наперед визначеної функції Ляпунова.

6.6.1. Фізична інтерпретація

Коливання маятника, або рух кульки (рис. 6.6.1), можна описати за допомогою систем диференціальних рівнянь. Ці системи мають два стани рівноваги – верхній і нижній.

Верхній стан рівноваги нестійкий, нижній – стійкий. Якщо за характеристичну функцію брати повну енергію, то стійкість буде там, де енергія мінімальна, причому при переході до стійкого стану рівноваги енергія зменшується. Отже, дослідження стійкості фізичної системи можна проводити, використовуючи функцію повної енергії (енергетичну функцію).

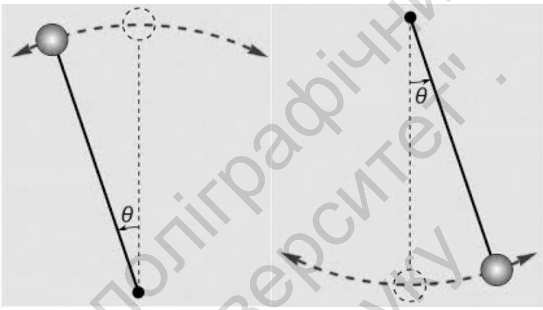


Рис. 6.6.1

6.6.2. Основні означення і твердження методу функцій Ляпунова

Розглянемо в деякій області $H \times R = \{t \geq t_0, \|x\| \leq h\}$ функцію $n+1$ змінних $V(x_1, x_2, ..., x_n, t)$, або $V(x,t)$.

Означення 6.6.1. Функція $V(x)$ називається додатно визначеною, якщо $V(x) > 0$ при $x \neq 0$ та $V(0) = 0$.

Означення 6.6.2. Функція $V(x,t)$ називається додатно визначеною, якщо існує така додатно визначена функція $W(x)$, що $V(x,t) \geq W(x)$ та $V(0,t) \equiv 0$.

Означення 6.6.3. Функція $V(x,t)$ допускає нескінченно малу нижню границю, якщо існує додатно визначена функція $W_1(x)$ така, що $|V(x,t)| \leq W_1(x)$.

Означення 6.6.4. Повною похідною функції $V(x,t)$ внаслідок системи (6.6.1) називається функція

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}+(\mathrm{grad}V(x,t),f(x,t))=$$

$$=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_1}f_i(x_1,x_2,...,x_n,t).$$

Наведемо основні теореми про стійкість і нестійкість руху. В основі другого методу Ляпунова лежать дві теореми про стійкість і теорема Четаєва про нестійкість.

Теорема 6.6.1 *(перша Ляпунова про стійкість).* Нехай існує неперервно диференційована функція $V(x,t)$, що задовольняє умови:

1) $V(x,t)$ додатно визначена в деякому околі $x=0$ (тобто $V(x,t)>0$);

2) повна похідна функції $V(x,t)$ внаслідок системи не додатна (тобто $\dfrac{dV(x,t)}{dt}\le 0$).

Тоді нульовий розв'язок $x(t)\equiv 0$ системи (6.6.1) стійкий за Ляпуновим.

Доведення. Нехай існує додатно визначена функція $V(x,t)$, тобто існує $W(x)$ така, що

$$V(x,t)\ge W(x)>0 \text{ та } V(0,t)\equiv W(0)=0.$$

Візьмемо довільне $\varepsilon>0$ і розглянемо сферу $\|x\|=\varepsilon.$ Оскільки сфера є компактною множиною, а функція $W(x)$ неперервна, то на сфері вона досягає найменшого значення, тобто

$$\inf_{\|x\|=\varepsilon} W(x)=W(x^*)=\alpha.$$

Нехай задано $t_0\ge 0.$ Функція $V(x,t_0)$ неперервна за x, причому $V(0,t_0)=0.$ Отже, існує такий окіл $\|x\|<\delta,$ що

$$0\le V(x,t_0)<\alpha \text{ при } \|x\|<\delta.$$

Розглянемо розв'язок $x(t)$ системи (6.6.1) з початковими умовами $x(t_0)=x_0,$ $\|x_0\|<\delta.$

Покажемо, що розв'язки системи (6.6.1), які починаються із цього околу, не залишають ε -окіл, тобто

$$\|x(t)\| < \varepsilon \text{ при } t \geq t_0.$$

Дійсно, нехай, від протилежного, існує момент часу $\overline{t} > t_0$, у який $\|x(\overline{t})\| = \varepsilon.$ Тоді існує момент t_1: $t_0 \leq t_1 \leq \overline{t}$, у який $V(t_1, x(t_1)) = a.$ Вивчимо поведінку $V(x,t)$ вздовж цього розв'язку.

Оскільки $\dfrac{dV(x,t)}{dt} \leq 0,$ то функція $V(x,t)$ уздовж траєкторії не зростає, тобто

$$\alpha > V(t_0, x(t_0)) \geq V(t_1, x(t_1)) \geq W(x(t_1)) \geq \alpha.$$

Одержимо $\alpha > \alpha$, що неможливо. Отже, отримали суперечність, а $\|x(t)\| < \varepsilon$ за всіх $t \geq t_0$.

Теорема 6.6.2 *(друга Ляпунова про асимптотичну стійкість).* Нехай існує неперервно диференційована функція $V(x,t)$, що задовольняє умови:

1) $V(x,t)$ додатно визначена (тобто $V(x,t) > 0$);

2) $V(x,t)$ допускає нескінченно малу вищу границю (тобто $|V(x,t)| \leq W_1(x)$);

3) повна похідна функції $V(x,t)$ внаслідок системи від'ємно визначена (тобто $\dfrac{dV(x,t)}{dt} < 0$).

Тоді нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (6.6.1) асимптотично стійкий.

Доведення. Оскільки умови другої теореми Ляпунова більш жорсткі, ніж першої, то нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (6.6.1) буде стійким за Ляпуновим.

Покажемо, що існує $\Delta(t_0)$ – такий окіл нульового стану рівноваги, що для розв'язків $x(t)$, початкові умови яких задовольняють нерівності $\|x(t_0)\| < \Delta(t_0)$, буде виконуватись

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Розглянемо поведінку функції Ляпунова на цих розв'язках, тобто функції однієї змінної $v(t) = V(x(t), t).$ Оскільки, згідно із третьою умовою теореми, похідна є від'ємно визначеною функцією, то функція $v(t)$ загасає, а оскільки $v(t)=V(x(t),t)$ обмежена знизу, то існує скінченна границя

$$\lim_{t\to+\infty} v(t)=\inf_{t\geq t_0}\{v(t)\}=\alpha\geq 0.$$

Покажемо, що α не може бути додатним. Дійсно, якщо $\alpha>0$, то, оскільки $V(x,t)=0$ лише при $x=0$, то отримуємо $\|x(t)\|\geq\beta$ за всіх $t\geq t_0$. Це означає, що розв'язки залишаються зовні сфери радіусом β. Дійсно, якщо це не так, то існує хоча б одна послідовність $t_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$ така, що

$$\lim_{n\to+\infty}\|x(t_n)\|=0.$$

Звідси внаслідок існування нескінченно малої вищої границі функції $V(x,t)$ (друга умова теореми) буде виконуватись

$$\lim_{n\to+\infty} v(t_n)=\lim_{n\to+\infty} V(x(t_n),t_n)=0,$$

а це суперечить припущенню, що $\alpha>0$, оскільки α є границею функції $v(t)$ при $t\to+\infty$ для довільної послідовності. Отже, у випадку $\alpha>0$ отримуємо, що $\|x(t)\|\geq\beta$ для всіх $t\geq t_0$, а внаслідок стійкості нульового розв'язку буде $\|x(t)\|\leq h$. Згідно із третьою умовою теореми (від'ємна визначеність повної похідної) існує додатно визначена функція $W_1(x)$ така, що

$$\frac{dV(x,t)}{dt}\leq -W_1(x).$$

Позначимо $\gamma=\inf\limits_{\beta\leq\|x\|\leq h}\{W_1(x)\}$. Тоді, інтегруючи нерівність для повної похідної, отримаємо

$$v(t)=v(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot V(x(s),s)ds\leq v(t_0)-\int_{t_0}^{t}W_1(x(s))ds\leq v(t_0)-\gamma(t-t_0).$$

Звідси за достатньо великих значень $t>t_0$ функція $V(x(t),t)=v(t)$ стає від'ємною, що суперечить додатній визначеності $V(x,t)$. Отже, маємо

$$\lim_{t\to+\infty} V(x(t),t)=0,$$

а внаслідок додатної визначеності та існування нескінченно малої вищої границі функції $V(x,t)$ це можливо тоді й тільки тоді, коли

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t)\|=0.$$

Крім теорем про стійкість, О. М. Ляпуновим було доведено дві теореми про нестійкість нульового розв'язку. Однак трохи згодом більш конструктивну теорему про нестійкість довів М. Г. Четаєв.

Теорема 6.6.3 (Четаєва про нестійкість). Нехай існує неперервно диференційована функція $V(x,t)$, область додатності якої $\Pi(x,t)=\{(x,t):V(x,t)>0\}$ за кожного фіксованого $t\ge t_0$ має ненульовий відкритий перетин $D_t(x)$, що примикає до початку координат, а на границі області $\Pi(x,t)$ виконується рівність $V(x,t)=0$.

Якщо виконуються умови:

1) функція $V(x,t)$ обмежена в $\Pi(x,t)$;

2) в області $\Pi(x,t)$ справедлива нерівність $\dfrac{dV(x,t)}{dt}>0$;

3) існує функція $\beta(\alpha)$ така, що при $V(x,t)\ge a>0$ буде $\dfrac{dV(x,t)}{dt}\ge\beta(\alpha)>0,$

то нульовий розв'язок $x(t)\equiv 0$ системи (6.6.1) нестійкий.

Доведення. Нехай $\delta>0$ – довільна мала величина. Оскільки початок координат $x=0$ є граничною точкою для відкритого перетину D_{t_0}, то в гіперплощині $t=t_0$ існує внутрішня точка $x_0\in D_{t_0}$ така, що $0<\|x_0\|<\delta<h,$ причому $V(x_0,t_0)=\alpha>0.$ Покажемо, що розв'язок $x(t),$ який задовольняє початкову умову $x(t_0)=x_0,$ при зростанні t вийде за межу шару $\|x\|<h.$

Дійсно, нехай, від супротивного, $\|x(t)\|<h$ за всіх $t>t_0.$ За другою умовою теореми маємо

$$\frac{dV(x(t),t)}{dt}>0 \text{ при } V(x(t),t)>0.$$

Звідси

$$V(x(t),t) \ge V(x(t_0),t_0) = \alpha,$$

якщо

$$V(x(t),t) > 0.$$

Оскільки розв'язок $x(t)$ може залишити область додатності $\Pi = \{(x,t) : V(x,t) > 0\}$, лише проходячи при $t_1 > t_0$ через внутрішню границю, де $V(x(t_1),t_1) = 0,$ а згідно з попереднім

$$V(x(t_1),t_1) = \alpha > 0,$$

то отримуємо суперечність. Отже, розв'язок $x(t)$ цілком лежить у підобласті $\{(x,t) : V(x,t) > \alpha\}$, звідки, на підставі третьої умови,

$$\frac{dV(x(t),t)}{dt} \ge \beta > 0.$$

Інтегруючи отриману нерівність, дістанемо

$$V(x(t),t) \ge V(x(t_0),t_0) + \beta(t - t_0).$$

Отримана нерівність неможлива внаслідок обмеженості функції $V(x,t)$ в області $\|x\| < h.$ Отже, розв'язок, який починається у як завгодно малому δ-околі, залишить область $\|x\| < h.$ Це означає, що нульовий розв'язок нестійкий.

Метод функцій Ляпунова допускає таку просту геометричну інтерпретацію.

1. Існування додатно визначеної функції Ляпунова означає існування всюди щільної системи поверхонь рівня $V(x,t) = a$, які не розширюються та охоплюють початок координат.

2. Нескінченно мала вища границя функції $V(x,t)$ означає, що поверхні рівня $V(x,t) = \alpha$ не стягуються при $t \to +\infty$ до початку координат.

3. Умова $\dfrac{dV(x,t)}{dt} < 0,$ $\left(\dfrac{dV(x,t)}{dt} \le 0\right)$ означає, що векторне поле системи спрямоване всередину областей, обмежених поверхнями рівня (або дотикається до них).

Розумінню методу функцій (другого методу, прямого методу) Ляпунова може допомогти рис. 6.6.2; першу терему Ляпунова про стійкість ілюструє рис. 6.6.3, другу теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість – рис. 6.6.4, теорему Четаєва – рис. 6.6.5.

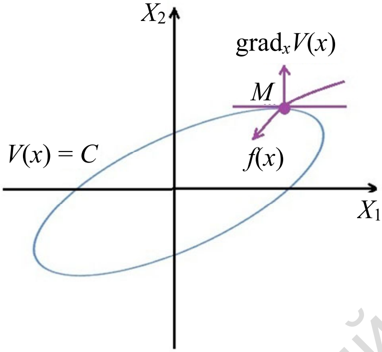


Рис. 6.6.2

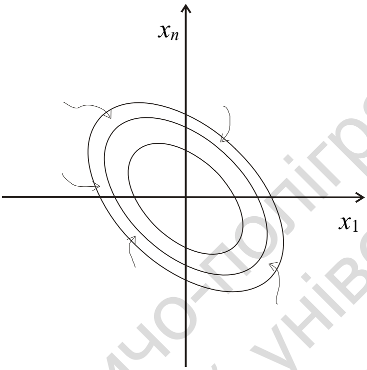


Рис. 6.6.3

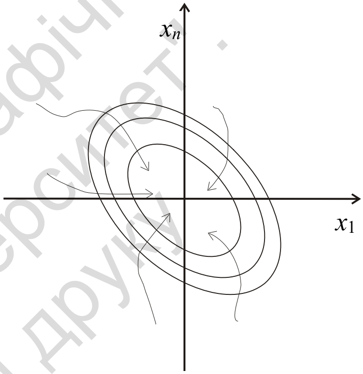


Рис. 6.6.4

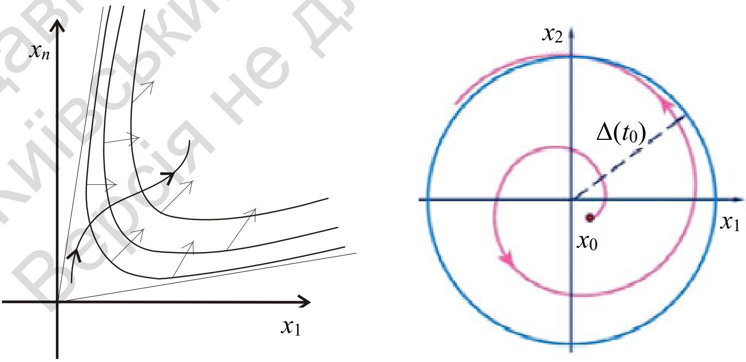


Рис. 6.6.5

6.6.3. Методи побудови функції Ляпунова

У розглянутих вище теоремах використовується поняття додатної визначеності функції $V(x,t)$, яка найчастіше будується як квадратична форма $V(x) = x^T Hx$ з деякою додатно визначеною матрицею H, а для перевірки знаковизначеності матриці H використовують критерій Сільвестра.

Теорема 6.6.4 (критерій Сільвестра). Для того, щоб квадратична форма $V(x) = x^T Hx$ була додатно визначеною, необхідно й достатньо, щоб головні діагональні мінори матриці H були додатними.

До сих пір не існує (і, мабуть, не буде існувати) конструктивних методів побудови функції Ляпунова. Розглянемо деякі з них.

1. Розглянемо лінійну стаціонарну систему на площині

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}.$$

Функцію Ляпунова шукатимемо у вигляді квадратичної форми

$$V(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

де A, B, C – невідомі сталі.

Виберемо сталі так, щоб для похідної внаслідок системи виконувалась умова

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = -2(x^2 + y^2).$$

Після підстановки одержимо

$$(2Ax + 2By)(ax + by) + (2Bx + 2Cy)(cx + dy) = -2(x^2 + y^2).$$

Розкривши дужки, запишемо

$$Aax^2 + Baxy + Abxy + Bby^2 + Bcx^2 + Ccxy + Bdxy + Cdy^2 = -x^2 - y^2.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо

$$\begin{array}{c||l} x^2 & aA + cB = -1 \\ xy & bA + (a+d)B + cC = 0. \\ y^2 & bB + dC = -1 \end{array}$$

Звідси, розв'язуючи систему за правилом Крамера, матимемо

$$A=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}-1 & c & 0\\ 0 & a+d & c\\ -1 & b & d\end{vmatrix},\ B=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}a & -1 & 0\\ b & 0 & c\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix},\ C=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}a & c & -1\\ b & a+d & 0\\ 0 & b & -1\end{vmatrix},$$

де

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & c & 0\\ b & a+d & c\\ 0 & b & d\end{vmatrix}.$$

Використовуючи критерій Сільвестра, запишемо умови додатної визначеності функції $V(x,t)$:

$$A>0 \text{ та } \begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2>0.$$

2. Розглянемо рівняння коливання маятника

$$\ddot{x}+g(x)\dot{x}+f(x)=0,$$

де $g(x)$ – сила відновлення, $f(x)$ – сила тертя.

Зробимо заміну $x=x$, $\dot{x}=y$ і перепишемо рівняння другого порядку як систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-f(x)-g(x)y\end{cases}.$$

Функцію Ляпунова беремо як повну енергію (суму кінетичної і потенціальної енергій)

$$V(x,y)=\frac{y^2}{2}+\int_0^x g(\tau)d\tau.$$

Тоді для її похідної буде виконуватись

$$\frac{dV(x,y)}{dt}=f(x)y+y[-f(x)-g(x)y]=-y^2g(x).$$

Звідси умови стійкості стану рівноваги матимуть вигляд

$$g(x)>0,\ \ xf(x)>0.$$

3. Розглянемо лінійну стаціонарну систему загального вигляду

$$\dot{x}=Ax,\ \ x\in R^n.$$

Функцію Ляпунова будуємо у квадратичній формі

$$V(x) = x^T Hx,$$

де H – деяка додатно визначена матриця. Повна похідна функції $V(x)$ внаслідок системи

$$\frac{dv(x)}{dt} = \dot{x}^T Hx + x^T H\dot{x} = (Ax)^T Hx + x^T H(Ax) = x^T (A^T H + HA)x.$$

Будемо вимагати, щоб похідна дорівнювала від'ємно визначеній квадратичній формі

$$W(x) = -x^T Cx,$$

де C – деяка додатно визначена матриця. Тоді за заданої матриці C пошук додатно визначеної матриці H зводиться до розв'язання матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C.$$

Доведено, що для існування квадратичної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем необхідною та достатньою умовою є асимптотична стійкість матриці A, тобто матриця A повинна мати власні числа з від'ємною дійсною частиною, причому матрицю H знаходять із матричного рівняння Ляпунова при довільній додатно визначеній матриці C.

