Лінійні диференціальні рівняння n –го порядку

5.5. Деякі питання теорії лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. Задача Штурма – Ліувилля

5.5.1. Зведення диференціального рівняння другого порядку до рівняння, яке не містить члена з першою похідною, з допомогою заміни шуканої функції

Розглянемо однорідне диференційне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (5.81)$$

Заміною

$$y = \alpha(x)z, \qquad (5.82)$$

де z – нова змінна, $\alpha(x)$- двічі неперервно диференційована функція на інтервалі неперервності коефіцієнтів, диференціальне рівняння (5.81) зводиться до диференціального рівняння, яке не містить члена з першою похідною. Підставимо (5.82) в (5.81), отримаємо

$$\alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z'' + p(x)\left(\alpha'(x)z + \alpha(x)z'\right) + q(x)\alpha(x)z = 0,$$

$$z'' + \left(\frac{2\alpha'(x) + p(x)\alpha(x)}{\alpha}\right)z' + \left(\frac{\alpha''(x) + p(x)\alpha'(x) + q(x)\alpha(x)}{\alpha}\right)z = 0. \qquad (5.83)$$

Виберемо $\alpha(x)$ з умови

$$\frac{2\alpha'}{\alpha} + p(x) = 0. \qquad (5.84)$$

За $\alpha(x)$ можна взяти, наприклад, функцію

$$\alpha(x) = e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx}, \qquad (5.85)$$

тоді

$$\alpha' = -\frac{p(x)}{2}e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx}, \quad \alpha'' = \left(-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4}\right)e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx}$$

і диференціальне рівняння (5.83) перепишеться у вигляді

$$z'' + Q(x)z = 0, \qquad (5.86)$$

де $Q(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x)$. Функція $Q(x)$ називається інваріантом диференціального рівняння (5.81).

<u>Приклад 5.18.</u> Звести диференціальне рівняння Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad (x > 0), \qquad (5.87)$$

до вигляду, який не містить члена з першою похідною з допомогою заміни шуканої функції.

<u>Розв'язання</u>. Тут $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$. Таким чином

$$Q(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + 1 - \frac{n^2}{x^2} = 1 + \frac{1/4 - n^2}{x^2}$$

і рівняння Бесселя підстановкою $y = e^{-\int \frac{dx}{2x}} z = \frac{z}{\sqrt{x}}$ приводиться до рівняння

$$z'' + \left(1 + \frac{1/4 - n^2}{x^2}\right) z = 0. \qquad (5.88)$$

5.2.2. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь, які не містять члена з першою похідною з допомогою заміни незалежної змінної

Розглянемо для диференціального рівняння (5.81) заміну

$$t = \psi(x) \qquad (5.89)$$

і покажемо, що диференціальне рівняння можна привести до вигляду, який не містить члена з першою похідною.

Припустимо, що $\psi(x)$– неперервно диференційована функція на інтервалі неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (5.81), причому $\psi'(x) \neq 0$. Маємо

$$y'_x = y'_t \psi(x),\ y''_{xx} = y''_{t^2} \varphi'^2(x) + y'_t \psi''(x), \qquad (5.90)$$

де $x = x(t)$ – функція, яка визначається з (5.89). Підставляючи (5.90) в (5.81), отримаємо

$$\psi'^2(x) y''_{t^2} + [\psi''(x) + p(x)\psi'(x)] y'_t + q(x) y = 0.$$

Функцію $\psi(x)$ виберемо з рівняння $\psi''(x) + p(x)\psi'(x) = 0$. Звідки $\psi'(x) = ce^{-\int p(x)dx}$. Взявши $c = 1$, знаходимо функцію $\psi(x)$ як частинний розв'язок

$$\psi(x) = \int e^{-\int p(x)dx} dx. \qquad (5.91)$$

Таким чином, підстановкою $t = \int e^{-\int p(x)dx} dx$, диференціальне рівняння (5.81) зводиться до вигляду

$$y''_{t^2} + q(x) e^{2\int p(x)dx} y = 0,\ x = x(t). \qquad (5.92)$$

<u>Приклад 5.19.</u> Розв′язати диференціальне рівняння

$$xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Зведемо наше диференціальне рівняння до вигляду, який не містить члена з першою похідною з допомогою заміни

$$t = \int e^{-\int \frac{1}{2x} dx} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}.$$

Будемо мати диференціальне рівняння $y''_{t^2} - y = 0$.

