Розділ 4. Диференціальні рівняння вищих порядків

4.1. Основні поняття та означення. Динамічна інтерпретація диференціальних рівняння другого порядку. Консервативні системи

Диференціальне рівняння n-го порядку не розв'язане відносно старшої похідної має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 , \tag{4.1}$$

а розв'язане відносно $y^{(n)}$ має форму

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) . \tag{4.2}$$

Частинний випадок цих рівнянь – це лінійне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x) . \tag{4.3}$$

Означення 4.1. Функція $y=y(x)$ визначена і n раз неперервно–диференційовна на (a,b), називається розв'язком диференціального рівняння (4.1), якщо вона на (a,b) перетворює це рівняння в тотожність

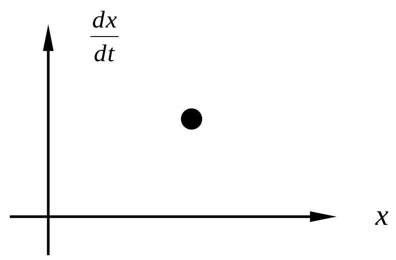
$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0, \;\; x \in (a,b) . \tag{4.4}$$

Будь-якому розв'язку диференціального рівняння (4.1) відповідає на площині (x,y) деяка крива, яку будемо називати інтегральною.

Розглянемо нелінійне диференційне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}) \tag{4.5}$$

і представимо рівняння (4.5) як рівняння руху частинки з одиничною масою при дії сили $f(x, \frac{dx}{dt})$. Значення x і $\frac{dx}{dt}$ в момент t характеризують стан системи на площині $(x, \frac{dx}{dt})$ (мал. 4.1). Ця площина називається площиною стану або фазовою площиною. Кожному новому стану відповідає нова точка на площині. Траєкторія зображаючої точки називається фазовою траєкторією, швидкість – фазовою швидкістю.



Мал. 4.1

Від диференціального рівняння (4.5) можна перейти до системи

$$\frac{dx}{dt} = y , \; \frac{dx}{dt} = f(x, y) . \tag{4.6}$$

Можна показати, що система (4.5), як і більш загальна

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y) , \frac{dy}{dt} = Y(x, y) , \tag{4.7}$$

де $\mathrm{X}(x,y), \mathrm{Y}(x,y)$– неперервні функції разом з своїми частинними похідними в деякій області *D*, мають ту властивість, що якщо *x(t), y(t)* – розв'язки системи, то і $x = x(t+c)$, $y = y(t+c)$, де c – довільна константа, теж розв'язок.

Система (4.7) називається автономною або стаціонарною.

Якщо система (4.7) задана на всій площині, то фазові траєкторії покриють всю площину і не будуть перетинатися одна з одною. Якщо в деякій точці (x_0,y_0) $X(x_0,y_0) = Y(x_0,y_0) = 0$, то така точка називається особливою. В подальшому ми будемо розглядати тільки ізольовані особливі точки, тобто такі, в деякому малому околі яких немає інших особливих точок.

В реальних динамічних системах енергія розсіюється. Розсіювання (дисипація) енергії проходять в зв'язку з наявністю тертя. В деяких системах проходить повільне розсіювання енергії і ним можна знехтувати. Для таких систем має місце закон збереження енергії: сума кінетичної і потенціальної енергій постійна. Такі системи називають консервативними**.**

Розглянемо консервативну систему

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0. \tag{4.8}$$

Від (4.8) перейдемо до наступної системи

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m}. \tag{4.9}$$

Виключаємо з (4.9) t

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{my},\ mydy = -f(x)dx. \tag{4.10}$$

Припустимо, що при $t=t_0$: $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ і проінтегруємо (4.10) від t_0 до t

$$\frac{1}{2}my^2 - \frac{1}{2}my_0^2 = -\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau. \tag{4.11}$$

Звідки

$$\frac{1}{2}my^2 + \int_0^x f(\tau)d\tau = \frac{1}{2}my_0^2 + \int_0^{x_0} f(\tau)d\tau. \tag{4.12}$$

Так як $\frac{1}{2}my^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ є кінетична енергія, а $V(x)=\int_0^x f(\tau)d\tau$–потенціальна, $E=\frac{1}{2}my_0^2+V(x_0)$ – повна енергія, то (4.12) виражає закон збереження енергії.

$$\frac{1}{2}my^2 + V(x) = E. \tag{4.13}$$

Співвідношення (4.13) задають інтегральні криві на площині. Вони будуть різні і залежать від *E*.

