

Розділ 1. Моделювання як метод наукового пізнання

Слово “*модель*” походить від латинського *modulus* (міра, зразок, норма). Початкове значення цього слова було пов’язане з ремеслами – ливарною справою, архітектурою тощо. Стародавні римські ливарники називали моделями зразки майбутніх відливок, в епоху середньовіччя воно означало масштаб, у якому подавалися всі пропорції будівлі, а в подальшому воно прийняло значення зразка, за яким щось створюється і в мистецтві. Оскільки зразок часто являв собою зменшену копію предмета, то й виникла уява про модель як про мініатюрне зображення, що було схоже на об’єкт у всьому, за винятком розмірів. У більш пізні часи поняття моделі набуває загальнонаукового характеру і ним починають користуватись у наукових дослідженнях, зокрема, в тих випадках, коли безпосереднє дослідження виявлялося неможливим або малоефективним. В такому разі досліджуваний об’єкт-оригінал внаслідок його значної складності замінювався іншим, вигаданим або штучно створеним, більш простим і доступним для вивчення, таким, що знаходився у деякій відповідності з оригіналом. Цей об’єкт-замінювач і одержав назву моделі вивчуваного об’єкту.

Таким чином, як складовий елемент пізнання навколишнього світу створення й дослідження моделей (моделювання) відоме давно. Воно з’явилося одночасно з науковим пізнанням і завжди його активно супроводжувало. Більше того, наукове пізнання в його сьогоднішньому розумінні без моделювання (також у його сьогоднішньому розумінні) взагалі неможливе.

Навчання людини також є пізнанням, але це пізнання відрізняється від наукового насамперед тим, що, навчаючись, людина за допомогою вчителів, книг, комп’ютерів і комп’ютерних мереж, а також інших засобів обміну інформацією пізнає вже відомі людству факти, тоді як наука пізнає нове, невідоме. Проте, і в науковому, і в навчальному пізнанні є спільні риси, до яких належить і робота з моделями, тобто моделювання.

Людський розум не здатний одночасно охопити всю складну взаємодію і взаємний вплив будь-якого об’єкту та його оточення. Саме з цієї причини у свій час відбувся поділ пізнання на окремі галузі – науки. Цей процес відбувається й тепер. Намагаючись пізнати (вивчити, дослідити) об’єкт, дослідник вимушений вдаватись до певних спрощень та обмежень. І в межах кожної окремої науки пі-

знання звичайно йде через спрощення й обмеження, а вже далі – від простого до складного.

Говорячи, наприклад, про будову частинок речовини – молекул, ми, в міру збагачення своїх знань про них, спочатку зображуємо їх у вигляді щільно розташованих у одній площині різнокольорових кульок – утворюючих атомів, пізніше – у вигляді ланцюжків атомів на площині, а далі – у тривимірному просторі з поданням кутів та відстаней між атомами. Всі такі зображення являють собою моделі будови молекул. Ці моделі не є застиглими: кожна з них лише на момент створення або вивчення віддзеркалює існуючі відомості про об'єкт і завжди залишається відкритою для подальшого вдосконалення. Отже, навчання, так само, як і наукове пізнання, завжди пов'язане з переходом від одних моделей до інших, від простих до більш складних, проте й більш реалістичних.

Та хіба тільки навчання? Адже для того, щоб почувати себе в житті більш-менш упевнено та комфортно, ми постійно вимушені моделювати можливі ситуації й вибирати найбільш сприятливі з них. Так само й у трудовій сфері. Креслення й схеми, макети й випробувальні стенди, зразки нової техніки й одягу, авто- й авіатренажери, глобус і планетарій – все це приклади використання різноманітних моделей.

Ми не завжди ясно усвідомлюємо, що повсякденно і повсякчасно маємо справу з моделями. Скоріше навпаки, у своєму розумінні тієї ролі, що її відіграє моделювання у нашому власному житті та пізнанні, ми часто нагадуємо відомого мольєрівського героя Журдена, котрий несподівано виявив, що ось вже сорок років він говорить прозою. Моделювання в нашому житті – це буденна проза, і колись повинен-таки настати момент усвідомлення цього факту. Автор прагне, щоб для вас таке прозріння настало раніше, ніж у сорок років. Крім того, ми маємо на меті привернути вашу увагу до однієї з ефективних сучасних технологій пізнання, ім'я якої – Комп'ютерне Математичне Моделювання. Ви зможете познайомитися з основними ідеями і методами цієї технології та застосувати їх до створення та експериментального дослідження математичних моделей багатьох цікавих і різноманітних явищ. А для тих, хто знається на програмуванні, відкриваються широкі можливості для творчої реалізації власних ідей.

