Розділ 8. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

8.1 Однорідні лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

8.1.1. Зв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними та систем звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

Рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$\Phi(x_1,..., x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1}, ... , \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 . \tag{8.1}$$

<u>Означення 8.1.</u> Розв'язком рівняння (8.1) називається функція

$$u = u(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{8.2}$$

яка визначена і неперервна разом з частинними похідними в деякій області змінних $x_1,..,x_n$ і перетворює в цій області рівняння (8.1) в тотожність. При цьому $x_1,..,x_n$ і значення $u,\frac{\partial u}{\partial x_1}, ... , \frac{\partial u}{\partial x_n}$ лежать в області визначення функції $\Phi(x_1,..., x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1}, ... , \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Якщо в рівнянні (8.1) функція $\Phi(x_1,..., x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1}, ... , \frac{\partial u}{\partial x_n})$ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то воно називається лінійним

$$X_1(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, ..., x_n, u). \tag{8.3}$$

Розглянемо однорідне рівняння, тобто випадок коли $R(x_1,..., x_n,u) \equiv 0$, а функції $X_i(x_1,..., x_n,u)$, $i = 1,2,..., n$ не залежать від u

$$X_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{8.4}$$

Рівняння (8.4) має очевидний розв'язок

$$u = c \ \ (c=const). \tag{8.5}$$

Доведемо, що рівняння (8.4) має безліч розв'язків, відмінних від очевидних.

Для цього, разом з (8.4), будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,.., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,.., x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,.., x_n)}. \tag{8.6}$$

Доведемо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (8.4) і системою (8.6). Припустимо, що коефіцієнти $X_1(x_1,.., x_n),\ldots,\ X_n(x_1,.., x_n)$ рівняння (8.4) неперервні разом з частинними похідними по $x_1,..,x_n$ в деякому околі точки $x_1^{(0)},.., x_n^{(0)}$ і в цій точці вони одночасно не перетворюються в нуль (тобто точка $(x_1^{(0)},.., x_n^{(0)})$ не є особливою точкою системи (8.6)). Наприклад, припустимо, що

$$X_n(x_1^{(0)},.., x_n^{(0)}) \neq 0. \tag{8.7}$$

При цьому припущенні система (8.6) має рівно (n-1) незалежних інтегралів, визначених і неперервних разом з частинними похідними в околі точки $(x_1^{(0)},.., x_n^{(0)})$. Це випливає з того, що система (8.6) рівносильна нормальній системі розмірності (n-1)

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1,.., x_n)}{X_n(x_1,.., x_n)},\\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2(x_1,.., x_n)}{X_n(x_1,.., x_n)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1,.., x_n)}{X_n(x_1,.., x_n)}\end{gathered} \tag{8.8}$$

для якої виконуються умови теореми про існування незалежних інтегралів нормальної системи.

<u>Теорема 8.1.</u> Довільний інтеграл системи (8.6) є неочевидним розв'язком рівняння (8.4).

<u>Доведення</u>. Припустимо, що $\psi(x_1,.., x_n)$ – інтеграл системи (8.6) визначений в деякому околі точки $(x_1^{(0)},.., x_n^{(0)})$. Тоді повний диференціал від $\psi(x_1,.., x_n)$, в силу (8.6) або (8.8), дорівнює нулю, тобто

$$d\psi_{(8.8)} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n \equiv 0. \tag{8.9}$$

Враховуючи співвідношення $dx_1 = \frac{X_1(x_1,..., x_n)}{X_n(x_1,..., x_n)}dx_n, ..., dx_{n-1} = \frac{X_{n-1}(x_1,..., x_n)}{X_n(x_1,..., x_n)}dx_n$,

рівняння (8.9) перепишемо так

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right]dx_n \equiv 0. \tag{8.10}$$

Скорочуємо на dx_n і домножуючи на X_n, отримаємо

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + ... + X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} \equiv 0. \tag{8.11}$$

Це означає, що функція $u = \psi(x_1, ..., x_n)$ є розв'язком рівняння (8.4).

<u>Теорема 8.2.</u> Довільний неочевидний розв'язок рівняння (8.4) є інтегралом системи (8.6).

