

Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної

2.7. Рівняння Рікатті

Рівняння Рікатті має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (2.77)$$

де $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ – визначені та неперервні на (a,b) скалярні функції. Причому $R(x) \neq 0$ і $P(x) \neq 0$, так як при цьому диференціальне рівняння (2.77) вироджується в рівняння Бернуллі або лінійне відповідно.

При таких припущеннях відносно функцій $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ диференціальне рівняння (2.77) має єдиний розв'язок при $y(x_0) = y_0$. Тому диференціальне рівняння особливих розв'язків не має.

Властивості диференціального рівняння (2.77):

а) диференціальне рівняння (2.77) інваріантно відносно перетворення

$$x = \varphi(t) \quad (\varphi'(t) \neq 0); \quad (2.78)$$

б) диференціальне рівняння (2.77) інваріантно відносно дробно-лінійного перетворення

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)}, \quad (2.79)$$

де $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ будь-які неперервно-диференційовані функції на (a,b) , які задовольняють умові $\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x) \neq 0$, z – нова незалежна змінна.

Заміною $y = \alpha(x)z + \beta(x)$ диференціальне рівняння (2.77) приводиться до рівняння вигляду

$$\frac{dz}{dx} = \pm z^2 + a(x). \quad (2.80)$$

При змінних $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ диференціальне рівняння (2.77) інтегрується тільки в деяких випадках, а саме:

$$y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c), \quad a, b, c - \text{константи}. \quad (2.81)$$

Це диференціальне рівняння з розділеними змінними;

$$y' = a \frac{y^2}{x^2} + b \frac{y}{x} + c, \quad a, b, c - \text{константи}. \quad (2.82)$$

Це однорідне диференціальне рівняння;

$$y' = a \frac{y^2}{x} + b \frac{y}{x} + c, \quad a, b, c - \text{константи}. \quad (2.83)$$

Це диференціальне рівняння, яке зводиться до диференціального рівняння (2.81) заміною $y = z\sqrt{x}$;

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2} \quad (2.84)$$

– інтегрується, так як є узагальнено–однорідним при $k = -1$. Заміна $y = \frac{z}{x}$.

Тут a, b, c – постійні, такі, що $a^2 + c^2 \neq 0$.

Побудова загального розв'язку диференціального рівняння (2.77) у випадках, якщо відомі частинні лінійно-незалежні розв'язки.

A. Відомо один частинний розв'язок $y_1(x)$.

Твердження 2.1. Якщо відомо один частинний розв'язок $y = y_1(x)$ диференціального рівняння (2.77), то воно зводиться до рівняння Бернуллі при $n=2$.

Доведення. Зробимо заміну

$$y = y_1(x) + z. \quad (2.85)$$

Підставимо (2.85) в (2.77)

$$y'_1 + z' = P(x)(y_1^2 + 2y_1z + z^2) + Q(x)(y_1 + z) + R(x).$$

Звідки

$$z' - (2P(x)y_1(x) + Q(x))z = P(x)z^2. \quad (2.86)$$

Далі підстановкою $u = \frac{1}{z}$ диференціальне рівняння (2.86) зводимо до лінійного

$$u' + (2P(x)y_1(x) + Q(x))u = -P(x). \quad (2.87)$$

Тому, при відомому одному частинному розв'язку диференціальне рівняння (2.87) інтегрується через дві квадратури. Постільки $z = \frac{1}{u}$, то

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u}. \quad (2.88)$$

Дослідимо структуру загального розв'язку диференціального рівняння (2.87). Так як $u = A(x)c + B(x)$, то

$$y = y_1(x) + \frac{1}{A(x)c + B(x)}. \quad (2.89)$$

Тобто загальний розв'язок – це дробно-раціональна функція змінної c .

B. Відомо два частинні розв'язки диференціального рівняння (2.87) $y_1(x), y_2(x)$.

Твердження 2.2. Якщо відомо два частинні розв'язки диференціального рівняння (2.87), то загальний розв'язок записується через одну квадратуру.

Дійсно, при заміні (2.88) $u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ є частинним розв'язком лінійного

рівняння (2.87). Але загальний розв'язок диференціального рівняння (2.87) знаходиться через одну квадратуру

$$u = ce^{-\int (2P(x)y_1(x) + Q(x))dx} + \frac{1}{y_2 - y_1}. \quad (2.90)$$

B. Відомо три частинні розв'язки диференціального рівняння (2.87) $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння Рікатті в цьому випадку знаходиться без квадратур. Дійсно, якщо $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ – частинні розв'язки

диференціального рівняння (2.77), то $u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$, $u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$ – частинні розв’язки лінійного рівняння (2.87). А в цьому випадку його розв’язок знаходиться без квадратур

$$u = c(u_2(x) - u_1(x)) + u_1(x) = c \left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1} \right) + \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}. \quad (2.91)$$

Підставляючи в (2.88) знайдемо розв’язок диференціального рівняння (2.77).