6.6.4. Оцінка характеристик динаміки систем

За допомогою вдало побудованої функції Ляпунова можна отримати не лише твердження про стійкість (асимптотичну стійкість, нестійкість) розв'язків системи, але й обчислити деякі характеристики динаміки, зокрема величину перерегулювання, час перехідного процесу, інтегральний критерій якості.

Нехай є лінійна стаціонарна система

$$\dot{x} = Ax, \quad t \ge t_0.$$

Її дослідження проводимо за допомогою квадратичної функції Ляпунова $V(x) = x^T Hx$, симетричну, додатно визначену матрицю якої знаходимо з матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C.$$

Як було показано вище, у випадку асимптотично стійкої матриці A це рівняння за довільної додатно визначеної матриці C

має єдиний розв'язок – додатно визначену матрицю H. Для квадратичної форми мають місце двосторонні нерівності

$$\lambda_{\min}(H)\|x(t)\|^2 \le V(x(t)) \le \lambda_{\max}(H)\|x(t)\|^2,$$

а для її повної похідної вздовж розв'язків системи – нерівність

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\lambda_{\min}(C)\|x(t)\|^2.$$

Із правої частини двосторонньої нерівності отримуємо

$$-\|x(t)\|^2 \le -\frac{1}{\lambda_{\max}(H)}V(x(t)).$$

Підставимо цю оцінку в попередню нерівність для похідної функції Ляпунова:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}V(x(t)).$$

Інтегруючи нерівність, отримаємо

$$V(x(t)) \le V(x(t_0))e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)}.$$

Знов використавши двосторонню нерівність, матимемо

$$\lambda_{\min}(H)\|x(t)\|^2 \le V(x(t)) \le$$

$$\le V(x(t_0))e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)} \le \lambda_{\max}(H)\|x(t_0)\|^2 e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)}.$$

Звідси отримуємо мажорантну оцінку загасання розв'язків

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\varphi(H)}\|x(t_0)\|e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)},$$

$$\varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)},\ \ \gamma(H) = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}.$$

Виходячи із цієї оцінки, отримаємо такі характеристики динаміки систем.

1. *Величиною перерегулювання лінійної системи* називається відношення максимального відхилення збурень системи до мінімального. За допомогою отриманої нерівності ця величина обчислюється таким чином:

$$\max_{t\ge t_0}\left\{\frac{\|x(t)\|}{\|x(t_0)\|}\right\} = \sqrt{\varphi(H)}.$$

2. *Часом перехідного процесу* називається проміжок часу, за який розв'язок збуреної системи, що виходить із заданого δ-околу, потрапляє в ε-окіл, з якого вже не виходить.

Використовуючи оцінку збіжності розв'язків системи, запишемо нерівність

$$\sqrt{\phi(H)}\delta e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)} \le \varepsilon.$$

Звідси

$$T(\varepsilon,\delta,H) \le \frac{2}{\gamma(H)}\ln\left[\frac{\delta\sqrt{\phi(H)}}{\varepsilon}\right] =$$

$$= 2\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}\ln\left[\frac{\delta}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\right].$$

3. *Інтегральним критерієм якості* називається величина

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{+\infty}\|x(t)\|dt.$$

Обчислимо її за допомогою мажорантної оцінки:

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{+\infty}\|x(t)\|dt \le \int_{t_0}^{+\infty}\sqrt{\varphi(H)}\|x(t_0)\|e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)}dt =$$

$$= 2\frac{\sqrt{\varphi(H)}}{\gamma(H)}\|x(t_0)\|.$$

Отже, $I[x(t)] \le 2\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\|x(t_0)\|.$

Наведемо приклад побудови функції Ляпунова з розв'язанням.

Побудувавши функцію Ляпунова у квадратичному вигляді, дослідити стійкість системи

$$\begin{cases}\dot{x} = -2x + y\\ \dot{y} = x - 2y\end{cases}.$$

Функцію Ляпунова шукаємо як

$$V(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Повна похідна функції $V(x,y)$ внаслідок системи

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = 2(Ax+By)(-2x+y) + 2(Bx+Cy)(x-2y).$$

Прирівняємо її до квадратичної форми

$$W(x,y) = -2x^2 - 2y^2.$$

Одержимо

$$2(-2A+B)x^2 + 2(A-4B+C)xy + 2(B-2C)y^2 = -2x^2 - 2y^2.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, отримали систему

$$\begin{cases} -2A+B=-1 \\ A-4B+C=0. \\ B-2C=-1 \end{cases}$$

Розв'язками її будуть $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$, тобто квадратична форма матиме вигляд

$$V(x,y) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}y^2.$$

Матриця цієї квадратичної форми

$$H = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Діагональні мінори

$$\Delta_1 = \frac{2}{3} > 0, \ \ \Delta_2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0.$$

Отже, функція Ляпунова $V(x,y)$ додатно визначена, її повна похідна внаслідок системи $W(x,y) = -2x^2 - 2y^2$ від'ємно визначена. Звідси за теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість маємо, що система асимптотично стійка.

Завдання для самостійної роботи

9. Використовуючи теореми Ляпунова та Четаєва, дослідити нульовий розв'язок системи на стійкість:

9.1. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$;

9.2. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$;

9.3. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + xy \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}$;

9.4. $\begin{cases} \dot{x} = -x^5 + 2y^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$;

9.5. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$;

9.6. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$.

РОЗДІЛ 7
Операційне числення

Операційне числення широко використовується в інженерних науках.

Розглянемо, наприклад, RLC -електроланцюжок, який описує диференціальне рівняння

$$LI''(t)+RI'(t)+\frac{1}{C}I(t)=E'(t).$$

Функція напруги $E'(t)$ може мати розриви. Наприклад, напругу в ланцюгу можна періодично вмикати й вимикати. Попередні методи, до яких ми звикли при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, тут вдало не працюють, однак операційне числення (перетворення Лапласа, інтегральне перетворення) дає таку можливість.

До прикладу розглянемо популяцію риб, яка експоненційно зростає:

$$\frac{dP}{dt}=kP,\ \ P(0)=p_0.$$

Припустимо, що ми хочемо визначити наслідки сезонного вилову риби. Іншими словами, вилов не буде неперервним. Наприклад, ми можемо дозволити ловити рибу лише у постійній кількості (об'ємі) r протягом лише першого півріччя, тобто

$$H(t)=\begin{cases} r, 0\le t\le 1/2, \\ 0, 1/2<t<1, \\ r, 0\le t\le 1/2, \\ r, 1\le t\le 3/2, \\ 0,\ 3/2<t<2, \\ \vdots \end{cases}$$

Маємо розуміти, що нам потрібні інструменти для аналізу диференціальних рівнянь із розривною природою.

Розглянемо початкову задачу Коші

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

Ідея тут полягає в тому, щоб, використовуючи перетворення Лапласа, перетворити диференціальне рівняння на рівняння, яке можна розв'язати алгебраїчно, а потім перетворити алгебраїчний розв'язок назад на розв'язок диференціального рівняння. Дивно, але цей метод спрацьовує навіть тоді, коли g є розривною функцією, за умови, що розриви не надто суттєві.

У цьому розділі ми розглянемо основні поняття операційного числення і його використання при розв'язанні лінійних рівнянь та систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для бажаючих детальніше ознайомитися з матеріалом можна рекомендувати [14].

7.1. Основні означення

Розглянемо функцію

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt, \tag{7.1.1}$$

де $f(t)$ – функція дійсної змінної, яка визначена при $t \in [0,\infty)$, p – комплексний параметр з області збіжності інтеграла.

Означення 7.1.1. Перетворення (7.1.1), яке ставить у відповідність функції дійсної змінної $f(t)$ комплексну функцію $F(p)$, називається *перетворенням Лапласа.*

Перетворення (7.1.1) позначають

$$f(t) \div F(p),$$

де функцію $f(t)$ називають *оригіналом*, а $F(p)$ – *зображенням*.

Також можуть використовуватися інші позначення, наприклад

$$L(f(t)) = F(p),$$

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p),$$

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Означення 7.1.2. Сукупність правил, за допомогою яких можна знайти зображення за оригіналом і відновлювати оригінал за зображенням, називається *операційним численням*.

Нехай функція $f(t)$ визначена та неперервна при $t \geq 0$, а також має скінченний степінь зростання, тобто існують сталі $M > 0$, $a_0 > 0$ такі, що для довільного $t > 0$ виконується

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{a_0 t}.$$

Нехай $p = a + ib$, тоді

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(a+ib)t} f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-at} f(t)\cos btdt - i\int_0^\infty e^{-at} f(t)\sin btdt.$$

Оскільки

$$\left|e^{-at} f(t)\cos bt\right| \leq Me^{-(a-a_0)t} \text{ та } \left|e^{-at} f(t)\sin bt\right| \leq Me^{-(a-a_0)t},$$

то інтеграли збігаються в області $a > a_0$. Отже, в області

$$\operatorname{Re} p > a_0$$

існує зображення Лапласа функції $f(t)$.

Зауваження. Перетворення Лапласа функції не завжди існує, навіть для функцій, які нескінченно диференційовані.

Наприклад, нехай $f(t) = e^{t^2}$. Тоді для будь-якого дійсного числа s

$$e^{t^2} e^{-st} = e^{t(t-s)} > 1 \text{ для } t > s,\ t \geq 0,$$

але

$$\int_0^b e^{t^2} e^{-st} dt = \int_0^b e^{t(t-s)} dt \geq b,$$

тобто інтеграл $\int_0^\infty e^{t^2} e^{-st} dt$ не збігається.

7.2. Основні теореми операційного числення

Теорема 7.2.1 (про лінійність). Якщо $f(t) \div F(p)$ та $g(t) \div G(p)$, то за довільних сталих α, β маємо

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \div \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Це твердження випливає з лінійності інтеграла як оператора.

Теорема 7.2.2 (подібності). Якщо $f(t) \div F(p)$, то

$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Доведення. За означення зображення Лапласа маємо

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(at)dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}at} f(at)d(at) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}z} f(z)dz = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Теорема 7.2.3 (про зсув). Якщо $f(t) \div F(p)$, то

$$e^{at} f(t) \div F(p-a).$$

Доведення. Зробивши перетворення Лапласа з лівою частиною, отримаємо

$$\int_0^\infty e^{-pt} e^{at} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} f(t)dt = F\left(p-a\right).$$

Теорема 7.2.4 (про згортку). Якщо $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \div F(p)G(p).$$

Доведення. Обчислимо перетворення Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]dt = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-pt} g(t-\tau)dt.$$

Його графічне зображення наведено на рис. 7.2.1.

У внутрішньому інтегралі виконуємо заміну

$$u = t - \tau,$$

або

$$t = u + \tau,$$

тоді

$$\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-pt}g(t-\tau)dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-pu}g(u)du=F(p)G(p),$$

що і треба було показати.

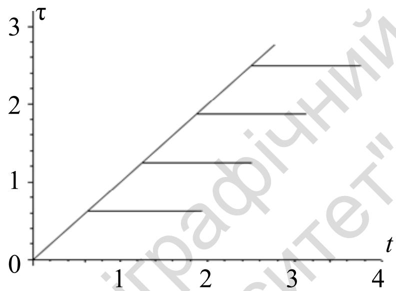


Рис. 7.2.1

Теорема 7.2.5 (про диференціювання). Якщо $f(t)\div F(p),$ то

$$f'(t)\div pF(p)-f(0).$$

Доведення. Обчислимо інтеграл від похідної функції $f(t)$

$$\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}d(f(t))=$$

$$=f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=pF(p)-f(0).$$

Для другої похідної буде

$$\int_0^\infty e^{-pt}f''(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}d\big(f'(t)\big)=f'(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt=$$

$$=-f'(0)+p\big[pF(p)-f(0)\big]=p^2F(p)-\big[pf(0)+f'(0)\big].$$

У загальному випадку формула диференціювання має вигляд

$$f^{(n)}(t)\div p^nF(p)-[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+\ldots+f^{(n-1)}(0)].$$

7.3. Основні перетворення

1. $e^{at} \div \dfrac{1}{p-a}$.

Доведення.

$$e^{at} \div \int_0^\infty e^{-pt} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} dt = \frac{-1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p-a}.$$

2. $t^n \div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Доведення.

$$t^n \div \int_0^\infty e^{-pt} t^n dt = -\frac{1}{p} \int_0^\infty t^n d\left(e^{-pt}\right) = -\frac{1}{p} e^{-pt} t^n \Big|_0^\infty + \frac{n}{p} \int_0^\infty e^{-pt} t^{n-1} dt =$$

$$= \frac{n}{p} \int_0^\infty e^{-pt} t^{n-1} dt = \ldots = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

3. $\sin at \div \dfrac{a}{a^2+p^2}$.

Доведення. Обчислимо інтеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-pt} \sin at dt = -\frac{1}{p} \int_0^\infty \sin at d\left(e^{-pt}\right) = -\frac{1}{p} e^{-pt} \sin at \Big|_0^\infty +$$

$$+ \frac{a}{p} \int_0^\infty e^{-pt} \cos at dt = -\frac{a}{p^2} \int_0^\infty \cos at d\left(e^{-pt}\right) = -\frac{a}{p^2} e^{-pt} \cos at \Big|_0^\infty +$$

$$+ \frac{a^2}{p^2} \int_0^\infty e^{-pt} \sin at dt = \frac{a}{p^2} - \frac{a^2}{p^2} \int_0^\infty e^{-pt} \sin at dt = \frac{a}{p^2} - \frac{a^2}{p^2} I.$$

Звідси $I = \dfrac{\frac{a}{p^2}}{1+\frac{a^2}{p^2}} = \dfrac{a}{a^2+p^2}$.

4. $\cos at \div \dfrac{p}{a^2 + p^2}$.

Доведення. Аналогічно попередньому пункту обчислюємо інтеграл по частинах:

$$I = \int_0^\infty e^{-pt} \cos at dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty \cos at d\left(e^{-pt}\right) = -\frac{1}{p} e^{-pt} \cos at \Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{a}{p}\int_0^\infty e^{-pt} \sin at dt = \frac{1}{p} + \frac{a}{p^2}\int_0^\infty \sin at d\left(e^{-pt}\right) = \frac{1}{p} + \frac{a}{p^2} e^{-pt} \sin at \Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{a^2}{p^2}\int_0^\infty e^{-pt} \cos at dt = \frac{1}{p} - \frac{a^2}{p^2} I.$$

Звідси

$$\frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{a^2}{p^2}} = \frac{p}{a^2 + p^2}.$$

5. $e^{bt} \sin at \div \dfrac{a}{a^2 + (p-b)^2}$.

Доведення. Обчислимо інтеграл

$$\int_0^\infty e^{-pt} e^{bt} \sin(at) dt = \int_0^\infty e^{-(p-b)t} \sin(at) dt.$$

Далі, використовуючи результати третього пункту, отримаємо необхідне твердження.

6. $e^{bt} \cos(at) \div \dfrac{p-b}{a^2 + (p-b)^2}$.

Доведення. Обчислимо інтерал

$$\int_0^\infty e^{-pt} e^{bt} \cos(at) dt = \int_0^\infty e^{-(p-b)t} \cos(at) dt.$$

Далі, використовуючи результати четвертого пункту, отримаємо необхідне твердження.

7.4. Знаходження перетворень Лапласа й обернених перетворень

Щоб ефективно використовувати метод перетворень Лапласа, нам потрібні або таблиці (табл. 7.4.1, 7.4.2), або комп'ютерно-програмне забезпечення, наприклад Sage, для легкого знаходження прямого та інверсійного перетворень Лапласа.

Таблиця 7.4.1

Оригінал $f(t)=L^{-1}(F(p))$	**Зображення за Лапласом** $F(p)=L(f(t))$
1	$1/p, \quad p>0$
e^{at}	$1/(p-a), \quad p>a$
$t^n, \quad n\in N$	$n!/p^{n+1}, \quad p>0$
$t^a, \quad a>-1$	$\Gamma(a+1)/p^{a+1}, \quad p>0$
$t^n e^{at}, \quad n\in N$	$n!/(p-a)^{n+1}, \quad p>a$
$t^a e^{nt}, \quad a>-1$	$\Gamma(a+1)/(p-n)^{a+1}$
$\sin at$	$a/(p^2+a^2), \quad p>0$
$\cos at$	$s/(p^2+a^2), \quad p>0$
$\sinh at$	$a/(p^2-a^2), \quad p>\|a\|$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2), \quad p>\|a\|$
$e^{at}\sin bt$	$b/((s-a)^2+b^2), \quad p>a$
$e^{at}\cos bt$	$(s-a)/((s-a)^2+b^2), \quad p>a$
$e^{at}\sinh bt$	$b/((s-a)^2-b^2), \quad p>a$
$e^{at}\cosh bt$	$(s-a)/((s-a)^2-b^2), \quad p>a$
$t\sin at$	$2as/(s^2+a^2)^2$
$t\cos at$	$((s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2$
$t^n\sin at$	$(\mathrm{Im}(s+ia)^{n+1}/(s^2+a^2)^{n+1})n!$
$t^n\cos at$	$(\mathrm{Re}(s+ia)^{n+1}/(s^2+a^2)^{n+1})n!$

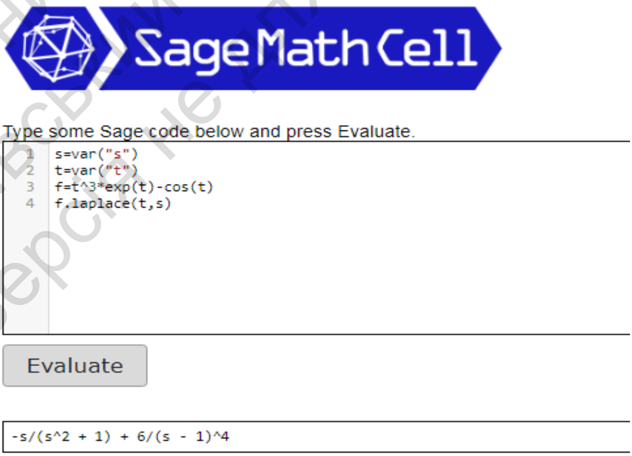
Таблиця 7.4.2

Оригінал $f(t)=L^{-1}(F(p))$ $f(t)=L^{-1}(F(p))$	**Зображення за Лапласом** $F(p)=L(f(t))$
$cf(t), \quad c=\text{const}$	$cF(p)$
$f(at), \quad a>0$	$(1/a)/F(p/a)$
$e^{-a}f(t)$	$F(p+a)$
$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\ldots-f^{n-1}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^nF(p)}{dp^n}$
$f(t-\tau), \quad \tau>0$	$e^{-p\tau}F(p)$

7.5. Перетворення Лапласа за допомогою Sage

Системи комп'ютерної алгебри наразі замінили таблицями перетворень Лапласа так само, як калькулятором замінили логарифмічну лінійку. За допомогою Sage легко обчислити перетворення Лапласа.

