**ЛЕКЦІЯ 6**

**6.1. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ БАГАТОРАЗОВИХ ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ.**

Припустимо, що при багаторазових вимірюваннях в однакових умовах деякої фізичної величини отримали ряд значень *x*1, *x*2, ..., *x*N. Отримання такого ряду вимірюваних значень *xi*, кожне з яких може відрізнятися від постійного (в умовах досліду) істинного значення величини *xіст*, може спричинюватися випадковими перешкодами: тертям у вимірювальних вузлах, зміною тиску, зміною температури тощо. Крім того, ряд отриманих значень *xi* може свідчити про те, що величина *x* має випадковий (статистичний) характер.

У першому випадку доситьдоброю оцінкою *xіст* є середнє арифметичне знайдених значень *xi*:

. (6.1)

В іншому випадку, зміст середнього значення величини  вичерпується її визначенням, як середнього вимірюваних значень *xi*. Тоді похибку, яка за даних умов називається випадковою, оцінюють за формулою:

, (6.2)

а  знаходять із співвідношення (6.1) при *N* ≥ 2. Повна похибка може бути обчислена (у випадку відомих випадкової () і систематичної  похибок) за формулою:

. (6.3)

Тоді результат вимірювань записується у вигляді:

. (6.4)

З рівняння (6.3) випливає, що безглуздо домагатися такого результату, при якому . Навпаки, необхідне число вимірювань *N* можна визначити за умови  і майже завжди достатньо вибрати *N* = 10.

**Примітки***.*

1. Немає потреби записувати  у виразі (6.4) з точністю, що перевищує значення . Наприклад, запис *x* = 5,83145 ± 0,7 є некоректним. Правильно треба записати так: *x* = 5,8 ± 0,7.
2. Похибку  треба записувати з точністю до однієї-двох значущих цифр. Наприклад, запис *x* = 2,71 ± 0,5843 безглуздий. Правильно треба записати так *x* = 2,7 ± 0,6.

Якщо у вимірюваннях присутні випадкові похибки, то поява різних значень *xi* є в процесі вимірювань випадковою подією. Проте існує деяка ймовірність влучення цього значення *xi* в інтервал *xi*-*Δxi*, *xi*+*Δxi*. Це влучення часто визначається законом нормального ***розподілу Гауса***:

, (6.5)

де - стала величина, яка називається дисперсією розподілу (рис.1).

Розподіл Гауса характеризується двома параметрами: середнім значенням випадкової величини  та дисперсією . При нескінченно великому числі вимірювань   співпадає з істинним значенням величини, яка вимірюється.

***Довірчим інтервалом*** називається інтервал , у який попадає істинне значення *x* величини, яка вимірюється, із заданою ймовірністю.

***Y***

***σ=*1**

***σ =*2**

***σ =*4**

***X***















Рис. 1.

***Надійністю*** результату деякої кількості вимірювань називається імовірність *α* того, що істинне значення  величини, яка вимірюється, потрапляє в даний довірчий інтервал. Звичайно *α* виражається в частках одиниці або у відсотках.

Величина *α* залежить від числа *N* виконаних вимірювань, а також від заданої похибки .

Наприклад, при *N* ≥ 30, обравши , маємо 0.68.

У випадку  дисперсія , що входить у розподіл (14), дорівнює середньоквадратичній похибці окремого вимірювання :

. (6.6)

Величина  характеризує ступінь впливу випадкових похибок на результати вимірювань: чим менше , тим точніше проведені вимірювання.

Якщо у вимірюваннях , то таке вимірювання відноситься до промахів і відкидається. Величина 3 звичайно приймається за граничну абсолютну похибку одного вимірювання.

У більшості випадків при проведенні вимірювань немає можливості провести їх у великій кількості. Розглянемо, як змінюється надійність при зміні числа вимірювань. Така залежність складна і в елементарних функціях не виражається.

