Системи звичайних диференціальних рівнянь

6.2.4 Визначник Вронського. Формула Якобі

Визначник $\det Y(x) = W(x)$ називається визначником Вронського або вронськіаном системи (6.28).

На основі теореми 6.7 можна сказати:
а) якщо система векторів (6.36) лінійно залежна, то $W(x) = 0$;
б) якщо система (6.36) лінійно незалежна, то $W(x) \neq 0$, $a < x < b$ і матриця $Y(x)$ буде інтегральною.

Теорема 6.9. Припустимо, що матриця $A(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) має неперервні елементи на $a < x < b$. Якщо матриця $Y(x)$ задовольняє (6.28), то

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} SpA(\tau) d\tau \right), \tag{6.43}$$

де $x_0, x \in (a,b)$, $SpA(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$. Рівність (6.43) називають формулою Якобі.

Доведення. Запишемо систему матричних диференціальних рівнянь (6.42) у вигляді

$$y_i^{(j)'} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_k^{(j)}, \quad i, j = 1,2,..., n.$$

Тоді

$$\frac{d}{dx}\left(\det Y(x)\right) = \frac{dW(x)}{dx} = I_1 + I_2 ... + I_n, \tag{6.44}$$

де $I_1, I_2, \ldots, I_n$– деякі визначники. Обчислимо визначник I_1

$$I_1 = \det\begin{pmatrix} y_1^{(1)'} & y_1^{(2)'} & ... & y_1^{(n)'} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & ... & y_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & ... & y_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(1)} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(2)} & ... & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & ... & y_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

З першого рядка віднімемо суму другого рядка, помноженого на a_{12}, третього на a_{13}, … . Отримаємо

$$I_1 = \begin{vmatrix} a_{11} y_1^{(1)} & a_{11} y_1^{(2)} & ... & a_{11} y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & ... & y_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = a_{11} W(x).$$

Аналогічно показується, що

$$I_i = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \dots & y_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-1}^{(1)} & y_{i-1}^{(2)} & \dots & y_{i-1}^{(n)} \\ y_i^{(1)\prime} & y_i^{(2)\prime} & \dots & y_i^{(n)\prime} \\ y_{i+1}^{(1)} & y_{i+1}^{(2)} & \dots & y_{i+1}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = a_{ii}(x)W(x), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Таким чином, $\frac{dW}{dx} = SpA(x)W(x)$, звідки отримуємо формулу Якобі (6.43). Теорема доведена.

З формули (6.43) випливає, що якщо $W(x_0) = 0$, тобто система функцій в точці $x = x_0$ лінійно залежна, то $W(x) \equiv 0, a < x < b$, якщо ж $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0,\ a < x < b$.

<u>Теорема 6.10</u>. Припустимо, що матриця $Y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння (6.42). Для того, щоб вона була інтегральною необхідно і достатньо, щоб

$$\det Y(x) = W(x) \neq 0, \quad a < x < b. \tag{6.45}$$

<u>Доведення</u>. *<u>Достатність.</u>* Припустимо, що $W(x) \neq 0$. Це означає, що вектори $y^{(i)}(x),\ i = 1,2,\dots,n$ є розв'язками системи диференціальних рівнянь (6.28) і лінійно незалежні, тобто $Y(x)$ – інтегральна матриця.

<u>Необхідність.</u> Нехай $Y(x)$ – фундаментальна матриця. В силу теореми (6.8) задача Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y,\ y(x_0) = h \neq 0$$

має єдиний розв'язок $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x)$, де c_i визначається з системи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x_0) = h. \tag{6.46}$$

Оскільки система (6.46) має єдиний розв'язок, то $\det Y(x_0) \neq 0$. А тоді, в силу (6.43), $W(x) \neq 0, a < x < b$. Теорема доведена.

З допомогою матриці $Y(x)$ загальний розв'язок лінійної системи можна записати у вигляді

$$y = Y(x)C, \tag{6.47}$$

де $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

6.2.5. Спряжені системи

Розглянемо дві системи

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y\,, \tag{6.48}$$

$$\frac{dz}{dx} = -A^T(x)z\,, \tag{6.49}$$

які називаються спряженими (тут T – знак транспонування).