Припустимо, ми хочемо обчислити перетворення Лапласа для $f(t)=t^3e^t-\cos t$. Використаємо команду Sage laplace:



Щоб відновити вихідну функцію, застосуємо команду Sage inverse_laplace (припустимо, що $F(s) = -\frac{s}{s^2+1} + \frac{6}{(s-1)^4}$):

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
s=var("s")
t=var("t")
F=-s/(s^2+1)+6/(s-1)^4
F.inverse_laplace(s,t)
```

Evaluate

```
t^3*e^t - cos(t)
```

Ми навіть можемо використовувати Sage для знаходження перетворення Лапласа розривних кусково-визначених функцій.

Припустимо, що

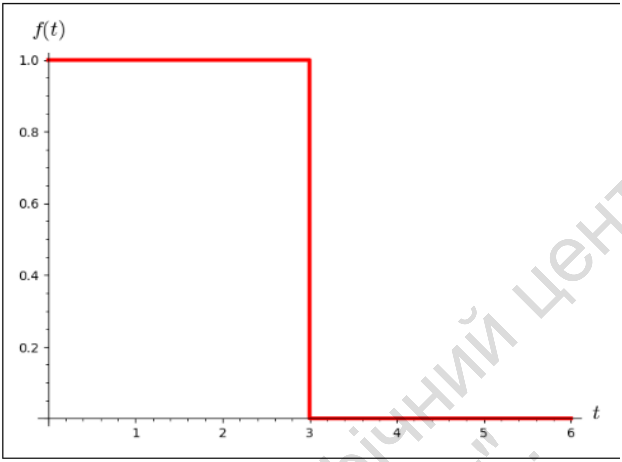
$$f(t) = \begin{cases} 1, \ 0 \le t \le 3, \\ 0, \ t > 3. \end{cases}$$

Команда Sage для пошуку кусково-визначеної функції – piecewise:

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
t=var("t")
f1(t)=1
f2(t)=0
f=piecewise([[[0,3],f1], [(3,infinity),f2]])
f.plot((t,0,6),thickness=3, color="red", axes_labels=['$t$','$f(t)$'])
```

Evaluate



Використаємо Sage для пошуку перетворення Лапласа кусково-визначеної функції:

SageMathCell

Type some Sage code below and press Evaluate.

```
s=var("s")
t=var("t")
f1(t)=1
f2(t)=0
f=piecewise([[[0,3],f1], [(3,infinity),f2]])
f.laplace(t,s)
```

Evaluate

```
-e^(-3*s)/s + 1/s
```

7.6. Операційний метод розв'язання задачі Коші для лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$$

і початковими умовами $x^{(i)}(0) = x_0^i,\ \ i = \overline{0, n-1}.$

Застосуємо перетворення Лапласа до правої та лівої частин рівняння:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}[x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x]dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

Використовуючи властивість лінійності інтеграла, отримаємо

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} x^{(n)}(t)dt + a_1 \int_0^{\infty} e^{-pt} x^{(n-1)}(t)dt + \ldots + a_n \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

Позначимо $\overline{x}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t)dt,\ \ F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$

Використовуючи теорему про диференціювання, матимемо

$$p^n \overline{x}(p) - [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \ldots + p x_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}] +$$
$$+ a_1 (p^{n-1} \overline{x}(p) - [p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \ldots + p x_0^{(n-3)} + x_0^{(n-2)}]) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}(p\overline{x}(p) - x_0) + a_n \overline{x}(p) = F(p).$$

Розв'яжемо це рівняння відносно $\overline{x}(p)$:

$$\overline{x}(p) =$$
$$= \frac{F(p) + x_0 + [p x_0 + x_0'] + \ldots + [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}]}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n} =$$
$$= \frac{N[p]}{W[p]},$$

де $W[p] = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$ – характеристичний поліном. Знайшовши за таблицями оригінал відображення

$$\overline{x}(p)=\frac{N[p]}{W[p]},$$

отримуємо розв'язок задачі Коші лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 7.6.1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння

$$x''-9x=e^{2x},$$
$$x(0)=0,\;\; x'(0)=1$$

за допомогою методів операційного числення.

Застосовуючи перетворення Лапласа до обох частин диференціального рівняння, отримуємо

$$p^2\overline{x}(p)-[px(0)+x'(0)]-9\overline{x}(p)=\frac{1}{p-2}.$$

Підставимо в це рівняння початкові умови

$$p^2\overline{x}(p)-1-9\overline{x}(p)=\frac{1}{p-2}.$$

Звідси

$$[p^2-1]\overline{x}(p)=1+\frac{1}{p-2}.$$

Маємо

$$\overline{x}(p)=\frac{1+\dfrac{1}{p-2}}{p^2-1}=\frac{1}{(p+1)(p-2)}.$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, запишемо отримане зображення як

$$\overline{x}(p)=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-2}=$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{p+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{p-2}.$$

Звідси розв'язок вихідного диференціального рівняння

$$x(t)=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати задачу Коші:

1.1. $x' + 4x = e^{-t}$, $x(0) = 0$;

1.2. $x' - x = 4\cos t$, $x(0) = 0$;

1.3. $4x' - 6x = 2\cos t + \sin t$, $x(0) = 0$;

1.4. $x' + x = 4t^2$, $x(0) = 1$;

1.5. $x'' + x = 5$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

1.6. $x'' = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

1.7. $x'' - 4x = 4t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

1.8. $x'' = te^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

7.7. Операційний метод розв'язання задачі Коші для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами

Двовимірний випадок

Розглянемо лінійну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{cases} \tag{7.7.1}$$

з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Вважатимемо, що $x(t)$, $y(t)$, $f(t)$, $g(t)$ є функціями-оригіналами.

Нехай

$$x(t) \div X(p),\ \ y(t) \div Y(p),\ \ f(t) \div F(p),\ \ g(t) \div G(p).$$

Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин системи (7.7.1), отримаємо

$$X(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x(t)dt,\ \ Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt} y(t)dt,$$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt,\ \ G(p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t)dt$$

$$\begin{cases} pX(p) - x_0 = aX(p) + bY(p) + F(p) \\ pY(p) - y_0 = cX(p) + dY(p) + G(p) \end{cases}.$$

Звідси дістаємо систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} (a-p)X(p) + bY(p) = -x_0 - F(p) \\ cX(p) + (d-p)Y(p) = -y_0 - G(p) \end{cases}.$$

Застосуємо правило Крамера

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} -x_0 - F(p) & b \\ -y_0 - G(p) & d-p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-p & b \\ c & d-p \end{vmatrix}} = \frac{N_1(p)}{W(p)},$$

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} a-p & -x_0 - F(p) \\ b & -y_0 - G(p) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-p & b \\ c & d-p \end{vmatrix}} = \frac{N_2(p)}{W(p)},$$

де $W(p) = p^2 - (a+d)p + (ad - bc)$ – характеристичне рівняння системи, $X(p)$, $Y(p)$ – оригінали для образів, що і є розв'язком задачі Коші.

Приклад 7.7.1. Застосовуючи перетворення Лапласа, розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y + 10e^{2t} \\ \dot{y} = 2x - y + 7e^{2t} \end{cases}$$

за початкових умов $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

Нехай $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригіналу (теорема 7.2.5) маємо

$$\dot{x}(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$\dot{y}(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) - 3.$$

За таблицями перетворень Лапласа (табл. 7.4.1) для неоднорідності запишемо

$$e^{2t} \div \frac{1}{p-2}.$$

Замінимо в системі диференціальних рівнянь оригінали їхніми зображеннями й отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} pX(p)-1=-2X(p)-2Y(p)+\dfrac{10}{p-2} \\ pY(p)-3=2X(p)-Y(p)+\dfrac{10}{p-2} \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} (p+2)X(p)+2Y(p)=\dfrac{p+8}{p-2} \\ -2X(p)+(p-1)Y(p)=\dfrac{3p+1}{p-2} \end{cases}.$$

Використаємо формули Крамера для розв'язання останньої системи:

$$X(p)=\frac{\Delta_x(p)}{\Delta(p)},\ \ Y(p)=\frac{\Delta_y(p)}{\Delta(p)},\ \ \Delta(p)=\begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix}=p^2+3p+6,$$

$$\Delta_x(p)=\begin{vmatrix} \dfrac{p+8}{p-2} & 2 \\ \dfrac{3p+1}{p-2} & p+1 \end{vmatrix}=\frac{(p+8)(p+1)-2(3p+1)}{p-2}=\frac{p^2+3p+6}{p-2},$$

$$\Delta_y(p)=\begin{vmatrix} p+2 & \dfrac{p+8}{p-2} \\ -2 & \dfrac{3p+1}{p-2} \end{vmatrix}=\frac{(p+2)(3p+1)+2(p+8)}{p-2}=\frac{3(p^2+3p+6)}{p-2}.$$

Отже,

$$X(p)=\frac{\Delta_x(p)}{\Delta(p)}=\frac{p^2+3p+6}{(p-2)(p^2+3p+6)}=\frac{1}{p-2}\div e^{2t}=x(t),$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_y(p)}{\Delta(p)}=\frac{3(p^2+3p+6)}{(p-2)(p^2+3p+6)}=\frac{3}{p-2}\div 3e^{2t}=y(t).$$

Остаточним розв'язком початкової задачі Коші для нашої системи диференціальних рівнянь буде

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = 3e^{2t} \end{cases}.$$

n *-вимірний випадок*

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n} + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + ... + a_{2n} + f_2(t) \\ ... \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn} + f_n(t) \end{cases} \tag{7.7.2}$$

з початковими умовами $x_i(t_0) = x_i^0$, $i = \overline{1,n}$. Перетворимо систему (7.7.2) аналогічно (7.7.1), тоді

$$X_1(p) = \frac{\begin{vmatrix} -x_1^0 - F_1(p) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n^0 - F_n(p) & a_{n1} & \cdots & a_{nn} - p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} - p & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - p \end{vmatrix}} = \frac{N_1(p)}{W(p)},$$

$$X_2(p) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} - p & -x_1^0 - F_1(p) & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & -x_n^0 - F_n(p) & \cdots & a_{nn} - p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} - p & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - p \end{vmatrix}} = \frac{N_2(p)}{W(p)},$$

…

$$X_n(p)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & -x_1^0-F_1(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -x_n^0-F_n(p) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-p & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-p \end{vmatrix}}=\frac{N_n(p)}{W(p)}.$$

Розв'язком задачі Коші є оригінали зображень $X_1(p), X_2(p), ..., X_n(p)$.

Завдання для самостійної роботи

2. Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати задачу Коші:

2.1. $\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x \end{cases}, \ x(0)=0, \ y(0)=1;$

2.2. $\begin{cases} \dot{x}=x+y \\ \dot{y}=x \end{cases}, \ x(0)=y(0)=2;$

2.3. $\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=3x-y \end{cases}, \ x(0)=y(0)=1;$

2.4. $\begin{cases} \dot{x}=4x+y \\ \dot{y}=-x \end{cases}, \ x(0)=1, \ y(0)=0;$

2.5. $\begin{cases} \dot{x}=x+e^{-2t} \\ \dot{y}=x+y \end{cases}, \ x(0)=0, \ y(0)=0;$

2.6. $\begin{cases} \dot{x}=2y+\sin t \\ \dot{y}=-x \end{cases}, \ x(0)=0, \ y(0)=0;$

2.7. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y+2\cos t \\ \dot{y}=te^{-3t} \end{cases}, \ x(0)=1, \ y(0)=0;$

2.8. $\begin{cases} \dot{x}=x+4y+t\cos t \\ \dot{y}=7y+2\sin t \end{cases}, \ x(0)=0, \ y(0)=0.$

РОЗДІЛ 8
Лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку

Приклади рівнянь у частинних похідних фактично містяться вже в роботах Ньютона та Лейбніца, а систематично такі рівняння почав вивчати Ейлер. Із часів Ейлера теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних займає одне із центральних місць в аналізі, переважно завдяки її безпосереднім зв'язкам із фізикою та іншими природничими науками, а також геометрією. При цьому дуже глибоко й різнобічно розроблена теорія лінійних рівнянь.

Диференціальні рівняння із частинними похідними є основним інструментом дослідження у сучасній математичній фізиці, що пояснюється широкими можливостями опису за допомогою цих рівнянь залежності аналізованих явищ від великої кількості параметрів різної природи.

При вивченні фізичного явища насамперед виділяють величини, які його характеризують Такими величинами можуть бути щільність, швидкість, температура тощо. Далі вибирають і математично формулюють фізичні закони. Зазвичай такі закони можуть бути записані у вигляді співвідношень між основними характеристиками явища та їхніми похідними у цій точці простору й у цей момент часу.

Як важливі приклади лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними можна навести рівняння, що виникають у математичній фізиці, зокрема хвильове рівняння (багатовимірне), рівняння Лапласа й Пуассона, Гельмгольца, Максвелла, телеграфні рівняння тощо.

Важливою якістю диференціальних рівнянь із частинними похідними є їхня універсальність – одне й те саме рівняння може описувати фізичні явища абсолютно різної природи. Наприклад, рівняння Лапласа зустрічається в гідродинаміці, теорії теплопровідності, акустиці, теорії аналітичних функцій, геометрії, теорії ймовірностей тощо. Для тих, хто бажає більш детально вивчити теорію диференціальних рівнянь у частинних похідних, а також ознайомитися з аналітичними та числовими методами їх розв'язання за допомогою різноманітних пакетів програм, можна порекомендувати, наприклад, такі джерела [19, 25].

8.1. Лінійні однорідні рівняння в частинних похідних першого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\Phi\left(x_1,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \qquad (8.1.1)$$

з невідомою функцією $u(x_1,x_2,...,x_n)$, яка визначена і неперервно диференційована за всіма змінними в деякій області $D\subset R^n$.

Означення 8.1.1. Рівняння (8.1.1) називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку*.

Означення 8.1.2. Функція $u=u(x_1,...,x_n)$, яка визначена та неперервно диференційована за всіма змінними в деякій області D змінних $x_1,...,x_n$, називається *розв'язком рівняння* (8.1.1), якщо при підстановці у (8.1.1) вона зводить його у тотожність. При цьому $x_1,..,x_n$ і значення $u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}$ лежать в області визначення функції $\Phi(x_1,..., x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Розглянемо рівняння (8.1.1) частинного вигляду

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,...,x_n,u). \qquad (8.1.2)$$

Означення 8.1.3. Якщо $R(x_1,...,x_n,u)\neq 0$, то рівняння (8.1.2) називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку*.

Означення 8.1.4. Якщо $R(x_1,...,x_n,u)\equiv 0$ та коефіцієнти $X_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=\overline{1,n}$ не залежать від u, то рівняння (8.1.2) називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку*. Його записують як

$$\mathrm{X}_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+\mathrm{X}_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \qquad (8.1.3)$$

Покажемо, що розв'язок рівнянь у частинних похідних пов'язаний з інтегралами відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь.

8.1.1. Побудова загального розв'язку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння у частинних похідних першого порядку (8.1.3).

Означення 8.1.5. Система $(n-1)$ диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{\mathrm{X}_1(x_1,...,x_n)}=\frac{dx_2}{\mathrm{X}_2(x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{\mathrm{X}_n(x_1,...,x_n)} \qquad (8.1.4)$$

називається *системою рівнянь характеристик* (рівнянь у симетричній формі).

Нехай функції $X_1,...,X_n$ визначені, неперервно диференційовані в деякому околі точки $x_1^0, x^0,...,x_n^0$ та одночасно не дорівнюють нулю в цій точці, тобто

$$\mathrm{X}_n(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\neq 0.$$

Тоді в околі цієї точки систему можна переписати як

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n}=\dfrac{\mathrm{X}_1(x_1,...,x_n)}{\mathrm{X}_n(x_1,...,x_n)} \\ \dots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n}=\dfrac{\mathrm{X}_{n-1}(x_1,...,x_n)}{\mathrm{X}_n(x_1,...,x_n)} \end{cases}. \qquad (8.1.5)$$

Унаслідок теореми існування та єдиності система звичайних диференціальних рівнянь рівняння характеристик (8.1.4) має загальний інтеграл, що складається із $(n-1)$ функціонально незалежних перших інтегралів.

Теорема 8.1.1. Будь-який інтеграл $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$, який відповідає системі диференціальних рівнянь (8.1.5), є розв'язком лінійного однорідного рівняння в частинних похідних (8.1.3).

Доведення. Нехай функція $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ є інтегралом системи (8.1.5). Це означає, що її повний диференціал унаслідок системи тотожно дорівнює нулю, тобто

$$d\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0.$$

Підставимо замість диференціалів $dx_1, dx_2, ..., dx_{n-1}$ їхні значення згідно із системою і одержимо

$$\frac{\partial \Psi}{dx_1} \frac{X_1}{X_n} dx_n + \frac{\partial \Psi}{dx_2} \frac{X_2}{X_n} dx_n + ... + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} dx_n + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0,$$

або

$$\left[X_1 \frac{\partial \Psi}{dx_1} + X_2 \frac{\partial \Psi}{dx_2} + ... + X_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right] \frac{dx_n}{X_n} \equiv 0.$$

Використовуючи залежність

$$X_n(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0,$$

матимемо

$$X_1(x_1, ..., x_n) \frac{\partial \Psi}{dx_1} + X_2(x_1, ..., x_n) \frac{\partial \Psi}{dx_2} + ... + X_n(x_1, ..., x_n) \frac{\partial \Psi}{dx_n} \equiv 0,$$

тобто функція $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ є розв'язком рівняння в частинних похідних (8.1.3).

Теорема 8.1.2. Будь-який розв'язок $u = \Psi(x_1, ..., x_n)$ рівняння в частинних похідних (8.1.3) є інтегралом системи (8.1.5).

