Розділ 6. Системи звичайних диференціальних рівнянь

6.1. Основні поняття та загальні властивості розв′язків

6.1.1. Основні поняття та означення. Задача Коші

<u>Означення 6.1.</u> Сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n') = 0 \\ \qquad \qquad ... \\ F_n(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n') = 0 \end{cases}, \tag{6.1}$$

де $y_1,..., y_n$ – шукані функції від незалежної змінної x, називається системою диференціальних рівнянь першого порядку.

<u>Означення 6.2.</u> Будемо говорити, що систему звичайних диференціальних рівнянь (6.1) записано в нормальній формі, якщо її можна розв′язати відносно похідних і представити в такому вигляді

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1,..., y_n),\ i = 1,2,..., n. \tag{6.2}$$

Число рівнянь системи диференціальних рівнянь (6.2) називається її порядком.

<u>Означення 6.3.</u> Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) лінійні по $y_1,..., y_n$

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j + f_i(x),\ i = 1,.., n, \tag{6.3}$$

то система називається лінійною.

<u>Означення 6.4.</u> Сукупність n функцій

$$y_1 = y_1(x),..., y_n = y_n(x) \tag{6.4}$$

визначених і неперервно диференційовних на (a,b) називається розв′язком системи (6.2), якщо вона перетворює всі рівняння системи (6.2) в тотожності на (a,b).

Процес знаходження розв′язків системи називається інтегруванням.

Задача Коші: для системи диференціальних рівнянь (6.2) серед всіх розв′язків знайти такий

$$y_1 = y_1(x),..., y_n = y_n(x), \tag{6.5}$$

який задовольняє умовам

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},..., y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \tag{6.6}$$

Тут $y_1^{(0)},..., y_n^{(0)}$ – початкові значення шуканих функцій, x_0 – початкове значення незалежної змінної x. Числа $x_0, y^{(0)},..., y_n^{(0)}$ називаються початковими даними розв′язку (6.5), умови (6.6) – початковими умовами.

Геометричний зміст задачі Коші – серед всіх інтегральних кривих системи диференціальних рівнянь (6.2) знайти ту, яка проходить через точку (6.6).

Механічний зміст задачі Коші – знайти такий рух, визначений системою диференціальних рівнянь (6.2), який задовольняє початковим умовам (6.6).

6.1.2. Теореми про достатні умови існування та єдиності розв′язку задачі Коші та неперервну залежність розв′язку системи від початкових даних і параметрів(без доведення)

<u>Теорема 6.1</u> (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Розглянемо задачу (6.2), (6.6). Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) визначені в області

$$R: |x - x_0| \le a, \left|y_k - y_k^{(0)}\right| \le b,\ k = 1,2,...,n$$

($a, b > 0$-задані числа) і задовольняють на R умовам:

1) функції $f_k(x, y_1,..., y_n)$, $k = 1,2, ..., n$ є неперервними по всім аргументам і, отже, обмеженими
$$|f_k(x, y_1,..., y_n)| < M,\ k = 1,2,..., n,\quad (x, y_1,..., y_n) \in R;$$

2) функції $f_k(x, y_1,..., y_n)$ мають обмеженні частинні похідні по $y_1,..., y_n$, тобто
$$\left|\frac{\partial f_k(x, y_1,..., y_n)}{\partial y_l}\right| \le K,\ \ l, k = 1,2,..., n,\ (x, y_1,..., y_n) \in R$$

($K > 0$ задане число).