Отже $y(x) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}$.

5.5.3. Спряжені, самоспряжені диференціальні оператори, крайові умови і крайові задачі

Спряженим з диференціальним оператором

$$L(u)=a(x)\frac{d^2u}{dx^2}+b(x)\frac{du}{dx}+c(x)u \tag{5.93}$$

називають диференціальний оператор наступного вигляду

$$M(v)=\frac{d^2}{dx^2}\big(a(x)v\big)-\frac{d}{dx}\big(b(x)v\big)+c(x)v\,. \tag{5.94}$$

Властивість спряженості двох операторів є взаємною, тобто спряженим до диференціального оператора $M(v)$ буде диференціальний оператор $L(u)$.

Якщо $L(u)\equiv M(v)$, то оператор $L(u)$ називають самоспряженим.

Характерна властивість спряжених диференціальних операторів: для будь-яких двічі неперервно диференційованих функцій $u(x)$ і $v(x)$ виконується співвідношення

$$vL(u)-uM(v)=\frac{d}{dx}\big(P(x,u,v,u',v')\big). \tag{5.95}$$

Дійсно

$$vL(u)-uM(v)=$$

$$=va(x)\frac{d^2u}{dx^2}+vb(x)\frac{du}{dx}+c(x)vu-u\frac{d^2}{dx^2}\big(a(x)v\big)+u\frac{d}{dx}\big(b(x)v\big)-c(x)uv+$$

$$+\left(\frac{d}{dx}(va)\frac{du}{dx}-\frac{d}{dx}(va)\frac{du}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[va\frac{du}{dx}-u\frac{d}{dx}(va)+ubv\right]=\frac{d}{dx}\big(P(x,u,v,u',v')\big).$$

Нехай $\{u\}$ і $\{v\}$ – дві множини функцій, які задовольняють деяким однорідним крайовим умовам A і B відповідно на $[a,b]$. Тоді, якщо для довільних функцій з цих множин виконується співвідношення

$$\int_a^b\big[vL(u)-uM(v)\big]dx=0\,, \tag{5.96}$$

то крайові умови A та B називають спряженими крайовими умовами, які відповідають диференціальним операторам $L(u)$ і $M(v)$.

Крайову задачу для диференціального рівняння $L(u)=-f(x)$ при крайових умовах A і крайову задачу $M(v)=-\phi(x)$ при крайових умовах B ($f(x)$ *і* $\phi(x)$ – задані функції) називають спряженими крайовими задачами.

Якщо при цьому диференціальний оператор $L(u)$ самоспряжений і крайові умови A "самоспряжені", тобто співпадають з крайовими умовами B, то крайова задача для $L(u)=-f(x)$ при крайових умовах A називається самоспряженою крайовою задачею.

5.5.4. Зведення лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку до самоспряженого вигляду

Означення 5.6. Лінійне однорідне диференціальне рівняння в якому коефіцієнт при y' дорівнює похідній від коефіцієнта при y'', тобто диференціальне рівняння (5.81) має вигляд

$$L(u) = \left(p(x)y'\right)' - q(x)y = 0 \tag{5.97}$$

називають самоспряженим диференціальним рівнянням другого порядку.

Твердження 5.1. Довільне лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{5.98}$$

коефіцієнти якого неперервні на (a,b), а $p_0(x) \neq 0$ і є неперервно диференційованою функцією на (a,b), завжди можна привести до самоспряженого вигляду домноженням на деяку функцію від x.

Доведення. Домножимо (5.89) та $\mu(x)$:

$$\mu(x)p_0(x)y'' + \mu(x)p_1(x)y' + \mu(x)p_2(x)y = 0.$$

Виберемо $\mu(x)$ згідно умовам $\left(\mu(x)p_0(x)\right)' = \mu(x)p_1(x)$. Звідки $p_0\mu'(x) = \left(p_1(x) - p_0(x)\right)\mu(x)$, тобто

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}. \tag{5.99}$$

Домножаючи диференціальне рівняння (5.98) на функцію (5.99), отримаємо

$$e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y' + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y = 0.$$

Позначивши $p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$, перепишемо диференціальне рівняння так

$$p(x)y'' + p'(x)y' - q(x)y = 0, \text{ де } q(x) = -\frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}.$$

Твердження доведено.

