Особливі точки диференціальних рівнянь на площині. Елементи теорії стійкості

7.3. Другий метод Ляпунова

7.3.1. Функції Ляпунова

Будемо розглядати автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \ge t_0, \tag{7.37}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ – n-вимірна вектор-функція, яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності.

Припустимо, що $x(t) = 0$, $t \ge t_0$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (7.37), який досліджується на стійкість. Його будемо називати незбуреним або програмним розв'язком. Якщо досліджуваний на стійкість розв'язок є ненульовим $x = \bar{x}(t)$, то заміною $x = y + \bar{x}(t)$ переходимо до нульового.

<u>Означення 7.3.</u> Будемо говорити, що незбурений розв'язок $x(t) = 0$ системи диференціальних рівнянь (7.37) є стійким по Ляпунову, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t) > 0$ таке, що $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ лиш тільки $\|x_0\| < \delta$.

<u>Означення 7.4</u>. Незбурений роз'язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (7.15) будемо називати асимптотично стійким по Ляпунову, якщо:

а) виконується означення 7.3;

б) при $\|x_0\| < \bar{\delta} \le \delta$ справджуються граничні співвідношення

$\|x(t, x_0)\| \to 0, \ t \to \infty$.

Множина тих x_0, для яких виконується означення 7.4 називається множиною асимптотичної стійкості.

Для дослідження властивості стійкості існують два методи Ляпунова.

Перший метод передбачає знання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь (7.37), але його не завжди можна знайти.

В другому методі аналіз стійкості або нестійкості проводиться за допомогою спеціальних функцій, які називаються функціями Ляпунова і позначаються $V(x) = V(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Якщо означення 7.3 не виконується, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ називається нестійким. В цьому випадку для будь-якого $\varepsilon > 0$ в будь-якому околі початку координат знайдуться точки x_0 відповідні розв'язки для яких виходять з ε – околу.

Означення 7.5. Функцію $V(x)=V(x_1,...,x_n)$ будемо називати додатньо визначеною (від'ємно визначеною) в області $\|x\|\le H$, якщо вона в цій області приймає додатні (від'ємні) значення при $\|x\|\ne 0$ і $V(0)=0$.

Означення 7.6. Функція $V(x)$ називається знакопостійною на множині $\|x\|\le H$, якщо вона приймає недодатні або невід'ємні значення і може дорівнювати нулю не лише в одній точці $x=0$. (В першому випадку функція називається від'ємно постійною, в другому – додатньо постійною).

Означення 7.7. Функція $V(x)$ називається знакозмінною в області $\|x\|\le H$, якщо вона в цій області приймає як від'ємні так і додатні значення.

Приклад 7.5. Визначити типи вказаних функцій:

а) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2$;

б) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(x_2-x_3)^2$;

в) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$.

Відповідь: а)– додатньо визначена; б)– додатньо постійна; в) – знакозмінна функція.

Дуже часто функції Ляпунова будують у вигляді квадратичної форми $V(x)=x^TBx=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j$, де B – додатньо визначена симетрична квадратна матриця. Сформулюємо критерій додатньої визначеності.

Критерій Сільвестра. Для того, щоб квадратична форма $V(x)=x^TBx$ була додатньо визначена необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори

$$\Delta_1=b_{11},\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},\ \dots,\ \Delta_n=|B| \tag{7.38}$$

були додатні.

Для від'ємної визначеності необхідно і достатньо, щоб головні мінори міняли по черзі свій знак починаючи з від'ємного.

Приведемо геометричну інтерпретацію знаковизначених функцій. Без обмежень на загальність розглянемо додатньо визначену функцію трьох змінних і поверхню

$$V(x_1,x_2,x_3)=c \quad (c>0). \tag{7.39}$$

Якщо $c=0$, то співвідношення (7.39) задовольняє тільки одна точка $x=0$. Покажемо, що при досить малих c поверхня (7.39) є замкнутою.