Глава 1. Моделі й моделювання

Вже давно поняття “модель” широко й різноманітно використовується в різних галузях природознавства й техніки, в гуманітарних науках і образотворчому мистецтві, в економіці і психології, в конструюванні одягу, взуття, зачісок, у художній літературі. Ось чому дати одразу зрозумілий опис або, тим більше, дати таке означення цього поняття, яке б відповідало різним його застосуванням і водночас було б доступним для фахівців різних галузей, зовсім непросто і, скоріш за все, мабуть, неможливо. Тому спочатку звернемося до деяких прикладів.

1. З метою пояснити, як працює радіоприймач, часто звертаються до малюнку, на якому з допомогою прямокутників зображують його окремі функціональні вузли (блоки), а стрілками між ними показують напрямки, вздовж яких відбувається обмін інформацією (електричними сигналами). Таке зображення на папері, яке зветься блок-схемою, – це модель.

2. Готуючись до запровадження біологічного методу боротьби зі шкідниками сільськогосподарських культур, у спеціальних лабораторіях створюють спрощені копії екологічних систем, куди приміщують представників певних культурних рослин, а також їхніх шкідників та ворогів цих шкідників. На таких мікросистемах вивчають особливості взаємодії всіх представників утвореного співтовариства. Лабораторна екосистема – це модель.

3. Перед тим, як почати серійний випуск нового типу літака (корабля, автомобіля), спочатку його зменшену копію, а у подальшому за можливості і самий цей об'єкт уміщують в аеродинамічну трубу і за допомогою спеціального обладнання визначають, які навантаження виникають у різних елементах конструкції. Літак у аеродинамічній трубі – це модель.

4. З метою оцінити довжину r дроту, який необхідно найбільш економно протягти з даху п'ятиповерхового будинку на дах розташованого поруч дев'ятиповерхового, можна виміряти відстань d між будинками та різницю висот цих будинків h , а далі обчислити

$$r = \sqrt{d^2 + h^2} .$$

Наведена формула при її використанні в умовах даної конкретної задачі – це модель.

Зрозуміло, що ознайомитися з принципом роботи радіоприймача не можна, зазирнувши в його середину, тому єдине, що тут залиша-

ється – це схема.

Зрозуміло, можна було б придбати певну кількість ворогів шкідників і одразу розселити їх у даному регіоні. Та може виявитися, що вони стануть одночасно й ворогами деяких корисних комах або ж строки їх масового вильоту не співпадуть із відповідними строками у шкідників. У такому разі, по-перше, не будуть виправдані витрати, пов'язані з їх придбанням, і, по-друге, значна частина врожаю знов загине. Краще вже виконати лабораторне дослідження.

Звичайно, можна було б запустити літак у серійне виробництво, не маючи точної уяви про навантаження, що виникатимуть під час польоту в окремих його конструкціях. Але ці навантаження, якщо вони виявляться значними, призведуть до руйнування літака в польоті. Краще вже спочатку дослідити літак у трубі.

Можна було б, не виконуючи ніяких обчислень, по черзі підняти дріт на обидва дахи, змотуючи його з котушки, розташованої на землі. Але в такому разі на другий дах довелося б піднімати дріт помітно більшої довжини, ніж потрібна, а, отже, і важчий. Якщо це важкий кабель, то краще вже витратити деякий час на попередні нескладні вимірювання та на розрахунок і відрізати дротину саме потрібної довжини.

У всіх перелічених прикладах має місце співставлення деякого реального об'єкта-оригінала з іншим, що його замінює:

- радіоприймач → схема на аркуші паперу;
- екосистема регіону → екосистема в лабораторії;
- серійний літак → одиночний літак у трубі;
- орієнтовна довжина дротину → формула.

У всіх цих випадках припускається, що якісь властивості або зберігаються при переході від реального об'єкта до замітника-моделі, або ж, навкрай, модель дозволяє скласти хоч деякі уявлення про такі властивості.

Так, прямокутники і стрілки на блок-схемі не мають нічого спільного з окремими елементами-радіодеталлями та їх групами в радіоприймачі, отже, тільки схема дозволить зрозуміти, як, звідки та куди йдуть електричні сигнали і яких змін вони зазнають.

Лабораторна екологічна система значно менша й суттєво бідніша за реальну, проте вона дозволяє скласти уявлення про ефективність обраного біологічного ворога шкідників.

Літак, що знаходиться в аеродинамічній трубі, не летить, але ті навантаження, що виникають у його окремих елементах, відповіда-

ють умовам реального польоту.