<u>Доведення</u>. Нехай $u = \psi(x_1, ..., x_n)$ – неочевидний розв'язок рівняння (8.4). Тоді

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + ... + X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} \equiv 0. \tag{8.12}$$

Обчислимо

$$d\psi_{(8.8)} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n =$$

$$=[\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_n} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_n}] dx_n =$$

$$=(X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n}) \frac{dx_n}{X_n} \equiv 0 .$$

Це означає, що $\psi(x_1, ..., x_n)$ є інтегралом системи (8.6).

<u>Приклад 8.1.</u> Знайти розв'язки лінійного однорідного рівняння з частинними похідними

$$x \frac{\partial U}{\partial x} - 2y \frac{\partial U}{\partial y} - z \frac{\partial U}{\partial z} = 0 . \tag{8.13}$$

<u>Розв'язання</u>. Запишемо для рівняння (8.13) систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z} . \tag{8.14}$$

Для системи звичайних диференціальних рівнянь маємо інтеграли

$$\psi_1 = xz, \ \psi_2 = x\sqrt{y} \tag{8.15}$$

Тому

$$U_1 = xy, U_2 = x\sqrt{y} \tag{8.16}$$

є розв'язками рівняння (8.13).

8.1.2. Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння рівняння з частинними похідними. Розв'язування задачі Коші

Нехай

$$\psi_1(x_1, ..., x_n), ... , \psi_{n-1}(x_1, ..., x_n) \tag{8.17}$$

незалежні інтеграли системи (8.6). Тоді функція

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}) , \tag{8.18}$$

де $\Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})$ – будь-яка диференційована функція, буде розв'язком рівняння (8.4)

Дійсно, підставимо (8.18) в (8.4)

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} =$$

$$= X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + ... + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} (X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n}) \equiv 0 . \tag{8.19}$$

Формулу (8.18) називають загальним розв'язком рівняння (8.4). На відміну від загального розв'язку звичайного диференціального рівняння в (8.18) входять не довільні сталі, а довільна функція.

Задача знаходження загального розв’язку рівняння (8.4) рівносильна задачі знаходження (n-1) незалежних інтегралів відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі.

Розглянемо випадок двох незалежних змінних

$$X(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{8.20}$$

Запишемо систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{X(x,y)}=\frac{dy}{Y(x,y)}. \tag{8.21}$$

Якщо $\psi(x,y)$ – інтеграл системи (8.21), то

$$z=\Phi(\psi(x,y)) \tag{8.22}$$

загальний розв’язок рівняння (8.20). Тут $\Phi(\psi(x,y))$ довільна неперервно диференційована функція від ψ.

<u>Приклад 8.2.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial U}{\partial x_2}+...+x_n\frac{\partial U}{\partial x_n}=0. \tag{8.23}$$

<u>Розв'язання</u>. Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=...=\frac{dx_n}{x_n}. \tag{8.24}$$

Для системи (8.24) заходимо інтеграл

$$\frac{x_2}{x_1}=c_1,\ \frac{x_3}{x_1}=c_2,...,\frac{x_n}{x_1}=c_{n-1}. \tag{8.25}$$

Тобто

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1},\ \psi_2=\frac{x_3}{x_1},...,\ \psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}. \tag{8.26}$$

Тоді

$$U=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1}\right), \tag{8.27}$$

де $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1}\right)$ – неперервно-диференційована функція, буде загальним розв’язком системи (8.23).

<u>Приклад 8.3.</u> Розв’язати рівняння

$$(z-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial U}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial U}{\partial z}=0. \tag{8.29}$$

<u>Розв'язання</u>. Складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}. \tag{8.30}$$

Легко визначити

$$\psi_1=x+y+z,\ \psi_2=x^2+y^2+z^2. \tag{8.31}$$

Тому загальний розв’язок має вигляд

$$U = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2). \tag{8.32}$$

Перейдемо до постановки і розв’язання задачі Коші для рівняння (8.4). Серед всіх розв’язків рівняння знайти такий

$$u = f(x_1,..., x_n), \tag{8.33}$$

який задовольняє початковій умові

$$u = \varphi(x_1,..., x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}, \tag{8.34}$$

або

$$u\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1,..., x_{n-1}), \tag{8.35}$$

де $\varphi(x_1,..., x_{n-1})$ задана неперервно-диференційована функція від $x_1,..., x_{n-1}$.