Дійсно, нехай l– точна нижня грань функції $V(x)$ на множині $\|x\|=H$, тобто на кулі $V(x)\ge l$. Розглянемо неперервну криву, яка виходить з початку координат і другим кінцем лежить на поверхні $\|x\|=H$. Так як $V(0)=0$, а на поверхні $V(x)\ge l$, то при $0<c<l$ в деякій точці кривої функція $V(x)$ приймає значення c в силу неперервності. Звідси випливає замкненість поверхні і те, що точка $x=0$ входить в цю поверхню.

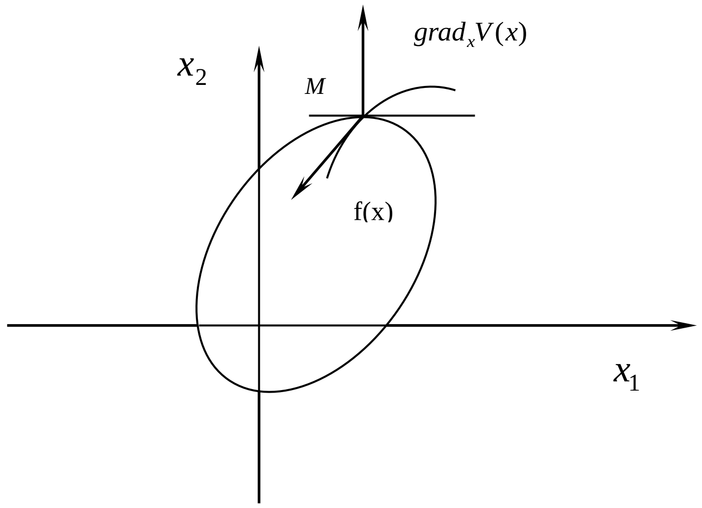
Ця властивість характерна тільки для знаковизначених функцій, для знакопостійних ці поверхні розімкнені.

7.3.2. Геометрична інтерпретація умов стійкості

Обчислимо повну похідну по t від функції $V(x(t))$ в силу системи диференціальних рівнянь (7.37)

$$\frac{dV}{dt} = grad_x^T V(x) f(x). \tag{7.40}$$

Виберемо на поверхні $V(x)=c$ будь-яку точку M і обчислимо в ній $grad_x V(x)\big|_{x=M}$

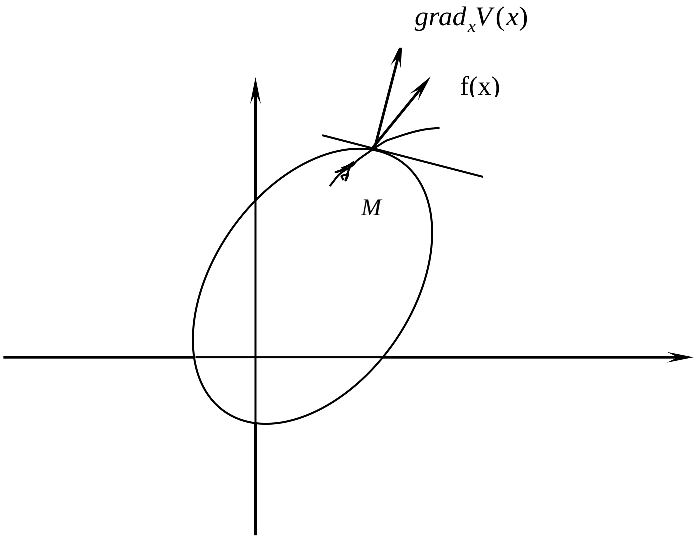


Мал. 7.7

Такий вектор направлений по нормалі в точці M до поверхні $V(x)=c$. Причому нормаль буде зовнішньою, якщо $V(x)$ додатньо визначена і цей вектор направлений всередину при умові, що $V(x)$ від'ємно визначена. Геометрично вектор $f(x)$ – це вектор швидкості. Знаком скалярного добутку (7.40) аналізується стійкість незбуреного розв'язку $x(t) \equiv 0$.