Та й відрізки, що фігурують у записі формули, мало нагадують поверхню землі разом із будинками, однак наведена формула дозволяє використати дріт більш-менш економно і здійснити задуману роботу за менший час і з меншими зусиллями.

Тепер розглянемо наступні означення:

Модель – це такий матеріальний або мислено уявлюваний об'єкт, який в процесі пізнання (вивчення) замінює собою реальний об'єкт-оригінал, і при цьому відтворює деякі важливі для даного дослідження риси оригіналу.

Тут термін “об'єкт” вжито у найбільш широкому розумінні: об'єктом може бути не тільки певний предмет, але й будь-яка ситуація, явище, процес то=що.

Модель є немов би посередником між досліджуваним об'єктом і дослідником.

Моделювання – це така форма дослідницької діяльності, коли з метою одержання нових відомостей про об'єкт експериментально досліджується не самий об'єкт, а його спрощений образ – модель.

Тут доречним є таке порівняння: дослідник, котрий розробляє модель, подібний до художника-карикатуриста, котрий, як відомо, відтворює оригінал не у всіх подробицях подібно до фотографа, а спрощує його так, щоб виявити й підкреслити найбільш характерні риси. Гарна модель об'єкта має бути саме його гарною “карикатурою”, такою, що відображує найбільш характерні й типові ознаки і властивості оригіналу, і навмисно ігнорує всі решту – несуттєві властивості. На моделюванні, по суті, ґрунтується будь-яке наукове дослідження – як теоретичне, так і експериментальне.

Як правило, *модель доступніша для дослідження, ніж реальний об'єкт*. До того ж слід розуміти, що є об'єкти, які взагалі не можуть бути досліджені безпосередньо: неприпустимі, наприклад, пізнавальні експерименти з економікою країни; принципово нездійсненими є експерименти з минулим, із зірками чи зоряними системами – галактиками; неможливо досліджувати процеси з дуже довгою або ж із надзвичайно короткою тривалістю в часі тощо. Єдиним придатним тут методом дослідження є метод моделювання.

Модель також дозволяє навчитись ефективно керувати об'єктом, випробовуючи різні варіанти управління саме на моделі цього об'єкту. Досліджувати з цією метою самий об'єкт у кращому випадку буває незручно, а взагалі й просто шкідливо чи неможливо,

оскільки виникає загроза привести об'єкт у небажаний або, ще гірше, у незворотний аварійний стан. Дуже сумний приклад тут – це аварія у 1986 році на Чорнобильській АЕС. Якщо помилка виявлена і усунута за допомогою моделі, то це завжди значно простіше, безпечніше та менш коштовно. Переконливим прикладом є вихід з ладу системи енергозабезпечення космічного корабля “Аполлон-13” під час його перебування на орбіті навколо Місяця (1970 р.). Лише відтворення аварійної ситуації та розігрування варіантів її усунення на моделі в центрі управління польотом дозволили повернути корабель з астронавтами на Землю.

Найбільш привабливим у моделюванні є те, що *вдало створена модель має дивну властивість: вона здатна давати нові, не передбачені до того відомості про об'єкт-оригінал.*

У випадках, коли об'єкт має характеристики, що залежать від часу (так звані *динамічні* характеристики), особливого значення набуває задача прогнозування зміни станів об'єкту. Тут використання моделей також надає велику допомогу.

Отже моделювання дає змогу

- зрозуміти будову конкретного об'єкту, його основні властивості, закономірності розвитку і взаємодії з навколишнім оточенням;
- навчитися керувати об'єктом з метою виявлення найкращих способів управління у відповідності до заданої мети;
- прогнозувати наслідки заданих способів впливу на об'єкт.

1.1. Які бувають моделі

Існують різні підходи до моделювання, які умовно можна об'єднати у дві великі групи: *матеріальне* (предметне, або речовинне) та *ідеальне* (мислене) моделювання. У свою чергу, їх поділяють на дещо конкретніші види.

У матеріальному моделюванні розрізняють моделювання *фізичне* й *аналогове*.

1.1.1. Фізичне моделювання

Фізичним називають моделювання, коли деякому об'єкту відповідає його збільшена або зменшена копія, яка дозволяє проводити дослідження (здебільшого за лабораторних умов). Результати, що їх отримують на моделі, переносять на об'єкт. В основу такої можливості покладена *теорія подібності* (див. нижче).