Для цих систем справедлива властивість

$$y^T(x)z(x) = c_0 = Const\,. \tag{6.50}$$

Дійсно $\frac{d}{dx}(y^T z) = \frac{dy^T}{dx}z + y^T\frac{dz}{dx} = y^T A^T z - y^T A^T z = 0$.

Якщо $Y(x)$ і $Z(x)$ – інтегральні матриці для систем (6.49), (6.50) відповідно, тобто

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y\,, \tag{6.51}$$

$$\frac{dZ}{dx} = -A^T(x)Z\,, \tag{6.52}$$

то

$$Z^T(x)Y(x) = C\,, \tag{6.53}$$

де C – постійна матриця. Дійсно

$$\frac{d}{dx}Z^T Y = \frac{dZ^T}{dx}Y + Z^T\frac{dY}{dx} = -Z^T AY + Z^T AY = 0\,.$$

Якщо $C = E$, то

$$Z^T(x) = Y^{-1}(x)\,. \tag{6.54}$$

6.2.6. Неоднорідні системи

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = A(x)y + f(x)\,, \tag{6.55}$$

яка називається лінійною неоднорідною системою звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 6.11 Якщо $\bar{y}(x)$ – розв'язок неоднорідної системи, тобто $L(\bar{y}) = f(x)$, а $y_1(x)$ – розв'язок однорідної системи $L(y_1) = 0$, то сума $y_1(x) + \bar{y}(x)$ є розв'язком неоднорідної системи.

Доведення. Дійсно

$$L(\bar{y} + y_1) = L(\bar{y}) + L(y_1) \equiv f(x)\,.$$

Теорема 6.12. Загальний розв'язок неоднорідної системи (6.55) можна записати у вигляді суми загального розв'язку однорідного і частинного неоднорідного.

Доведення. Нехай $Y(x)$ – інтегральна матриця однорідної системи, $\bar{y}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідної системи. Тоді

$$y = Y(x)c + \bar{y}(x) \tag{6.56}$$

в силу теореми 6.11 – розв’язок системи однорідних диференціальних рівнянь (6.55).

Для доведення теореми досить показати, що система алгебраїчних рівнянь

$$Y(x_0)c = y(x_0) - \bar{y}(x_0), \tag{6.57}$$

де $y(x_0)$ – довільний початковий вектор, має єдиний розв’язок . Так як $Y(x)$ – інтегральна матриця, то в такому випадку вона має обернену на (a,b). Тому $c = Y^{-1}(x_0)\left(y(x_0) - \bar{y}(x_0)\right)$. Теорема доведена.

6.2.7. Метод варіації довільної сталої

Загальний розв’язок системи однорідних диференціальних рівнянь (6.28) запишемо у формі

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x), \tag{6.58}$$

де c_i – довільні сталі.

Розв’язок лінійної системи диференціальних рівнянь (6.55) шукаємо у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{(i)}(x), \tag{6.59}$$

де $c_i(x),\ i = 1,2,...,n$ невідомі функції.

Підставляючи (7.33) в (7.29) отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) {y^{(i)}}'(x) = A(x) \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{(i)}(x) + f(x)$$

Так як ${y^{(i)}}' = A(x) y^{(i)},\ i = 1,2,...,n$, то остаточно функції $c_i(x)$ шукаємо з системи диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y^{(i)}(x) = f(x). \tag{6.60}$$

Визначник системи (6.60) $W(x) \neq 0$, якщо $y^{(i)}(x), i = 1,2,...,n$ – фундаментальна система рівнянь. З (6.60) визначаємо

$c_i'(x) = \varphi_i(x), i = 1,2,...,n$.

Звідки

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + c_i,\ i = 1,2,...,n.$$

Тому

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x) dx + c_i \right) y^{(i)}(x) \tag{6.61}$$

– загальний розв’язок диференціального рівняння (6.55).