Ми дали механічну інтерпретацію диференціального рівняння другого порядку. Зупиняємося на геометричній інтерпретації.

Розглянемо

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{4.14}$$

і перепишемо його у вигляді

$$F\left(x, y, y', (1+y'^2)^{3/2}\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right) = F_1\left(x, y, y', \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right). \tag{4.15}$$

Оскільки $\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ – кривизна кривої, то диференціальне рівняння другого порядку являє собою зв'язок між координатами, кутом нахилу дотичної та кривизною в кожній точці інтегральної кривої.

4.2. Задача Коші. Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Розглянемо диференціальне рівняння (4.2) і поставимо задачу Коші: серед всіх розв'язків диференціального рівняння (4.2) знайти такий *y=y(x)*, який задовольняє умовам

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \tag{4.16}$$

де $x_0,\ y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1}$–задані числа, x_0 – початкове значення незалежної змінної, $y_0, y_0^1, \ldots y_0^{n-1}$ –початкові данні.

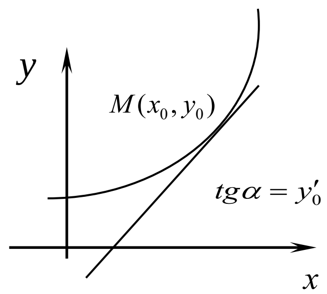
Для диференціального рівняння другого порядку

$$y''(x) = f(x, y, y') \tag{4.17}$$

задача Коші заключається в тому, щоб знайти такий розв'язок диференціального рівняння (4.17), який би задовольняв умовам

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'. \tag{4.18}$$

Геометрично задача Коші полягає в тому, щоб знайти таку криву *y=y(x)*, яка задовольняє диференціальне рівняння (4.17), проходить через точку $M(x_0,y_0)$ і має заданий напрямок дотичної $tg\alpha = y_0'$ (мал. 4.2)



Мал. 4.2

Механічний зміст задачі Коші

$$x'' = f(x, t, x'),\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = V_0 \tag{4.19}$$

полягає в тому, щоб знайти ту траєкторію механічної системи, яка є розв'язком диференціального рівняння (4.19) і має в t_0 фіксовані положення x_0 і швидкість V_0.

Розглянемо питання єдиності та існування розв'язку задачі Коші (4.2), (4.16). Єдиність для диференціального рівняння (4.2) не означає, що через точку $M(x_0,y_0)$ проходить тільки одна інтегральна крива. Наприклад, для диференціального рівняння (4.17) єдиність розуміється в тому сенсі, що через точку $M(x_0,y_0)$ проходить єдина інтегральна крива (мал. 4.2) з заданим нахилом дотичної, а через точку $M(x_0,y_0)$ можуть проходити і інші інтегральні криві, які мають інші нахили дотичних.

Необхідні умови існування розв′язку задачі Коші (4.2), (4.16) – права частина (4.2) неперервна в околі початкових даних.