Доведення. Оскільки функція $u = \Psi(x_1, ..., x_n)$ є розв'язком рівняння в частинних похідних (8.1.3), то

$$X_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \equiv 0.$$

Перевіримо, чи є функція $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ інтегралом системи (8.1.5). Для цього обчислимо повний диференціал Ψ внаслідок системи (8.1.5). Матимемо

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n =$$

$$= \left[\frac{\partial \Psi}{dx_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \Psi}{dx_2} \frac{X_2}{X_n} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{dx_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right] dx_n =$$

$$= \left(X_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right) \frac{1}{X_n} dx_n \equiv 0,$$

оскільки вираз у дужках за умовою дорівнює нулю. Звідси $d\Psi \equiv 0$, отже, $\Psi(x_1,\ldots,x_n)$ є інтегралом системи.

Приклад 8.1.1. Знайти розв'язки лінійного однорідного рівняння із частинними похідними

$$x \frac{\partial U}{\partial x} - 2y \frac{\partial U}{\partial y} - z \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{8.1.6}$$

Розв'язання. Запишемо для рівняння (8.1.6) систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z}. \tag{8.1.7}$$

Для системи звичайних диференціальних рівнянь отримуємо інтеграли

$\psi_1 = xz$ (прирівнявши перше й третє з (8.1.7)),

$\psi_2 = x\sqrt{y}$ (прирівнявши перше й друге з (8.1.7)).

Звідси

$$U_1 = xz, \quad U_2 = x\sqrt{y}$$

є розв'язками рівняння (8.1.6).

Розглянемо задачу побудови загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (8.1.3). Нехай $\Psi_1(x_1,\ldots,x_n)$, $\Psi_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\ \Psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)$ – функціонально незалежні інтеграли системи. Тоді функція $u = \Phi(\Psi_1, \Psi_2.,\ldots,\Psi_{n-1})$, де Φ – довільна неперервно диференційована функція, буде також розв'язком рівняння. Дійсно, підставимо функцію $\Phi(\Psi_1, \Psi_2.,\ldots,\Psi_{n-1})$ у рівняння і одержимо

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} =$$

$$= X_1 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_1} \right) + X_2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_2} \right) + \ldots + X_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_n} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi_i} \left(X_1 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0,$$

оскільки кожен вираз у дужках дорівнює нулю.

Покажемо, що функція $u = \Phi(\Psi_1, \Psi_2 ., \ldots, \Psi_n)$, де Φ – довільна неперервно диференційована функція, буде загальним розв'язком рівняння в частинних похідних (8.1.3).

Приклад 8.1.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0. \qquad (8.1.8)$$

Розв'язання. Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь (рівнянь характеристик)

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}. \qquad (8.1.9)$$

Для системи (8.1.9) знаходимо інтеграли

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1, \ \frac{x_3}{x_1} = c_2, \ldots, \ \frac{x_n}{x_1} = c_{n-1},$$

тобто

$$\psi_1 = \frac{x_2}{x_1}, \ \psi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \ \psi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}.$$

Тоді функція

$$U = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1} \right)$$

буде загальним розв'язком системи (8.1.8), де $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1} \right)$ – неперервно диференційована функція.

Як відомо, розв'язок диференціального рівняння є загальним, якщо, по-перше, він є розв'язком рівняння, а по-друге, із цього рівняння можна отримати розв'язок довільної наперед заданої задачі Коші. Як було показано вище, за довільної функції Ψ залежність $u = \Phi(\Psi_1, \Psi_2.,..., \Psi_n)$ буде розв'язком однорідного рівняння. Покажемо, що вибором функції Φ можна розв'язати довільну задачу Коші.

8.1.2. Задача Коші для однорідного рівняння в частинних похідних

Для систем звичайних диференціальних рівнянь задача Коші полягає у знаходженні інтегральної кривої, яка проходить через задану точку.

Задача Коші для однорідного рівняння в частинних похідних (8.1.3) ставиться у такий спосіб. Серед усіх розв'язків $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ треба знайти такий, що задовольняє початкові умови

$$u(x_1, x_2, ..., x_n)\big|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}),$$

де $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ – довільна неперервно диференційована початкова функція. Загальним розв'язком рівняння в частинних похідних є довільна функція Φ, визначена на інтегралах $(\Psi_1, \Psi_2.,..., \Psi_n)$, які є розв'язками рівнянь характеристик. Сукупність $(n-1)$ незалежних інтегралів визначають інтегральні криві, тому геометрично загальний розв'язок системи є довільною поверхнею, яка складається з інтегральних кривих. Задача Коші полягає в тому, що у просторі $x_1, x_2, ..., x_n, u$ треба побудувати поверхню, яка проходять через наперед задану криву

$$\begin{cases} x_n = x_n^0 \\ u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

і цілком складається з інтегральних кривих диференціальних рівнянь характеристик.

Якщо загальний розв'язок $u = \Phi(\Psi_1, \Psi_2.,..., \Psi_n)$, то задача Коші полягає в пошуку функції Φ, яка задовольняє умову

$$\Phi(\Psi_1, \Psi_2.,..., \Psi_{n-1})\big|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

Алгоритм знаходження функції $\Phi(\Psi_1, \Psi_2.,..., \Psi_n)$ такий.

Нехай загальний інтеграл рівнянь характеристик

$$\Psi_1(x_1,...x_{n-1},x_n) = c_1,$$
$$\Psi_2(x_1,...x_{n-1},x_n) = c_2,$$
$$......................................$$
$$\Psi_{n-1}(x_1,...x_{n-1},x_n) = c_{n-1}.$$

Зафіксуємо точку $x_n = x_n^0$.

Інтеграли набудуть вигляду

$$\Psi_1(x_1,...x_{n-1},x_n^0) = c_1^0,$$
$$\Psi_2(x_1,...x_{n-1},x_n^0) = c_2^0,$$
$$......................................$$
$$\Psi_{n-1}(x_1,...x_{n-1},x_n^0) = c_{n-1}^0.$$

Розв'язавши отриману проміжну систему відносно $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, одержимо

$$x_1 = \omega_1(c_1^0, c_2^0, ..., c_{n-1}^0),$$
$$x_2 = \omega_2(c_1^0, c_2^0, ..., c_{n-1}^0),$$
$$......................................$$
$$x_{n-1} = \omega_{n-1}(c_1^0, c_2^0, ..., c_{n-1}^0).$$

Підставивши одержані значення $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ у початкову функцію $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, отримаємо

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = \varphi[\omega_1(c_1^0, c_2^0, ..., c_{n-1}^0), ..., \omega_{n-1}(c_1^0, c_2^0, ..., c_{n-1}^0)].$$

Підставивши замість c_1^0, c_2^0,..., c_{n-1}^0 значення інтегралів, остаточно дістанемо розв'язок задачі Коші

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi\{\omega_1[\Psi_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \Psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)], ...$$
$$\omega_{n-1}[\Psi_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \Psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)]\}.$$

Покажемо, що отримана функція дійсно є розв'язком поставленої задачі Коші. Оскільки ця функція є функцією на інтегралах, то, за доведеним, вона є інтегралом системи і, отже, розв'язком однорідного рівняння в частинних похідних. Покажемо, що цей розв'язок задовольняє початкову умову. Дійсно,

$$u(x_1,...,x_{n-1},x_n)_{x_n=x_n^0} =$$
$$=\varphi\Big\{\omega_1[\Psi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n^0),...,\Psi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1},x_n^0)],...$$
$$\omega_{n-1}[\Psi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n^0),...,\Psi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1},x_n^0)]\Big\} =$$
$$=\varphi[\omega_1(c_1^0,c_2^0,...,c_{n-1}^0),\omega_2(c_1^0,c_2^0,...,c_{n-1}^0),...,\omega_{n-1}(c_1^0,c_2^0,...,c_{n-1}^0)] =$$
$$=\varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1}),$$

що й треба було довести.

Приклад 8.1.3. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння в частинних похідних

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Складемо рівняння характеристик

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}.$$

Перепишемо його як

$$xdx+ydy=0.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$x^2+y^2=C.$$

Звідси загальний розв'язок вихідного рівняння в частинних похідних

$$z=F(x^2+y^2),$$

де $F(.)$ – довільна, неперервно диференційована функція.

Приклад 8.1.4. Розв'язати рівняння

$$(z-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial U}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial U}{\partial z}=0\,.$$

Розв'язання. Складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}.$$

Легко визначити (створивши інтегровані комбінації), що:

$\psi_1=x+y+z$ (склали чисельники та знаменники покомпонентно);

$\psi_2=x^2+y^2+z^2$ (склали чисельники та знаменники, покомпонентно помножені на x, y, z, відповідно).

Звідси загальний розв'язок

$$U=\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2).$$

Приклад 8.1.5. Знайти розв'язок задачі Коші лінійного однорідного рівняння в частинних похідних

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=2x,\ \text{при}\ \ y=1.$$

Складемо рівняння характеристик

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}.$$

Проінтегруємо його:

$$\ln|x|=-\ln|y|+\ln|C|.$$

Звідси перший інтеграл

$$xy=C.$$

Загальний розв'язок рівняння в частинних похідних

$$z=\Psi(xy).$$

Розв'яжемо задачу Коші у такий спосіб. Запишемо інтеграли рівняння характеристик і початкові умови як одну систему

$$\begin{cases}xy=c_1\\ y=1\\ z=2x\end{cases}.$$

Підставимо друге рівняння в інтеграл і запишемо

$$\begin{cases}x=c_1^0\\ z=2x\end{cases}.$$

Підставимо значення першого рівняння у друге:

$$z=2c_1^0.$$

Підставимо замість c_1^0 його значення, яке визначене інтегралом $xy=c_1$, і одержимо розв'язок задачі Коші

$$z=2xy.$$

Приклад 8.1.6. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \ u=yz,\ \text{при}\ \ x=1.$$

Складемо рівняння характеристик

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

З першого рівняння

$$dx = dy$$

одержуємо один із перших інтегралів

$$x - y = c_1.$$

Із другого рівняння

$$dy = \frac{1}{2}dz$$

одержуємо другий перший інтеграл

$$2y - z = c_2.$$

Загальним розв'язком однорідного рівняння в частинних похідних буде

$$u = \Psi(x - y, 2y - z),$$

де Ψ – довільна неперервно диференційована функція.

Для розв'язання задачі Коші запишемо систему

$$\begin{cases} x - y = c_1 \\ 2y - z = c_2 \\ x = 1 \\ u = yz \end{cases},$$

що складається із двох перших інтегралів і умов Коші. Підставимо третє рівняння в перші два. Отримаємо

$$\begin{cases} 1 - y = c_1^0 \\ 2y - z = c_2^0 . \\ u = yz \end{cases}$$

Розв'яжемо перші два рівняння відносно змінних y, z:

$$\begin{cases} y = 1 - c_1^0 \\ z = 2(1 - c_1^0) - c_2^0 . \\ u = yz \end{cases}$$

Підставимо отримані значення змінних y, z в останнє рівняння:

$$u = (1 - c_1^0)[2(1 - c_1^0) - c_2^0].$$

Нарешті, підставимо замість c_1^0, c_2^0 їхні значення, які визначені першими інтегралами

$$c_1 = x - y,\ \ c_2 = 2y - z,$$

і одержимо розв'язок задачі Коші

$$u = (1 - x + y)[2 - 2(x - y) - (2y - z)] = (1 - x + y)(2 - 2x + z).$$

Приклад 8.1.7. Розв'язати задачу Коші

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{за умови } z = \varphi(y),\ \ x = 0.$$

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x},$$

звідки $\psi = x^2 + y^2$ – інтеграл. Отже,

$$y^2 = \overline{\psi}, \quad y = \sqrt{\overline{\psi}}.$$

Шуканий розв'язок $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Розглянемо можливі випадки залежно від вигляду функції $\varphi(y)$:

а) $\varphi(y) = y$. Тоді $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 + y^2$.

Розв'язок – конус, який отриманий обертанням прямої $z = y$ навколо осі OZ (рис. 8.1.1).

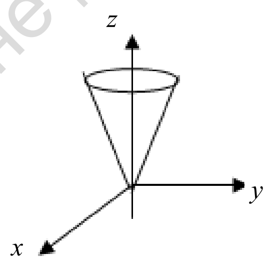


Рис. 8.1.1

б) $\varphi(y) = y^2, \ \ z = x^2 + y^2.$

Розв'язок – параболоїд, який отриманий обертанням параболи $z = y^2$ навколо осі OZ (рис. 8.1.2).

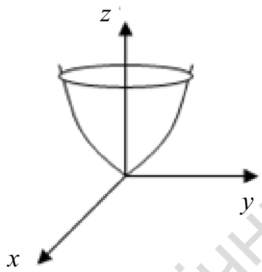


Рис. 8.1.2

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок рівнянь у частинних похідних:

1.1. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$

1.2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$

1.3. $(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

2. Знайти розв'язок задачі Коші однорідних рівнянь у частинних похідних:

2.1. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \ \ z = y, \text{ при } x = 0;$

2.2. $2\sqrt{x}\,\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \ \ z = y^2, \text{ при } x = 0;$

2.3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \ \ z = y, \text{ при } z = 0.$

8.2. Лінійні неоднорідні рівняння в частинних похідних першого порядку

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння в частинних похідних

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,...,x_n,u). \quad (8.2.1)$$

Розв'язок рівняння (8.2.1) будемо шукати в неявному вигляді

$$V(x_1,...,x_n,u)=0.$$

Нехай $u=u(x_1,...,x_n)$ – розв'язок рівняння (8.2.1). Тоді виконується тотожність

$$V(x_1,...,x_n,u(x_1,...,x_n))\equiv 0.$$

Продиференціюємо функцію $V(x_1,...,x_n,u)$ за змінними x_i, $i=\overline{1,n}$, вважаючи $u=u(x_1,...,x_n)$ функцією змінних x_i, $i=\overline{1,n}$, і отримаємо

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\ \ i=\overline{1,n}.$$

Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}},\ \ i=\overline{1,n}.$$

Підставивши отримані значення $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$ у рівняння (8.2.1), одержимо рівняння

$$-X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}-...-X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}=R(x_1,...,x_n,u),$$

або

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+$$

$$+R(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0. \quad (8.2.2)$$

Отже, дістали лінійне однорідне рівняння в частинних похідних першого порядку (8.2.2), яке вже залежить від змінних $x_1, x_2, ..., x_n, u.$ Відповідна система рівнянь характеристик

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,...,x_n,u)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,...,x_n,u)} = ... =$$

$$= \frac{dx_n}{X_n(x_1,...,x_n,u)} = \frac{du}{R(x_1,...,x_n,u)},$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{X_1(x_1,...,x_n,u)}{X_n(x_1,...,x_n,u)}, \\ \dots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{X_{n-1}(x_1,...,x_n,u)}{X_n(x_1,...,x_n,u)}, \\ \dfrac{du}{dx_n} = \dfrac{R(x_1,...,x_n,u)}{X_n(x_1,...,x_n,u)}, \end{cases} \qquad (8.2.3)$$

має n функціонально незалежних перших інтегралів:

$$\begin{aligned} &\Psi_1(x_1,...,x_n,u) = c_1, \\ &\Psi_2(x_1,...,x_n,u) = c_2, \\ &\Psi_n(x_1,...,x_n,u) = c_n. \end{aligned} \qquad (8.2.4)$$

Як випливає з попереднього підрозділу, загальний розв'язок рівняння (8.2.2)

$$V = \Phi(\Psi_1(x_1,...,x_n,u), \Psi_2(x_1,...,x_n,u), ..., \Psi_n(x_1,...,x_n,u)),$$

де $\Psi_1, ..., \Psi_n$ – функціонально незалежні інтеграли (8.2.4) відповідної системи характеристик. Оскільки розв'язок неоднорідного рівняння (8.2.1) шукаємо у неявному вигляді, то остаточно він набуде вигляду

$$\Phi(\Psi_1(x_1,...,x_n,u), \Psi_2(x_1,...,x_n,u), ..., \Psi_n(x_1,...,x_n,u)) = 0.$$

Задача Коші для лінійного неоднорідного рівняння в частинних похідних (8.2.1) ставиться аналогічно задачі Коші для однорідного рівняння, тобто потрібно знайти розв'язок $u(x_1,...,x_{n-1},x_n),$ який задовольняє початкові умови

$$u(x_1,...,x_{n-1},x_n)\Big|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1,...,x_{n-1}).$$

Перепишемо їх як

$$x_n = x_n^0,\ \ u - \varphi(x_1,...,x_{n-1}) = 0$$

і підставимо першу умову в рівняння характеристик. Отримаємо

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,u) = c_1^0, \\ \Psi_2(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,u) = c_2^0, \\ .... \\ \Psi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,u) = c_n^0. \end{cases} \qquad (8.2.5)$$

Нехай систему (8.2.5) вдалось розв'язати відносно змінних $x_1,...,x_{n-1},u$ і отримати систему проміжних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0), \\ u = \omega_n(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0). \end{cases}$$

Підставивши отримані значення в друге з рівнянь початкових умов, матимемо

$$\omega_n(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0) - \varphi[\omega_1(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0),...,\omega_{n-1}(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0)] = 0.$$

Нарешті, підставивши замість $c_1^0,\ c_2^0,\dots,c_n^0$ значення перших інтегралів, остаточно отримаємо розв'язок задачі Коші у неявному вигляді

$$\omega_n(\Psi_1(x_1,...x_{n-1},x_n,u),...,\Psi(x_1,...,x_{n-1},x_n,u)) -$$
$$-\varphi[\omega_1(\Psi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n,u),...,\Psi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n,u)),...,$$
$$\omega_{n-1}(\Psi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n,u),...,\Psi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n,u))] = 0.$$

Покажемо, що отриманий вираз дійсно є розв'язком задачі Коші у неявному вигляді. Оскільки цей вираз побудований на інтегралах рівнянь характеристик, то він є розв'язком неоднорідного рівняння в частинних похідних. Покажемо, що він задовольняє поставлені початкові умови. Дійсно,

$$\omega_n(\Psi_1(x_1,...x_{n-1},x_n^0,u),...,\Psi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,u)) -$$
$$-\varphi[\omega_1(\Psi_1(x_1,...x_{n-1},x_n^0,u),...,\Psi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,u)),...$$

$$\omega_{n-1}(\Psi_1(x_1,...x_{n-1},x_n^0,u),...,\Psi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,u))] =$$
$$= \omega_n(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0) - \varphi[\omega_1(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0),...,\omega_{n-1}(c_1^0,c_2^0,...,c_n^0)] =$$
$$= u - \varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1}).$$

Отже, отримали

$$x_n = x_n^0, \;\; u - \varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1}) = 0,$$

тобто вираз задовольняє початкові умови.