6.2.8. Формула Коші

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x),\ y(x_0) = y_0. \qquad (6.62)$$

Припустимо, що ми знаємо матрицю $Y(x, x_0)$, яка нормована по моменту x_0

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y,\ Y(x_0, x_0) = E. \qquad (6.63)$$

Шукаємо розв'язок задачі Коші (6.62) у вигляді

$$y(x) = Y(x, x_0)c(x). \qquad (6.64)$$

Підставляючи (6.64) в (6.62) отримаємо

$$Y(x, x_0)c'(x) + Y'(x, x_0)c(x) = A(x)Y(x, x_0)c(x) + f(x).$$

Звідки $c'(x) = Y^{-1}(x, x_0) f(x)$, тобто

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\tau, x_0) f(\tau) d\tau .$$

Але $c(x_0) = y(x_0) = y^{(0)}$, тому

$$y(x) = Y(x, x_0)y^{(0)} + \int_{x_0}^{x} Y(x, x_0)Y^{-1}(\tau, x_0) f(\tau) d\tau .$$

Враховуючи, що $Y(x, \tau) = Y(x, x_0)Y^{-1}(\tau, x_0)$, остаточно запишемо

$$y(x) = Y(x, x_0)y^{(0)} + \int_{x_0}^{x} Y(x, \tau) f(\tau) d\tau . \qquad (6.65)$$

Формула (6.65) називається формулою Коші.

Приклад 6.2. Розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ay \end{cases}.$$

Розв'язання. Приведемо дану систему до диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2a\frac{dx}{dt} - (1 + a^2)x .$$

Звідки отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (1 + a^2)x = 0.$$

Запишемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2a\lambda + (1 + a^2) = 0$. Знайдемо $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Тоді

$$x = e^{at}(c_1 \cos t + c_2 \sin t),\ y = \frac{dx}{dt} - ax = e^{at}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

– загальний розв'язок.

Приклад 6.3. Розв’язати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t} \end{cases}, \ t > 0 .$$

Розв'язання. Складемо і віднімемо почленно два рівняння, отримаємо

$$\frac{d(x+y)}{dt} = -\frac{1}{t}(x+y),$$

$$\frac{d(x-y)}{dt} = \frac{1}{t}(x-y).$$

Звідки $x + y = \dfrac{c_1}{t}$, $x - y = c_2 t$, тобто

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t} + c_2 t\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t} - c_2 t\right) \end{cases}$$

– загальний розв'язок нашої системи.

Приклад 6.4. Перевірити, чи є першим інтегралом системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - t}{x} \end{cases} \tag{6.66}$$

функції а) $z = t^2 + 2xy$; б) $z = x - ty^2$.

Розв'язання. Обчислимо повні похідні по t від заданих функцій на розв'язках системи (6.66).

а) $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{(6.66)} = 2t + 2\dfrac{dx}{dt} y + 2x\dfrac{dy}{dt} = 2t - 2y^2 + 2x\dfrac{y^2 - t}{x} = 2t - 2y^2 + 2y^2 - 2t \equiv 0$ – є інтегралом;

б) $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{(6.66)} = \dfrac{dx}{dt} - y^2 - 2ty\dfrac{dy}{dt} = -y - y^2 - 2ty\dfrac{y^2 - t}{x} \neq 0$ – не є інтегралом.

6.3. Однорідні лінійні системи диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

6.3.1. Випадки інтегрованості лінійних систем в квадратурах

Розглянемо матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \ x_0 \le x < \infty, \tag{6.67}$$

де $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ – задана матриця, $Y(x)$ – фундаментальна матриця.

Розглянемо випадок (Лапо–Данилевського), коли матриця диференціального рівняння (6.67) виражається через $A(x)$.

Припустимо, що $A(x)$ комутує з своїм інтегралом, тобто

$$A(x)\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau = \int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau A(x), \tag{6.68}$$

$$\|A(x)\| \le a_0 < \infty \tag{6.69}$$

на будь-якому кінцевому інтервалі.