Сформулюємо без доведення теорему про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

<u>Теорема 4.1</u> (теорема Пікара). Розглянемо задачу Коші (4.2), (4.16) Припустимо, що функція $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ визначена в деякій замкненій обмеженій області

$$R:\ |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b,\ |y'-y_0'|\le b,\ |y''-y_0''|\le b,\dots,\ \left|y^{(n-1)}-y_0^{n-1}\right|\le b \quad (4.20)$$

(a,b – дійсні додатні числа) і задовольняє в цій області умовам:

1) Функція $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ є неперервною за своїми аргументами і, отже, обмеженою

$$\left|f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\right| \le M,\ (x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) \in R \quad (4.21)$$

(тут $M>0$ – константа);

2) Функція $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ має обмежені частинні похідні за змінними $y,y',...,y^{(n-1)}$, тобто

$$\left|\frac{\partial f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}}\right| \le K,\ l=0,1,2,\dots,(n-1);\ (x,y,y',...,y^{(n-1)})\in R, \quad (4.22)$$

де K – константа.

При цих припущеннях диференціальне рівняння (4.2) має єдиний розв'язок, який задовольняє умовам (4.16) і є неперервним разом з своїми похідними до n-го порядку включно на інтервалі

$$|x-x_0|<h=\min\left\{a,\frac{b}{\max\limits_R\left(M,|y'|,|y''|,\dots,\left|y^{(n-1)}\right|\right)}\right\}. \quad (4.23)$$

З теореми випливає, що для поліноміальної правої частини диференціального рівняння (4.2) розв'язок задачі Коші з довільними початковими умовами існує і є єдиним.

4.3. Загальний розв'язок та загальний інтеграл, частинний та особливий розв'язки. Проміжні та перші інтеграли

Загальним розв'язком диференціального рівняння (4.2) називається сімейство розв'язків, яке залежить від n довільних констант $c_1,\dots,c_n$

$$y=\varphi(x,c_1,...,c_n). \quad (4.24)$$

Геометрично воно представляє сімейство інтегральних кривих на площині (x,y), залежне від n параметрів $c_1,\dots,c_n$, причому рівняння цього сімейства розв'язано відносно y.

Розглянемо область D в просторі $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, в кожній точці якої виконуються умови теореми про існування і єдиність розв′язку задачі Коші.

__Означення 4.2.__ Функцію (4.24), визначену в деякій області змінних x, $c_1, \ldots, c_n$ і яка має частинні похідні по x до n-го порядку включно, будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (4.2) в області D, якщо система рівнянь

$$\begin{cases} y = \varphi(x, c_1, ..., c_n) \\ y' = \varphi'(x, c_1, ..., c_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, c_1, ..., c_n) \end{cases} \tag{4.25}$$

розв'язується відносно $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в області D

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n = \psi_n(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \end{cases} \tag{4.26}$$

і якщо функція (4.24) є розв'язком диференціального рівняння (4.2) при всіх значеннях $c_1, \ldots, c_n$, які визначаються формулами (4.26), коли точка $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in D$.

Для розв'язування задачі Коші необхідно (4.16) підставити в (4.26) і визначити

$$\begin{cases} c_1^{(0)} = \psi_1(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n^{(0)} = \psi_n(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{n-1}) \end{cases}.$$

Розв'язок задачі Коші запишеться у вигляді $y = \varphi(x, c_1^{(0)}, ..., c_n^{(0)})$. Якщо розв'язок можна представити у вигляді $y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, то така форма запису називається формою Коші.

В більшості випадків розв'язок диференціального рівняння (4.2) отримуємо у вигляді

$$\Phi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0, \tag{4.27}$$

який називається загальним інтегралом.

__Означення 4.3.__ Будемо називати (4.27) загальним інтегралом диференціального рівняння (4.2) в області D, якщо це співвідношення визначає загальний розв'язок $y = \varphi(x, c_1, ..., c_n)$ диференціального рівняння (4.2) в області D.

__Означення 4.4.__ Розв'язок, що визначається співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c_1, \ldots c_n) \\ y = \psi(t, c_1, \ldots c_n) \end{cases}, \tag{4.28}$$

називають загальним розв'язком в параметричній формі.

Означення 4.5. Якщо розв′язок диференціального рівняння (4.2) складається тільки з точок єдиності розв′язку задачі Коші, то такий розв′язок будемо називати частинним.