При цьому існує єдиний розв′язок системи (6.2) при умові (6.6), визначений і неперервно диференційовний на інтервалі $|x - x_0| \le h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

<u>Зауваження 6.1.</u> Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) – суто поліноми від своїх аргументів, то існує єдиний розв′язок задачі Коші (6.2), (6.6) для будь-яких початкових умов.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь в нормальній формі залежну від параметрів

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1,..., y_n, \lambda_1,..., \lambda_m),\ i = 1,2,..., n, \tag{6.7}$$

праві частини якої визначенні в областях

$$R: |x - x_0| \le a, \left|y_k - y_k^{(0)}\right| \le b,\ k = 1,2,..., n$$

і

$$R_\lambda : \lambda_1^{(0)} \le \lambda_1 \le \lambda_1^{(1)},..., \lambda_m^{(0)} \le \lambda_m \le \lambda_m^{(1)}.$$

<u>Теорема 6.2</u> (про неперервну залежність розв′язку від параметрів). Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (6.7) задовольняють умовам:

1) функції $f_k(x, y_1,..., y_n, \lambda_1,..., \lambda_m)$, $k = 1,2,..., n$ неперервні за $x, y_1,..., y_n, \lambda_1,..., \lambda_m$ в області R і R_λ, і, отже, обмежені
$$f_k(x, y_1,..., y_n, \lambda_1,..., \lambda_m) \le M,\quad (x, y_1,..., y_n) \in R, (\lambda_1,..., \lambda_m) \in R_\lambda, (M = const);$$

2) функці $f_k(x, y_1,..., y_n, \lambda_1,..., \lambda_m)$, $k = 1,2,..., n$ задовольняють умові Ліпшиця за $y_1,..., y_n$

$$|f_k(x,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)-f_k(x,\bar{\bar{y}}_1,\bar{\bar{y}}_2,\ldots,\bar{\bar{y}}_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)|\le L\sum_{i=1}^{n}\left|\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}_i\right|,$$

де $(x,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_n)$ і $(x,\bar{\bar{y}}_1,\bar{\bar{y}}_2,\ldots,\bar{\bar{y}}_n)$ – будь-які точки з R, λ – будь-яка точка з R_λ, L – постійне додатне число, незалежне від x та λ. Тоді система (6.7) має єдиний розв′язок

$$y_i=y_i(x,\lambda_1,...,\lambda_m),\ i=1,2,...,n, \tag{6.8}$$

який задовольняє початковим умовам $y_i(x_0)=y_i^{(0)}, i=1..n$.

Цей розв′язок є визначеним і неперервно диферецiйовним за x на інтервалі

$$|x-x_0|\le h=\min\left\{a,\frac{b}{m}\right\}, \tag{6.9}$$

визначений і неперервний по $\lambda_1,...,\lambda_m$ в області R_λ рівномірно за x з (6.9), тобто для кожного $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, що одночасно для кожного x з (6.9) виконується нерівність

$$|y_k(x,\lambda_1+\Delta\lambda_1,...,\lambda_m+\Delta\lambda_m)-y_k(x,\lambda_1,...,\lambda_m)|<\varepsilon,\ k=1,2,...,n$$

лише тільки

$$|\Delta\lambda_1|<\delta,...,|\Delta\lambda_m|<\delta.$$

Теорема 6.3 (про неперервну залежність розв′язків від початкових умов). Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) задовольняють в R обом умовам тереми Пікара (теореми 6.1) , то розв′язок

$$y_k=\varphi_k(x,x^*,y_1^*,...,y_n^*),\ k=1,2,...,n \tag{6.10}$$

з початковими умовами

$$y_1(x^*)=y_1^*,...,y_n(x^*)=y_n^* \tag{6.11}$$

буде неперервним за x і початковим умовам $x^*,y_1^*,...,y_n^*$, коли

$$|x-x_0|\le\frac{h}{2}-\omega, \tag{6.12}$$

а $y_1(x^*)=y_1^*,...,y_n(x^*)=y_n^*$ лежать в області

$$\left|x^*-x_0\right|\le\omega,\ \left|y_i^*-y_i^{(0)}\right|\le\frac{b}{2},\ i=1,2,...,n, \tag{6.13}$$

де

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\ 0\le\omega\le\frac{h}{4}.$$

При цьому розв′язок (6.10) буде неперервним по $x^*,y_1^*,...,y_n^*$, в області (6.13) рівномірно за x з (6.12), тобто для любого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, що нерівності

$$\left|\varphi_k(x,x^*+\Delta x^*,y_1^*+\Delta y_1^*,...,y_n^*+\Delta y_n^*)-\varphi_k(x,x^*,y_1^*,...,y_n^*)\right|<\varepsilon,\ k=1,2,...,n$$

виконується одночасно для всіх x з (6.12), коли

$$\left|\Delta x^*\right|<\delta,\ \left|\Delta y_1^*\right|<\delta.$$

6.1.3 Загальний, частинний і особливий розв'язки

Нехай D – область, в кожній точці якої виконуються умови теореми існування і єдиності.