При цих умовах нормальна фундаментальна матриця має вигляд

$$Y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau}. \tag{6.70}$$

Дійсно, за визначенням маємо

$$e^M = E + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \cdots + \frac{M^m}{m!} + \cdots, \tag{6.71}$$

де

$$M = M(x) = \int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau. \tag{6.72}$$

З (6.71) випливає, що $Y(x_0) = E$.

Якщо виконується умова (6.68), то матриця $M(x)$ комутує з своєю похідною

$$M'(x) = A(x).$$

Тому

$$\frac{dM^2}{dx} = \frac{dM}{dx}M + M\frac{dM}{dx} = 2\frac{dM}{dx}M.$$

По індукції можна вивести, що

$$\frac{dM^k}{dx} = k\frac{dM}{dx}M^{k-1}, \quad k = 3,4,\ldots \tag{6.73}$$

З урахуванням (6.73) продиференціюємо (6.71)

$$\frac{de^M}{dx} = M' + M'M + \cdots + \frac{M'M^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots = M'\left(E + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots\right) = M'e^M.$$

Таким чином

$$\frac{d}{dx}e^{\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau} = A(x)e^{\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau}. \tag{6.74}$$

Матричний ряд (6.71), який складається з n^2 скалярних рядів збіжний на будь-якому кінцевому інтервалі $x_0 \le x \le x_1 < \infty$. Так як $\left|M^k\right| \le |M|^k$, то в силу (6.69) кожен із n^2 скалярних рядів мажорується збіжним рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_0^m \frac{(x - x_0)^m}{m!}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність матричного ряду на будь-якому кінцевому інтервалі і сума (6.71) є неперервною функцією на цьому інтервалі.

6.3.2. Матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем

Припустимо, що в системі (6.67) матриця A постійна. Тоді виконуються умови комутативності (6.68). Тому, згідно (6.70), маємо

$$Y(x)=e^{A(x-x_0)}. \tag{6.75}$$

Розглянемо випадок $x_0=0$, тоді

$$Y(x)=e^{Ax}. \tag{6.76}$$

Властивості матричної експоненти:

а) якщо $AB=BA$, то $e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A$;

б) якщо $A=T^{-1}JT$, то $e^A=T^{-1}e^JT$;

в) матриця $Y(x)=e^{Ax}$ є розв′язком матричного диференціального рівняння (6.67) з початковими умовами $Y(0)=E$. Тому розв'язок задачі Коші запишеться таким чином $y(x)=Y(x)y_0$.

Таким чином , для знаходження загального розв'язку системи необхідно знайти матрицю e^{Ax}.

Для цього представимо матрицю A у вигляді $A=T^{-1}JT$, де J – жорданова форма матриці A. Тоді

$$e^{Ax}=T^{-1}e^{Jx}T. \tag{6.77}$$

При обчисленні (6.77) враховується, що якщо J_{ρ_k} – k-та клітина Жордана

$$J_{\rho_k}=\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \tag{6.78}$$

то представимо її у вигляді

$$J_1=\lambda_k E_{\rho_k}+I_{\rho_k}, \tag{6.79}$$

де

$$I_{\rho_k}=\lambda_k E_{\rho_k}+I_{\rho_k},$$

$$I_{\rho_k}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо

$$e^{J_{\rho_k}x}=e^{\lambda_k x}e^{I_{\rho_k}x}. \tag{6.80}$$

Матрицю $e^{I_{\rho_k}x}$ можна знайти з допомогою ряду (6.71), так як $I^{\rho_k}=0$. Це означає, що в ряді (6.71) відмінні від нуля тільки перші ρ_k членів.

Розглянемо ряд прикладів, в яких матриця Жордана має різну структуру, тобто корені характеристичного рівняння будуть мати різний вигляд.