Наприклад, при конкретних $c_1,\ldots, c_n$ розв′язок буде частинним.

Означення 4.6. Розв′язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв′язку задачі Коші, будемо називати особливим розв′язком.

Рівняння *n* – го порядку може мати сімейство особливих розв′язків, залежних від довільних констант, кількість яких може досягати *(n-1)*.

Приклад 4.1. Знайти особливі розв′язки рівняння

$$y'' = 2\sqrt{y'}\,.$$

Розв'язання. Вводимо заміну $y' = z$, z – нова змінна. Маємо

$$z' = 2\sqrt{z}\,. \tag{4.29}$$

Звідки

$$z = (x + c_1)^2,\ x > -c_1,$$

$$y' = (x + c_1)^2,\ x > -c_1,\ y = \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2,\ x > -c_1.$$

Рівняння (4.29) має особливий розв′язок $z = 0$, тобто $y' = 0$. Тому $y = c$ – сімейство особливих розв′язків.

Інтегруючи диференціальне рівняння (4.2) ми приходимо до рівнянь, які не містять вищих похідних, але містять відповідну кількість констант

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, c_1, \ldots, c_k) = 0,\ 1 \le k \le n. \tag{4.30}$$

Співвідношення (4.30) називається проміжним інтегралом диференціального рівняння (4.2) *k* – го порядку і представляє собою диференціальне рівняння *(n-k)* порядку, яке містить *k* довільних сталих.

При *k=1* співвідношення

$$\Phi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, c_1) = 0 \tag{4.31}$$

називається першим інтегралом.

Якщо існує один перший інтеграл, то диференціальне рівняння (4.2) зводиться до інтегрування диференціального рівняння *(n-1)* – го порядку.

Якщо відомо два перших інтеграли

$$\begin{cases} \Phi_1^{(1)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, c_1) = 0 \\ \Phi_2^{(2)}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, c_2) = 0 \end{cases}, \tag{4.32}$$

то виключаючи з них $y^{(n-1)}$, приходимо до проміжного інтегралу другого порядку

$$\Phi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0. \tag{4.33}$$

Знання *k* незалежних перших інтегралів дозволяє понизити порядок диференціального рівняння на *k* одиниць.

Якщо ми маємо *n* перших інтегралів, то виключаючи з них $y', \ldots, y^{(n-1)}$ ми знайдемо загальний інтеграл

$$\Phi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0. \tag{4.34}$$

4.4. Крайова задача

Крім задачі Коші існують такі, в яких умови задаються в різних точках. Такі умови називають крайовими або граничними. А відповідна задача – крайовою.

Для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{4.35}$$

самі простіші граничні умови мають вигляд

$$y(a) = A,\ y(b) = B. \tag{4.36}$$

Знаходиться розв′язок на $[a,\ b]$, який задовольняє умовам (4.36). Геометрично – на площині *(x, y)* розв'язати задачу Коші означає знайти інтегральні криві диференціального рівняння (4.35), які проходять через точки (a, A), (b, B).

В більш загальній постановці для диференціального рівняння другого порядку крайові умови можуть мати вигляд

$$\begin{cases} h_1 y(a) + h_2 y'(a) = A \\ h_3 y(b) + h_4 y'(b) = B \end{cases}, \tag{4.37}$$

де h_1, h_2, h_3, h_4, A, B числа, $|h_1| + |h_2| \neq 0, |h_3| + |h_4| \neq 0$.

<u>Приклад 4.2.</u> Розв′язати крайову задачу

$$y'' + y = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y(\pi) = 1.$$

<u>Розв'язання</u>. Маємо загальний розв′язок нашого рівняння $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Згідно крайовим умовам

$$c_1 1 + c_2 0 = 0,$$
$$-c_1 1 + c_2 0 = 1.$$

Оскільки система не сумісна, то крайова задача не має розв′язку, тобто поставлена не коректно.