Існують спеціальні таблиці ***коефіцієнтів Стьюдента***, з яких можна визначити, у скільки разів потрібно збільшити стандартний довірчий інтервал , щоб при певному числі вимірювань *N* отримати задану надійність *α* (див. табл.).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число ви-мірювань | Надійність | | | | | | | |
| 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,98 | 0,999 |
| 2 | 1,00 | 1,38 | 2,0 | 3,1 | 6,3 | 12,7 | 31,8 | 636,6 |
| 3 | 0,82 | 1,06 | 1,3 | 1,9 | 2,9 | 4,3 | 7,0 | 31,6 |
| 4 | 0,77 | 0,98 | 1,3 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,5 | 12,9 |
| 5 | 0,74 | 0,94 | 1,2 | 1,5 | 2,1 | 2,8 | 3,7 | 8,6 |
| 6 | 0,73 | 0,92 | 1,2 | 1,5 | 2,0 | 2,6 | 3,4 | 6,9 |
| 7 | 0,72 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,4 | 3,1 | 6,0 |
| 8 | 0,71 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,4 | 3,0 | 5,4 |
| 9 | 0,71 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,3 | 2,9 | 5,0 |
| 10 | 0,70 | 0,88 | 1,1 | 1,4 | 1,8 | 2,3 | 2,8 | 4,8 |
| 15 | 0,69 | 0,87 | 1,1 | 1,3 | 1,8 | 2,1 | 2,6 | 4,1 |
| 20 | 0,69 | 0,86 | 1,1 | 1,3 | 1,7 | 2,1 | 2,5 | 3,9 |
| 40 | 0,68 | 0,85 | 1,1 | 1,2 | 1,7 | 2,0 | 2,4 | 3,6 |
| 60 | 0,68 | 0,85 | 1,0 | 1,3 | 1,7 | 2,0 | 2,4 | 3,5 |
| 120 | 0,68 | 0,85 | 1,0 | 1,3 | 1,7 | 2,0 | 2,4 | 3,4 |
| ∞ | 0,67 | 0,84 | 1,0 | 1,3 | 1,6 | 2,0 | 2,3 | 3,3 |

За стандартний інтервал приймають інтервал , де

. (6.7)

Обробку результатів варто проводити в такому порядку:

1. Виконують *N* вимірювань і результати заносять до таблиці;
2. За формулою (10) знаходять ;
3. За формулою (6.7) обчислюють  і за допомогою таблиці знаходять коефіцієнт Стьюдента  в залежності від заданої надійності *α* та числа вимірювань *N*;
4. Результат записують у вигляді:

. (6.8)

Такий запис означає, що істинне значення величини *xіст*, яка вимірюється,знаходиться в інтервалі  з надійністю*α*.

Відносна похибка 100% є мірою точності результатів вимірювань.

**Наприклад**, при вимірюванні діаметра кулі за допомогою мікрометра отримали 16 (*N* = 16) значень від 12,50 до 12,55 мм.

Середнє арифметичне цих значень *d*ср = 12,52 мм, а сума квадратів абсолютних похибок окремих вимірювань (від -0,022 до +0,028) дорівнює 0,003096. Середнє значення абсолютних похибок *Δdср* = 0,01 мм.

Дисперсія дорівнює:

0,014 мм.

Гранична абсолютна похибка окремого вимірювання 3*σ =* 3⋅0,014 =   
= 0,042 мм. Таким чином, у серії вимірювань не було промахів, тому що   
3*σ* > *Δdі*: 0,022 < 0,028 < 0,042 мм.

### Гранична абсолютна похибка результату вимірювання є не більшою, ніж

0,01 мм.

Результати вимірювань записують у вигляді:

*d* = (12,52±0,01) мм або 12,51 ≤ *d* ≤ 12,53 (мм).

Такий же розрахунок можна виконати, використовуючи стандартний довірчий інтервал при надійності, наприклад, 0,95:

0,004 (*tα* = 2,1),

*d* = 12,52 ± 0,004⋅2,1 = (12,52 ± 0,008) мм.

**6.2. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ**

# Припустимо, що величина *x* визначається не безпосередньо, а побічно, тобто за результатами вимірювання інших величин *y* і *z*:

.

У цьому випадку найкраще значення при оцінюванні результату запишеться так:

, (6.9)

де  і  знаходяться за формулою (6.1).

Розглянемо можливість визначення *Δx*, якщо відомі *Δy* і *Δz*. Оскільки самі величини *y* і *z* визначаються шляхом прямих вимірювань, то їхні похибки *Δy* і *Δz* можуть бути обчислені за формулами (6.2) і (6.3).

Необхідно зазначити, що , отже, простою оцінкою для *Δx* може бути різниця

. (6.10)

Отже, ***похибка непрямого вимірювання може знаходитися через похибки прямих вимірювань за правилом диференціювання.*** Такої оцінки часто виявляється цілком достатньо.

Більш точним є такий вираз:

, (6.11)

де  і  - часткові похідні по *y* і *z* взяті при значеннях .

Необхідно зазначити, що, виходячи з визначення відносної похибки   
(), результат вимірювання величини *x* може бути записаний у вигляді:

, оскільки .

