

## Розділ 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної

### 2.1. Поняття диференціального рівняння, його порядок

#### Означення 2.1.

Рівняння вигляду

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.1)$$

називається диференціальним рівнянням (наявність похідних тут обов'язкова).

Означення 2.2. Найбільший порядок похідної, яка входить в диференціальне рівняння (2.1) називається порядком диференціального рівняння.

Означення 2.3. Функція  $y(x)$  називається розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння (2.1), якщо вона  $n$ -раз неперервно диференційовна на деякому інтервалі  $(a, b) = I$  і задовольняє диференціальному рівнянню (2.1)  $\forall x \in I$ .

Приклад 2.1.  $y'' + 3xy' + 2y = x^2$  – диференціальне рівняння другого порядку.

При  $n=1$  диференціальне рівняння (2.1) називається диференціальним рівнянням першого порядку і записується таким чином

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2.2)$$

Диференціальне рівняння (2.2) називається розв'язаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.3)$$

Припускаємо, що  $f(x, y)$  однозначна і неперервна в деякій області  $D$  змінних  $x, y$ . Цю область називають областю визначення диференціального рівняння (2.3).

Якщо в деякій області функція  $f(x, y)$  перетворюється в  $\infty$ , то в цій області розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \quad .$$

Множину таких точок, а також тих, в яких  $f(x, y)$  не визначена, але може бути довизначена до неперервності, будемо приєднувати до області визначення диференціального рівняння (2.3).

Поряд з (2.3) будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціалах

$$dy - f(x, y)dx = 0, \quad (2.4)$$

або в більш загальному виді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.5)$$

Інколи розглядатимемо диференціальне рівняння в симетричній формі

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)} . \quad (2.6)$$

Функції  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$ ,  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  будемо вважати неперервними в деякій області.

**Означення 2.4.** Розв'язком диференціального рівняння (2.3) на інтервалі  $I$  назвемо функцію  $y = \varphi(x)$ , визначену і неперервно диференційовну на  $I$ , яка не виходить з області означення функції  $f(x, y)$  і яка перетворює диференціальне рівняння (2.3) в тотожність  $\forall x \in I$ , тобто

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

В цьому випадку  $y = \varphi(x)$  називається розв'язком, записаним в явній формі (вигляді).

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням.

Не завжди можна отримати розв'язок в явному вигляді.

**Означення 2.5.** Будемо говорити, що рівняння

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (2.7)$$

визначає в неявній формі розв'язок диференціального рівняння (2.3), якщо воно визначає  $y = y(x)$ , яка є розв'язком диференціального рівняння (2.3).

При цьому на розв'язках диференціального рівняння (2.3) виконується

$$\Phi'_x(x, y) + \Phi'_y(x, y) \frac{dy}{dx} = \Phi'_x(x, y) + \Phi'_y(x, y) f(x, y) \equiv 0, \quad x \in I . \quad (2.8)$$

**Означення 2.6.** Будемо говорити, що співвідношення

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (1.9)$$

визначають розв'язок диференціального рівняння (2.3) в параметричній формі на інтервалі  $(t_0, t_1)$ , якщо

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f(\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in (t_0, t_1) . \quad (2.10)$$

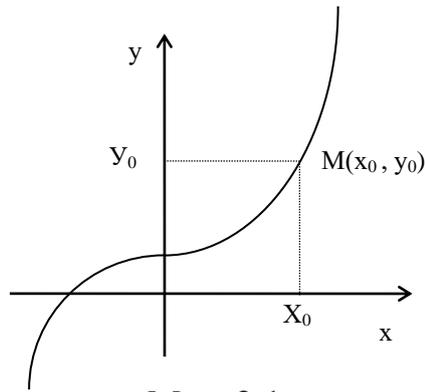
## 2.2. Задача Коші

Розглянемо диференціальне рівняння (2.3). Задача Коші заключається в тому, щоб серед всіх розв'язків диференціального рівняння (2.3) знайти такий  $y = y(x)$ , який проходить через задану точку

$$y(x_0) = y_0 . \quad (2.11)$$

Тут  $x_0$  - початкове значення незалежної змінної,  $y_0$  - функції.