5.5.5. Задача Штурма-Ліувілля

Це задача про власні значення і власні функції: на відрізку $[a,b]$ знайти двічі неперервно диференційовані не рівні тотожно нулю розв'язки крайової задачі

$$L(u) + \lambda\rho(x)u = 0 \ \left(L(u) = \frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) - q(x)u\right), \tag{5.100}$$

$$\begin{cases} R_0(u) = u(a)\cos\alpha + u'(a)\sin\alpha = 0 \\ R_1(u) = u(b)\cos\beta + u'(b)\sin\beta = 0 \end{cases} \tag{5.101}$$

і визначити відповідні їм значення параметра λ. Тут $0 \le \alpha,\ \beta \le 2\pi$ – постійні числа, $p(x), q(x), \rho(x)$ – неперервні на $[a,b]$ функції, причому $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$.

Вказані розв'язки називають власними або фундаментальними функціями, а відповідні їм числові значення λ називають власними значеннями або власними числами.

Властивості оператора $L(u)$:

а) справедливе співвідношення

$$vL(u) - uL(v) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right)\right). \qquad (5.102)$$

Дійсно

$$vL(u) - uL(v) = v\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) - vq(x)u - u\frac{d}{dx}\left(p(x)v'\right) + uq(x)v =$$
$$= v\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) - u\frac{d}{dx}\left(p(x)v'\right).$$

З іншого боку

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right)\right) = v\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) + v'p(x)u' - u\frac{d}{dx}\left(p(x)v'\right) - u'p(x)v' =$$
$$= v\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) - u\frac{d}{dx}\left(p(x)v'\right).$$

Твердження доведено;

б) якщо $u(x)$ і $v(x)$ задовольняють умові (5.101), то

$$\int_a^b \left(vL(u) - uL(v)\right)dx = 0. \qquad (5.103)$$

Дійсно

$$\int_a^b \left(vL(u) - uL(v)\right)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right)\right)dx =$$
$$= p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right)\Bigg|_a^b = p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right)\Bigg|_{x=b} - p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right)\Bigg|_{x=a}.$$

Згідно крайових умов

$$u(a)\cos(\alpha) + u'(a)\sin(\alpha) = 0,$$
$$u(b)\cos(\beta) + u'(b)\sin(\beta) = 0,$$
$$v(a)\cos(\alpha) + v'(a)\sin(\alpha) = 0,$$
$$v(b)\cos(\beta) + v'(b)\sin(\beta) = 0.$$

Розглянемо дві системи: перше і третє, друге і четверте рівняння. Для першої системи $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ розглядаємо як ненульовий розв'язок $(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1)$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = u(a)v'(a) - u'(a)v(a) = 0.$$

Аналогічно можна отримати $u(b)v'(b) - u'(b)v(b) = 0$. Співвідношення (5.103), таким чином, буде виконуватися.

Властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля:

а) власні функції $u_1(x)$ і $u_2(x)$, що відповідають різним власним значенням λ_1 і λ_2, ортогональні з ваговою функцією $\rho(x)$, тобто

$$\int_a^b \rho(x)u_1(x)u_2(x)dx = 0. \tag{5.104}$$

Дійсно, домножаючи рівняння $L(u_1)+\rho\lambda_1 u_1 = 0$ і $L(u_2)+\rho\lambda_2 u_2 = 0$ відповідно на $u_2(x)$ і $u_1(x)$ і проінтегрувавши їх різницю, отримаємо

$$\int_a^b [u_2 L(u_1) - u_1 L(u_2)]dx + (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b \rho(x)u_1(x)u_2(x)dx = 0.$$

Згідно властивості б) перший доданок дорівнює нулю, так як $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то виконується (5.104);

б) всі власні значення дійсні.

Дійсно, якби знайшлося комплексне власне значення λ з власною функцією u, то спряжене з ним комплексне число $\overline{\lambda}$ також було б власним значенням, а функція $\overline{u}$ була б його власною функцією. З ортогональності власних функцій $u(x)$ та $\overline{u}(x)$ випливає

$$\int_a^b \rho(x)u(x)\overline{u}(x)dx = \int_a^b \rho(x)|u|^2 dx = 0,$$

тобто $u(x) \equiv 0$. Це означає, що число λ не є власним значенням;

в) будь-якому власному значенню відповідає тільки одна лінійно незалежна власна функція.

