Розділ 3. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв′язяні відносно похідної

3.1. Основні поняття та означення. Теорема про достатні умови існування і єдиності розв’язку

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв’язане відносно похідної має вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \tag{3.1}$$

Найбільш часто зустрічаються диференціальні рівняння першого порядку n-ого степеня

$$y'^n + a_1(x, y)y'^{n-1} + .. + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0. \tag{3.2}$$

Означення 3.1. Функція $y = y(x)$, визначена і неперервно диференційовна на (a, b), називається розв’язком диференціального рівняння (3.1), якщо вона після підстановки в (3.1) перетворює це диференціальне рівняння в тотожність

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0, x \in (a, b).$$

Означення 3.2. Будемо говорити, що рівняння $\Phi(x, y)$ визначає розв’язок диференціального рівняння (3.1) в неявній формі, якщо воно визначає y як функцію x і вона є розв’язком диференціального рівняння (3.1).

Означення 3.3. Говорять, що співвідношенням $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 < t < t_1$, визначається розв’язок диференціального рівняння (3.1) в параметричній формі, якщо

$$F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right) \equiv 0,\ t_0 < t < t_1.$$

Криві на площині (x, y), які відповідають розв’язкам, будемо називати інтегральними кривими.

Задача Коші – задача знаходження розв’язків, які задовольняють умові $y(x_0) = y_0$.

Означення 3.4. Говорять, що задача Коші для диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (x_0, y_0) має єдиний розв’язок, якщо через точку (x_0, y_0) в достатньо малому околі її проходить стільки інтегральних кривих, скільки напрямків поля визначає диференціальне рівняння в цій точці. В противному – не єдиний розв’язок.

Теорема 3.1. (про існування і єдиність розв’язку задачі Коші).

Якщо функція $F(x, y, y')$ задовольняє наступним умовам:

а) є визначеною і неперервною разом зі своїми частинними похідними в деякому замкнутому околі точки (x_0, y_0, y_0');

б) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

в) $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$,

то диференціальне рівняння (3.1) має єдиний розв’язок $y = y(x)$, визначений і неперервно–диференційовний в околі точки $x = x_0$, який задовольняє умові $y(x_0) = y_0$ і такий, що $y'(x_0) = y'_0$.
(Теорема без доведення).

Припустимо, що розв’язуючи диференціальне рівняння (3.1) відносно y', ми знайдемо дійсні розв’язки

$$y' = f_k(x, y),\ k = 1, 2, .., m, \tag{3.3}$$

де $f_k(x, y)$ визначені в області D так, що ми маємо m диференціальних рівнянь першого порядку, розв’язаних відносно y'. Припустимо, що в будь якій точці $(x, y) \in D$ напрямки поля, визначені кожним диференціальним рівнянням (3.3), різні. Так що інтегральні криві різних рівнянь не можуть дотикатися один одного на D.

Нехай кожне диференціальне рівняння (3.3) на D має загальний інтеграл

$$\Psi_k(x, y) = c,\ k = 1, .., m. \tag{3.4}$$

<u>Означення 3.5.</u> Сукупність інтегралів (3.4) будемо називати загальним інтегралом диференціального рівняння (3.1) в області D.

Інколи замість співвідношення (3.4) записують

$$(\Psi_1(x, y) - c) \ldots (\Psi_m(x, y) - c) = 0. \tag{3.5}$$

Якщо поле на D не задовольняє сказаному вище, тобто існує хоча б одна точка (x_0, y_0), в якій значення хоча б двох функцій $f_k(x, y)$ співпадали, то інтегральні криві, які відповідають диференціальному рівнянню, дотикаються один одного в точці (x_0, y_0). Тому, крім інтегральних кривих диференціального рівняння (3.3), будуть ще склеєні інтегральні криві. Всі вони будуть входити в (3.4) або (3.5).

В загальному випадку диференціальне рівняння (3.1) не вдається розв’язати відносно y' в елементарних функціях. В цих випадках шукають однопараметричне сімейство інтегральних кривих у вигляді

$$\Phi(x, y, c) = 0, \tag{3.6}$$

яке називається загальним інтегралом диференціального рівняння (3.1).

Якщо сімейство інтегральних кривих задано у вигляді

$$y = \varphi(x, c), \tag{3.7}$$

то воно називається загальним розв’язком диференціального рівняння (3.1).