Наведемо декілька прикладів фізичних моделей:

- у гідротехніці – лотки з водою, що моделюють річки, канали,

шлюзи;

– у будівництві – макети споруд, на яких вивчають, наприклад, умови стійкості та розподіл навантажень;

– у літако- та суднобудуванні – зменшені копії літальних апаратів та кораблів.

Фізичні моделі можуть бути і просто демонстраційними (ілюстративними):

– у фізичній географії – телурій, що моделює добове й річне обертання Землі та пов'язані з ним наслідки (зміну дня й ночі, зміну пір року, затемнення, існування кліматичних поясів тощо);

– в астрономії – планетарій, який моделює видиме обертання зоряного неба та зміну його вигляду на протязі доби або при зміні пір року;

– у теплотехніці – розріз двигуна внутрішнього згоряння, що ілюструє циклічний принцип його дії.

Теорія подібності, яку було започатковано в VII ст. І. Ньютоном, є теоретичною основою *фізичного* моделювання.

Приклад використання теорії подібності: моделі суден у випробувальному каналі

Основна ідея теорії подібності полягає в тому, що фізичні явища можна характеризувати не тільки величинами, що мають певну розмірність, а й безрозмірними комбінаціями таких величин. Ці безрозмірні комбінації, складені за певними правилами, називають *критеріями подібності*.

Для того, щоб два фізичних процеси були подібні, необхідно й достатньо, щоб вони були якісно однаковими, а їхні критерії подібності – попарно рівними. Тоді, знаючи значення величин (швидкість, тиск, температуру, густину тощо), які характеризують один об'єкт, можна знайти значення відповідних (таких самих) величин, що характеризують інший. Саме так за результатами досліджень, проведених на моделі, визначають відповідні параметри, властиві оригіналу.

Для різних груп явищ існують свої критерії подібності. Кожен з них носить ім'я вченого, який його першим увів. Зокрема, одним із основних критеріїв подібності у гідродинаміці, яка вивчає рухи рідин і тіл у рідких середовищах, є число Фруда (за ім'ям англійського вченого-суднобудівника XIX ст. Уільяма Фруда):

$$Fr = \frac{v^2}{gl}, \quad (1)$$

де v – швидкість рідини на значній відстані від тіла, яке вона обтікає;
 l – характерний лінійний розмір тіла;
 g – прискорення сили тяжіння.

Цей критерій відіграє важливу роль при моделюванні процесів, пов'язаних з рухами кораблів. При невеликих швидкостях (для тихохідних суден) критерій Фруда $Fr = 0,4$ за умови, що швидкість визначається у вузлах (морських милях за годину).

Перед тим, як розпочати будівництво нового корабля, його зменшену копію – фізичну модель – досліджують у випробувальному каналі. Одним із багатьох питань, що цікавлять суднобудівників, є питання про швидкість.

З моделлю судна, здавалося б, усе зрозуміло: її дуже зменшено у порівнянні з натурою. Так, модель двохсотметрового танкера, яку виконано у масштабі 1:200, має довжину 1 м.

Припустимо, що реальний танкер повинен розвивати швидкість 19 вузлів. Поставимо питання:

з якою швидкістю має рухатись модель у каналі, щоб результати вимірювань, виконаних при її випробуваннях, допускали перерахунок на реальне судно?

Чи також зі швидкістю 19 вузлів, чи, можливо, швидкість слід зменшити у відношенні 1:200?

Фруд експериментально довів, що *максимальна швидкість судна за умови, що не вдаються ні до яких технічних “трюків”, ніколи не перевищує значення*

$$v_{max} = 2,5 \sqrt{\text{довжина вздовж ватерлінії}} \text{ вузлів.} \quad (2)$$

Двохсотметровий корпус танкера має вздовж ватерлінії довжину близько 190 м, а модель – відповідно 0,95 м. Максимальні швидкості танкера і моделі відповідно становлять

$$v_{max \text{ т}} = 2,5 \cdot \sqrt{190} = 34,5 \text{ вузла} = 64 \text{ км/год,}$$

$$v_{max \text{ м}} = 2,5 \sqrt{0,95} = 2,4 \text{ вузла} = 4,5 \text{ км/год.}$$

Якщо модель тягти швидше, ніж 2,4 вузла, то вона просто “вистрибне” з води.

Таким чином, випробовуючи майбутній двохсотметровий танкер на моделі, слід мати на увазі два закони подібності:

- 1) подібність геометричних розмірів моделі й реального судна;
- 2) подібність при моделюванні закону опору і відповідної швидкості при русі тіла у воді.