Дійсно, припустимо, що маємо дві лінійно незалежні власні функції $u(x)$ і $v(x)$, які відповідають одному власному значенню λ. Тоді ліва частина в (5.102) дорівнює нулю, так як $L(u) = -\lambda\rho u$, $L(v) = -\lambda\rho v$. Тому

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx} - udv \right)dx \right) = 0,$$

тобто

$$p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right) = const. \tag{5.105}$$

Ліва частина співвідношення (5.105) в точці $x = a$ дорівнює нулю, так як для функцій $u(x)$ і $v(x)$ виконується крайові умови. Постільки $p(x) \neq 0$, то в точці $x = a$ $vu' - uv' = 0$. Це означає, що в точці $x = a$ вронскіан від функцій $u(x)$ і $v(x)$ дорівнює нулю. Тобто функції $u(x)$ і $v(x)$ – лінійно-залежні;

г) довільну власну функцію $u(x)$ можна пронормувати

$$\int_a^b \rho(x)u^2(x)dx = 1. \tag{5.106}$$

5.5.6. Функція Гріна

Припустимо, що $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101). Тоді крайова задача не має ненульових розв'язків. Нехай функцій $u(x)$ і $v(x)$– розв'язки рівняння $L(u) = 0$, які задовольняють відповідно крайові умови $R_0(u) = 0$ та $R_1(v) = 0$.

Такі розв′язки існують і їх можна отримати як розв′язки задачі Коші, наприклад, при початкових умовах:

$$u(a) = -\sin\alpha,\ \ u'(a) = \cos\alpha;\ \ v(b) = -\sin\beta,\ \ v'(b) = \cos\beta.$$

Функції $u(x)$ і $v(x)$ будуть лінійно–незалежні, інакше якби $u(x) = cv(x)$, де c– постійна, то виконувалися б умови $R_0(u) = 0$, $R_1(u) = 0$. А це б означало, що задача (5.100),(5.101) при $\lambda = 0$ мала б ненульовий розв'язок. В силу (5.102)

$$\Delta = p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right) = const \qquad (5.107)$$

і ця константа, в силу лінійної незалежності функцій $u(x)$ і $v(x)$, буде відмінною від нуля.

Функцію

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}u(x)v(x_0),\ x \le x_0 \\ \dfrac{1}{\Delta}u(x_0)v(x),\ x \ge x_0 \end{cases} \qquad (5.108)$$

будемо називати функцією впливу або функцією Гріна крайової задачі (5.100), (5.101) при $\lambda = 0$, тобто

$$L(u) = 0,\ \left(L(u) = \frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) - q(x)u\right), R_0(u) = 0, R_1(u) = 0. \qquad (5.109)$$

Властивості функції Гріна:

а) функція Гріна неперервна на $[a,b]$;

б) на кожному з інтервалів $[a,x_0],[x_0,b]$ двічі неперервно диференційовна і задовольняє рівняння $L(u) = 0$;

в) $R_0(G) = 0,\ R_1(G) = 0$;

г) $\left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x_0+0} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x_0-0} = -\dfrac{1}{p(x_0)}$;

д) функція Гріна є симетричною функцією, тобто $G(x, x_0) = G(x_0, x)$.

Властивості а), б), в), д) випливають з побудови функції Гріна у вигляді (5.108).

Доведемо властивість г):

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, x_0) = \frac{1}{\Delta}u(x_0)v'(x), x > x_0;\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, x_0) = \frac{1}{\Delta}u'(x)v(x_0), x < x_0.$$

Тому

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x_0+0} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x_0-0} = \left.\frac{1}{\Delta}\left(u(x_0)v'(x) - u'(x)v(x_0)\right)\right|_{x=x_0} = -\frac{1}{p(x_0)}.$$

Приведемо без доведення ряд теорем, які часто використовуються при розв'язанні різних прикладних задач.

Теорема 5.5. (Про інтегральне представлення розв'язку з допомогою функції Гріна). Якщо $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101), тобто якщо крайова задача (5.109) має ненульовий розв'язок, то для того , щоб функція $u(x)$ була двічі неперервно диференційовним на $[a,b]$ розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} L(u) = -r(x) \\ R_0(u) = 0, R_1(u) = 0 \end{cases} \tag{5.110}$$

необхідно і достатньо, щоб

$$u(x) = \int_a^b G(x,s) r(s) ds, \tag{5.111}$$

де $G(x,s)$-функція Гріна крайової задачі (5.109).