Якщо $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$, то $c_1 = 0$, c_2 – будь-яка стала. Тобто крайова задача має безліч розв′язків $y = c_2 \sin x$.

Тобто крайова задача може не мати розв′язку, мати безліч розв′язків, мати єдиний розв′язок.

<u>Приклад 4.3.</u> Розв′язати крайову задачу

$$y'' = 6x,\ y(0) = 0,\ y'(1) = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Маємо $y' = 3x^2 + c_1$, $y = x^3 + c_1 x + c_2$. Звідки $c_2 = 0, c_3 = -3$. $y = x^3 - 3x$ – єдиний розв′язок.

Необхідно відмітити, що крайові умови можуть мати інший вигляд, наприклад

$$y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b).$$

4.5. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними

4.5.1. Диференціальні рівняння, які містять n-у похідну від шуканої функції і незалежну змінну

а). Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x). \tag{4.38}$$

Так як $\left(y^{(n-1)}\right)' = f(x)$, то

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1.$$

Аналогічно $y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx + c_1(x - x_0) + c_2$, …..,

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x}}_{n\ раз} f(x)dx..dx + c_1\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + c_2\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \dots + c_n. \tag{4.39}$$

Остання формула дає загальний розв'язок в області

$$a < x < b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty, -\infty < y'' < \infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty.$$

Формулу (4.39) легко використати для знаходження розв'язків задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots. y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{4.40}$$

Цей розв′язок представляється у вигляді

$$y = \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx..dx + y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \dots + y_0. \tag{4.41}$$

Функція

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx \dots dx$$

є частинним розв′язком диференціального рівняння (4.38) з початковими умовами

$$y_1(x_0) = 0, y_1'(x_0) = 0, \dots. y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

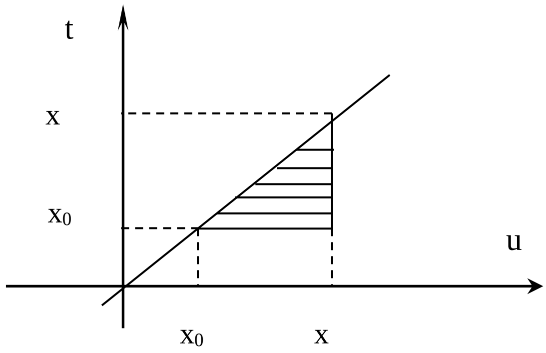
яким відповідають константи $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Для обчислення $y_1(x)$ використовують формулу Коші

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt. \tag{4.42}$$

Дійсно, інтеграл

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{u} f(t)dt\right)du = \int_{x_0}^{x} du\int_{x_0}^{u} f(t)dt$$



можна розглядати як повторний інтеграл в заштрихованій області (мал. 4.1).

Мал. 4.1

Міняючи порядок інтегрування, отримаємо

$$\int_{x_0}^{x} du\int_{x_0}^{u} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\int_{t}^{x} du = \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)dt\,.$$

Аналогічно обчислюємо

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdxdx = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)dtdu = \int_{x_0}^{x} du\int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t)dt\int_{t}^{x}(u-t)du = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f(t)(u-t)^2 dt \ ..\ \text{і. т. д.}$$

Приходимо до формули (4.42). Таким чином, розв′язок (4.41) записується у вигляді

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \ldots + y_0$$

Загальний розв′язок диференціального рівняння (4.38) можна також записати через невизначений інтеграл

$$y = \int\ldots\int f(x)dx..dx + c_1\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + c_2\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \ldots + c_n\,. \quad (4.43)$$

<u>Приклад 4.4.</u> Розв′язати рівняння

$$y'' = 6x\,.$$

<u>Розв'язання</u>. Послідовно знаходимо $y' = 3x^2 + c_1$, $y = x^3 + xc_1 + c_2$.

б). Розглянемо випадок

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4.43)$$

в якому співвідношення (4.43) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$ в елементарних функціях або вирази для $y^{(n)}$ будуть досить складними.