Розв'язати задачу Коші з геометричної точки зору означає (мал. 2.1): знайти серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння (2.3) ту, яка проходить через задану точку  $M(x_0, y_0)$ .



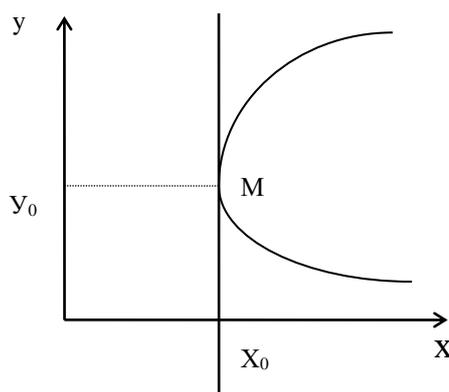
Мал. 2.1.

**Означення 2.7.** Будемо говорити, що задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний розв'язок, якщо  $\exists$  число  $h > 0$ , що на відрізку  $|x - x_0| \leq h$  визначений розв'язок  $y = y(x)$  такий, що  $y(x_0) = y_0$  і не існує другого розв'язку, визначеного в цьому ж інтервалі  $|x - x_0| \leq h$  і не співпадаючого з розв'язком  $y = y(x)$  хоча б в одній точці інтервалу  $|x - x_0| \leq h$ , відмінній від точки  $x = x_0$ .

Якщо задача Коші (2.3), (2.11) має не один розв'язок або ж зовсім його не має, то говорять, що в точці  $(x_0, y_0)$  порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

При постановці задачі Коші ми припускаємо, що  $x_0, y_0$  - обмежені числа, а диференціальне рівняння (2.3) в точці  $(x_0, y_0)$  задає деякий напрямок поля, який не паралельний осі ОУ.

Якщо права частина диференціального рівняння (2.3) в точці М приймає нескінченне значення, необхідно розглянути диференціальне рівняння (2.3) і знайти розв'язок  $x = x(y)$  (мал. 2.2).



Мал. 2.2

Якщо ж в точці М права частина диференціального рівняння (2.3) має невизначеність, наприклад, типу  $\frac{0}{0}$ , тоді звичайна постановка задачі Коші не має змісту, так як через точку М не проходить жодна інтегральна крива. В цьому випадку задача Коші ставиться так: знайти розв'язок  $y = y(x)$  (або

$x = x(y)$ ), який примикає до точки  $M$ .

В деяких випадках треба шукати розв'язок  $y = y(x)$ , який задовольняє умовам  $y \rightarrow y_0 \neq \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ ;  $y \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0 \neq \infty$  і т.д.

**Теорема Пікара** (без доведення). Припустимо, що функція  $f(x, y)$  в диференціальному рівнянні (2.3) визначена і неперервна в обмеженій області

$$D = \{x, y : |x - x_0| \leq a; |y - y_0| \leq b\} \quad (a > 0, b > 0)$$

і, отже, вона є обмеженою

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in D \quad (M > 0); \quad (2.12)$$

функція  $f(x, y)$  має обмежену частинну похідну по  $y$  на  $D$

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K, \quad (x, y) \in D \quad (K > 0) \quad . \quad (2.13)$$

При цих умовах задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний неперервно-диференційовний розв'язок в інтервалі

$$|x - x_0| \leq h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}. \quad (2.14)$$

**Зауваження 2.1.** В сформульованій теоремі умову (2.13) можна послабити (замінити) на те, щоб функція  $f(x, y)$  по змінній  $y$  задовольняла умові Ліпшица, тобто

$$\left| f(x, y^{(1)}) - f(x, y^{(2)}) \right| \leq L |y^{(1)} - y^{(2)}| \quad \forall (x, y^{(1)}) \text{ і } (x, y^{(2)}) \in D. \quad (2.15)$$

Тут  $L > 0$  - найменша константа, яка задовольняє (2.15) і називається константою Ліпшица.

**Теорема Пеано** (про існування розв'язку). Якщо функція  $f(x, y)$  є неперервною на  $D$ , то через кожную точку  $(x_0, y_0) \in D$  проходить, по крайній мірі, одна інтегральна крива.