Зауважимо, що в (3.6) можуть входити і розв’язки диференціального рівняння виду (3.3), коли y' – комплексні. Ми таких диференціальних рівнянь не будемо розглядати, тому відповідні їм розв’язки треба виключати.

Сімейство інтегральних кривих, знайдене в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c) \\ y = \psi(t, c) \end{cases} \tag{3.8}$$

будемо називати загальним розв’язкам диференціального рівняння в параметричній формі.

<u>Означення 3.6.</u> Розв’язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (3.1) будемо називати частинним розв’язком, якщо в кожній його точці задача Коші має єдиний розв’язок.

<u>Означення 3.7.</u> Розв'язок $y = y(x)$ називається особливим розв'язком, якщо в кожній його точці порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

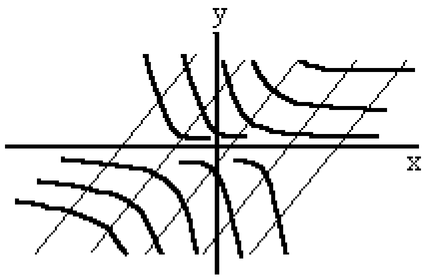
Аналогічно диференціальним рівнянням, розв'язаним відносно y', диференціальне рівняння (3.1) може мати розв'язки, які є ні частинними ні особливими.

Аналіз частинних і особливих розв'язків для цих рівнянь більш складний. Зауважимо, що в випадку (3.3) розв'язок $y = y(x)$ буде особливим, якщо він буде особливим хоча б для одного з диференціальних рівнянь (3.3).

<u>Приклад 3.1.</u> Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0. \tag{3.9}$$

<u>Розв'язання</u>. З (3.9) маємо: $y' = 1, y' = -y^2$. Тоді $y = x + c, y = \frac{1}{x+c}$ – загальний інтеграл. Його можна записати таким чином $(y - x - c)\left(y - \frac{1}{x-c}\right) = 0$. Цей загальний інтеграл є накладка двох сімейств інтегральних кривих (мал. 3.1).



Мал. 3.1

Розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння (3.9) в кожній точці площини (x, y) є єдиним. В точці (x_0, y_0) ми маємо два напрямки поля: $y_0' = 1,\ y_0' = {y_0}^2$. І через цю точку проходить дві інтегральні криві

$$y = x + y_0 - x_0, \tag{3.10}$$

$$y = \frac{1}{x + \frac{1}{y_0} - x_0}, \text{ якщо } y_0 \neq 0 \tag{3.11}$$

і $y = x - x_0$, та $y = 0$, якщо $y_0 = 0$.

Розв'язки (3.10),(3.11) – частинні розв'язки при фіксованих x_0, y_0. Особливих розв'язків немає.

3.2. Знаходження кривих, підозрілих на особливий розв'язок

Припустимо, що диференціальне рівняння (3.1) представлено в формі (3.3). При дослідженні на особливий розв'язок рівнянь виду (3.3) ми вище прийшли до висновку, що ці розв'язки можливі на тих кривих, на яких $\frac{\partial f_k}{\partial y}$ є необмеженою. Але переходити від диференціального рівняння (3.1) до рівнянь (3.3) – недоцільно при визначені особливих розв’язків, так як $\frac{\partial f_k}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y}$.

Дійсно, припустимо, що існують похідні $\frac{\partial F}{\partial y}$ та $\frac{\partial F}{\partial y'}$,тоді

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0 .$$

Звідки

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} . \tag{3.12}$$

Припустимо, що $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, тоді $\frac{\partial y'}{\partial y}$ буде необмеженою при умові

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 . \tag{3.13}$$

Таким чином, криві, підозрілі на особливий розв’язок будуть визначатися з системи

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \end{cases}. \tag{3.14}$$

Розв’язком системи (3.14)

$$R(x, y) = 0 \tag{3.15}$$

є дискримінантна крива. Якщо вона задовольняє диференціальне рівняння (3.1) і в кожній точці порушується єдиність, то це буде особливий розв’язок.

Приклад 3.2. Дослідити на особливі розв'язки диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0 . \tag{3.16}$$

Розв'язання. Знаходимо дискримінантну криву, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0 \\ 2y' + 2P(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Маємо

$$R(x, y) = P^2(x, y) - Q(x, y) = 0 . \tag{3.17}$$

Співвідношення (3.17) – дискримінантна крива рівняння (3.16). А на ній ми маємо не два, а один напрямок поля $y' = -P(x, y)$. В той же час – через неї може проходити не одна інтегральна крива.