Приклад 6.5. Обчислити e^{Ax}, якщо А = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Розглянемо характеристичне рівняння $|\lambda E - A| = \lambda^2 - 1$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Знайдемо невироджену матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, щоб $A = T^{-1}JT$, де $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases},$$

тобто

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Остаточно маємо:

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{-x} & -e^x + e^{-x} \\ 2e^x - 2e^{-x} & -e^x + 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Приклад 6.6. Знайти $Y(x) = e^{Ax}$, якщо А = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Оскільки $rank(A - \lambda E) = 1$, то $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Визначимо матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тому $e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Але $e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x} = e^{2x} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x} = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$. Тому $e^{Ax} = \begin{pmatrix} (x+1)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1-x)e^{2x} \end{pmatrix}$.

Приклад 6.7. Знайти e^{Ax}, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Так як $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, то $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – жорданова форма. Аналогічно визначаємо

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}x} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Представимо $J = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, тоді $e^{Jx} = e^{1\cdot Ex}e^{2Ix} = 1\cdot e^{x}Ee^{2Ix} = e^{x}e^{2Ix}$, де $I = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Легко обчислити (згідно (6.71)), що

$$e^{Ix} = \begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix},\ e^{2Ix} = \begin{pmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -\sin 2x & \cos 2x\end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{x}\cos 2x & e^{x}\sin 2x\\ -e^{x}\sin 2x & e^{x}\cos 2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}e^{x}(2\sin 2x + \cos 2x) & 5e^{x}\sin 2x\\ -e^{x}\sin 2x & e^{x}(\cos 2x - 2\sin 2x)\end{pmatrix}.$$

6.3.3. Структура фундаментальної системи розв'язків. Метод Ейлера

Розглянемо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами в векторно – матричній формі

$$\frac{dy}{dx} = Ay. \tag{6.81}$$

Лінійно незалежні розв'язки, згідно Ейлеру, шукаємо у вигляді

$$y = he^{\lambda x}, \tag{6.82}$$

де h – власний вектор , λ – власне значення, тобто

$$\lambda he^{\lambda x} = Ahe^{\lambda x},\quad Ah = \lambda h. \tag{6.83}$$

Число λ повинно задовольняти характеристичне рівняння

$$|\lambda E - A| = \lambda^{n} + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{6.84}$$

Розглянемо різні випадки:

а) корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні і різні. Тоді

$$y^{(1)} = h^{(1)}e^{\lambda_1 x}, \dots, y^{(n)} = h^{(n)}e^{\lambda_n x} \tag{6.85}$$

система n – лінійно незалежних розв′язків, так як в даному випадку кожному $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ відповідають лінійно незалежні власні вектори $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(n)}$;

б) характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді кореню $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ відповідає власний вектор $h^{(1)} = a + bi$. Це означає, що система (6.81) має комплексний розв′язок

$$y(x) = h^{(1)}e^{\lambda_1 x} = (a + bi)e^{(\alpha+\beta i)} = (a + bi)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(b\cos\beta x + a\sin\beta x).$$

Звідки

$$y^{(1)}(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x),\ y^{(2)}(x) = e^{\alpha x}(b\cos\beta x + a\sin\beta x) \tag{6.86}$$

– два лінійно незалежні розв’язки, які відповідають кореням $\alpha \pm i\beta$. При цьому розгляд кореня $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ не дає нових лінійно незалежних розв'язків;

в) розглянемо випадок кратних коренів. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ($s<n$) – різні розв'язки характеристичного рівняння (6.84), тобто

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1} (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{\rho_s} = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 .$$

Тоді матрицю A можна представити клітками Жордана, тобто знайдеться неособлива матриця S така, що

$$S^{-1}AS = diag\big(I\rho_1(\lambda_1), I\rho_2(\lambda_2), \ldots, I\rho_s(\lambda_s)\big),$$

де

$$I_{\rho_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Отже, заміною $y = Sz$ прийдемо до системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = S\frac{dz}{dx} = ASz\,,\ \frac{dz}{dx} = S^{-1}ASz\,.$$

Якщо $z = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(s)} \end{pmatrix}$, $z^{(j)}$ – вектори розмірності ρ_j, $j = 1,2,..., s$, то маємо

$$\frac{dz^{(1)}}{dx} = I_{\rho_1}(\lambda_1) z^{(1)}, \ldots, \frac{dz^{(s)}}{dx} = I_{\rho_s}(\lambda_s) z^{(s)}. \qquad (6.87)$$

Розглянемо одну з підсистем системи (6.87) з матрицею

$$I_{\rho_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + I_{\rho_j}(0) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна матриця для системи (6.87) має вигляд

$$Z = \begin{pmatrix} e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x} \end{pmatrix},$$

то знаючи заміну $y = Sz$, матриця $Y(x) = SZ$ буде фундаментальною для даної системи.

