5.2.2. Знаходження частинного розв'язку лінійно неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

Для деяких частинних випадків функції $f(x)$ можна знайти частинні розв'язки диференціального рівняння (5.26) без квадратур.

I). Розглянемо диференціальне рівняння з правою частиною

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = P_m(x)e^{\alpha x}, \tag{5.37}$$

де $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_{m-1}x + p_m, (m \ge 0)$ поліном з дійсними чи комплексними коефіцієнтами, α -постійне дійсне чи комплексне число.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Число α не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (5.37) шукають у вигляді

$$y_1 = Q_m(x)e^{\alpha x}, \tag{5.38}$$

де

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_{m-1}x + q_m \tag{5.39}$$

поліном m-ої степені з невизначеними коефіцієнтами. Тобто, в цьому випадку частинний розв'язок має ту ж аналітичну структуру, що і права частина диференціального рівняння (5.37)

Коефіцієнти $q_i, i = 0,1,...,m$ знаходяться шляхом підстановки (5.38) в (5.37) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x.

Переконаємося, що шукані коефіцієнти визначаються однозначно. Підставимо (5.38) в (5.37), отримаємо

$$L(y_1) = L\left(Q_m(x)e^{\alpha x}\right) = L\left(\left(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_{m-1}x + q_m\right)e^{\alpha x}\right) =$$
$$= q_0 L\left(x^m e^{\alpha x}\right) + q_1 L\left(x^{m-1}e^{\alpha x}\right) + ... + q_{m-1}L\left(xe^{\alpha x}\right) + q_m L\left(e^{\alpha x}\right) =$$
$$= \left(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_{m-1}x + p_m\right)e^{\alpha x}.$$

Використовуючи вищенаведені формули, запишемо

$$L\left(e^{\alpha x}\right) = P_n(\alpha)e^{\alpha x}, L\left(x^s e^{\alpha x}\right) = \sum_{i=0}^{s} C_s^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{s-i}e^{\alpha x}.$$

На основі них маємо

$$q_0 \sum_{i=0}^{m} C_m^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{m-i}e^{\alpha x} + q_1 \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{m-1-i}e^{\alpha x} +$$
$$+ ... + q_{m-1}\sum_{i=0}^{1} C_1^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{1-i}e^{\alpha x} + q_m P_n(\alpha)e^{\alpha x} =$$
$$= \left(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + ... + p_{m-1}x + p_m\right)e^{\alpha x}.$$

Скорочуємо на $e^{\alpha x}$ і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$
\begin{array}{rl}
x^m: & \left\{\begin{array}{c}
q_0 P_n(\alpha) = p_0 \\
q_0 C_m^1 P_n'(\alpha) + q_1 P_n(\alpha) = p_1 \\
\ldots \\
q_0 C_m^{m-1} P_n^{(m-1)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-2} P_n^{(m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} P_n(\alpha) = p_{m-1} \\
q_0 C_m^m P_n^{(m)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-1} P_n^{m-1}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} P_n'(\alpha) + q_m P_n(\alpha) = p_m .
\end{array}\right. \\
x^{m-1}: & \\
\ldots & \\
x: & \\
1: &
\end{array}
\tag{5.40}
$$

Так як $P_n(\alpha) \neq 0$, то з (5.40) послідовно визначаються всі коефіцієнти $q_0, q_1, ..., q_m$.

Випадок 2. Параметр α являється k-кратним коренем характеристичного рівняння $(k \geq 1)$, тобто

$$
P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = ... = P_n^{(k-1)}(\alpha) = 0, P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0 . \tag{5.41}
$$

В цьому випадку частинний розв'язок не можна побудувати в вигляді (5.38), так як $P_n(\alpha) = 0$. Його шукаємо у вигляді

$$
y_1 = x^k Q_m(x) e^{\alpha k}, \tag{5.42}
$$

де $Q_m(x)$ – поліном вигляду (5.39).