<u>Означення 6.5.</u> Сукупність n функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1, ..., c_n) \\ \quad ... \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, ..., c_n) \end{cases} \tag{6.14}$$

визначених в деякій області зміни змінних $x, c_1, ..., c_n$ і які мають неперервні частинні похідні за x, будемо називати загальним розв′язком системи (6.2) в області D, якщо систему (6.14) можна розв′язати відносно $c_1, ..., c_n$

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \quad ... \\ c_n = \psi_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}, \tag{6.15}$$

а сукупність функцій (6.14) є розв′язком диференціального рівняння (6.2) для всіх сталих, визначених співвідношеннями (6.15), коли $(x, y_1, ..., y_n) \in D$.

Якщо в (6.14) роль сталих відіграють початкові умови

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \\ \quad ... \\ y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \end{cases}, \tag{6.16}$$

то (6.16) називається загальним розв′язком в формі Коші.

<u>Означення 6.6.</u> Розв′язок системи диференціальних рівнянь (6.2) називається частинним якщо він складається з точок єдиності розв′язку задачі Коші. Його можна отримати при конкретних сталих, включаючи $\pm\infty$.

<u>Означення 6.7.</u> Розв′язок системи диференціальних рівнянь (6.2) називається особливим, якщо в кожній точці його порушується єдиність розв′язку задачі Коші.

6.1.4 Інтеграл. Перший та загальний інтеграли. Число незалежних інтегралів

Розглянемо одну з рівностей (6.15)

$$\psi_i(x, y_1, ..., y_n) = c_i. \tag{6.17}$$

Функція $\psi_i(x, y_1, ..., y_n)$ на будь-якому частинному розв′язку приймає постійні значення, тобто

$$\psi_i(x, \varphi_1(x, c_1, ..., c_n), ..., \varphi_n(x, c_1, ..., c_n) = c_i.$$

Ця функція називається інтегралом.

<u>Означення 6.8</u> (перше означення інтегралу). Функція $\psi(x, y_1, ..., y_n)$, визначена на D і яка не приводиться до сталої, називається інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, якщо при заміні $y_1, ..., y_n$ будь-яким частинним розв′язком цієї системи, вона приймає постійне значення.

На частинних розв′язках системи (6.2) $d\psi \equiv 0$, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}dy_n \equiv 0 .$$

Це записується таким чином

$$d\psi_{(6.2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1,..., y_n)dx + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1,..., y_n)dx \equiv 0 . \quad (6.18)$$

<u>Означення 6.9</u> (друге означення інтегралу). Функція $\psi(x, y_1,..., y_n)$ неперервно диференційована в області D і така, що $\frac{\partial \psi}{\partial y_1},...,\frac{\partial \psi}{\partial y_n}$ не дорівнюють одночасно нулю в цій області, називається інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, якщо $d\psi_{(6.2)} \equiv 0$.

Співвідношення (6.18) еквівалентне наступному

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right._{(6.2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1,..., y_n) + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1,..., y_n) \equiv 0 .$$

Якщо функція є інтегралом в смислі другого означення, то вона буде інтегралом і в смислі першого. Обернене не вірно – $\psi(x, y_1,..., y_n)$ може не мати частинних похідних.

Рівність $\varphi(x, y_1,..., y_n) = c$ називається першим інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2).