Якщо функція диференційовна і задовольняє (2.13), то вона задовольняє умові Ліпшица, з  $L=K$ .

Функція може зодовольняти умові Ліпшица, але не бути диференційовною і, отже, не буде задовольняти (2.13). Наприклад,  $y = |x|$  ( $L=1$ ).

### 2.3. Поняття загального розв'язку, форми його запису

На прикладах можна переконатися, що диференціальне рівняння (2.3) має нескінченну множину розв'язків, яка залежить від деякого параметру  $c$

$$y = u(x, c). \quad (2.16)$$

Це сімейство і називається загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3). При кожному  $c$  (2.16) дає інтегральну криву.

Для розв'язування задачі Коші (2.3), (2.11) параметр  $c$  можна знайти з рівняння  $y_0 = u(x_0, c)$ .

Дамо точне визначення загального розв'язку. Припустимо, що на  $D$  виконуються умови теореми Пікара.

**Означення 2.8.** Функцію

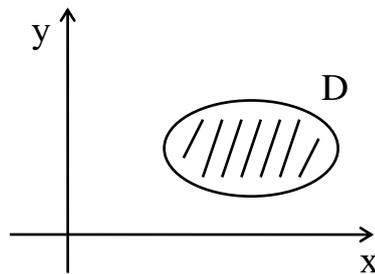
$$y = \varphi(x, c), \quad (2.17)$$

визначену в деякій області змінних  $x$  і  $c$ , і яка має неперервну частинну похідну за  $x$  будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) в області  $D$ , якщо рівняння (2.17) можна розв'язати відносно  $c$  в області  $D$

$$c = \psi(x, y) \quad (2.18)$$

і функція (2.17) є розв'язком диференціального рівняння (2.3) при всіх значеннях довільної сталої  $c$ , які визначаються формулою (2.18), коли  $(x, y) \in D$ .

Суть означення 2.8 в наступному. Припустимо, що задано сімейство кривих  $F$  на області  $D$ , яке залежить від одного параметра  $c$ . Якщо будь-яка крива із  $F$  є інтегральною кривою диференціального рівняння (2.3) і всі криві із  $F$  в сукупності покривають  $D$ , то  $F$  є розв'язком диференціального рівняння (2.3) в області  $D$  (мал. 2.3).



Мал. 2.3

Для розв'язування задачі Коші константу  $c$  можна знайти згідно (2.18)

$$c_0 = \psi(x_0, y_0) .$$

Інколи в формулі (2.17) роль  $c$  грає  $y_0$ , тоді говорять, що розв'язок представлений у формі Коші

$$y = y(x, x_0, y_0) . \quad (2.19)$$

**Приклад 2.2.** Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad y(x_0) = y_0$$

у формі Коші.

Розв'язання. Загальний розв'язок  $y = cx$ ,  $0 < x < \infty$ ,  $-\infty < y < +\infty$ . В указаній області виконуються умови теореми Пікара. Звідки  $c = \frac{y}{x}$ ,  $c_0 = \frac{y_0}{x_0}$ ,  $y = \frac{y_0}{x_0}x$  – розв'язок в формі Коші.

В більшості випадків при інтегруванні диференціального рівняння (2.3) ми отримуємо загальний розв'язок в неявній формі

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad (\text{або } \psi(x, y) = c) , \quad (2.20)$$

який називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2.3).

**Означення 2.9.** Будемо називати співвідношення (2.20) загальним розв'язком в неявній формі або загальним інтегралом в області  $D$ , якщо співвідношенням (2.20) визначається загальний розв'язок (2.17) диференціального рівняння (2.3) в області  $D$ .

З означення випливає, що (2.18) - загальний інтеграл диференціального

рівняння (2.3) в області  $D$ .

Інколи при інтегруванні отримуємо сімейство інтегральних кривих, залежне від  $c$ , в параметричній формі.

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c) \\ y = \psi(t, c) \end{cases} \quad (2.21)$$

Таке сімейство інтегральних кривих будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) в параметричній формі.

Якщо в (2.21) виключити  $t$ , то отримаємо загальний розв'язок в неявній або явній формі.