Коефіцієнти полінома визначаються шляхом підстановки (5.42) в (5.37).

$$
L(y_1) = L\left(x^k Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = L\left(\sum_{s=0}^{m} q_s x^{k+m-s} e^{\alpha x}\right) = \sum_{s=0}^{m} q_s L\left(x^{k+m-s} e^{\alpha x}\right) =
$$

$$
= \sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{i=k}^{k+m-s} C_{k+m-s}^{i} P_n^{(i)}(\alpha) = x^{k+m-s-i} e^{\alpha x} = \sum_{s=0}^{m} p_s x^{m-s} e^{\alpha x}.
$$

Звідки

$$
\sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{i=0}^{m-s} C_{k+m-s}^{k+i} P_n^{(k+i)}(\alpha) x^{m-s-i} = \sum_{s=0}^{m} p_s x^{m-s} .
$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$
\begin{array}{cl}
x^m & \left\{\begin{array}{l}
q_0 C_{k+m}^{k} P_n^{(k)}(\alpha) = p_0 \\
q_0 C_{k+m}^{k-1} P_n^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k} P_n^{(k)}(\alpha) = p_1 \\
\ldots \\
q_0 C_{k+m}^{k+m-1} P_n^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-2} P_n^{(k+m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} C_{k+1}^{k} P_n^{(k)}(\alpha) = p_{m-1} \\
q_0 C_{k+m}^{k+m} P_n^{(k+m)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-1} P_n^{(k+m-1)}(\alpha) + \ldots + q_m C_k^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_m .
\end{array}\right. \\
x^{m-1} & \\
\ldots & \\
x & \\
1 &
\end{array}
\tag{5.43}
$$

З (5.43) послідовно однозначно визначаються $q_0, q_1, ..., q_m$, так як $P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

II). Припустимо, що права частина диференціального рівняння (5.26) має вигляд

$$
f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right), \tag{5.44}
$$

де $P_m^{(1)}(x), P_m^{(2)}(x)$ – відомі поліноми степені менше або рівне m (хоча б один має степінь m).

Використовуючи формули Ейлера, обчислимо

$$
\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2}
$$

і перепишемо функцію $f(x)$ таким чином

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+P_m^{(2)}(x)\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2}\right)=$$
$$=\overline{P}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{P}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$
де $\overline{P}_m^{(1)}(x)$ і $\overline{P}_m^{(2)}(x)$ – поліноми степені m, тобто $f(x)$ є сума двох функцій, які розглянуті вище.

Випадок 1. Число $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді
$$y_1=\overline{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}, \tag{5.45}$$
де $\overline{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\overline{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m-ої степені з невизначеними коефіцієнтами.

Випадок 2. Якщо $\alpha+\beta i$ – k-кратний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо в вигляді
$$y_1=x^k\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x}+\overline{Q}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x}\right). \tag{5.46}$$

Приводячи (5.45) і (5.46) до дійсного вигляду, сформулюємо наступне правило знаходження частинного розв'язку для випадку (5.44).

Випадок 1. Якщо $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то
$$y_1=e^{\alpha x}\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)\cos\beta x+\overline{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right). \tag{5.47}$$

Випадок 2. Якщо $\alpha+\beta i$ – k-кратний корінь характеристичного рівняння ($k\ge 1$), то
$$y_1=x^ke^{\alpha x}\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)\cos\beta x+\overline{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right). \tag{5.48}$$

Тут $\overline{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\overline{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m-ої степені з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 5.12. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів
$$y''+5y'+6y=6x^2-10x+2.$$

Розв'язання. Запишемо розв'язки однорідного диференціального рівняння
$$z''+5z'+6z=0,\ \lambda^2-5\lambda+6=0,\ \lambda_1=2,\lambda_2=3,\ z=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}.$$
Знаходимо розв'язки неоднорідного диференціального рівняння
$$\alpha=0,\ y_1=Ax^2+Bx+C,\ 6Ax^2+(6B-10A)x+6C-5B+2A=6x^2-10x+2,$$
$$\begin{cases}6A=6\\6B-10A=-10\\6C-5B+2A=2\end{cases},\qquad\begin{cases}A=1\\B=0\\C=0\end{cases}.$$
Отже
$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+x^2$$
– загальний розв'язок.

Приклад 5.13. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів
$$y''-y=2e^x.$$

Розв'язання. $z''-z=0$, $\lambda^2-1=0$, $\lambda_{1,2}=\pm1$, $z=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

Так як $\alpha=1$ – корінь кратності 1,то

$$y_1 = Axe^x,\ A = 1,$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + xe^x$$

– загальний розв'язок.

<u>Приклад 5.14</u>. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - \sin x).\ .$$

<u>Розв'язання</u>. Для нашого випадку $\alpha = 1, \beta = 1$.

Маємо $z'' + z' - 2z = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_1 = -2$, $z = c_1e^x + c_2e^{-2x}$.