<u>Означення 6.10.</u> Сукупність n перших інтегралів вигляду (6.15). яку можна розв′язати відносно $y_1,..., y_n$, в результаті чого в області D отримаємо загальний розв′язок в формі (6.14) будемо називати загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D.

Перші інтеграли (6.15), які утворюють загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь (6.2), є незалежними, якщо між функціями $\psi_1,...,\psi_n$ не існує співвідношення виду $\Phi(\psi_1,...,\psi_n) = 0$ ні при якому виборі функції $\Phi(\psi_1,...,\psi_n)$.

<u>Теорема 6.4.</u> Якщо інтеграли $\psi_1,...,\psi_n$ мають неперервні частинні похідні, то для незалежності їх необхідно і достатньо, щоб якобіан від функцій $\psi_1,...,\psi_n$ за $y_1,..., y_n$ не перетворювався тотожно в нуль

$$\frac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(y_1,..., y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.19)$$

Доведення витікає з відповідного розділу математичного аналізу: необхідною і достатньою умовою незалежності m функцій $u_1,...,u_m$ від n змінних $x_1,.., x_n$ $(m \le n)$ заключається в тому, щоб хоча б один з функціональних визначників який можна утворити з стовпців таблиці

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Якщо ми маємо k інтегралів $1 \le k \le n$, то вони будуть незалежними тоді і тільки тоді, коли хоча б один з функціональних визначників k–го порядку, складений з стовпців таблиці

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \psi_k}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_k}{\partial y_n} \end{matrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Припустимо, що інтеграли $\psi_1,...,\psi_n$ мають неперервні частинні похідні за $x, y_1,..., y_n$.

<u>Теорема 6.5.</u> Нормальна система n рівнянь не може мати більш ніж n незалежних інтегралів.

<u>Доведення</u>. Твердження теореми рівносильно тому, що якщо відомо $n+1$ інтеграл системи диференціальних рівнянь (6.2) $\psi_1,...,\psi_n$, ψ, то вони не можуть бути незалежними. Розглянемо два випадки.

а) $\psi_1,...,\psi_n$ – залежні, то і $\psi_1,...,\psi_n$, ψ – теж залежні.

б) $\psi_1,...,\psi_n$ – не залежні. Тоді $\dfrac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(y_1,..., y_n)} \ne 0$. Так як $\psi_1,...,\psi_n$, ψ – інтеграли системи диференціальних рівнянь (6.2), то

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n = 0.$$

Ця система однорідних рівнянь показує, що вона має не нульовий розв′язок $1, f_1,..., f_n$. Тому

$$\frac{D(\psi,\psi_1,...,\psi_n)}{D(x, y_1,..., y_n)} = 0.$$

З математичного аналізу відомо, що в цьому разі $\psi = \Phi(\psi_1,...,\psi_n)$, тобто функції $\psi_1,...,\psi_n,\psi$ – залежні.

<u>Теорема 6.6.</u> Якщо $\psi_1,...,\psi_k$, $1 \le k \le n$– незалежні інтеграли системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, а $\Phi(z_1,..., z_k)$– довільна функція, визначена в деякій області змінних $z_1,...,z_k$, яка є областю значень функцій $\psi_1,...,\psi_k$, коли $(x,y_1,...,y_n)\in D$, і яка має в цій області неперервні частинні похідні по $z_1,...,z_k$ не рівні нулю одночасно, то функція

$$\psi=\Phi(\psi_1,...,\psi_n) \tag{6.20}$$

також буде інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2).
Дійсно

$$d\psi_{(6.2)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}d\psi_{i_{(6.2)}}\equiv 0$$

в силу умови теореми, що $d\psi_{i_{(6.2)}}\equiv 0$, $i=1,2,...,k$.

6.1.5. Пониження порядку системи з допомогою перших інтегралів

Знаючи один перший інтеграл системи диференціальних рівнянь (6.2) можна понизити її порядок на одиницю.

Дійсно, нехай

$$\psi_1(x,y_1,...,y_n)=c_1 \tag{6.21}$$

– перший інтеграл.