2.8. Рівняння в повних диференціалах

Означення 2.15. Рівняння (2.5) називається рівняння в повних диференціалах, якщо його ліва частина представляє собою повний диференціал деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = 0. \quad (2.92)$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (2.5) має вигляд

$$U(x, y) = c. \quad (2.93)$$

Особливих розв’язків в цьому випадку диференціальне рівняння (2.5) не має.

Приклад 2.13. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$x dx + y dy = 0,$$

Розв’язання. $U(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$ – загальний інтеграл.

Припустимо, що функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ – неперервно-диференційовані.

Теорема 2.4. Для того, щоб диференціальне рівняння (2.5) було рівнянням в повних диференціалах необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (2.94)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай диференціальне рівняння (2.5) є рівнянням в повних диференціалах $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$. Звідси

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \quad (2.95)$$

А це означає, що виконується (2.94).

Достатність. Нехай умова (2.94) виконується. Покажемо, що існує $U(x, y)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (2.92) або ж (2.95). Розглянемо перше рівняння з системи (2.95)

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y). \quad (2.96)$$

Рівняння (2.96) задовольняє функція

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y), \quad (2.97)$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція, яку виберемо так, щоб виконувалося друге рівняння системи (2.95)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Останнє співвідношення запишемо таким чином $\int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$.

Використавши (2.94), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) &= N(x, y), \quad N(x, y)|_{x_0}^x + \varphi'(y) = \\ &= N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y), \\ \varphi'(y) &= N(x_0, y). \end{aligned}$$

Отже $\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + c_1$, $U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + c_1$.

Теорема доведена.

Покладаючи $c_1 = 0$, тоді загальний інтеграл диференціального рівняння (2.5) буде $U(x, y) = c$, тобто

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = c. \quad (2.98)$$

Якщо при побудові функції $U(x, y)$ взяти спочатку друге рівняння системи (2.95), то отримаємо

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = c. \quad (2.99)$$

В формулах (2.98), (2.99) точки x_0, y_0 вибирають довільно, але так, щоб інтеграли мали зміст. Якщо точки x_0, y_0 вибрані вдало, то задача інтегрування спрощується.

Приклад 2.14 Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Розв'язання. Тут $M(x, y) = x^3 + y$, $N(x, y) = x - y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$.

Використовуємо формулу (2.98) при $x_0 = y_0 = 0$. Знайдемо

$$\int_0^x (x^3 + y) dx + \int_0^y (0 - y) dy = c. \quad \text{Отже, } \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = c \text{ – загальний інтеграл.}$$

Формули (2.98), (2.99) дають можливість розв'язувати задачу Коші з умовами $y(x_0) = y_0$, якщо точка (x_0, y_0) лежить в області визначення диференціального рівняння. Для цього достатньо взяти в (2.98), (2.99) $c = 0$

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0, \quad (2.100)$$

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0. \quad (2.101)$$

Цей розв'язок буде єдиний.

2.9. Інтегрувальний множник. Теорема про існування, неєдиність та загальний вигляд інтегрувального множника

Розглянемо диференціальне рівняння (2.5), яке не є рівнянням в повних диференціалах.

В багатьох випадках диференціальне рівняння (2.5) можна домножити на функцію $\mu(x, y)$, після чого воно стане диференціальним рівнянням в повних диференціалах. Функцію $\mu(x, y)$ називають інтегрувальним множником, а $U(x, y)$ – відповідним йому інтегралом диференціального рівняння (2.5), тобто

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = dU(x, y) = 0. \quad (2.102)$$

Звідки

$$U(x, y) = c, \quad (2.103)$$

отже

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N), \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Маємо

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu \quad (2.104)$$

– це рівняння в частинних похідних першого порядку відносно функції $\mu(x, y)$.

В загальному випадку знайти $\mu(x, y)$ з рівняння (2.104) важко.

Розглянемо випадки, коли $\mu(x, y)$ можна визначити з (2.104).

$$A. \quad \mu = \mu(x) \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \right), \quad N \frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu.$$

При $N \neq 0$ маємо диференціальне рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \quad (2.105)$$

Для існування інтегрувального множника в такій формі необхідно, щоб

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x), \quad (2.106)$$

тоді $\frac{\mu'}{\mu} = \psi(x)$, тобто

$$\mu = ce^{\int \psi(x) dx}. \quad (2.107)$$

Для простоти візьмемо $c = 1$, будемо мати

$$\mu = e^{\int \psi(x) dx}. \quad (2.108)$$

Б. $\mu = \mu(y) \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \right)$. Маємо $-M \frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$. Звідки

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}. \text{ Якщо } \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \psi(y), \text{ то}$$

$$\mu = e^{\int \psi(y) dy}. \quad (2.109)$$

В. $\mu = \mu(\omega(x, y))$, де $\omega(x, y)$ – відома функція. Тоді рівняння (2.104) приймає вигляд

$$N \frac{d\mu}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{d\mu}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu(\omega).$$