Оскільки $\alpha + \beta i = 1 + i$, то $y_1 = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Після підстановки отримаємо

$$y_1 = e^x(2\cos x + \sin x),$$

$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x)$ – загальний розв'язок.

5.3. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку

5.3.1. Структура загального розв′язку неоднорідного рівняння

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \tag{5.49}$$

де $f(x),\ p_1(x), \ldots,\ p_n(x)$ – неперервні на (a, b) функції.

Припустимо, що для диференціального рівняння (5.49) ми знайшли частинний розв′язок так, що

$$L(y_1) = f(x). \tag{5.50}$$

Введемо нову змінну z

$$y = y_1 + z. \tag{5.51}$$

Тоді

$$L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) = f(x).$$

Звідки

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)z = 0. \tag{5.52}$$

Диференціальне рівняння (5.52) називається однорідним диференціальним рівнянням, яке відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (5.49).

Загальний розв′язок диференціального рівняння (5.52) записується у формі

$$z = c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_nz_n, \tag{5.53}$$

де $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (5.52), $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні сталі. Тоді

$$y = y_1(x) + c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_nz_n \tag{5.54}$$

буде загальним розв′язком диференціального рівняння (5.49) в області

$$a < x < b, |y| < \infty,\ |y'| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty. \tag{5.55}$$

Таким чином, для знаходження загального розв′язку неоднорідного диференціального рівняння (5.49) необхідно знайти один частинний розв′язок диференціального рівняння (5.49) і прибавити до нього загальний розв′язок однорідного диференціального рівняння.

Зауваження 5.1. Розглянемо диференціальне рівняння

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \tag{5.56}$$

Припустимо, що $y_1(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння $L(y_1) = f_1(x)$, а $y_2(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння $L(y_2) = f_2(x)$. Тоді, очевидно, $y_1(x) + y_2(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння (5.56).

Приклад 5.15. Знайти частинний розв′язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x.$$

Розв'язання. Розглянемо диференціальні рівняння:

a) $y'' + 2y = 2$ для якого $y_1 = 1$;

b) $y'' + 2y = 3e^x$ для якого $y_2 = e^x$.

Тоді $y_1 + y_2 = e^x + 1$ – частинний розв′язок даного диференціального рівняння.

5.3.2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Загальний розв′язок неоднорідного диференціального рівняння(5.49) можна знайти в квадратурах, якщо відомо загальний розв′язок відповідного однорідного диференціального рівняння (5.52). Будемо шукати загальний розв′язок диференціального рівняння (5.49) у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i, \tag{5.57}$$

де $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$– деяка фундаментальна система розв′язків диференціального рівняння (5.52).

Виберемо функції $c_i(x),\ i = 1,2,\ldots, n$ так, щоб функція (5.57) була загальним розв′язком диференціального рівняння (5.49). Так як шукані функції задовольняють тільки одній умові, то для їх визначення можна підпорядкувати їх будь яким (*n-1*) умовам.

Таким чином, знайдемо *n* похідних функції (5.57):

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i;$$

$$y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i' + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i \text{ й покладемо } \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i = 0;$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i'' + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i' \text{ й покладемо; } \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i' = 0;$$

…………………..

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-2)} \text{ й покладемо } \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-2)} = 0;$$

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)} \text{ й покладемо } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}=0.$$

Підставляючи (5.58) в диференціальне рівняння (5.49) отримаємо n –е рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}c_i(x)L(z_i)+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}=f(x).$$

Таким чином, для визначення невідомих функцій отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i'=0,\ ...,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-2)}=0,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}=f(x) \quad . \tag{5.59}$$

Відносно $c_1'(x), c_2'(x), ..., c_n'(x)$ – це система лінійних рівнянь з визначником $W(x)\neq 0$. Для знаходження $c_i'(x)$ запишемо формулу

$$c_i'(x)=\frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)},\quad i=1,2,...,n\ , \tag{5.60}$$

де $W_{ni}(x)$ – алгебраїчне доповнення до елементу n-го рядка і i –го стовпчика визначника $W(x)$. Всі функції, які входять в праву частину диференціального рівняння (5.60) є неперервними на (a,b). З (5.60) отримаємо

$$c_i(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)}dx+c_i,\quad i=1,2,...,n\ , \tag{5.61}$$

де c_i, $i=1,2,...,n$ – довільні сталі, $x_0\in(a,b)$.