Визначимо з (6.21)

$$y_1=\overline{\varphi_1}(x,y_2,...,y_n,c_1). \tag{6.22}$$

Підставивши(6.22) в $(n-1)$ рівняння будемо мати систему

$$\begin{cases}\dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,\overline{\varphi}_1,y_2,...,y_n)\\ \quad\cdots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,\overline{\varphi}_1,y_2,...,y_n)\end{cases} \tag{6.23}$$

порядку $(n-1)$.

Якщо відомо k перших інтегралів, то порядок системи диференціальних рівнянь (6.2) можна понизити на k одиниць.

6.1.6 Системи диференціальних рівнянь в симетричній формі

Така система має вигляд

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1,...,x_n)}. \tag{6.24}$$

Будь-яку систему нормальних рівнянь типу (6.2) можна записати в симетричній формі

$$\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,...,y_n)}=\frac{dy_2}{f_2(x,y_1,...,y_n)}=...=\frac{dy_n}{f_n(x,y_1,...,y_n)}=\frac{dx}{1}. \tag{6.25}$$

Якщо $X_n(x_1,...,x_n)\neq 0$, тоді (6.24) можна записати в нормальній формі

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{X_i(x_1,...,x_n)}{X_n(x_1,...,x_n)},\ i=1,2,...,(n-1). \tag{6.26}$$

При розв′язанні систем в симетричній формі користуються властивістю: якщо

$$\frac{a_1}{b_1} = ... = \frac{a_n}{b_n}, \text{ то } \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j}.$$

<u>Приклад 6.1.</u> Розв'язати систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

<u>Розв'язування</u>. Для знаходження загального інтегралу системи поступимо таким чином:

а) візьмемо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ і просумуємо чисельники та знаменники, отримаємо $d(x+y+z) = 0,\ x+y+z = c_1$;

б) якщо ж виберемо $\alpha_1 = x, \alpha_2 = y, \alpha_3 = z$, то будемо мати $d(x^2+y^2+z^2) = 0,\ x^2+y^2+z^2 = c_2$.

Отже, загальний інтеграл системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x+y+z = c_1 \\ x^2+y^2+z^2 = c_2 \end{cases}.$$

6.2. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь

6.2.1. Однорідні системи

Розглянемо лінійну однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + ... + a_{in}y_n,\ i = 1,2,...,n, \tag{6.27}$$

або в матричній формі

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},\ A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}. \tag{6.28}$$

Тут $A(x)$ – неперервна за $a < x < b$ матриця розмірності $n \times n$. Якщо функції $y^{(1)}(x),..., y^{(m)}(x)$ – вектор-розв’язки системи (6.28),то і

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i y^{(i)}(x), \tag{6.29}$$

де $c_1,..., c_m$ – довільні сталі, теж є розв’язком системи (6.28).

Дійсно, введемо оператор

$$L = \frac{d}{dx} - A, \tag{6.30}$$

який має властивості:

а) $L(cy) = cL(y)$;

б) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

З допомогою оператора L систему диференціальних рівнянь (6.28) запишемо так

$$L(y) = 0. \qquad (6.31)$$

Якщо $L(y^{(i)}) = 0, i = 1,2,..., m$, то в силу властивостей а), б) функція (6.29) також є розв'язком системи (6.28).

6.2.2. Лінійно незалежні розв'язки. Теореми про лінійно залежні і незалежні розв'язки

<u>Означення 7.1.</u> Вектор-розв'язки $y^{(1)}(x),..., y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) називаються лінійно залежними на (a,b), якщо існують такі сталі $c_1,..., c_m$, які не дорівнюють нулю одночасно, що

$$c_1 y^{(1)}(x) + ... + c_m y^{(m)}(x) \equiv 0,\ a < x < b,$$

в противному випадку система розв'язків називається лінійно незалежною на (a,b).