Припустимо, що в деякий момент t динамічна траєкторія визначається точкою M. Проведемо через неї поверхню $V(x)=c$. Розглянемо три випадки:

а). Якщо $\frac{dV}{dt} < 0$ (мал. 7.7), то це означає, що кут між векторами $f(x)$ і $grad_x V(x)$ тупий. А це свідчить про те, що траєкторія входить в поверхню $V(x)=c$. Якщо така властивість буде виконуватися для будь-якої точки траєкторії, то спостерігатиметься асимптотична стійкість;



Мал. 7.8

б). Якщо в точці M виконується умова $\frac{dV}{dt}=0$, то кут між векторами $grad_x V(x)$ та $f(x)$ $90°$ і траєкторія дотикається поверхні $V(x)=c$. Відмітимо, якщо вказане співвідношення виконується для будь-якої точки траєкторії, то точка рухається по поверхні $V(x)=V(M)$;

в). Якщо $\frac{dV}{dt}>0$ (мал. 7.8), то траєкторія виходить з поверхні $V(x)=c$.

Приклад 7.6. Вказати при яких c лінії рівня замкнені:

а) $V(x)=x_1^2+2x_2^2=c$;

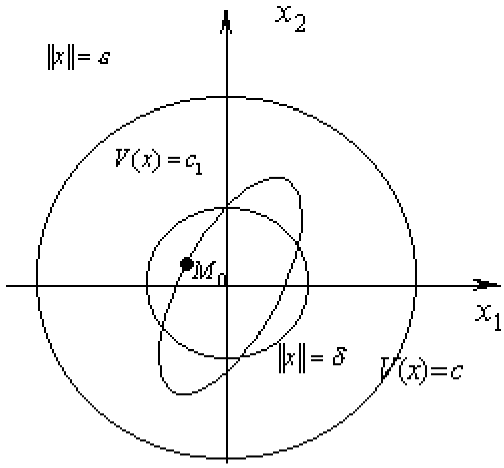
б) $V(x)=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{1+2x_1^2+2x_2^2}=c$.

Розв'язання. а) Функція $V(x)$ є додатньо визначеною і $V(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$. Лінії рівня $V(x)=c$ є еліпсами і вони є замкненими для будь-якого $c>0$; б) співвідношення $V(x)=c$ можна переписати в такому вигляді $(1-2c)x_1^2+(1-2c)x_2^2=c$. З нього випливає, що лінії рівня замкнені при $0<c<1/2$.

7.3.3. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість

Теорема 7.4 **(**Ляпунова про стійкість). Якщо для системи диференціальних рівнянь (7.37) знайдеться додатньо визначена функція $V(x)$, повна похідна від якої по *t*, взята в силу системи (7.37), є функцією від'ємно постійною, то розв'язок $x(t)\equiv 0$ стійкий по Ляпунову.

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо сферу $\|x\| = \varepsilon$ (мал. 7.9).



Мал. 7.9

Побудуємо поверхню $V(x) = c$, яка лежить всередині сфери $\|x\| = \varepsilon$. Це можна зробити так як $V(x)$ є неперервною функцією і $V(0) = 0$. Виберемо δ таке, щоб куля $\|x\| \le \delta$ лежала всередині поверхні $V(x) = c$.

Покажемо, що зображаюча точка *M,* починаючи свій рух із δ-околу (точки M_0), не дійде сфери ε. Дійсно, так як $\dot{V} \le 0$, то $V - V_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} dt \le 0$.

Звідки

$$V(x) \le V_0 = V(x_0). \tag{7.41}$$

З (7.41) випливає, що зображаюча точка або знаходиться на поверхні $V(x) = V_0 = c_1 \left(\dot{V}_{(7.37)} \equiv 0\right)$ або йде всередину поверхні $V(x) = c_1$. Це і доводить теорему.