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.43) допускає параметризацію

$$y^{(n)} = \phi(t), x = \varphi(t), \qquad (4.44)$$

де $\varphi(t)$ та $\phi(t)$ такі, що $F(\varphi(t),\phi(t)) \equiv 0$.

Проводимо обчислення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \phi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$y^{(n-1)} = \int \phi(t)\varphi'(t)dt + c_1 \equiv \phi_1(t,c_1).$$

Аналогічно обчислюємо

$$y^{(n-2)} = \int \phi_1(t,c_1)\varphi'(t)dt + c_2 \equiv \phi_2(t,c_1,c_2).$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} y = \phi_n(t,c_1,c_2...c_n) \\ x = \varphi(t) \end{cases} \qquad (4.45)$$

– загальний розв′язок в параметричній формі.

Відмітимо два випадки, в яких диференціальне рівняння (4.43) легко параметризується

I. $x = \varphi(y^{(n)})$,

(4.46)

$y^{(n)} = \phi(t),\ x = \varphi(\phi(t))$ (зокрема можна ввести таку параметризацію $y^{(n)} = t,\ x = \varphi(t)$);

II. $P\left(x, y^{(n)}\right) + Q\left(x, y^{(n)}\right) = 0$,

(4.47)

де P і Q-однорідні функції виміру k і m відповідно.

Покладемо

$$y^{(n)} = tx \qquad (4.48)$$

і розв′яжемо рівняння (4.47) відносно x через t: $x = \varphi(t)$.

Підставляючи $x = \varphi(t)$ в (4.48), отримаємо

$$\begin{cases} y^{(n)} = t\varphi(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}. \qquad (4.49)$$

Далі вищеописаним способом знаходимо загальний розв'язок в параметричній формі.

<u>Приклад 4.5.</u> Розв'язати рівняння

$$e^{y''} + y'' = x.$$

<u>Розв'язання</u>. Зробимо заміну

$$\begin{cases} y'' = t \\ x = e^t + t \end{cases},$$

$$dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt,$$

$$y' = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + c_1,$$

$$dy = y'dx = \left[(t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + c_1\right](e^t + 1)dt .$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} + c_1 - 1\right)e^t + \dfrac{t^3}{6} + c_1 t + c_2 \\ x = e^t + t \end{cases}.$$

4.5.2. Інтегрування диференціальних рівнянь, які не містять шуканої функції і $(k-1)$-ї похідної

Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}\right) = 0 , \qquad (4.50)$$

в якому є $y^{(k)}$.

Введемо нову змінну

$$y^{(k)} = z , \qquad (4.51)$$

отримаємо

$$F\left(x, z, z', z'', ..., z^{(n-k)}\right) = 0 , \qquad (4.52)$$

тобто ми понизили порядок диференціального рівняння (4.50) на k одиниць. Припустимо, що ми розв'язали диференціальне рівняння (4.52) і визначили

$$z = \omega(x, c_1, ..., c_{n-k}) . \qquad (4.53)$$

Тоді рівняння

$$y^{(k)} = \omega(x, c_1, ..., c_{n-k}) \qquad (4.54)$$

інтегруємо і отримаємо загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, c_1, ..., c_n) . \qquad (4.55)$$

Якщо замість загального розв'язку (4.53) можна знайти загальний інтеграл

$$\Omega(x, z, c_1, ..., c_{n-k}) = 0 ,$$

то отримаємо диференціальне рівняння $\Omega\left(x, y^{(k)}, c_1, ..., c_{n-k}\right) = 0$ типу (4.43).

Розглянемо два частинних випадки відносно диференціального рівняння (4.50).

а). Диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 . \qquad (4.56)$$

Якщо диференціальне рівняння (4.56) можна розв′язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}) , \qquad (4.57)$$

то поклавши $y^{(n-1)} = z$ перейдемо до рівняння $z' = f(z)$.