Приклад 8.2.1. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння в частинних похідних

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x-y}.$$

З першого рівняння отримуємо

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

і один перший інтеграл

$$x^2 - y^2 = c_1.$$

Інтегрована комбінація має вигляд

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{d(x-y)}{x-y}.$$

З останніх двох рівнянь

$$\frac{dz}{x-y} = \frac{d(x-y)}{x-y}$$

отримаємо

$$dz = d(x-y),$$

або другий із перших інтегралів

$$z - x + y = c_2.$$

Запишемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у неявному вигляді

$$F(x^2 - y^2, z - x + y) = 0.$$

Нехай функція $F(.)$ така, що рівняння розв'язується відносно останньої змінної, тоді

$$z - x + y = f(x^2 - y^2).$$

Звідси загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння в частинних похідних

$$z = x - y + f(x^2 - y^2),$$

де $f(.)$ – довільна неперервно диференційована функція.

Приклад 8.2.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = mu \quad (m \neq 0).$$

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx_1}{x_1} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}.$$

Знаходимо інтеграли

$$\psi_1 = \frac{x_2}{x_1},\ \psi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \ldots,\ \psi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1},\ \psi_n = \frac{u}{x_1{}^m}.$$

Тоді

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1{}^m}\right) = 0$$

– загальний розв'язок.

Якщо вдасться розв'язати останній вираз відносно $\frac{u}{x_1{}^m}$, то отримаємо

$$u = x_1^m f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

– загальний розв'язок у явній формі.

Приклад 8.2.3. Знайти розв'язок задачі Коші лінійного неоднорідного рівняння в частинних похідних

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad z = y^2, \text{ при } x = 0.$$

Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}.$$

З перших двох співвідношень

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy}$$

одержуємо

$$xdx = ydy,$$

або перший інтеграл

$$y^2 - x^2 = c_1.$$

Зі співвідношень

$$\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}$$

маємо

$$\frac{dy}{y} = dz,$$

або другий із перших інтегралів

$$z - \ln|y| = c_2.$$

Звідси загальний розв'язок лінійного рівняння в частинних похідних

$$\Psi(y^2 - x^2, z - \ln|y|) = 0.$$

Запишемо систему, що складається із загального інтеграла і початкових умов

$$\begin{cases} y - x^2 = c_1 \\ z - \ln|y| = c_2 \\ x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}.$$

Підставимо третє рівняння в початкові умови:

$$\begin{cases} y^2 = c_1^0 \\ z - \ln|y| = c_2^0 \\ z = y^2 \end{cases}.$$

Розв'яжемо перші два рівняння відносно змінних $y,\ z$:

$$\begin{cases} y = \sqrt{c_1^0} \\ z = c_2^0 + \ln\left|c_1^0\right|. \end{cases}$$

Підставимо отримані значення $y,\ z$ в останнє рівняння. Дістанемо

$$c_2^0 + \ln\left|\sqrt{c_1^0}\right| = c_1^0.$$

Підставимо замість $c_1^0,\ c_2^0$ значення перших інтегралів і отримаємо розв'язок задачі Коші

$$z - \ln|y| + \ln\sqrt{y^2 - x^2} = y^2 - x^2,$$

або

$$z = \ln|y| - \ln\sqrt{y^2 - x^2} + y^2 - x^2.$$

Приклад 8.2.4. Розв'язати задачу Коші

$$\left(1 + \sqrt{z - x - y}\ \right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2, \quad z = 2x, \text{ при } y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Звідси $\psi_1 = z - 2y,\ \psi_2 = 2\sqrt{z - x - y} + y.$

При $y = 0$: $z = \overline{\psi_1},\ 2\sqrt{z - x} = \overline{\psi_2}.$

Отже,

$$\begin{cases} x = \overline{\psi_1} - \dfrac{\overline{\psi_2}^{\,2}}{4} \\ z = \overline{\psi_1} \end{cases}.$$

Тому $\psi_1 - 2(\psi_1 - \dfrac{\psi_2^2}{4}) = 0,\ \ 2\psi_1 - \psi_2^2 = 0$ – розв'язок задачі Коші.

Остаточно маємо

$$2z - 4y - (2\sqrt{z - x - y} + y)^2 = 0.$$

Завдання для самостійної роботи

3. Знайти загальний розв'язок лінійних неоднорідних рівнянь у частинних похідних:

3.1. $e^x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} = ye^x;$

3.2. $2x \dfrac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2;$

3.3. $xy \dfrac{\partial z}{\partial x} - x^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} = yz;$

3.4. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z;$

3.5. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z;$

3.6. $(x + z) \dfrac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y;$

3.7. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z;$

3.8. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z;$

3.9. $(x^2 + y^2) \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy \dfrac{\partial z}{\partial y} = -z^2;$

3.10. $2y^4 \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \dfrac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 + 1};$

3.11. $x^2 z \dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \dfrac{\partial z}{\partial y} = y + x;$

3.12. $yz \dfrac{\partial z}{\partial x} - xz \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^z;$

3.13. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z;$

3.14. $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} + (z + u) \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy;$

3.15. $(u - x) \dfrac{\partial u}{\partial x} + (u - y) \dfrac{\partial u}{\partial y} - z \dfrac{\partial u}{\partial z} = (x + y);$

3.16. $\sin^2 x \dfrac{\partial z}{\partial x} + yz \dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z.$

4. Знайти розв'язок задачі Коші лінійних неоднорідних рівнянь:

4.1. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=x^2$ при $x=0$;

4.2. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=x^2$ при $x=2$;

4.3. $\mathrm{tg}x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z,\ \ z=x^2$ при $x=0$;

4.4. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=x^2$ при $y=x$;

4.5. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=x^2$ при $x=0$;

4.6. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=x$ при $x=0$;

4.7. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ y=z^2$ при $x=-z^3$;

4.8. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=x-x^2$ при $x=0$;

4.9. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy,\ \ y^2+z^2=a^2$ при $x=0$;

4.10. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy,\ \ yz=1$ при $x+y=2$;

4.11. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=-x,\ \ z=2x$ при $y=x^2$;

4.12. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=x+2y$ при $y=2z$;

4.13. $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z,\ \ z+2x=1$ при $x=0$;

4.14. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy,\ \ z=x^2$ при $x=0$.

РОЗДІЛ 9
Основи варіаційного числення

Висловлювання великого Ейлера "у світі немає нічого, у чому не було б видно сенсу будь-якого максимуму чи мінімуму" відображає різноманіття задач, що врешті-решт зводяться тим чи іншим шляхом до пошуку екстремуму. У цьому підручнику ми надамо лиш певні основи розв'язання проблеми. За бажання більш детальну інформацію читач зможе знайти, наприклад, у [12, 15]. Приклади успішного розв'язання екстремальних задач можна знайти вже у давній історії.

Приклад 9.1 (задача принцеси Дідони). У IX ст. до н. е. фінікійська царівна Дідона та кілька її супутників, рятуючись від переслідування тирської знаті, бігли з м. Тиру і висадилися на африканському узбережжі Середземного моря. Вирішивши оселитися саме тут, Дідона впросила місцевих жителів віддати в її розпорядження ділянку землі, яку можна охопити шкірою бика (відчуваєте двозначність постановки питання?). Простодушний правитель тих місць не зрозумів усієї глибини задуму і погодився віддати втікачам ділянку землі, площа якої, на його думку, має дорівнювати площі розправленої шкіри бика. Дідона ж після укладання угоди розрізала шкіру бика на тонкі смужки, зв'язала їх у довгий ремінь і обмежила їм значну територію на березі моря. Так було закладено місто Карфаген, яке згодом зруйнували римляни.

Завдання, яке поставила Дідона, може бути сформульоване таким чином: знайти криву заданої довжини L (L у згаданій вище історії – довжина ременя зі шкіри бика), яка обмежує на площині фігуру найбільшої площі.

Формалізуємо завдання. Вважаючи берег моря прямолінійним, розташуємо прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox збіглася із берегом моря. Припустимо, що прямолінійна (морська) частина межі ділянки землі є відрізком $[a,b]$ осі Ox, а криволінійна частина – графіком гладкої (тобто неперервно диференційованої) функції $y = y(x)$, визначеної на відрізку $[a,b]$ (рис. 9.1). При цьому

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{9.1}$$

За виконаних припущень довжина L криволінійної частини кордону обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx, \tag{9.2}$$

а площа земельної ділянки S – за формулою

$$S = \int_a^b y(x)dx. \tag{9.3}$$

Отже, потрібно знайти таку гладку функцію $y = y(x)$, яка задовольняє умови (9.1) та (9.2) (L фіксовано) і забезпечує інтегралу (9.3) максимальне значення.

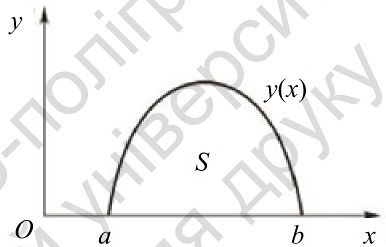


Рис. 9.1

Подібні завдання ставили та розв'язували (у свій, оригінальний спосіб) ще Арістотель та Архімед. Архімед установив чудову властивість кола: з усіх замкнених кривих, довжини яких дорівнюють деякому заданому значенню, коло охоплює найбільшу площу; з усіх замкнених кривих, які охоплюють задану площу, коло має найменшу довжину.

Незважаючи на наявність стародавніх прецедентів, моментом народження варіаційного числення як математичної дисципліни прийнято вважати 1696 рік, коли у червневому номері журналу "Acta Eruditorium" з'явився лист І. Бернуллі. А незабаром було наведено три способи розв'язання задачі І. Бернуллі: перший належав Якову Бернуллі, другий – Лопіталю, а третій з'явився в англійському науковому журналі без підпису автора, але І. Бернуллі легко впізнав у авторі Ісаака Ньютона. Розглянемо завдання, запропоноване І. Бернуллі.

Приклад 9.2 (задача про брахістохрону). У вертикальній площині через дві дані точки O та B, що не лежать на одній вертикалі, провести криву (тобто знайти її рівняння), рухаючись уздовж якої матеріальна точка під дією сили тяжіння переміститься з верхньої точки до нижньої за мінімальний час (рис. 9.2). Те саме завдання можна сформулювати і так: спроєктувати дах будинку у такий спосіб, щоб краплі дощу скочувалися з його коника за найменший проміжок часу.

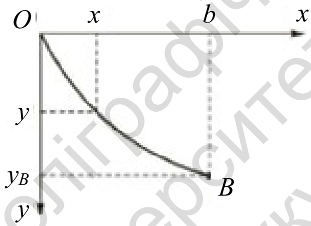


Рис. 9.2

Припустимо, що початкова швидкість краплі, яка падає, дорівнює нулю, а сили тертя відсутні. До моменту, коли відстань від початкового положення точки O вертикальної осі Oy прямокутної системи координат Oxy буде дорівнювати c, точка втратить потенційну енергію, яка зменшиться на mgy (m – маса точки, g – прискорення вільного падіння). Кінетична енергія при цьому збільшиться на $mv^2/2$ (v – швидкість точки). Унаслідок закону збереження енергії (адже тертя відсутнє) маємо

$$mv^2/2 - mgy = 0,$$

звідки

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Далі, припускаючи, що траєкторія руху є кривою $y = y(x)$, причому $y(x)$ – гладка функція, визначена на відрізку $[O,b]$, отримуємо

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{dt},$$

де ds – диференціал довжини дуги кривої, t – час. Тому

$$\sqrt{2gy}\,dt = \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Отримуємо рівняння

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Із цього рівняння знаходимо час, який необхідний для переходу з точки O в точку B:

$$t = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx. \tag{9.4}$$

Відомі координати початкової та кінцевої точок дають крайові умови для функції $y(x)$:

$$y(0) = 0, \quad y(b) = y_B. \tag{9.5}$$

Отже, необхідно знайти гладку функцію $y(x)$, для якої $t \to \min$ за крайових умов (9.5).

Наведемо ще один приклад, що дуже часто зустрічається у картографії, військовій справі, авіації.

Приклад 9.3 (задача про геодезичні лінії). На поверхні, яка задана у прямокутній системі координат рівнянням $\varphi(x,y,z) = 0$, проведемо криву, що з'єднує дві точки A та B цій поверхні та має найменшу довжину (рис. 9.3).

Найменші за довжиною лінії між двома точками деякої поверхні є геодезичними лініями цієї поверхні. Наприклад, геодезичними лініями площини є прямі, геодезичними лініями на сфері – дуги великого кола.

Припустимо, що поверхня $\varphi(x,y,z) = 0$ є гладкою, а шукана крива може бути задана рівняннями $y = y(x)$, $z = z(x)$,

$x \in [a,b]$ за допомогою гладких функцій $y(x)$ та $z(x)$. Тоді її довжина L становить

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx. \qquad (9.6)$$

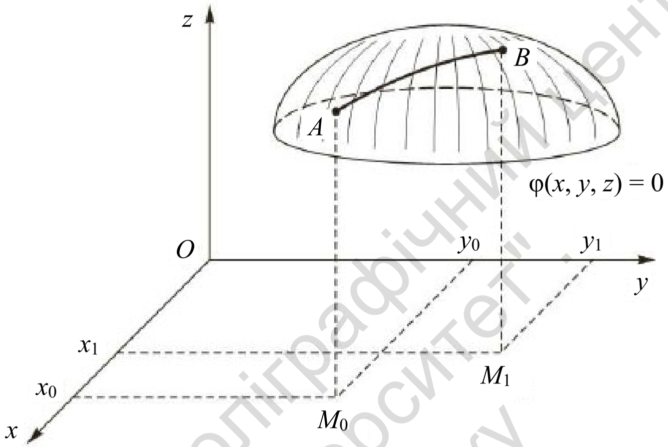


Рис. 9.3

Задача звелася до визначення гладких на відрізку $[a,b]$ функцій $y = y(x)$ та $z = z(x)$ таких, що

$\varphi(x, y(x), z(x)) = 0$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$,

а інтеграл (9.6) набуває мінімального значення.

9.1. Основні поняття та означення варіаційного числення

У багатьох задачах потрібно знайти значення аргументу x_0, за якого функція $f(x)$ набуває екстремального значення. Якщо функція неперервно диференційована на відрізку $x \in [a,b]$, то необхідні умови екстремуму сформульовані у відомій теоремі Ферма.

Теорема 9.1.1 (Ферма). Якщо неперервно диференційована функція $f(x)$ набуває екстремального значення у внутрішній точці проміжку $x_0 \in [a,b]$, то диференціал функції $f(x)$ у цій точці дорівнює нулю, тобто $df(x)\big|_{x=x_o} = 0$.

Одним із напрямів розвитку методів оптимізації є пошук екстремуму не функцій, а функціоналів, тобто відображень функцій у число.

Означення 9.1.1. Якщо $\mathrm{M} = \{x(t)\}$ – множина функцій і відомий закон, за яким $x(t) \in M$ ставиться у відповідність число, то кажуть, що *на множині M задано функціонал*.

Приклад 9.1.1. Нехай $\mathrm{M} = \{x(t)\}$ – множина функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$. Тоді за функціонал можна обрати довжину відрізка

$$l(x) = \int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2}\, dt$$

або площу між відрізком і віссю OX

$$S(x(t)) = \int_a^b |x(t)| dt.$$

Нехай $\mathrm{M} = \{x(t)\}$ – множина функцій, а $I[x(t)]$ – функціонал, заданий на цій множині. Основною задачею варіаційного числення є встановлення умов, за яких функціонали досягають свого екстремального значення.

Задачі варіаційного числення близькі до задач оптимізації скінченновимірних функцій. Наведемо деякі означення.

Означення 9.1.2. *Варіацією аргументу* $\delta x(t)$ *функціонала* $I[x(t)]$ називається різниця між двома функціями

$$\delta x(t) = x(t) - x_0(t).$$

У скінченновимірних випадках відповідним аналогом є поняття диференціала $dx = x - x_0$.

Означення 9.1.3. Функціонал $I[x(t)]$ називається *неперервним у точці* $x_0(t)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якої функції $x(t) \in M$ буде виконуватися

$$\left| I[x(t)] - I[x_0(t)] \right| < \varepsilon$$

при

$$\rho(x(t), x_o(t)) < \delta(\varepsilon).$$

Якщо $\rho(x(t), x_0(t)) = \max\limits_{a \le x \le b} |x(t) - x_0(t)|$, то функціонал неперервний у розумінні $C^0_{[a,b]}$-метрики, якщо

$$\rho(x(t), x_0(t)) = \max_{a \le x \le b} \left\{ | x(t) - x_0(t) |, \ldots, | x^{(n)}(t) - x_o^{(n)}(t) | \right\},$$

то неперервний у розумінні $C^k_{[a,b]}$-метрики.

Означення 9.1.4. Функціонал $I[x(t)]$ називається *лінійним*, якщо:

1) для довільної сталої α буде виконуватися умова

$$I[\alpha_x(t)] = \alpha I[x(t)];$$

2) для довільних функцій $x_1(t), x_2(t) \in M$ буде виконуватись

$$I[x_1(t) + x_2(t)] = I[x_1(t)] + I[x_2(t)].$$

Означення 9.1.5. Якщо різницю функціоналів

$$\Delta I\left[x(t)\right] = I\left[x(t) + \delta x(t)\right] - I\left[x(t)\right]$$

можна зобразити у вигляді

$$\Delta I\left[x(t)\right] = L\left[x(t), \delta x(t)\right] + \beta\left(x(t), \delta x(t)\right) \cdot \max_{t \in [a,b]} \left|\delta x(t)\right|,$$

де $L\left[x(t), \delta x(t)\right]$ – лінійний відносно $\delta x(t)$ функціонал, а $\beta\left(x(t), \delta x(t)\right) \to 0$ при $\max\limits_{t \in [a,b]} \left|\delta x(t)\right| \to 0$, то $L\left[x(t), \delta x(t)\right]$ називається *варіацією функціонала* і позначається $\delta I\left[x(t)\right]$.

У скінченновимірному випадку аналогом варіації функціонала $\delta I\left[x(t)\right]$ є диференціал функції dy.