Для випадку двох змінних: знайти функцію

$$z = f(x, y), \tag{8.36}$$

яка задовольняє умові

$$z = \varphi(y) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}. \tag{8.37}$$

Геометрично (8.36),(8.37) означає, що серед всіх інтегральних поверхонь знайти ту, яка проходить через задану криву (8.37) при $x_n = x_n^{(0)}$. Ця крива лежить в площині $x_n = x_0$, яка паралельна площині YOZ.

В загальному випадку розв’язування задачі Коші зводиться до визначення вигляду функції $\Phi(\psi_1,..., \psi_{n-1})$ так , щоб

$$\Phi(\psi_1,..., \psi_{n-1})\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1,..., x_{n-1}). \tag{8.38}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,..., x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi_1} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1,..., x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi}_{n-1} \end{cases}. \tag{8.39}$$

Тоді (8.38) перепишемо так

$$\Phi(\overline{\psi_1},..., \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1,..., x_{n-1}). \tag{8.40}$$

Розв’яжемо систему (8.39) в околі точок $x_1^{(0)},..., x_n^{(0)}$, відносно $x_1,..., x_{n-1}$ (це можливо так як $\psi_1,..., \psi_{n-1}$ – незалежні інтеграли)

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi_1},..., \overline{\psi}_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi_1},..., \overline{\psi}_{n-1}) \end{cases}. \tag{8.41}$$

Тоді функцію $\Phi(\psi_1,..., \psi_{n-1})$ вибираємо таким чином

$$\Phi(\psi_1,..., \psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1,..., \psi_{n-1}),..., \omega_{n-1}(\psi_1,..., \psi_{n-1})). \tag{8.42}$$

Тоді умова (8.40) буде виконуватися

$$\Phi(\overline{\psi_1},..., \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\overline{\psi_1},..., \overline{\psi}_{n-1}),..., \omega_{n-1}(\overline{\psi_1},..., \overline{\psi}_{n-1})) = \varphi(x_1,..., x_{n-1}).$$

Тому функція

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1,..., \psi_{n-1}),..., \omega_{n-1}(\psi_1,..., \psi_{n-1})) \tag{8.43}$$

– шуканий розв’язок задачі Коші.

<u>Приклад 8.4.</u> Розв'язати задачу Коші

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

при умові $z = \varphi(y)$ при $x = 0$.

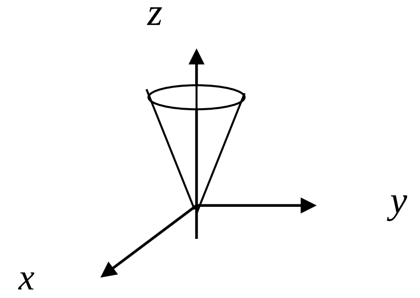
<u>Розв'язання</u>. Складаємо систему $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$, звідси $\psi = x^2 + y^2 -$ інтеграл. Отже

$$y^2 = \overline{\psi}, y = \sqrt{\overline{\psi}}\ .$$

Шуканий розв'язок $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Розглянемо частинні випадки:

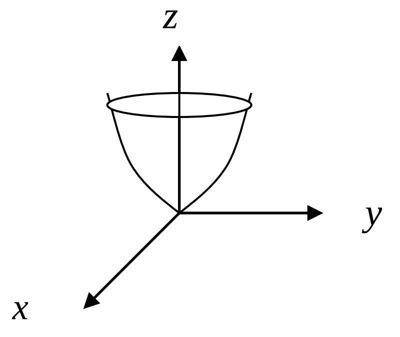
а) $\varphi(y) = y$. Тоді $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 + y^2$



Мал. 8.1

Розв'язок – конус, який отриманий обертанням прямої $z = y$ навколо осі OZ (мал. 8.1);

б) $\varphi(y) = y^2$, $z = x^2 + y^2$



Мал. 8.2

Розв'язок – параболоїд, який отриманий обертанням параболи $z = y^2$ навколо осі OZ (мал. 8.2).

8.2. Розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,...,x_n,u)\,. \qquad (8.44)$$

Розв’язок диференціального рівняння (8.44) шукаємо у вигляді

$$V(x_1,...,x_n,u)=0\,, \qquad (8.45)$$

де $V(x_1,...,x_n,u)$ неперервно-диференційована функція по всім змінним і $\frac{\partial V(x_1,...,x_n,u)}{\partial u}\neq 0$ в околі точки $(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)},u^{(0)})$.