Якщо $z = \omega(x, c_1)$ – загальний розв′язок останнього рівняння, то остаточно маємо рівняння вигляду (4.38) $y^{(n-1)} = \omega(x, c_1)$.

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.55) не можна записати в вигляді (4.57), але воно допускає параметризацію

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), y^{(n)} = \phi(t)\,. \qquad (4.58)$$

То з співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ знаходимо $dx = \dfrac{\varphi'(t)dt}{\phi(t)}$.

Звідки

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)dt}{\phi(t)} + c_1 \\ y^{(n-1)} = \varphi(t) \end{cases}. \qquad (4.59)$$

Диференціальне рівняння (4.59) вигляду (4.44) і його розв'язки можна отримати в параметричній формі.

б). Диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0\,. \qquad (4.60)$$

Нехай диференціальне рівняння (4.60) можна розв′язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})\,. \qquad (4.61)$$

Позначимо $y^{(n-2)} = z$ і перейдемо до диференціального рівняння

$$z'' = f(z)\,. \qquad (4.62)$$

Помножимо (4.62) на $2z'dx$

$$2z'z''dx = 2z'f(z)dx\,.$$

Звідки $d(z')^2 = 2f(z)dz$. Отже

$$(z')^2 = 2\int f(z)dz + c_1\,,$$

з якого визначимо

$$z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}\,.$$

Останнє диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайшовши з нього

$$z = \varphi(x, c_1, c_2)$$

ми остаточно переходимо до диференціального рівняння вигляду (4.38)

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, c_1, c_2)\,. \qquad (4.63)$$

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.60) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$ але для нього можлива параметризація $y^{(n-2)} = \varphi(t), y^{(n)} = \phi(t)$. Запишемо співвідношення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx\,.$$

Помножимо першу рівність на $y^{(n-1)}$

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}y^{(n-1)}dx\,,$$

після чого отримаємо

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2y^{(n)}y^{(n-1)} = 2y^{(n)}dy^{(n-2)}\,.$$

Звідки

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2\phi(t)\varphi'(t)dt\,.$$

Отже, маємо

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\phi(t)\varphi'(t)dt + c_1} \equiv \psi_1(t, c_1)\,.$$

Приєднавши до останньої рівності $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ ми отримаємо а).

4.5.3. Пониження порядку диференціальних рівнянь, які не містять незалежної змінної

Ці диференціальні рівняння мають вигляд

$$F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4.64)$$

і їх порядок можна понизити на одиницю заміною $y' = z$.

При цьому y стає незалежною зміною, а z– шуканою функцією. Обчислюємо

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) z,$$

.....

$$y^{(n)} = \omega_n (z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}})$$

і остаточно прийдемо до диференціального рівняння $(n-1)$ порядку

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy} z, ..., \omega_n (z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}})\right) = 0. \qquad (4.65)$$

Якщо $z = \varphi(y, c_1, ..., c_{n-1})$– розв′язок диференціального рівняння (4.65), то

$$y' = \varphi(y, c_1, ..., c_{n-1}). \qquad (4.66)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (4.66) і знайдемо загальний інтеграл.

Особливі розв'язки можуть появлятися при інтегруванні диференціального рівняння (4.66). При переході до диференціального рівняння (4.65) ми можемо загубити розв′язки $y = const$. Для їх знаходження необхідно розв’язати рівняння $F(b, 0, ..., 0) = 0$. Якщо $b = b_i$– розв′язок останнього рівняння, то $y = b_i$– роз′вязок диференціального рівняння (4.64).

Приклад 4.6. Розв′язати рівняння

$$4y''\sqrt{y} = 1 \quad .$$

Розв'язання. Вводимо змінну $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dy} z$, тоді

$$4\frac{dz}{dy} z\sqrt{y} = 1, \; z^2 = \sqrt{y} + c_1.$$

Звідки $z = \pm\sqrt{\sqrt{y} + c_1}$, отже, $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\sqrt{y} + c_1}$, $x + c_2 = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + c_1}}$

– загальний інтеграл рівняння.