Лема 9.1.1. Варіація функціонала $I\left[x(t)\right]$ дорівнює похідній функціонала $\delta I\left[x(t) + \alpha \delta x(t)\right]$ за параметром α при $\alpha = 0$, тобто

$$\delta I\left[x(t)\right] = \frac{\delta}{\delta \alpha} I\left[x(t) + \alpha \delta x(t)\right]\Big|_{\alpha = 0}. \qquad (9.1.1)$$

Доведення. Запишемо різницю функціонала при варіації аргументу $\alpha\delta x(t)$:

$$\Delta I\left[x(t)\right]=I\left[x(t)+\delta x(t)\right]-I\left[x(t)\right]=$$
$$=L\left[x(t),\delta x(t)\right]+\beta\left(x(t),\delta x(t)\right)\cdot|\alpha|\cdot\max_{t\in[a,b]}\left|\delta x(t)\right|.$$

Похідна від $I\left[x(t)+\delta x(t)\right]$ за параметром α при $\alpha=0$ становить

$$\frac{\delta}{\delta\alpha}I\left[x(t)+\alpha\delta x(t)\right]\cdot_{\alpha=0}=\frac{\delta}{\delta\alpha}\Delta I\left[x(t)\right]\Big|_{\alpha=0}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta I[x(t)]}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L\left[x(t),\alpha\delta x(t)\right]+\beta\left(x(t),\alpha\delta x(t)\right)K\big|\cdot\max\left(\delta x(t)\right)}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L\left[x(t),\alpha\delta x(t)\right]}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta\left(x(t),\alpha\delta x(t)\right)\cdot|\alpha|\cdot\max\left|\delta x(t)\right|}{\alpha}.$$

Оскільки функціонал $L\left[x(t),\alpha\delta x(t)\right]$ є лінійним за другим аргументом, то

$$L\left[x(t),\alpha\delta x(t)\right]=\alpha L\left[x(t),\alpha\delta x(t)\right].$$

Звідси маємо

$$\frac{\delta}{\delta\alpha}I\left[x(t)+\alpha\delta x(t)\right]=L\left[x(t),\delta x(t)\right]+$$
$$+\lim_{\alpha\to 0}\left\{\beta\left(x(t),\alpha\delta x(t)\right)\cdot\max\left|\delta x(t)\right|\cdot\operatorname{sign}\alpha\right\}=L\left[x(t),\delta x(t)\right].$$

Означення 9.1.6. Функціонал $I\left[x(t)\right]$ досягає на кривій $x(t)\in C_{[a,b]}$ максимуму, якщо значення $I\left[x(t)\right]$ на будь-якій близькій кривій до $x_0(t)$ не більше ніж $I\left[x_0(t)\right]$, тобто

$$\Delta I\left[x(t)\right]=I\left[x(t)\right]-I\left[x_0(t)\right]\le 0.$$

Якщо $\Delta I\left[x(t)\right]=0$ тільки при $x(t)=x_0(t)$, то на кривій $x_0(t)$ досягається строгий максимум.

Теорема 9.1.2. Якщо функціонал $I\left[x(t)\right]$, який має варіацію $\delta I\left[x(t)\right]$, досягає максимуму чи мінімуму при $x_0(t)$, де $x_0(t)$ – внутрішня точка області визначення функціонала, то

$$\delta I\left[x_0(t)\right]=0. \tag{9.1.2}$$

Доведення. Нехай функціонал $I\left[x(t)\right]$ на кривій $x_0(t)$ досягає максимуму чи мінімуму. Візьмемо фіксовану варіацію аргументу $\alpha\delta x(t)$ з параметром α. На цій варіації функціонал переходить у функцію від параметра α і набуває вигляду

$$I\left[x(t)+\alpha\delta x(t)\right].$$

Якщо функціонал досягає екстремуму на функції $x_0(t)$, то функція $I\left[x_0(t)+\alpha\delta x(t)\right]$ змінної α тим більше буде досягати екстремуму при $\alpha=0$. За теоремою Ферма отримаємо, що необхідними умовами екстремуму є

$$\left.\frac{\delta}{\delta\alpha}I\left[x_0(t)+\alpha\delta x(t)\right]\right|_{\alpha=0}=0.$$

Однак унаслідок доведеної леми 9.1.1 буде виконуватись

$$\frac{\delta}{\delta\alpha}I\left[x_0(t)+\alpha\delta x(t)\right]\Big|_{\alpha=0}=\delta I\left[x_0(t)\right].$$

Отже, якщо на кривій $x_0(t)$ функціонал досягає екстремуму, то варіація функціонала дорівнює нулю.

Поняття екстремуму функціонала вимагає уточнення. Говорячи про максимум чи мінімум, ми використовували поняття близькості функцій $x(t)$ до $x_0(t)$. Якщо функціонал $I\left[x(t)\right]$ досягає на кривий $x_0(t)$ максимуму чи мінімуму відносно кривих $x(t)$, близьких до $x_0(t)$ у розумінні метрики $C_{[a,b]}$, то екстремум називається *сильним*.

Якщо функціонал $I\left[x(t)\right]$ досягає на кривий $x_0(t)$ екстремуму відносно $x(t)$, близького до $x_0(t)$ у розумінні метрики $C^1_{[a,b]}$, то екстремум називається *слабким*.

Очевидно, що якщо досягається сильний екстремум, то слабкий буде досягатися тим більше.

9.1.1. Рівняння Эйлера

Розглянемо функціонал інтегрального вигляду

$$I\left[x(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}F\left(t,x(t),x'(t)\right)dt, \qquad (9.1.3)$$

визначений на двічі неперервно диференційованих кривих $x(t)$, які задовольняють крайові умови $x(t_0)=x_0,\ \ x(t_1)=x_1$.

Знайдемо криву $x_0(t)$, на якій функціонал набуває екстремального значення. Це так звана *задача із закріпленими кінцями*.

Теорема 9.1.3 (необхідні умови екстремуму). Якщо функціонал інтегрального вигляду (9.1.3) досягає екстремуму на кривій $x(t_0)$, яка задовольняє крайові умови $x(t_0)=x_0,\ \ x(t_1)=x_1$, то ця крива задовольняє рівняння Эйлера

$$F_x\left(t,x,x'\right)-\frac{d}{dt}F_{x'}\left(t,x,x'\right)=0 \qquad (9.1.4)$$

та крайові умови $x(t_0)=x_0,\ \ x(t_1)=x_1$.

Доведення. Нехай функціонал $I\left[x(t)\right]$ досягає кривої $x_0(t)$, підозрілої на екстремум. Візьмемо варіацію аргументу $\alpha\delta x(t)$, де $\delta x(t)$ – фіксована функція, α – параметр. Як випливає із (9.1.1), значення похідної становить

$$\delta I\left[x_0(t)\right]=\frac{\delta}{\delta\alpha}I\left[x_0(t)+\alpha\delta x(t)\right]\Big|_{\alpha=0}.$$

Обчислимо цю залежність:

$$\frac{\delta}{\delta\alpha} I\left[x_0(t)+\alpha\delta x(t)\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{t_1} F\Big(t, x_0(t)+\alpha\delta x(t), x_0^{'}(t)+\alpha\delta x^{'}(t)\Big)dt\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\frac{d}{dx}F\Big(t, x_0(t)+\alpha\delta x(t), x_0'(t)+\alpha\delta x'(t)\Big)\delta x(t)+$$

$$+\frac{d}{dx^{'}}F\Big(t, x_0(t)+\alpha\delta x(t), x_0'(t)+\alpha\delta x'(t)\Big)\cdot\delta x^{'}(t)\Bigg]dt\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_x\Big(t, x_0(t), x^{'}{}_0(t)\Big)\delta x(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{x^{'}}\Big(t, x_0(t), x^{'}(t)\Big)\delta x^{'}(t)\,dt.$$

Проінтегруємо другий інтеграл по частинах:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{x^{'}}\Big(t, x_0(t), x^{'}{}_0(t)\Big)\delta x^{'}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{x^{'}}\Big(t, x_0(t), x_0^{'}(t)\Big)d\left[\delta x(t)\right] =$$

$$= F_{x^{'}}\Big(t, x_0(t), x_0^{'}(t)\Big)\delta x(t)\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}F_{x'}\Big(t, x_0(t)\, x_0^{'}(t)\Big)\delta x(t)\,dt.$$

Оскільки розглядається задача із закріпленими кінцями, то варіація на кінцях дорівнює нулю, тобто

$$\delta x(t)\big|_{t=t_0} = \delta x(t)\big|_{t=t_1} = 0.$$

Об'єднаємо два інтеграли й одержимо

$$\frac{\delta}{\delta\alpha} I\left[x_0(t)+\alpha\delta x(t)\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\left[F_x\Big(t, x_0(t), x_0^{'}(t)\Big) - \frac{d}{dt}F_{x^{'}}\Big(t, x_0(t), x_0^{'}(t)\Big)\right]\delta x(t)\,dt.$$

Отже, необхідна умова екстремуму функціонала (9.1.2) набуває вигляду

$$\int_{t_0}^{t}\left[F_x\Big(t, x_0(t), x_0^{'}(t)\Big) - \frac{d}{dt}F_{x^{'}}\Big(t, x_0(t), x_0^{'}(t)\Big)\right]\delta x(t)\,dt = 0.$$

Якщо інтеграл дорівнює нулю, то підінтегральна функція не обов'язково дорівнює нулю. Однак із основної леми варіаційного числення випливає таке. Якщо інтеграл із добутком двох функцій дорівнює нулю, тобто

$$\int_{t_0}^{t} \Phi\left(t, x_0(t), x_0'(t)\right)\delta x(t)\,dt = 0,$$

де $\delta x(t)$ – довільна функція, то перша функція тотожно дорівнює нулю, тобто

$$\Phi\left(t, x_0(t), x_0'(t)\right) \equiv 0.$$

Отже, матимемо таке. Якщо функціонал $I\left[x(t)\right]$ набуває екстремального значення на кривій $x_0(t)$, то $x_0(t)$ є розв'язком звичайного диференціального рівняння другого порядку (9.1.4) (рівняння Эйлера) і задовольняє крайові умови $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

9.1.2. Деякі частинні типи функціоналів

Розглянемо окремі випадки функціоналів.

1. Функція $F(\cdot)$ залежить лише від $x(t)$ та $x'(t)$, тобто

$$F = F\left(x, x'\right).$$

Тоді рівняння Эйлера (9.1.4) набуде вигляду

$$F_x(x, x') - \frac{d}{dt}F_{x'}(x, x') = 0,$$

або

$$F_x(x, x') - F_{x'x}(x, x')x' - F_{x'x'}(x, x')x'' = 0.$$

Помножимо рівняння на x' і одержимо

$$F_x(x, x')x' - F_{x'x}(x, x')x'^2 - F_{x'x'}(x, x')x''x' = 0.$$

Звідси $\dfrac{d}{dt}\left[F\left(x, x'\right) - x'F_{x'}\left(x, x'\right)\right] = 0.$

Отже, наведене рівняння Эйлера має перший інтеграл

$$F\left(x,x'\right)-x'F_{x'}\left(x,x'\right)=c_1.$$

2. Задача про найменшу площу обертання.

Задано дві точки $A\left(t_0,x_0\right)$, $B\left(t_2,x_1\right)$ (рис. 9.1.1). Треба знайти криву, від обертання якої утвориться поверхня найменшої площі.

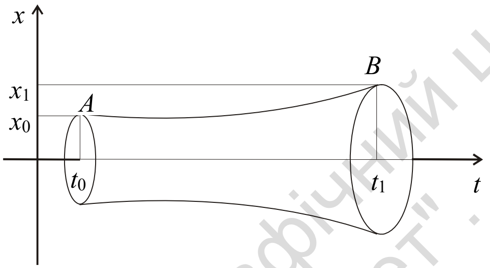


Рис. 9.1.1

Площа поверхні обертання становить

$$S\left[x\left(t\right)\right]=2\pi\int_{t_0}^{t_1}x(t)\sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt.$$

Оскільки підінтегральна функція залежить лише від координати та її похідної, тобто

$$F=F\left(x,x'\right),$$

то перший інтеграл рівняння Эйлера набуває вигляду

$$F\left(x,x'\right)-x'F_{x'}\left(x,x'\right)=c_1.$$

Оскільки

$$F\left(x,x'\right)=x\sqrt{1+x'^2},\quad F_{x'}=x\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}},$$

то перший інтеграл

$$x\sqrt{1+x'^2}-x\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}=c_1.$$

Зведемо подібні й матимемо

$$\frac{x}{\sqrt{1+x'^2}} = c_1.$$

Параметризуємо одержане диференціальне рівняння. Перепишемо його як

$$\begin{cases} x' = sh\xi \\ x = c_1\sqrt{1+sh^2\xi} = c_1 ch\xi \end{cases}.$$

Використаємо співвідношення

$$dx = x' dt.$$

Звідси $dt = \frac{dx}{x'} = \frac{c_1 sh\xi}{sh\xi} d\xi = c_1 d\xi.$

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$t = c_1\xi + c_2.$$

Остаточно рівняння поверхні набуде вигляду

$$x(t) = c_1 ch\frac{t-c_2}{c_1}.$$

Сталі c_1 та c_2 знаходимо з початкових умов $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Отримана крива називається *катеноїдою*.

9.2. Функціонали, які залежать від кількох функцій

Розглянемо функціонал, який залежить від багатьох функцій:

$$\mathrm{I}\left[\mathrm{x}(\mathrm{t})\right] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t_1, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), x'_1(t), x'_2(t), ..., x'_n(t)\right)dt. \quad (9.2.1)$$

Тут $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ – незалежні, двічі неперервно диференційовані функції одного аргументу, які задовольняють крайові умови

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ ...,\ x_n(t_0) = x_n^0,$$

$$x_1(t_1) = x_1^1,\ x_2(t_1) = x_2^1, ...,\ x_n(t_1) = x_n^1.$$

Оскільки функції незалежні, то будемо варіювати кожну з них окремо. При цьому функціонал перетвориться на функціонал, який залежить тільки від однієї функції, тобто $I = I\left[x_i(t)\right],\ i = \overline{1,n}$.

Функція, яка реалізує екстремум, має задовольняти відповідне рівняння Ейлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} = 0,\ \ i = \overline{1,n}.$$

Отже, одержали систему n диференціальних рівнянь другого порядку із $2n$ крайовими умовами

$$F_{x_i}\left(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'\right) - \frac{d}{dt} F_{x_i'}\left(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'\right) = 0,$$

$$i = \overline{1,n}, \tag{9.2.2}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0, \ldots,\ x_n(t_0) = x_n^0, \tag{9.2.3}$$

$$x_1(t_1) = x_1^1,\ x_2(t_1) = x_2^1, \ldots,\ x_n(t_1) = x_n^1.$$

Якщо функціонал (1) досягає екстремуму на функціях $x_1^0(t)$, $x_2^0(t), \ldots,\ x_n^0(t)$, то вони задовольняють систему диференціальних рівнянь Ейлера (9.2.2) і відповідні крайові умови (9.2.3).

Функціонали, які залежать від похідних вищого порядку

Розглянемо задачу пошуку кривої $x_0(t)$, на якій функціонал

$$\mathrm{I}\left[\mathrm{x}(\mathrm{t})\right] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t_1, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)\right) dt, \tag{9.2.4}$$

який залежить від похідних вищого порядку, досягає екстремуму на кривих, що задовольняють крайові умови

$$x(t_0) = x^0,\ x'(t_0) = x_0', \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \tag{9.2.5}$$

$$x(t_1) = x_1,\ x'(t_1) = x_1', \ldots,\ x^{(n-1)}(t_1) = x_1^{(n-1)}.$$

Нехай екстремум досягається на $2n$ разів неперервно диференційованій кривій $x(t_0)$. Візьмемо варіацію аргументу $\alpha\delta x(t)$

із фіксованою функцією $\delta x(t)$ та параметром α. Необхідною умовою екстремуму функціонала є

$$\delta I\left[x_0(t)\right]=0.$$

Обчислимо варіацію функціонала:

$$\delta I\left[x_0(t)\right]=\frac{d}{d\alpha}I\left[x_0(t)+\alpha\delta x(t)\right)\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\frac{d}{d\alpha}\left[\int_{t_0}^{t_1}F\Big(t,x_0(t)+\alpha\delta x(t),x_0'(t)+\alpha\delta x'(t),...,x_0^{(n)}(t)+\alpha\delta x^{(n)}(t)\Big)dt\right]_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{F_x\Big(t,x_0(t)+\alpha\delta x(t),x_0'(t)+\alpha\delta x'(t),...,x_0^{(n)}(t)+\alpha\delta x^{(n)}(t)\Big)\delta x(t)+$$

$$+F_{x'}\Big(t,x_0(t)+\alpha\delta x(t),x_0'(t)+\alpha\delta x'(t),...,x_0^{(n-1)}(t)+\alpha\delta x^{(n-1)}(t)\Big)\delta x'(t)+...$$

$$+F_{x^{(n)}}\Big(t,x_0(t)+\alpha\delta x(t),x_0'(t)+\alpha\delta x'(t),...,x_0^{(n)}(t)+\alpha\delta x^{(n)}(t)\Big)\delta x^{(n)}(t)\Big\}dt\Big|_{\alpha=0}.$$

Розбивши інтеграл на $(n+1)$ інтегралів і підставивши $\alpha=0$, отримаємо

$$\delta I\left[x_0(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}F_x\Big(t,x_0(t),x_0'(t),...,x_0^{(n)}(t)\Big)\delta x(t)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}F_{x'}\Big(t,x_0(t),x_0'(t),...,x_0^{(n)}(t)\Big)\delta x'(t)\,dt+...$$

$$...+\int_{t_0}^{t_1}F_{x^{(n)}}\Big(t,x_0(t),x_0'(t),...,x_0^{(n)}(t)\Big)\delta x^{(n)}(t)\,dt.$$

Розглянемо окремо кожний з інтегралів, починаючи з другого. Для другого інтеграла буде виконуватись

$$\int_{t_0}^{t_1}F_{x'}\Big(t,x_0(t),x_0'(t),...,x_0^{(n)}(t)\Big)\delta x'(t)\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} F_{x'}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) d\left[\delta x(t)\right] =$$

$$= F_{x'}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} F_{x'}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x(t)\, dt.$$

Вважаючи, що на кінцях варіація дорівнює нулю, отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{x'}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x'(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} F_{x'}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x(t)\, dt.$$

Розглянемо третій інтеграл. Аналогічно матимемо

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{x''}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x''(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_{x''}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) d[\delta x'(t)] =$$

$$= F_{x''}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x'(t) \Big|_{t_0}^{t_1} -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} F_{x''}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x'(t)\, dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} F_{x''}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) d\left[\delta x(t)\right] -$$

$$-\frac{d}{dt} F_{x''}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2}{dt^2} F_{x''}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2}{dt^2} F_{x''}\left(t, x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n)}(t)\right) \delta x(t)\, dt.$$

Продовжуючи процес далі, отримуємо

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{x^{(n)}}\left(t, x_0(t), x_0'(t), ..., x_0^{(n)}(t)\right)\delta x^{(n)}(t)\,dt =$$

$$= (-1)^n \int_{t_0}^{t_1} \frac{d^n}{dt^n} F_{x^{(n)}}\left(t, x_0(t), x_0'(t), ..., x_0^{(n)}(t)\right)\delta x(t)\,dt.$$

Об'єднаємо всі інтеграли і дістанемо

$$\delta I\left[x_0(t)\right] = \int_{t_0}^{t_1}\Big\{F_x\left(t, x_0(t), x_0'(t), ..., x_0^{(n)}(t)\right) -$$

$$-\frac{d}{dt}F_{x'}\left(t, x_0(t), x_0'(t), ..., x_0^{(n)}(t)\right) + ...$$

$$+(-1)^n F_{x^{(n)}}\left(t, x_0(t), x_0'(t), ..., x_0^{(n)}(t)\right)\Big\}\delta x(t)\,dt.$$

За основною лемою варіаційного числення з рівності нулю інтеграла при довільній функції $\delta x(t)$ випливає рівність нулю виразу

$$F_x\left(t, x_0(t), ..., x_0^{(n)}(t)\right) - \frac{d}{dt}F_{x'}\left(t, x_0(t), ..., x_0^{(n)}\right) + ...$$

$$+ (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{x^{(n)}}\left(t, x_0(t), ..., x_0^n(t)\right) = 0.$$

Отже, якщо функціонал

$$I\left[x(t)\right] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x, x', ..., x^{(\mathrm{n})}\right)dt$$

досягає на кривій $x_0(t)$ екстремуму, то він задовольняє диференціальне рівняння $2n$-го порядку *Ейлера – Пуассона*

$$F_x\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) - \frac{d}{dt}F_{x'}\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) + ... +$$

$$+(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{x^{(n)}}\left(t, x, x', ..., x^{(n)}(t)\right) = 0$$

і крайові умови (9.2.5).