<u>Теорема 7.1.</u> Якщо для всіх $x_0 \in (a,b)$ система векторів

$$y^{(1)}(x_0),..., y^{(m)}(x_0) \qquad (6.32)$$

лінійно залежна, то відповідні їм розв'язки $y^{(1)}(x),..., y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) також лінійно залежні.

<u>Доведення</u>. Припустимо, що вектори (6.32) лінійно залежні, тобто

$$c_1 y^{(1)}(x_0) + ... + c_m y^{(m)}(x_0) = 0, \qquad (6.33)$$

де не всі $c_1,..., c_m$ дорівнюють нулю. Розглянемо вектор-функцію з тими ж сталими

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + ... + c_m y^{(m)}(x). \qquad (6.34)$$

Вектор $y(x)$ задовольняє системі диференціальних рівнянь (6.28) і , в силу (6.33), $y(x_0) = 0$. На основі теореми існування і єдиності отримуємо, що

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + ... + c_m y^{(m)}(x) \equiv 0. \qquad (6.35)$$

Співвідношення (6.35) означає, що $y^{(1)}(x),... y^{(m)}(x)$ лінійно залежні.

<u>Означення 7.2.</u> Система n лінійно незалежних розв'язків

$$y^{(1)}(x),... y^{(n)}(x) \qquad (6.36)$$

системи диференціальних рівнянь (6.28) називається фундаментальною системою розв'язків або базисом цієї системи рівнянь.

<u>Теорема 6.8.</u> Система звичайних диференціальних рівнянь (6.28) має фундаментальну систему розв'язків. Якщо (6.36) – фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (6.28), то загальний розв'язок записується у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x), \qquad (6.37)$$

де $c_1,..., c_n$ – довільні сталі.

Доведення. Доведемо першу частину теореми. Задамо систему з n лінійно незалежних векторів $h^{(1)},..., h^{(n)}$. Побудуємо систему розв'язків $y^{(1)}(x),..., y^{(n)}(x)$ для системи диференціальних рівнянь (6.28) з початковими умовами $y^{(i)}(x_0) = h^{(i)}$, $i = 1,2,..., n$. Так як вектори $h^{(1)},..., h^{(n)}$ лінійно незалежні, то в силу теореми (6.7) вектори $y^{(i)}(x), i = 1,2,..., n$ також є лінійно незалежними, тобто складають фундаментальну систему розв′язків.

Доведемо другу частину теореми, тобто покажемо, що з допомогою формули (6.37) можна розв'язати будь-яку задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \quad y(x_0) = h. \tag{6.38}$$

Покажемо, що розв'язок задачі (6.38) можна записати в вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i y^{(i)}(x), \tag{6.39}$$

де $\bar{c}_i$ – постійні числа.

Числа $\bar{c}_i$ визначаються з системи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x) = h, \tag{6.40}$$

так як вектори $y^{(i)}(x), i = 1,2,..., n$ лінійно незалежні, то по теоремі 6.7 вектори $y^{(i)}(x_0),\ i = 1,2,..., n$ також є лінійно незалежними. Тому визначник системи (6.40) відмінний від нуля. Таким чином, система (6.40) має єдиний розв'язок $\bar{c}_i,\ \ i = 1,2,..., n$. Теорема доведена.

6.2.3 Інтегральна (фундаментальна) матриця

Введемо матрицю $Y(x)$ розміром $n \times n$, яка складається з n лінійно незалежних розв'язків системи (6.28)

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) & ... & y_1^{(n)}(x) \\ ... & ... & ... \\ y_n^{(1)}(x) & ... & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}. \tag{6.41}$$

Ясно, що матриця $Y(x)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x). \tag{6.42}$$

Матриця $Y(x)$ називається інтегральною, або фундаментальною.

Якщо $Y(x)$ – фундаментальна матриця розв'язків, то і $Y(x)C$, де C – довільна неособлива матриця розмірності $n \times n$, також є фундаментальною. Дійсно

$$\frac{d[Y(x)C]}{dx} = A(x)[Y(x)C].$$