Приклад 7.7. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2^3 \end{cases}. \tag{7.42}$$

Розв'язання. Дослідимо на стійкість незбурений рух $x_1 = x_2 = 0$ за допомогою функції $V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$. Обчислимо $\frac{dV}{dt} = -\left(x_1 - x_2^2\right)^2 \le 0$. Тобто, згідно теореми 7.4, незбурений розв'язок $x_1 = x_2 = 0$ стійкий.

Теорема 7.5 **(**Ляпунова про асимптотичну стійкість**)**. Якщо для системи диференціальних рівнянь (7.37) знайдеться додатньо визначена функція Ляпунова $V(x)$ така, що $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)}$ є функцією від'ємно визначеною, то незбурений рух $x(t) \equiv 0$ – асимптотично стійкий.

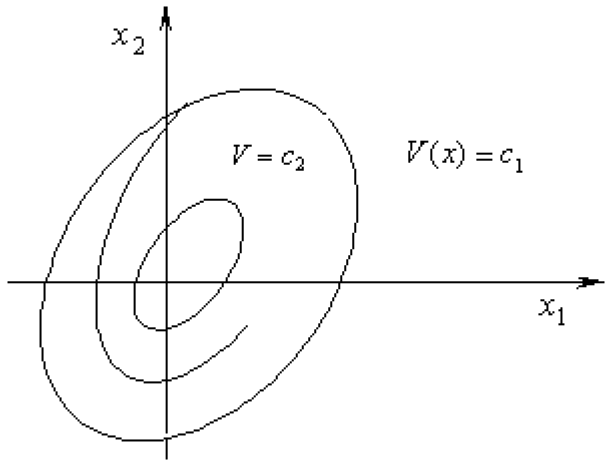
Доведення. Так як умови теореми 7.5 сильніші ніж умови теореми 7.4, то зображаюча точка в динаміці не вийде з поверхні $V(x) = c$ (мал. 7.9). Причому вона залишатися на поверхні $V(x) = c$ $\left(\dot{V} < 0\right)$ не може і строго входить в неї. З умови $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(7.37)} < 0$ випливає, що функція *V(x)*, залишаючись додатньою, монотонно спадає. Це значить, що вона має границю c_2, тобто $V(x(t)) \to c_2,\ t \to \infty$. Як видно з мал. 7.8 зображаюча точка *M* прямує до граничної поверхні $V(x) = c_2$.

Покажемо, що $c_2 = 0$, тобто поверхня $V(x) = c_2$ вироджується в точку – початок координат.

Припустимо, що $c_2 \neq 0$. Тоді в замкнутій області $D = \{x : c_2 \leq V(x) \leq c_1\}$ функція $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(7.37)}$ строго від'ємна. Якщо $\dot{V}_{(7.37)}$ є неперервною на D, то вона має точну верхню та нижню грань. Таким чином, з відношення $\dot{V}_{(7.37)} \leq -l$, випливає нерівність

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV(x(\tau))}{d\tau} d\tau \leq V(x(t_0)) - l(t - t_0). \qquad (7.43)$$

З (7.43) випливає, що з часом функція $V(x(t))$ стає від'ємною, що суперечить умові теореми. Значить $c_2 = 0$, тобто зображаюча точка асимптотично прямує в початок координат. Теорема доведена.



Мал. 7.10

7.3.4. Теореми Четаєва і Ляпунова про нестійкість

<u>Теорема 7.6</u> **(**Четаєва про нестійкість**)**. Якщо для системи диференціальних рівнянь (7.37) можна знайти функцію $V(x)$, для якої в як завгодно малому околі точки *x*=0 існує область $V(x) > 0$, а $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(7.37)} > 0$ у всіх точках області $V(x) > 0$, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ – нестійкий.

<u>Доведення.</u> Припустимо, що функція $V(x)$ – визначена на множині $x^T x \leq \mu(\mu > 0)$. Візьмемо як завгодно мале $\varepsilon > 0$ і побудуємо кулю $x^T x \leq \varepsilon \leq \mu$.