Приклад 9.2.1. Знайти відстань між кривими $x_1(t) = te^{-t}$, $x_2(t) \equiv 0$ на відрізку $t \in [0,2]$.

Використовуючи визначення відстані, отримаємо

$$\rho(x(t), x_2(t)) = \max_{t\in[0,2]} |x_1(t) - x_2(t)| = \max_{t\in[0,2]} |te^{-t}|.$$

Візьмемо похідну $\frac{d}{dt}(te^{-t}) = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1-t) = 0$, звідки $t_1 = 1$. Отже, максимальне значення може бути досягнуте при

$$t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2.$$

Звідси маємо

$$te^{-t}\Big|_{t=0} = 0,\ te^{-t}\Big|_{t=1} = e^{-1},\ te^{-t}\Big|_{t=2} = 2e^{-2}.$$

Отже, $\rho(x(t), x_2(t)) = e^{-t}$.

Приклад 9.2.2. Показати неперервність функціонала $I[x(t)] = \int_0^1 [x(t) + 2x'(t)]dt$ у точці $x_0(t) = t$ у просторі $C^1_{[0,1]}$.

Візьмемо різницю

$$|I[x(t)] - I[x_0(t)]| =$$

$$= \left|\int_0^1 [x(t) + 2x'(t) - t - 2]\,dt\right| \le \int_0^1 |x(t) - t|dt + 2\int_0^1 |x'(t) - 1|dt < \varepsilon$$

при $\max\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - t| < \frac{\varepsilon}{2}$ та $\max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t) - t| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Нехай $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$. Тоді $|I[x(t)] - I[x_0(t)]| < \varepsilon$ при

$$\rho(x(t), x_0(t)) < \delta(\varepsilon),$$

де

$$\rho_1(x(t), x_0(t)) = \max_{t\in[a,b]} \{|x(t) - x_0(t)|, |x'(t) - x_0'(t)|\}$$

і функціонал неперервний у $C^1_{[a,b]}$-метриці.

Приклад 9.2.3. Знайти варіацію функціонала

$$I\left[x(t)\right]=\int_a^b \left(t+x(t)\right)dt.$$

Розглянемо функціонал

$$I\left[x(t)+\alpha\delta x(t)\right]=\int_a^b \left(t+x(t)+\alpha\delta x(t)\right)dt.$$

Візьмемо похідну за параметром α:

$$\frac{d}{d\alpha}I\left[x(t)+\alpha\delta x(t)\right]\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b \left(t+x(t)+\alpha\delta x(t)\right)dt\Bigg|_{\alpha=0}=\int_a^b \delta x(t)\,dt.$$

Звідси

$$\delta I\left[x(t)\right]=\int_a^b \delta x(t)\,dt.$$

Приклад 9.2.4. Знайти, на яких кривих може досягати екстремуму функціонал

$$I\left[x(t)\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x'^2-x^2\right)dt,\quad x(0)=0,\ \ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Маємо $F\left(t,x,x'\right)=x'^2-x^2$, звідки $F_x=-2x,\ \ F_{x'}=2x'$.

Використовуючи рівняння Ейлера, отримаємо

$$-2x-\frac{d}{dt}\left(2x'\right)=0, \text{або } x''+x=0.$$

Загальний розв'язок отриманого рівняння

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t.$$

Підставивши у загальний розв'язок крайові умови $x(0)=0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, одержимо $x_0(t)=\sin t$.

Приклад 9.2.5. Знайти, на яких кривих може досягати екстремуму функціонал

$$I\left[x(t)\right]=\int_0^1\left[x'^2+12tx\right]dt,\ \ x(0)=0,\ \ x(1)=1.$$

Маємо $F\left(t,x,x'\right)=x'^2+12tx.$ Звідси $F_x=12t,\ \ F_{x'}=2x'.$

Використовуючи рівняння Ейлера, отримаємо

$$12t-\frac{d}{dt}\left(2x'\right)=0,$$

або

$$x''=6t.$$

Проінтегруємо отримане диференціальне рівняння:

$$x'(t)=3t^2+C_1,\ \ x(t)=t^3+C_1+C_2.$$

Підставивши граничні умови $x(0)=0,\ \ x(2)=1,$ одержимо

$$x_0(t)=t^3.$$

Приклад 9.2.6. Знайти, на яких кривих може досягати екстремуму функціонал

$$I\left[x(t)\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[x'^2+y'^2+2xy\right]dt,\ \ x(0)=1,$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ \ y(0)=0,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

Маємо

$F\left(t,x,y,x',y'\right)=x'^2+y'^2+2xy,$ звідки

$$F_x=2y,\ \ F_{x'}=2x',\ \ F_y=x,\ \ F_{y'}=2y'.$$

Використовуючи рівняння Ейлера

$$\begin{cases}F_x-\dfrac{d}{dt}F_{x'}=0\\ F_y-\dfrac{d}{dt}F_{y'}=0\end{cases},$$

отримаємо

$$\begin{cases} 2y - \dfrac{d}{dt}\left(2x^{'}\right) = 0 \\ 2x - \dfrac{d}{dt}\left(2y^{'}\right) = 0 \end{cases}.$$

Звідси $x^{''} - y = 0, \quad y^{''} - x = 0.$

Продиференціюємо перше рівняння два рази та підставимо результат у друге. Отримаємо

$$x^{IV} - x = 0.$$

Розв'язок цього рівняння

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{t} + C_4 e^{-t}.$$

Підставимо його в перше рівняння системи і отримаємо

$$y = -C_1 \cos t - C_2 \sin t + C_3 e^{t} + C_4 e^{-t}.$$

Підставивши в отримані загальні розв'язки початкові умови, одержимо

$$x_0(t) = \sin t, \quad y_0(t) = -\sin t.$$

Приклад 9.2.7. Знайти криву $x_0(t)$, підозрілу на екстремум:

$$I\left[x(t)\right] = \int_0^1 \left(1 + x^{''2}\right) dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x^{'}(0) = 1, \quad x^{'}(1) = 1.$$

Запишемо рівняння Ейлера – Пуассона

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x^{'}} + \frac{d^2}{dt^2} F_{x^{''}} = 0.$$

Матимемо

$$F = 1 + x^{''2}, \quad F_x = 0, \quad F_{x^{'}} = 0, \quad F_{x^{''}} = 2x^{''}.$$

Підставимо одержані вирази в рівняння Ейлера – Пуассона і отримаємо

$$\frac{d^2}{dt^2}(2x^{''}) = 0.$$

Проінтегруємо його чотири рази й отримаємо

$$x(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4.$$

Підставивши в отриманий вираз крайові умови $x(0)=0$, $x(1)=1$, $x'(0)=1$, $x'(1)=1$, обчислимо сталі. Отримаємо

$$C_4=0,\ C_1+C_2+C_3=1,\ C_3=1,\ 3C_1+2C_2+C_3=1.$$

Звідси $C_1=C_2=0$, $C_3=1$, $C_4=0$ і остаточно $x_0(t)=t^3$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти криві, на яких функціонали можуть досягати екстремуму:

1.1. $I[x(t)]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4x\cos t+x'^2-x^2\right)dt,\ x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

1.2. $I[x(t)]=\int\limits_{-1}^{0}\left(12tx-x'^2\right)dt,\ x(-1)=1,\ x(0)=0;$

1.3. $I[x(t)]=\int\limits_0^1\left(x'^2-x^2-x\right)e^{2t}dt,\ x(0)=1,\ x(1)=e^{-1};$

1.4. $I[x(t)]=\int\limits_1^2\left(x'^2+2xx'+x^2\right)dt,\ x(1)=1,\ x(2)=0;$

1.5. $I[x(t)]=\int\limits_{-1}^{1}\left(x'^2-2tx\right)dt,\ x(-1)=-1,\ x(1)=1;$

1.6. $I[x(t)]=\int\limits_0^1\sqrt{x\left(1+x'^2\right)}dt,\ x(0)=x(1)=\frac{1}{\sqrt{2}};$

1.7. $I[x(t),y(t)]=\int\limits_{-1}^{1}\left(2tx-x'^2+\frac{y'^3}{3}\right)dt,\ x(1)=0,\ y(1)=1,$

$x(-1)=2,\ y(-1)=-1;$

1.8. $I[x(t)]=\int\limits_0^1 xx'^2\,dt,\ x(0)=1,\ x(1)=\sqrt[3]{4};$

1.9. $I\left[x(t), y(t)\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x'^2 + y'^2 - 2xy\right) dt,$

$$x(0) = y(0) = 0, \;\; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

1.10. $I\left[x(t), y(t)\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2y - 4x^2 + x'^2 - y'^2\right) dt,$

$$x(0) = y(0) = 0, \;\; \left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \;\; \left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

1.11. $I\left[x(t)\right] = \int\limits_{-1}^{0} \left(240x - x'''^3\right) dt, \; x(-1) = 1, \;\; x(0) = 0,$

$$x'(-1) = -4.5, \;\; x''(-1) = 16, \;\; x'(0) = 0, \;\; x''(0) = 0;$$

1.12. $I\left[x(t)\right] = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2x'^2 + x''^2\right) dt,$

$$x(0) = 0, \; x'(1) = 0, \; x'(0) = 1, \; x'(1) = 1;$$

1.13 . $I\left[x(t)\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x'' - x^2 + t^2\right) dt, \;\; x(0) = 1,$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \; x'(0) = 0, \; x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

2. Знайти відстань між кривими:

2.1. $x_1(t) = \sin 2t, \;\; x_2(t) = \sin t$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$

2.2. $x_1(t) = t, \;\; x_2(t) = \ln t$ при $t \in \left[e^{-1}, e\right].$

3. Знайти варіацію функціонала

3.1. $I\left[x(t)\right] = \int\limits_a^b \left(x^2(t) - x'^2(t)\right) dt.$

9.3. Достатні умови екстремуму функціонала

Розглянемо функцію однієї змінної

$$y = f(x), \tag{9.3.1}$$

визначену і неперервно диференційовану на відрізку $x \in [a,b]$. Достатні умови досягнення екстремуму функції (3.1) на цьому відрізку $x \in [a,b]$ будуть такими:

1. Диференціал (або похідна) функції дорівнює нулю, тобто $df(x)\big|_{x=x_0} = 0$ (або $f'(x)\big|_{x=x_0} = 0$).

2. Точка x_0, підозріла на екстремум, є внутрішньою, тобто $x_0 \in (a,b)$.

3. Другий диференціал (або друга похідна) є додатним у точці $x = x_0$, причому при $d^2 f(x)\big|_{x=x_0} > 0$ маємо мінімум, а при $d^2 f(x)\big|_{x=x_0} < 0$ – максимум.

Аналогічні випадки мають місце і для досягнення достатньої умови екстремуму функціонала:

$$I\left[x(t)\right] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right) dt \to \text{extr.} \tag{9.3.2}$$

Як було показано в попередньому підрозділі, перша умова (рівність нулю диференціала) еквівалентна умові рівності нулю першої варіації функціонала

$$\delta I\left[x(t)\right] = 0. \tag{9.3.3}$$

Якщо розглядається задача із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, то умова (9.3.3) зводиться до розв'язання рівняння Ейлера

$$F_x\left(t, x, x'\right) - \frac{d}{dt} F_{x'}\left(t, x, x'\right) = 0 \tag{9.3.4}$$

із крайовими умовами $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Розглянемо умову, аналогічну умові знаходження точки x_0 усередині проміжку. Ця умова називається *умовою Якобі*.

9.3.1. Умова Якобі

Означення 9.3.1. Якщо на площині через кожну точку проходить одна крива, то дотичні до цих кривих задають векторне поле, яке називається *полем напрямків*.

Означення 9.3.2. Якщо сім'я кривих проходить через одну точку (t_0, x_0), тобто криві утворюють пучок кривих, то поле називається *центральним*.

Означення 9.3.3. Якщо центральне поле утворене розв'язками рівняння Ейлера, які задовольняють умову лівого кінця $x(t_0) = x_0$, то кажуть, що задано *поле екстремалей*.

Нехай крива $x_0(t)$ є розв'язком рівняння Ейлера (9.3.4), який задовольняє обидві крайові умови $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Кажуть, що крива $x_0(t)$ *включається в поле екстремалей* (лежить усередині пучка), якщо існує сім'я екстремалей $x = x(t, c)$, які утворюють поле екстремалей, тобто $x(t_0, c) = x_0$, а $x_0(t)$ не лежить на границі області D, у якій сім'я $x(t, c)$ утворює поле.

Геометрично це означає, що $x_0(t)$ лежить усередині пучка екстремалей і не дотикається кривої, яка огинає поле (дискримінантної кривої) рис. 9.3.1.

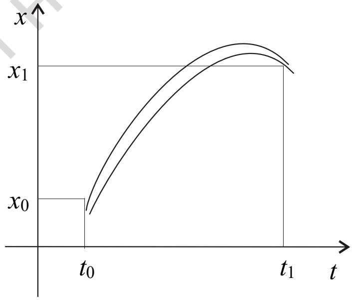


Рис. 9.3.1

Визначимо аналітичні умови того, що екстремаль $x_0(t)$ лежить усередині пучка екстремалей і не виходить на границю. Як відомо, дискримінантна крива визначається системою рівнянь

$$x = x(t,c), \ \ \frac{\partial x(t,c)}{\partial x} = 0.$$

Позначимо

$$\frac{\partial x(t,c)}{\partial c} = u, \ \ \frac{\partial^2 x(t,c)}{\partial c \partial t} = u_t^{'}.$$

Оскільки $x(t,c)$ визначає пучок екстремалей, то $x(t,c)$ є розв'язком рівняння Ейлера (9.3.4). Продиференціюємо тотожність

$$F_x\left(t, x(t,c), x^{'}(t,c)\right) - \frac{d}{dt} F_{x^{'}}\left(t, x(t,c), x^{'}(t,c)\right) \equiv 0$$

за параметром c і отримаємо

$$F_{xx} \cdot u \frac{\partial x(t,c)}{\partial c} + F_{xx^{'}} \frac{\partial x^{'}(t,c)}{\partial c} - \frac{d}{dt}\left[F_{x^{'}x} \frac{\partial x(t,c)}{\partial c} + F_{x^{'}x^{'}} \frac{\partial x^{'}(t,c)}{\partial c}\right] = 0.$$

Використовуючи введені позначення, матимемо

$$F_{xx} u + F_{xx^{'}} u^{'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[F_{x^{'}x} u + F_{x^{'}x^{'}} u^{'}\right] = 0,$$

або

$$\left(F_{xx} - \frac{d}{dt} F_{xx^{'}}\right) u - \frac{d}{dt}\left(F_{x^{'}x^{'}} u^{'}\right) = 0. \qquad (9.3.5)$$

Це рівняння називається *рівнянням Якобі*. На підставі цього рівняння формулюється умова Якобі, яка гарантує, що екстремаль $x_0(t)$ не матиме спільної точки із сім'єю екстремалей, яка огинає область D, тобто не буде лежати на границі.

Теорема 9.3.1 (умова Якобі). Якщо рівняння Якобі (9.3.5) має розв'язок $u_0(t,c)$, який задовольняє нульову умову на лівому кінці $u_0(t_0,c) \equiv 0$, а $u_0(t_0,c) \neq 0$ за будь-яких $t : t_0 < t \leq t_1$, то екстремаль $x_0(t)$ не має спряжених точок, тобто не виходить на границю області D, або, якщо функціонал $\mathrm{I}\left[\mathrm{x}(\mathrm{t})\right]$ досягає на кривій $x_0(t)$ екстремуму, то $x_0(t)$ на інтервалі $[t_0, t_1]$ не має спряжених точок.

9.3.2. Функція Веєрштрасса

Розглянемо умову, що є еквівалентною умові знакосталості диференціала. Визначимо умову, при виконанні якої на деякій множині кривих, близьких до $x_0(t)$, різниця функціонала $\Delta I\left[x(t)\right]$ не змінює знак.

Розглянемо різницю функціонала

$$\Delta I\left[x(t)\right] = \int_{\overline{c}} F\left(t, \overline{x}(t)\overline{x}'(t)\right)dt - \int_{c_0} F\left(t, x_0(t), x_0'(t)\right)dt,$$

де $\overline{x}(t)$ – крива, яка з'єднує точки (t_0, x_0) та (t_1, x_1) і достатньо близька до $x_0(t)$ (рис. 9.3.2).

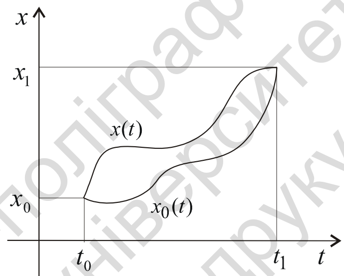


Рис. 9.3.2

Запишемо допоміжний функціонал (функціонал Гільберта)

$$I_1\left[x(t)\right] = \int_{\overline{c}} \left(F(t, x, p(t,x)) + \left(\frac{dx}{dt} - p(t,x)\right) F_p\left(t, x, p(t,x)\right)\right) dt.$$

Тут $p(t,x)$ – центральне поле, яке утворене пучком екстремалей, що проходять через точку (t_0, x_0), тобто

$$\dot{x}(t,c) \equiv p\left(t, x(t,c)\right).$$

Якщо крива $\overline{x}(t)$ входить у пучок екстремалей, то

$$\dot{x}(t,c) \equiv p\left(t, \overline{x}(t)\right) \text{ та } I_1\left[x(t)\right] = \int_{c_0} F(t, \overline{x}, x'(t)dt.$$

Перепишемо функціонал Гільберта як криволінійний інтеграл другого роду

$$I_1\left[x(t)\right]=$$

$$=\int\limits_{\bar{c}}\Big(F\big(t,x,p(t,x)\big)-p(t,x)F_p\big(t,x,p(t,x)\big)\Big)dt+F_p\big(t,x,p(t,x)\big)dx,$$

або

$$I_1\left[x(t)\right]=\int\limits_{\bar{c}}-H(t,x,p(t,x)dt+F_p\big(t,x,p(t,x)\big)dx,$$

де

$$H\big(t,x,p(t,x)\big)=-F\big(t,x,p(t,x)\big)+p(t,x)F_p\big(t,x,p(t,x)\big)$$

– *функція Гамільтона*.