4.5.4. Однорідні диференціальні рівняння відносно шуканої функції і її похідних

Так називаються диференціальні рівняння вигляду

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4.67)$$

в яких $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)$ є однорідною функцією відносно $y, y', \dots, y^{(n)}$, тобто для всіх t маємо

$$F\left(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right).$$

Шляхом заміни $\frac{y'}{y} = z$ диференціальне рівняння (4.67) можна понизити на один порядок. Обчислюємо

$$y' = yz,\, y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'), \dots, y^{(n)} = y\omega_n(z, z', \dots, z^{(n-1)}).$$

Тому диференціальне рівняння (4.67) прийме вигляд

$$y^m F\left(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \omega_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})\right) = 0. \qquad (4.68)$$

Скорочуючи на y^m ($y = 0$ при $m > 0$ може бути розв′язком диференціального рівняння (4.67)), перейдемо до диференціального рівняння порядку $(n-1)$.

Якщо $z = \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-1})$ – загальний розв′язок останнього диференціального рівняння , то

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-1}).$$

Звідки

$$y = c_n e^{\int \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-1})dx} \qquad (4.69)$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (4.67). Розв′язок $y(x) \equiv 0$ міститься в формулі (4.69) при $c_n = 0$.

<u>Приклад 4.7.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Це диференціальне рівняння є однорідним відносно шуканої функції і її похідних, тому

$$\frac{y'}{y} = z,\, y' = yz,\, y'' = y(z^2 + z'),\, xy^2(z^2 + z') + xy^2 z^2 - y^2 z = 0.$$

Маємо $xz' + 2xz^2 - z = 0$ – диференціальне рівняння Бернуллі .
Інтегруючи, отримаємо

$$z = \frac{x}{x^2 + c_1},\; \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + c_1}.$$

Звідки $y = c_2\sqrt{x^2 + c_1}$. Наше диференціальне рівняння Бернуллі має розв′язок $y = c$, який не міститься в знайденому загальному інтегралі.

4.5.5. Диференціальні рівняння, ліва частина яких є точна похідна

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.67), його ліва частина, є точна похідна за x від деякої функції $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, тобто

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y' + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)} = 0,$$

тоді диференціальне рівняння (4.67) має перший інтеграл

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = c_1 \tag{4.70}$$

так, що його порядок можна понизити на одиницю.

<u>Приклад 4.8.</u> Розв′язати диференціальне рівняння

$$y''y + y'^2 = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Маємо $\frac{d}{dx}(y'y) = 0$, $y'y = c_1, ydy = c_1 dx$, $\frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$ – загальний інтеграл.

Якщо ліва частина диференціальне рівняння (4.67) не є точною похідною, то в деяких випадках можна знайти функцію $\mu(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, після домноження на яку рівняння (4.67), його ліва частина, буде точною похідною за x. Ця функція називається інтегрувальним множником. Якщо ми знаємо функцію μ, то можна знайти не тільки перший інтеграл, а й особливі розв'язки, які знаходяться з рівняння $\frac{1}{\mu} = 0$.

<u>Приклад 4.9.</u> Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння

$$y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 - \frac{2yy'}{x} = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Візьмемо $\mu = \frac{1}{yy'}$, тоді $\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0$. При цьому $y = 0$, $y = c$ – розв′язки нашого диференціального рівняння. Маємо

$$\frac{d}{dx}(\ln y' + y^2 + \ln y - 2\ln x) = 0.$$

$\ln y' + y^2 + \ln y - 2\ln x = \ln c_1$ – перший інтеграл. Перепишемо його в такій формі $e^{y^2}yy' - c_1x^2 = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{c_1}{3}x^3) = 0$. Звідки $\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{c_1}{3}x^3 = c_2$ – загальний інтеграл. Особливих розв′язків немає, так як диференціальне рівняння $yy' = 0$ приводить до розв′язків $y = c$, які містяться в загальному.