**Розглянемо конкретні випадки.**

Розглянемо випадок, коли *x* є ступеневою функцією *y* і *z*:

,

.

Тоді із (6.11) відносна похибка дорівнює:

. (6.12)

Із співвідношення (6.22) випливає, що при вимірюваннях необхідно найбільш точно визначати значення величини, яка входить у розрахункову формулу з найбільшим по модулю показником ступеня.

Розглянемо деякі випадки розрахунку максимальних похибок результатів непрямих вимірювань величини *x*.

**Теорема 1**. Абсолютна похибка суми дорівнює сумі абсолютних похибок доданків.

Якщо *x* = *a + b*, то *Δx* = *Δa + Δb.* (6.13)

**Теорема 2**. Абсолютна похибка різниці дорівнює сумі абсолютних похибок зменшуваного і від’ємника.

Якщо *x* = *a - b*, то *Δx* = *Δa + Δb.* (6.14)

**Теорема 3**. Абсолютна похибка добутку двох співмножників дорівнює сумі добутків першого множника на абсолютну похибку другого і другого множника на абсолютну похибку першого.

Якщо *x* = *ab* і , то . (6.15)

***Наслідок 1***. Для випадку *N* множників:

 (6.16)

***Наслідок 2***. Абсолютна похибка ступеня:

Якщо *x* = *an*, то *Δx* = *nān-*1*Δa.* (6.17)

***Теорема 4***. Абсолютна похибка дробу дорівнює сумі добутків знаменника на абсолютну похибку чисельника і чисельника на абсолютну похибку знаменника, поділеній на квадрат знаменника.

Якщо , то . (6.18)

**Із зазначених теорем випливає, що максимальні абсолютні похибки величин при їх непрямих вимірюваннях визначаються за правилами диференціювання, якщо замінити значок диференціала *d* значком помилки *Δ*. При цьому знаки вибирати треба так, щоб абсолютна величина похибки була максимальною.**

Знаючи середнє значення величини *x*, яка вимірюється непрямим вимірюванням, і значення абсолютної похибки *Δx*, можна знайти відносну похибку непрямих вимірювань. Наприклад, якщо *x* = *A* + *B*, а *Δx = ΔA* + *ΔB*, то .

У таблиці наведені формули розрахунку відносних граничних похибок фізичних величин, що виражаються найбільш застосовуваними функціями:

|  |  |
| --- | --- |
| Функція | Гранична відносна похибка |
| *x* =*a+b+c* |  |
| *x*=*a-b* |  |
| *x*=*abc*… |  |
| *x*=*an* |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

У деяких випадках відносну похибку при непрямих вимірюваннях можна визначити іншим методом.

Відповідно до означення . Відомо, що  або .

Таким чином, ***відносну похибку результату можна знайти шляхом логарифмування вихідного виразу і наступного диференціювання із заміною значків диференціала значками похибок і вибору знаків таким чином, щоб абсолютна величина отриманої відносної помилки була максимальною***.

Якщо в розрахункові формули входять константи, то вони беруться з такою точністю, щоб число значущих цифр у них було на одиницю більшим, ніж число значущих цифр у значеннях величин, які вимірюються. Тоді константи практично не вносять похибок у результат вимірювань.

**ПРАВИЛА ОКРУГЛЕННЯ ЧИСЕЛ**

1. Округлення досягається простим відкиданням цифр, якщо перша з цифр, що відкидаються, є меншою, ніж п'ять (1289,461 ≈ 1289).

2. Якщо перша з цифр, що відкидаються, є більшою або рівною п'яти, то остання цифра збільшується на одиницю (12,859 ≈ 12,86).

3. Якщо цифра, що відкидається, дорівнює п'яти, а за нею немає значущих цифр, то округлення виконується до найближчого парного числа (0,435 ≈ 0,44; 0,465 ≈ 0,46).

4. При додаванні і відніманні округлення всіх чисел виконується відповідно до вищезазначених правил до розряду на одиницю меншого, ніж розряд найменш точного числа. У результаті треба зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх у наближеному даному з найменшим числом десяткових знаків.

Наприклад: 23,2 + 0,442 + 7,247 ≈ 23,2 + 0,44 + 7,25 ≈ 30,9.

5. При множенні і діленні в результаті треба зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має наближене дане з найменшим числом значущих цифр.

Наприклад: 30,9 ⋅1,8364 ≈ 30,9 ⋅ 1,84 = 56,856 ≈ 56,9.

56,9 : 2,412 ≈ 56,9 : 2,41 = 23,609 ≈ 23,6.