Теорема 5.6. Якщо $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101), то для того, щоб функція $u(x)$ була двічі неперервно диференційовним розв'язком цієї задачі на $[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб вона була розв'язком інтегрального рівняння

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x,s) \rho(s) u(s) ds, \tag{5.112}$$

де функція $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі (5.109).

Теорема 5.7 (В.А. Стеклова про розклад функції в ряд). Довільна двічі неперервно диференційовна функція $f(x)$ на $[a,b]$, яка задовольняє крайовим умовам $R_0(f) = 0, R_1(f) = 0$, розкладається на цьому відрізку по власним функціям задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101) в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \tag{5.113}$$

де $u_n(x)$– власні функції задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101), які відповідають власним значенням λ_n і задовольняють умові ортогональності з ваговою функцією $\rho(x)$

$$\int_a^b u_n(x) u_k(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 1, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases}, \tag{5.114}$$

c_n коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$

$$c_n = \int_a^b f(x) u_n(x) \rho(x) dx. \tag{5.115}$$

5.5.7. Поняття повноти системи функцій. Зв'язок збіжності в середньому і повноти

Нехай $u_1(x), u_2(x),\ldots,u_n(x), \ldots$– система власних функцій задачі (5.100), (5.101), або довільна система двічі неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій, ортогональних з ваговою функцією $\rho(x)$.

Означення 5.6. Система функцій називається повною на $[a,b]$, якщо для довільної функції $f(x)$, яка є кусково неперервною на $[a,b]$ і задовольняє умові $\int_a^b f^2(x)dx < \infty$, має місце рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b \rho(x) f^2(x)dx, \tag{5.116}$$

де $c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) u_k(x)dx$– коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Співвідношення (5.116) називають умовою повноти, або рівністю Парсеваля-Стеклова.

В силу ортонормованості функцій $u_1(x),\ldots,u_n(x),\ldots$ маємо

$$S = \int_a^b \rho(x)\left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} u_k(x)\right]^2 dx = \int_a^b \rho(x) f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n} c_k c_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)2} =$$

$$= \int_a^b \rho(x) f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_k^{(1)})^2 , \tag{5.117}$$

де $c_k^{(1)}$– будь-які постійні, c_k– коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Величину

$$I = \sqrt{S} \tag{5.118}$$

називають середнім квадратичним відхиленням функції $f(x)$ від $\sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} u_k(x)$. З (5.117) випливає, що величина I найменша при $c_k = c_k^{(1)}, k = 1,2, \ldots$ і визначається формулою

$$I^2 = \int_a^b \rho(x) f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 . \tag{5.119}$$

З (5.119) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \le \int_a^b \rho(x) f^2(x)dx, \tag{5.120}$$

яка називається нерівністю Бесселя.

В силу (5.119) можна стверджувати: для того, щоб система функцій $u_1(x),\ldots,u_n(x),\ldots$ була повною, необхідно і достатньо, щоб для довільної функції $f(x)$, кусково неперервної на $[a,b]$, з інтегровним квадратом, мала місце гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \rho(x)\left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)\right)^2 dx = 0. \tag{5.121}$$

Рівність (5.121) означає, що середнє квадратичне відхилення суми $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)$ від $f(x)$ прямує до нуля при $n \to \infty$. В цьому випадку говорять, що послідовність функцій $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ всередньому.

Таким чином, для того, щоб система функцій $u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, ортонормована з ваговою функцією $\rho(x)$, була повною, необхідно і достатньо, щоб ряд Фур'є для довільної функції $f(x)$, кусково неперервної на $[a, b]$ з інтегровним квадратом збігався до неї в середньому або, що все одно, необхідно і достатньо, щоб довільну з вказаних функцій $f(x)$ можна було апроксимувати в розумінні середнього квадратичного відхилення з будь-якою наперед заданою точністю.

Теорема 5.8 (про повноту власних функцій задачі Штурма–Ліувілля). Ортонормована з ваговою функцією $\rho(x)$ система власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (5.100),(5.101) є повною на $[a, b]$.