Для того, щоб виявити нестійкість достатньо знайти в як завгодно малому околі точки $x=0$ хоч би одну траєкторію, яка виходить за сферу радіуса $\sqrt{\varepsilon}$.

Візьмемо початкове положення точки M в області $V(x)>0$. Причому, така точка M_0 може бути вибрана як завгодно близько до точки x=0, але не співпадати з нею.

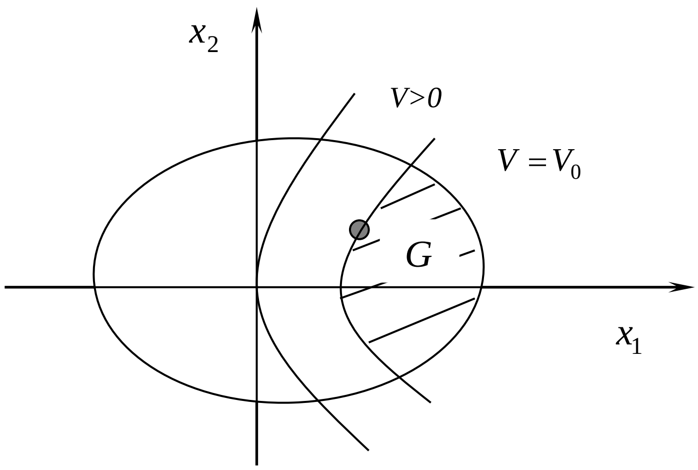
Так як в області $V(x)>0$ виконується $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)}>0$, то функція $V(x)$ монотонно зростає, отже

$$V(x)\ge V_0>0,\ t\ge t_0, \tag{7.44}$$

де $V_0=V(x)\big|_{M_0}$.

Динамічна точка M, з початком в точці M_0, в процесі руху не може перетинати границю області $V>0$ (на границі V=0, а $V_0>0$ і V – зростає).

Припустимо, що точка M не вийде за сферу ε, тобто знаходиться в середині замкненої області $G=\left\{x : x^T x\le\varepsilon, V(x)\ge V_0\right\}$ (мал. 7.11).



Мал. 7.11

Оскільки функція $V(x)$ неперервна на G, то

$$L_{\min}\le V(x)\le L_{\max}. \tag{7.45}$$

На G функція $\dot V_{(7.37)}>0$ також є неперервною. Тому

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)}\ge l_1. \tag{7.46}$$

Звідки

$$V(x)\ge V_0+l_1(t-t_0). \tag{7.47}$$

З (7.47) випливає, що функція $V(x)$ при $t\to\infty$ необмежено зростає. Що суперечить (7.45). Отже наше припущення, що траєкторія не вийде з ε-околу неправильне. Теорему доведено.

Сформулюємо теорему Ляпунова про нестійкість, яка є частинним випадком теореми Четаєва.

<u>Теорема 7.7</u> **(**перша теорема теорема Ляпунова про нестійкість**)**. Якщо система диференціальних рівнянь (7.37) така , що існує функція $V(x)$, для якої $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(7.37)} > 0$, а сама функція $V(x)$ в околі точки x=0 приймає значення $V(x) > 0$, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ є нестійким.

<u>Теорема 7.8</u> **(**друга теорема Ляпунова про нестійкість**)**. Якщо для системи диференціальних рівнянь (7.37) існує функція $V(x)$ така, що

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)} = \lambda V + W(x_1,..., x_n), \tag{7.48}$$

де $\lambda > 0$, а *W(x)* або тотожньо дорівнює нулю, або ж є додатньо постійною функцією і при цьому $V(x)$ не є від'ємно постійною, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (7.37) є нестійким.