Припустимо, що в (8.45) $u(\cdot)$ залежить від $x_1,...,x_n$. Продиференціюємо (8.45) по x_k

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0\,, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_k}}{\frac{\partial V}{\partial u}}\,, \quad k=1,2,\ldots,n. \qquad (8.46)$$

Підставивши (8.46) в (8.44), отримаємо

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+R(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0. \qquad (8.47)$$

Рівняння (8.47) – це вже однорідне рівняння. Його розв’язуємо по відомій схемі:

а) складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,...,x_n,u)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1,...,x_n,u)}=\frac{du}{R(x_1,...,x_n,u)}\,; \qquad (8.48)$$

б) знаходимо *n* незалежних інтегралів

$$\psi_1(x_1,...,x_n,u),...,\psi_n(x_1,...,x_n,u)\,; \qquad (8.49)$$

в) записуємо загальний розв’язок

$$V=\Phi(\psi_1(x_1,...,x_n,u),...,\psi_n(x_1,...,x_n,u))=0\,. \qquad (8.50)$$

Приклад 8.5. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=mu \quad (m\neq 0)\,.$$

Розв'язання. Складаємо систему в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{x_1}=...=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{du}{mu}\,.$$

Знаходимо інтеграли

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1}\,,\ \psi_2=\frac{x_3}{x_1},...,\psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}\,,\ \psi_n=\frac{u}{x_1{}^m}\,.$$

Тоді

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1},\frac{u}{x_1^m}\right)=0 \qquad (8.51)$$

– загальний розв'язок.

Якщо розв'язати (8.51) відносно $\frac{u}{x_1{}^m}$, то отримаємо

$$u = x_1^m f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)$$

–загальний розв'язок в явній формі.

Задача Коші ставиться та розв'язується для рівняння (8.44) аналогічно: знайти таку функцію

$$u = f(x_1, ..., x_n), \tag{8.52}$$

яка задовольняє початковій умові

$$u = \varphi(x_1, ..., x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}, \tag{8.53}$$

де $\varphi(x_1, ..., x_{n-1})$ – задана неперервно-диференційована функція від $x_1, ..., x_{n-1}$.

Алгоритм для знаходження розв'язку задачі Коші:

а) перепишемо початкові умови (8.53) у вигляді

$$u - \varphi(x_1, ..., x_{n-1}) = 0 \text{ при } x_n = x_n^{(0)};$$

б) знаходимо n інтегралів $\psi_1, ..., \psi_n$ і складаємо систему

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi_1} \\ \vdots \\ \psi_n(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi_n} \end{cases}; \tag{8.54}$$

в) розв'язуємо систему (8.54) відносно $x_1, ..., x_{n-1}, u$

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi_1}, ..., \overline{\psi}_n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi_1}, ..., \overline{\psi}_n) \\ u = \omega_n(\overline{\psi_1}, ..., \overline{\psi}_n) \end{cases}; \tag{8.55}$$

г) записуємо розв'язок задачі Коші в вигляді

$$\Phi(\psi_1, ..., \psi_{n-1}) = \psi_n(\psi_1, ..., \psi_n) - \varphi(\omega_1(\psi_1, ..., \psi_n), ..., \omega_{n-1}(\psi_1, ..., \psi_n)). \tag{8.56}$$

При цьому умова (8.53) буде виконуватися.

<u>Приклад 8.6.</u> Розв'язати задачу Коші

$$\left(1 + \sqrt{z - x - y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2, z = 2x \text{ при } y = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Складаємо систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Звідси $\psi_1 = z - 2y, \psi_2 = 2\sqrt{z - x - y} + y$.

При $y = 0$: $z = \overline{\psi_1}$, $2\sqrt{z - x} = \overline{\psi_2}$. Отже

$$\begin{cases} x = \overline{\psi_1} - \frac{\overline{\psi_2}^2}{4} \\ z = \overline{\psi_1} \end{cases}.$$

Тому $\psi_1 - 2(\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4}) = 0$, $2\psi_1 - \psi_2^2 = 0$ – розв'язок задачі Коші. Остаточно маємо

$$2z - 4y - (2\sqrt{z - x - y} + y)^2 = 0.$$