Визначимо

$$e^{I_{\rho_j}(\lambda_j)x}=e^{\left[\begin{pmatrix}\lambda_j & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_j & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j\end{pmatrix}+I_{\rho_j}(0)\right]x}=e^{\lambda_j x}e^{I_{\rho_j}(0)x}.$$

Але $e^{I_{\rho_j}(0)x}=E_{\rho_j}+I_{\rho_j}(0)x+\frac{1}{2!}I_{\rho_j}^2(0)x^2+\ldots+\frac{1}{(\rho_j-1)!}I_{\rho_j}^{\rho_j-1}(0)x^{\rho_j-1}$, де E_{ρ_j} – одинична матриця розмірності ρ_j, причому

$$I_{\rho_j}^2(0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},\ \ldots,\ I_{\rho_j}^{\rho_j-1}(0)=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким чином

$$e^{I_{\rho_j}(0)x}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_j x} & xe^{\lambda_j x} & \vdots & \frac{x^{\rho_j-1}}{(\rho_j-1)!}e^{\lambda_j x}\\ 0 & e^{\lambda_j x} & \vdots & \vdots\\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \vdots & e^{\lambda_j x}\end{pmatrix}.$$

Домножаючи S на отриману матрицю будемо мати інтегральну матрицю для даної системи.

Враховуючи вид інтегральної матриці для побудови лінійно незалежних розв'язків j – ої підсистеми

$$\frac{dz^{(j)}}{dx}=I_{\rho_j}(\lambda_j)z^{(j)} \tag{6.88}$$

можна поступити так. Шукаємо $z^{(j,1)}=h^{(j,1)}e^{\lambda_j x}$,

$$\left(\lambda_j E_{\rho_j}-I_{\rho_j}(\lambda_j)\right)h^{(j,1)}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}h^{(j,1)}=0,\ h^{(j,1)}=\begin{pmatrix}c_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Тобто $z^{(j,1)}=e^{\lambda_j x}\begin{pmatrix}c_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, $z^{(j,2)}=\left(h^{(j,1)}x+h^{(j,2)}\right)e^{\lambda_j x}$. Звідки

$$\left(I_{\rho_j}(\lambda_j)-\lambda_j E_{\rho_j}\right)h^{(j,2)}=h^{(j,1)}. \tag{6.89}$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} h^{(j,2)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; h^{(j,2)} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже

$$z^{(j,2)} = \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{\lambda_j x}.$$

Міркуючи аналогічно можна отримати $h^{(j,\rho_j)} = \begin{pmatrix} c_{\rho_j} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix}$, тому

$$z^{(j,\rho_j)} = \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x^{\rho_j - 1} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x^{\rho_j - 2} + \dots + \begin{pmatrix} c_{\rho_j} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix} \right] e^{\lambda_j x}. \tag{6.90}$$

Висновки. Якщо характеристичному числу λ_j відповідає тільки один елементарний дільник, то ми отримуємо тільки одну групу розв′язків виду (6.90), яка містить ρ_j розв′язків (цей випадок відповідає тому, що ранг характеристичної матриці дорівнює (*n-1*)). Якщо ж $\lambda = \lambda_j$ відповідає декілька елементарних дільників $(\lambda - \lambda_j)^{l_1} \dots (\lambda - \lambda_j)^{l_m}$, $(l_1 + \dots + l_m = \rho_j)$, то йому відповідає m груп розв′язків типу (6.90). Причому кожна з груп має відповідно $l_1, \dots, l_m$ – розв′язків. Якщо всі елементарні дільники прості, то ми маємо випадок простого кореня.