Якщо $N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$, то

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}}. \quad (2.110)$$

При умові, якщо

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = \psi(\omega), \quad (2.111)$$

то диференціальне рівняння (2.110) можна проінтегрувати і знайти

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega} \equiv f(\omega) = f(\omega(x, y)). \quad (2.112)$$

Знаючи інтегрувальний множник ми можемо знайти всі особливі розв'язки. Так як $\mu(Mdx + Ndy) = dU$, то $Mdx + Ndy = \frac{1}{\mu} dU$, тобто диференціальне рівняння (2.5) перепишемо так

$$\frac{1}{\mu} dU = 0. \quad (2.113)$$

Звідки $dU = 0$ дає інтеграл $U(x, y) = c$. А рівняння $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$ може дати

особливі розв'язки. Для їх знаходження потрібно:

- знайти криві, на яких $\mu(x, y)$ приймає нескінченні значення;
- перевірити, чи є ці криві розв'язками диференціального рівняння (2.5);
- перевірити єдиність в кожній точці цих кривих.

Якщо ж $\mu(x, y)$ обмежена функція, то особливих розв'язків немає.

Теорема 2.5 (про існування інтегрального множника). Якщо диференціальне рівняння (2.5) має загальний інтеграл $U(x, y) = c$, для якого існують частинні похідні другого порядку, то це рівняння має інтегровальний множник.

Доведення. Так як $U(x, y)$ інтеграл, то $dU = 0$ в силу (2.5), тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0,$$

де dx і dy зв'язані диференціальним рівнянням (2.5). Так, що dx і dy задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0 \\ Mdx + Ndy = 0 \end{cases}. \quad (2.114)$$

Підставивши в одне з рівнянь dy , тобто виключаючи його і в силу довільності dx будемо мати з (2.114)

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{array} \right| = 0, \text{ тобто } \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N} = \mu(x, y). \quad (2.115)$$

Звідки $\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \mu N$, тому

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = dU = 0.$$

Теорема доведена.

Теорема 2.6 (про неєдиність інтегровального множника). Якщо $\mu_0(x, y)$ інтегровальний множник диференціального рівняння (2.5), а $U_0(x, y)$ відповідний йому інтеграл, то

$$\mu = \mu_0 \varphi(U_0), \quad (2.116)$$

де φ – будь-яка неперервно-диференційована функція не рівна тотожно нулю, також є інтегровальним множником диференціального рівняння (2.5).

Доведення. Дійсно, помножимо диференціальне рівняння (2.5) на μ , отримаємо

$$\mu_0 \varphi(U_0) (Mdx + Ndy) = \varphi(U_0) dU_0 = d \int \varphi(U_0) dU_0 = 0.$$

Тобто ліва частина є повним диференціалом функції $\int \varphi(U_0) dU_0$, а це означає, що функція μ , визначена співвідношенням (2.116), є інтегровальним множником.

Теорема 2.7 (про загальний вигляд інтегровального множника). Два будь-яких інтегровальних множника μ_1 і μ_0 диференціального рівняння (2.5) зв'язані співвідношенням

$$\mu_1 = \mu_0 \varphi(U_0). \quad (2.117)$$

Доведення. Нехай μ_1 і μ_0 – інтегрувальні множники, яким відповідають інтеграли U_0 і U_1 , тобто

$$\begin{cases} \mu_0(Mdx + Ndy) = dU_0 \\ \mu_1(Mdx + Ndy) = dU_1 \end{cases}.$$

Поділимо перше рівняння на друге, отримаємо $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0}$. Але два інтеграли диференціального рівняння (2.5) залежні, тобто $U_1 = \Phi(U_0)$, де $\Phi(\cdot)$ – диференційована функція. Маємо

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\Phi'(U_0)dU_0}{dU_0} = \Phi'(U_0) = \varphi(U_0).$$

Терема доведена.

Приклад 2.14 Розв'язати диференціальне рівняння

$$(1 + x^2 y)dx + x^2(x + y)dy = 0$$

методом інтегрувального множника знаючи, що $\mu = \mu(x)$.

Розв'язання. Оскільки $\mu = \mu(x)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{\mu} &= \frac{x^2 - 3x^2 - 2xy}{x^2(x + y)} = -\frac{2}{x}, \\ \mu &= e^{-2 \int \frac{dx}{x}} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Помноживши наше рівняння на отриманий інтегральний множник, отримаємо рівняння

$$\left(\frac{1}{x^2} + y\right)dx + (x + y)dy = 0$$

ліва частина якого є повний диференціал. Знаходимо

$$U(x, y) = \int (x + y)dy + \varphi(x) = xy + \frac{y^2}{2} + \varphi(x).$$

Тоді $\frac{\partial U}{\partial x} = y + \varphi'(x) = \frac{1}{x^2} + y$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2}$, $\varphi(x) = -\frac{1}{x} + c$. Остаточо маємо

$$U(x, y) = xy + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} = c_1.$$