Тоді загальний розв′язок диференціального рівняння (5.49) запишеться у вигляді

$$y=\sum_{i=1}^{n}z_i\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(t)f(t)}{W(t)}dt+\sum_{i=1}^{n}c_iz_i\ . \tag{5.62}$$

Тут

$$y_1=\sum_{i=1}^{n}z_i\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(t)f(t)}{W(t)}dt \tag{5.63}$$

– частинний розв′язок диференціального рівняння (5.49).

Неважко перевірити, що частинний розв′язок (5.63) задовольняє нульовим початковим умовам

$$y_1(x_0)=0,\ y_1'(x_0)=0,...,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0,\ x_0\in(a,b).$$

<u>Приклад 5.16.</u> Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння

$$y''+k^2y=f(x),\ k\neq 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Фундаментальна система розв′язків для диференціального рівняння $z''+k^2z=0$ буде $z_1=\cos kx,\ z_2=\sin kx$. Отже

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos kx & \sin kx\\ -k\sin kx & k\cos kx\end{vmatrix}=k.$$

Тому загальний розв′язок запишемо у вигляді ($w_{21}=-\sin kx,\ w_{22}=\cos kx$)

$$y=-\frac{\cos kx}{k}\int_{x_0}^{x}\sin kt\, f(t)dt+\frac{\sin kx}{k}\int_{x_0}^{x}\cos kt\, f(t)dt++c_1\cos kx+c_2\sin kx,$$

$$y=\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x}\sin k(x-t)\, f(t)dt+c_1\cos kx+c_2\sin kx.$$

Зокрема, для диференціального рівняння другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (5.64)$$

загальний розв′язок запишеться у вигляді

$$y=-z_1\int_{x_0}^{x}\frac{z_2 f(t)}{W(t)}dt+z_2\int_{x_0}^{x}\frac{z_1 f(t)}{W(t)}dt+c_1z_1+c_2z_2. \qquad (5.68)$$

При цьому $y_1(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння (5.64), який задовольняє цьому рівнянню з початковими умовами $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$.

Для диференціального рівняння виду

$$y''+q(x)y=f(x) \quad (p(x)\equiv 0), \qquad (5.66)$$

так як $W(x)=const$, що випливає з формули Остроградського – Ліувілля, загальний розв′язок запишемо у формі

$$y=-\frac{z_1}{W(x_0)}\int_{x_0}^{x}z_2 f(t)dt+\frac{z_2}{W(x_0)}\int_{x_0}^{x}z_1 f(t)dt. \qquad (5.67)$$

Таким чином, для знаходження загального розв′язку диференціального рівняння (5.49) необхідно знайти фундаментальну систему розв′язків однорідного рівняння (5.52), після чого загальний розв′язок запишеться в квадратурах.

5.3.3. Знаходження частинного розв′язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n –го порядку методом Коші

Припустимо, що для рівняння (5.52) відома фундаментальна система розв′язків $z_1, z_2, ..., z_n$. Використовуючи (5.53), побудуємо частинний розв′язок диференціального рівняння (5.52), який задовольняє початковим умовам

$$z(\alpha)=0,\ z'(\alpha)=0, ..., z^{(n-2)}(\alpha)=0,\ z^{(n-1)}(\alpha)=1. \qquad (5.68)$$

Цей розв′язок буде залежати від α, як від параметра $z=\varphi(x,\alpha)$. Тут $a<x<b,\ a<\alpha<b$, функція $\varphi(x,\alpha)$ має неперервні частинні похідні по x та α до n –го порядку включно. Причому, вона є розв′язком диференціального рівняння (5.52) $L(\varphi(x,\alpha))\equiv 0,\ a<x<b,\ a<\alpha<b$. Крім цього, в силу початкових умов (5.68), функція $\varphi(x,\alpha)$ задовольняє умовам

$$\varphi(\alpha,\alpha)=0,\ \varphi'(\alpha,\alpha)=0, ..., \varphi^{(n-2)}(\alpha,\alpha)=0,\ \varphi^{(n-1)}(\alpha,\alpha)=1, \qquad (5.69)$$

де

$$\varphi^{(p)}(\alpha,\alpha)=\left.\left(\frac{d^p\varphi(x,\alpha)}{dx^p}\right)\right|_{x=\alpha}.$$

Умову (5.69) можна записати і так

$$\varphi(x,x)=0,\ \varphi'(x,x)=0,\ \dots,\ \varphi^{(n-2)}(x,x)=0,\ \varphi^{(n-1)}(x,x)=1, \tag{5.70}$$