Лема 9.3.1. Підінтегральний вираз інтеграла Гільберта

$$\Big[F\big(t,x,p(t,x)\big)-p(t,x)F_p\big(t,x,p(t,x)\big)\Big]dt+F_p\big(t,x,p(t,x)\big)dx$$

є повним диференціалом деякої функції $U(f,x)$.

Доведення. Необхідною і достатньою умовою того, що вираз $M(t,x)dt+N(t,x)dx$ є повним диференціалом деякої функції $U(f,x)$, є виконання умов Ейлера

$$\frac{dM(t,x)}{dx}\equiv\frac{dN(t,x)}{dt}.$$

Перевіримо виконання цих умов:

$$\frac{d}{dx}\Big[F\big(t,x,p(t,x)\big)-p(t,x)F_p\big(t,x,p(t,x)\big)\Big]=$$

$$=F_x+F_p p_x-p_x F_p-p\big(F_{px}+F_{pp}p_x\big)=F_x-p\big(F_{px}+F_{pp}p'_x\big),$$

або

$$\frac{d}{dt}F_p\big(t,x,p(t,x)\big)=F_{pt}+F_{pp}p'_t.$$

З рівняння Ейлера (9.3.4) випливає, що

$$F_x-F_{pt}-F_{px}\frac{dx}{dt}-F_{pp}\left(p'_t+p'_x\frac{dx}{dt}\right)=0, \qquad (9.3.6)$$

або

$$F_x-F_{pt}-F_{px}p-F_{pp}p'_t-F_{pp}p'_x p=0. \qquad (9.3.7)$$

Порівнюючи вирази (9.3.5), (9.3.6), отримаємо

$$F_x - p(F_{px} - F_{pp}p_x^{'}) = F_{pt} + F_{pp}p_t^{'},$$

що і треба було показати. Отже, підінтегральний вираз інтеграла Гільберта є повним диференціалом.

Як випливає з теорії криволінійних інтегралів, якщо підінтегральний вираз є повним диференціалом, то криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування, причому, якщо $\overline{x}(t)$ збігається з $x_0(t)$, то інтеграл Гільберта спрощується:

$$I_1\left[x(t)\right] =$$

$$= \int_{c_0} \left(F\left(t, x, p(t,x)\right) + \left(\frac{dx}{dt} - p(t,x)\right) F_p\left(t, x, p(t,x)\right)\right) dt =$$

$$= \int_{c_0} F\left(t, x_0(t), x_0^{'}(t)\right) dt.$$

Тепер для будь-якої кривої $\overline{C}$ матимемо

$$\int_{c_0} F\left(t, x_0(t) x_0^{'}(t)\right) dt =$$

$$= \int_{\overline{c}} [F\left(t, \overline{x}(t), p\left(t, \overline{x}(t)\right)\right) dt + \left(\overline{x}(t) - p\left(t, \overline{x}(t)\right)\right) F_p\left(t, \overline{x}(t), p\left(t, \overline{x}(t)\right)\right)] dt.$$

Звідси різниця функціонала становить

$$\Delta I\left[x(t)\right] =$$

$$= \int_{\overline{c}} [F\left(t, x, x^{'}\right) - F(t, x, p) - \left(x^{'} - p\right) F_p(t, x, p)] dt.$$

Позначимо

$$E\left(t, x, x^{'}, p\right) =$$

$$= F\left(t, x, x^{'}\right) - F(t, x, p) - \left(x^{'} - p\right) F_p(t, x, p),$$

тоді

$$\Delta I\left[x(t)\right] = \int_{\overline{c}} F\left(t, x, x^{'}, p\right) dt.$$

9.3.3. Достатні умови сильного та слабкого екстремумів

На підставі одержаних результатів сформулюємо достатні умови екстремуму функціоналів.

Означення 9.3.4. Якщо різниця функціонала $\Delta I\left[x(t)\right]$ зберігає знак для кривих $x(t)$ у метриці $C^1_{[t_0,t_1]}$, то функціонал $I\left[x(t)\right]$ досягає на кривій $x_0(t)$ *слабкого екстремуму*.

Теорема 9.3.2. Щоб функціонал $I\left[x(t)\right]$ досягав на кривій $x_0(t)$ слабкого екстремуму, достатньо, щоб:

1) крива $x_0(t)$ задовольняла рівняння Ейлера та крайові умови;

2) крива $x_0(t)$ не мала спряжених точок, тобто задовольняла умову Якобі;

3) функція Веєрштрасса $E\left(t,x,x',p\right)$ не змінювала знак у всіх точках (t,x), близьких до кривої $x_0(t)$, і для p, близьких до значення $\left(x'\right)$.

При цьому для мінімуму потрібно, щоб $E\left(t,x,x',p\right)\geq 0$, а для максимуму – щоб $E\left(t,x,x',p\right)\leq 0$.

Теорема 9.3.3. Щоб функціонал $I\left[x(t)\right]$ досягав на кривій $x_0(t)$ сильного екстремуму, достатньо, щоб:

1) крива $x_0(t)$ задовольняла рівняння Ейлера і крайові умови;

2) крива $x_0(t)$ не мала спряжених точок, тобто задовольняла умову Якобі;

3) функція Веєрштрасса $E\left(t,x,x',p\right)$ не змінювала знак у всіх точках (t,x), близьких до кривої $x_0(t)$, за довільних значень p.

При цьому для мінімуму потрібно $E\left(t,x,x',p\right)\geq 0,$ а для максимуму – $E\left(t,x,x',p\right)\leq 0.$

Зауваження. Умову знакосталості функції Веєрштрасса можна замінити умовою знакосталості функції $F_{pp}(t,x,p)$ і для слабкого максимуму вимагати, щоб $F_{pp}(t,x,p)\leq 0,$ а для слабкого мінімуму – щоб $F_{pp}(t,x,p)\geq 0.$ Це *умова Лежандра,* причому якщо F залежить від кількох функцій, то F_{pp} є матрицею Якобі й потрібно перевіряти її знакосталість.

Розкладемо $F\left(t,x,x'\right)$ за формулою Тейлора в околі $x'=p.$ Отримаємо

$$F\left(t,x,x'\right)=F\left(t,x,p\right)+F_p\left(t,x,p\right)\left(x'-p\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}F_{pp}\left(t,x,p\right)\left(x'-p\right)^2+\ldots$$

Звідси

$$E\left(t,x,x',p\right)=F\left(t,x,x'\right)-F\left(t,x,p\right)-\left(x'-p\right)F_p\left(t,x,p\right)=$$
$$=\frac{1}{2}F_{pp}\left(t,x,p\right)\left(x'-p\right)^2+\ldots\approx\frac{1}{2}F_{pp}\left(t,x,p\right)\left(x'-p\right)^2.$$

Знак функції Веєрштрасса $E\left(t,x,x',p\right)$ збігається зі знаком $F_{pp}(t,x,p)$ і екстремум є слабким.

Приклад 9.3.1. Дослідити на екстремум функціонал

$$I\left[x(t)\right]=\int_0^1\left(x'\right)^2dt,\ \ x(0)=0,\ \ x(1)=2.$$

1. Перевіримо виконання першої умови. Запишемо рівняння Ейлера

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0,$$

отримаємо

$$F=\left(x'\right)^3,\ \ F_x=0,\ \ F_{x'}=3x'^2,$$

звідки

$$-\frac{d}{dt}\left(3x'^2\right)=0,\;\; x_1^2=C_1^2,\;\; x(t)=C_1t+C_2.$$

Підставимо початкові умови

$$x(0)=C_2=0,\;\; x(1)=C_1=2.$$

Бачимо, що екстремум є кривою

$$x_0(t)=2t.$$

2. Перевіримо виконання умови Якобі.

а) Геометрично рівняння пучка екстремалей, що проходять через точку $x(0)=0$, описується як $x(t)=C_1t$, а пряма $x(t)=2t$ лежить усередині пучка екстремалей (рис. 9.3.3).

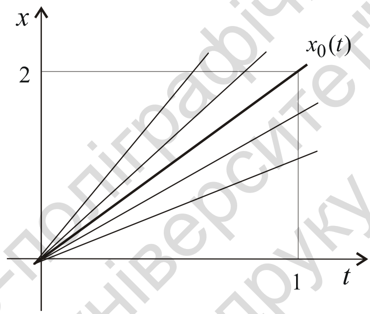


Рис. 9.3.3

б) Дослідимо виконання умови Якобі аналітично. Запишемо рівняння Якобі

$$\left(F_{xx}-\frac{d}{dt}F_{xx'}\right)u-\frac{d}{dt}\left(F_{x'x'}u'\right)=0.$$

Оскільки

$$F=x'^2,\;\; F_{xx}=0,\;\; F_{xx'}=0,\;\; F_{x'x'}=6x',$$

то рівняння Якобі набуде вигляду

$$-\frac{d}{dt}\left[6x_0'(t)u'\right]=0,\;\; x_0(t)=2t,\; x_0'(t)=2.$$

Його розв'язком буде

$$-\frac{d}{dt}\left[12u'\right]=0,$$

звідки

$$u' = \bar{c}_1$$

і маємо

$$u(t, \bar{c}_1, \bar{c}_2) = \bar{c}_1 t + \bar{c}_2.$$

Підставимо ліву крайову умову

$$u\big|_{t=0} = 0,$$

отримаємо $t_2 = 0$.

Оскільки $u(t, \bar{c}) = \bar{c}_1 t \neq 0$ ніде, крім $t = 0$, то умови Якобі виконані та крива $x_0(t)$ не має на проміжку $t \in [0,1]$ спряжених точок.

3. Запишемо функцію Веєрштрасса

$$E(t, x, x', p) = F(t, x, x') - F(t, x, p) - F_p(t, x, p)\left(x' - p\right) =$$

$$= x'^3 - p^3 - 3p^2\left(x' - p\right) = \left(x' - p\right)\left(x'^2 + x'p + p^2\right) - 3p^2\left(x' - p\right) =$$

$$= \left(x' - p\right)\left[x'^2 + x'p - 2p^2\right] =$$

$$= \left(x' - p\right)\left(x' - p\right)\left(x' + 2p\right) = \left(x' - p\right)\left(x + 2p\right).$$

На екстремалі $x_0(t)$

$$E\left(t, x, x', p\right)\Big|_{x = x_0(t)} = (2 - p)^2 (2 + 2p) \geq 0 \text{ для } -1 \leq p < +\infty.$$

Отже, припустимими кривими можуть бути лише такі, у яких похідна лежить у границях $1 \leq p < +\infty$ і функціонал $I\left[x(t)\right]$ досягає на $x_0(t)$ слабкого мінімуму.

Приклад 9.3.2. Дослідити на екстремум функціонал

$$I\left[x(t)\right] = \int_0^1 \left[t + 2x + \frac{1}{2}x'^2\right]dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

1. Запишемо рівняння Ейлера

$$2 - \frac{d}{dt}\left(x'\right) = 0.$$

Звідси

$$x' = 2t + c_1, \quad x_0(t) = t^2 + c_1 t + c_2.$$

Підставимо крайові умови

$$x(0)=c_2=0,$$

$$x(1)=1+c_1=0.$$

Матимемо $c_1=-1,$ тобто крива, підозріла на екстремум, має вигляд $x_0(t)=t^2-t.$

2. Умова Якобі.

а) Перевіримо, чи входить $x_0(t)$ у пучок екстремалей. Оскільки

$$x(t)=t^2+\bar{c}_1t+\bar{c}_2,$$

то рівнянням пучка буде

$$x(t)=t^2+\bar{c}_1t=t(t+\bar{c}_1).$$

Бачимо, що $x_0(t)$ лежать усередині пучка (рис. 9.3.4).

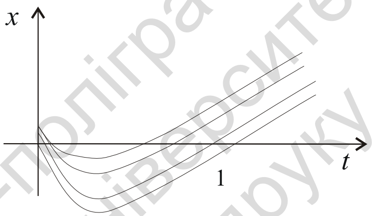


Рис. 9.3.4

б) Дослідимо виконання умови Якобі аналітично за допомогою рівняння Якобі

$$-\frac{d}{dt}\left(u'\right)=0.$$

Звідси

$$u'=\bar{c}_1,$$

або

$$u=\bar{c}_1t+\bar{c}_2.$$

Використаємо крайову умову $u\ \Big|_{t=0}=0$ і отримаємо $\bar{c}_2=0.$

Бачимо, що умова $u(t,\bar{c})=\bar{c}_1t\neq 0$ виконується лише при $t=0.$ Отже, умова Якобі виконується.

3. Запишемо функцію Веєрштрасса

$$E(t,x,x',p)=\left(t+2x+\frac{1}{2}x'^2\right)-\left(t+2x+\frac{1}{2}p^2\right)-\left(x'-p\right)p=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x'^2-p^2\right)-\left(x'-p\right)p=\left(x'-p\right)\left[\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}p-p\right]=\frac{1}{2}\left(x'-p\right)^2\geq 0.$$

Оскільки функція Веєрштрасса невід'ємна, то функціонал досягає сильного мінімуму при $x_0\left(t\right)=t^2-t$.

Завдання для самостійної роботи

4. Знайти екстремум функціоналів:

4.1. $I\left[x\left(t\right)\right]=\int\limits_0^1 e^t\left[x^2+\frac{1}{2}x'^2\right]dt,\ \ x\left(0\right)=1,\ \ \ x\left(1\right)=e;$

4.2. $I\left[x\left(t\right)\right]=\int\limits_0^1 e^x x'^2\,dt,\ \ x\left(0\right)=1,\ \ \ x\left(1\right)=\ln 4;$

4.3. $I\left[x\left(t\right)\right]=\int\limits_1^2 \frac{t^3}{x'^2}dt,\ \ x\left(1\right)=1,\ \ \ x\left(2\right)=4;$

4.4. $I\left[x\left(t\right)\right]=\int\limits_0^a \frac{dt}{x'},\ \ x\left(0\right)=1,\ \ x\left(a\right)=b,\ \ a>0,\ \ b>0.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Білоусова Л. І. Курс вищої математики у середовищі Maple / Л. І. Білоусова, М. М. Горонескуль. – Х. : УЦЗУ, КП "Міська друкарня", 2009.

2. Гаращенко Ф. Г. Диференціальні рівняння : навч. посіб. / Ф. Г. Гаращенко, І. І. Харченко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2002.

3. Гаращенко Ф. Г. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь / Ф. Г. Гаращенко, І. І. Харченко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2004.

4. Гаращенко Ф. Г. Диференціальні рівняння / Ф. Г. Гаращенко, В. Т. Матвієнко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2002.

5. Гаращенко Ф. Г. Диференціальні рівняння для інформатиків / Ф. Г. Гаращенко, В. Т. Матвієнко, І. І. Харченко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2008.

6. Головач Г. П. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь / Г. П. Головач, О. Ф. Калайда. – К. : Техніка, 1997.

7. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навч. посіб. / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012.

8. Гудименко Ф. С. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф. С. Гудименко, І. А. Павлюк, В. О. Волкова. – К. : Вища школа, 1972.

9. Доля П. Г. Розв'язання задач вищої математики на комп'ютері : учб. посіб. / П. Г. Доля, Г. М. Антоненко. – Х. : Харків. нац. ун-т імені В. Н. Каразіна, 2017.

10. Івасишен С. Д. Звичайні диференціальні рівняння: методи розв'язування та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, Н. І. Турчина. – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.

11. Збірник задач з диференціальних рівнянь / П. І. Каленюк та ін. – Л. : Вид-во Львів. політехніки, 2016.

12. Крак Ю. В. Теорія керування для інформатиків : підруч. / Ю. В. Крак, А. В. Шатирко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015.

13. Диференціальні рівняння / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. – К. : Вища школа, 1981.

14. Массалітіна Є. В. Операційне числення : метод. вказівки до вивч. дисципліни "Вища математика" для студ. енергет. спец. усіх форм навчання / Є. В. Массалітіна, В. О. Гончаренко. – К. : НТУУ "КПІ", 2006.

15. Моклячук М. П. Варіаційне числення / М. П. Моклячук. – К., 2003.

16. Перестюк М. О. Диференціальні рівняння. Задачі підвищеної складності / М. О. Перестюк. – К. : ТвіМС, 2005.

17. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь / М. О. Перестюк, О. В. Капустян, П. В. Фекета, Н. В. Касімова. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015.

18. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К., Вища школа, 1994. – 454 с.

19. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Вища школа, 1994.

20. Математичне моделювання / А. М. Самойленко, К. К. Кенжебаєв, О. М. Станжицький. Є. Ю. Таран. – К. : Наук. думка, 2015.

21. Хусаінов Д. Я. Диференціальні рівняння / Д. Я. Хусаінов, О. С. Бичков. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2001.

22. Хусаінов Д. Я. Диференціальні рівняння / Д. Я. Хусаінов, І. В. Мусатенко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010.

23. Edwards C. Hanry. Differential Equation and Boundary Value Problems: Computing and Modeling / C. Hanry Edwards, David E. Penny. – Third Edition. – Pearson Education Inc., Upper Saddle River, 2008.

24. Bard Gregory V. Sage for Undergraduates / Gregory V. Bard. – American Mathematical Society, Providence, 2015.

25. John Fritz. Partial Differential Equations / Fritz John. – Fourth Edition. – Springer, 1982.

26. Judson Thomas W. The Ordinary Differential Equations Project / Thomas W. Judson. – Text draft, 2017. – https : //faculty.sfasu.edu/ judsontw/ode/html-20220730/odeproject.html

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 5

Навчальне видання

ХУСАІНОВ Денис Яхьєвич
ШАТИРКО Андрій Володимирович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Підручник

Редактор *Н. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Формат 60x84[1/16]. Ум. друк. арк. 23,83. Наклад 100. Зам. № 223-10649.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К2.
Підписано до друку 29.05.23

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.knu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02