<u>Доведення.</u> Оскільки *W(x)* додатна, то з (7.48) маємо $\dfrac{dV}{dt} \geq \lambda V$. Припустимо, що траєкторія для системи диференціальних рівнянь (7.37) не виходить з ε-сфери, тобто

$$\|x\| \leq \varepsilon. \tag{7.49}$$

Тоді $V(x)$ на (7.49) обмежена

$$V(x) \leq L. \tag{7.50}$$

Оскільки $\dfrac{dV(x)}{dt}$ залишається додатньою на траєкторії, то

$$\frac{dV(x)}{dt} \geq \lambda V(x) \geq \lambda V(x_0) > 0.$$

Звідки

$$V(x) \geq V(x_0) + \lambda(t - t_0)V(x_0), \tag{7.51}$$

що суперечить умові (7.50). Тобто розв'язок виходить з ε-сфери. Теорема доведена.

7.3.5. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем

Для лінійних стаціонарних систем

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (A = \{a_{ij}\}_{ij=1,2,\dots n}), \tag{7.52}$$

де A – деяка асимтотично стійка матриця, функцію Ляпунова можна побудувати у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T Bx$. Симетрична додатньо визначена матриця *B* знаходиться з умови

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.52)} = -x^T Dx, \tag{7.53}$$

де D – задана додатньо визначена матриця.

Для знаходження симетричної матриці *B* користуються матричним рівняння Ляпунова

$$AB + BA = -D, \tag{7.54}$$

яке легко отримується з умови (7.53).

При розв'язуванні прикладних задач часто користуються співвідношенням Релея

$$\rho_{\min}^{B} \le \frac{x^T Bx}{x^T x} \le \rho_{\max}^{B}, \tag{7.55}$$

де $\rho_{\min}^{B}$, $\rho_{\max}^{B}$ – мінімальне і максимальне власні значення симетричної додатньо визначеної матриці *B*.

7.3.6. Оцінка часу регулювання перехідного процесу в системах автоматичного керування за допомогою функцій Ляпунова

Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (7.52) ми побудували функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T Bx$ згідно умови

$$\frac{dV}{dt} = -x^T x, \tag{7.56}$$

тобто

$$A^T B + BA = -E.$$

З співвідношення (7.55) маємо

$$\frac{x^T Bx}{\rho_{\max}^{(B)}} \le x^T x \le \frac{x^T Bx}{\rho_{\min}^{(B)}}, \tag{7.57}$$

або
$$-\frac{x^T Bx}{\rho_{\min}^{(B)}} \le -x^T x \le -\frac{x^T Bx}{\rho_{\max}^{(B)}}.$$

Використовуючи (7.56) запишемо

$$-\frac{V}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \frac{dV}{dt} \le -\frac{V}{\rho_{\max}^{(B)}}, \quad -\frac{dt}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \frac{dV}{V} \le -\frac{dt}{\rho_{\max}^{(B)}}.$$

Інтегруючи записану нерівність отримаємо

$$-\frac{t-t_0}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \ln V - \ln V_0 \le -\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}, \qquad V_0\, e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\min}^{(B)}}} \le V \le V_0\, e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}}.$$

Використовуючи (7.57) прийдемо до нерівностей

$$\frac{V_0}{\rho_{\max}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\min}^{(B)}}} \le x^T x \le \frac{V_0}{\rho_{\min}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}}. \tag{7.58}$$

Нам потрібно знайти такий момент $t(x_0, \varepsilon)$, в який траєкторія системи диференціальних рівнянь (7.52) задовольнятиме умові $x^T x \le \varepsilon^2$. Оцінити час перехідного процесу можна з нерівності (7.58)

$$\frac{V_0}{\rho_{\min}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}} \le \varepsilon^2 (V_0 = x_0^T Bx_0), \quad e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}} \le \frac{\varepsilon^2 \rho_{\min}^{(B)}}{V_0}.$$

З останньої нерівності маємо

$$t(x_0, \varepsilon) = t_0 - \rho_{\max}^{(B)} \ln \frac{\varepsilon^2 \rho_{\min}^{(B)}}{V_0}. \tag{7.59}$$

Формулою (7.59) представлена оцінка часу перехідного процесу.