де

$$\varphi^{(p)}(x,x)=\left.\left(\frac{d^p\varphi(x,\alpha)}{dx^p}\right)\right|_{\alpha=x}.$$

Розглянемо функцію

$$y_1(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha, \tag{5.71}$$

де $x_0\in(a,b)$ і покажемо, що ця функція є частинним розв′язком диференціального рівняння (5.49) з початковими умовами

$$y_1(x_0)=0, y_1'(x_0)=0, \dots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Для цього використаємо формулу

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\psi(x,\alpha)d\alpha=\int_{x_0}^{x}\psi_x'(x,\alpha)d\alpha+\psi(x,x).$$

Знаходимо похідні

$$\frac{dy_1}{dx}=\int_{x_0}^{x}\varphi_x'(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi(x,x)f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_x'(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha,\ (\varphi(x,x)=0),$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\int_{x_0}^{x}\varphi_{xx}''(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi_x'(x,x)f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_{xx}''(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha,\ (\varphi_x'(x,x)=0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{5.72}$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}=\int_{x_0}^{x}\varphi_{x\dots x}^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi_{x\dots x}^{(n-2)}(x,x)f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_{x\dots x}^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha$$

$$(\varphi_{x\dots x}^{(n-2)}(x,x)=0),$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=\int_{x_0}^{x}\varphi_{x\dots x}^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi_{x\dots x}^{(n-1)}(x,x)f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_{x\dots x}^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+f(x)$$

$$(\varphi_{x\dots x}^{(n-1)}(x,x)=1).$$

Підставимо (5.72) в диференціальне рівняння (5.49), отримаємо

$$L(y_1)=\int_{x_0}^{x}\varphi^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+f(x)+p_1(x)\int_{x_0}^{x}\varphi^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\dots+$$

$$p_n(x)\int_{x_0}^{x}\varphi(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha=\int_{x_0}^{x}L(\varphi(x,\alpha))f(\alpha)d\alpha+f(x)=f(x)$$

$$(L(\varphi(x,\alpha))=0).$$

Тобто $L(y_1))=f(x)$, а це означає, що функція (5.71) є частинним розв′язком диференціального рівняння (5.49). Формула (5.71) називається формулою Коші.

5.4. Лінійні диференціальні рівняння n –го порядку зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь з постійними коефіцієнтами

а). Рівняння Ейлера

Це рівняння вигляду

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0. \qquad (5.73)$$

Це рівняння приводиться до рівняння з постійними коефіцієнтами заміною

$$x = e^t,\ x > 0, \qquad x = -e^{-t},\ x < 0. \qquad (5.74)$$

Дійсно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}, \qquad (5.75)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1}\frac{dy}{dt}\right)e^{-nt}.$$

Підставляючи (5.74) і (5.75) в диференціальне рівняння (5.73) ми отримаємо диференціальне рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n y = 0. \qquad (5.76)$$

Частинні розв′язки диференціального рівняння (5.76) знаходять у вигляді $y = e^{rt}$. Враховуючи (5.74), частинні розв′язки диференціального рівняння (5.73) можна зразу шукати у вигляді (5.74)

$$y = x^r. \qquad (5.77)$$

b). Рівняння Лагранжа має вигляд

$$(ax+b)^n y^n + (ax+b)^{n-1} a_1 y^{n-1} + \cdots + (ax+b)a_{n-1}y' + a_n y = 0. \qquad (5.78)$$

Це рівняння заміною $ax + b = e^t$ також приводиться до диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами.

c). Рівняння

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \qquad (5.79)$$

називається рівнянням Чебишева і після заміни $x = \cos t$ при $|x| < 1$ воно набирає вигляду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0. \qquad (5.80)$$

Дійсно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right) = \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Отже

$$\sin^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}\right)+\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}+n^2y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

Тобто отримали (5.80).

<u>Приклад 5.17</u>. Розв′язати диференціальне рівняння

$$x^3y'''+xy'-y=0.$$

<u>Розв'язання</u>. Випишемо і розв′яжемо характеристичне рівняння

$$r(r-1)(r-2)+r-1=0,$$

$$r_1=r_2=r_3=1.$$

Тому фундаментальна система розв′язків буде наступною

$$y_1=x,\ y_2=x\ln x,\ \ y_3=x\ln^2 x.$$

Отже

$$y=x\left(c_1+c_2\ln x+c_3\ln^2 x\right) \text{ – загальний розв′язок.}$$