Зрозуміло, суднобудівник має заздалегідь знати, як поведе себе

танкер не тільки на максимальній швидкості, але й на економічній швидкості у звичайному рейсі. Відповідь на своє запитання він одержить із закону подібності:

$$\left[\frac{v^2}{gl} \right]_{\text{танкера}} = \left[\frac{v^2}{gl} \right]_{\text{моделі}},$$

і остаточно

$$v_{\text{танкера}} = v_{\text{моделі}} \sqrt{\frac{l_{\text{танкера}}}{l_{\text{моделі}}}} = v_{\text{моделі}} \sqrt{\frac{190}{0,95}} \approx 14,1 v_{\text{моделі}}.$$

1.1.2. Аналогове моделювання

Аналогове моделювання засноване на аналогії (схожості за деякими ознаками) процесів та явищ, що мають різну фізичну природу, але описуються *однаковими за виглядом рівняннями, логічними схемами тощо*. Це дає можливість вивчати одні явища, замінюючи їх іншими.

Так, зокрема, за формулою

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$$

де Z – шукана величина, можна знаходити

- загальний опір $R = Z$ двох паралельно сполучених провідників з опорами $R_1 = X$ та $R_2 = Y$;
- фокусну відстань $F = Z$ тонкої лінзи, якщо відомі відстань $d = X$ від лінзи до світної точки та відстань $f = Y$ від лінзи до зображення;
- час $t = Z$ спільного виконання деякої роботи двома виконавцями за умови, що один з них здатний виконати всю роботу за час $t_1 = X$, а другий – за час $t_2 = Y$;
- час $t = Z$ руху пасажирів на рухомому ескалаторі метро, якщо цей пасажир долає східці нерухомого ескалатора за час $t_1 = X$, а сам ескалатор переміщує нерухомого пасажирів за час $t_2 = Y$.

Це означає, що можна скласти електричне коло з двома змінними резисторами, сполученими паралельно, і розв'язати будь-яку із згаданих щойно задач. Аби тільки ми мали можливість визначати опори кожного з резисторів і їхній загальний опір. До речі, поміркуйте, як це зробити. Було б дуже бажано, щоб за можливості ви експериментували з таким колом у шкільному фізичному кабінеті. Створення електричних аналогів реальних об'єктів (процесів, явищ)

було свого часу покладено в основу роботи *аналогових ЕОМ*.

Найбільш поширені приклади аналогового моделювання:

- вивчення механічних коливань за допомогою електричних кіл і навпаки;
- дослідження вихрових рухів повітряних мас за допомогою таких самих рухів рідин;
- вивчення та обчислення певних характеристик поля тяжіння за допомогою відповідних характеристик електростатичного поля.

Відмітимо, що в обох типах матеріального моделювання моделі являють собою деяке матеріальне втілення об'єкта-оригінала і завжди пов'язані з ним своїми геометричними, фізичними або іншими характеристиками. До того ж і саме дослідження – *натурний експеримент* – пов'язане з матеріальним впливом на модель.

Від матеріального моделювання принципово відрізняється *ідеальне*, яке засноване не на матеріальній аналогії об'єкта й моделі, а на аналогії ідеальній, мисленій. Воно виникає в людській свідомості й існує в ній. Ідеальна модель може існувати в уяві однієї окремої людини, співтовариства або суспільства. Ідеальне моделювання має теоретичний, абстрактний характер. Розглядають два типи ідеального моделювання: *інтуїтивне* і *знакове*.

1.1.3. Інтуїтивне моделювання

Інтуїтивне моделювання засноване на інтуїтивному уявленні про об'єкт дослідження; воно не підлягає математичному опису, або не потребує його. Образи різних об'єктів із навколишнього оточення, що виникають у нашій свідомості, відносять до інтуїтивних моделей цих об'єктів.

Так, добре відома дитяча гра-забава “А що було б, якби...?” – це, по суті, гра у передбачення. Напевно, вона подобається дітям внаслідок природної потреби дитини будувати моделі поведінки для правильного передбачення і прогнозування життєвих ситуацій, серед яких дитині доводиться існувати. Ще до приходу в школу діти вже конструюють свої власні моделі подумки, на папері або за допомогою ЕОМ чи інших засобів.

Прикладами інтуїтивного моделювання є також і ті добре відомі випадки, коли виникає необхідність прийняти рішення в умовах браку інформації, наприклад, вибору оптимальної стратегії майбутніх дій. Часто до розв'язання такої проблеми залучають групи спеціалістів і запроваджують *мозковий штурм*. З цього приводу деякі психологи схильні вважати, що прийняття правильних рішень в означених

ситуаціях засноване на властивості людського мозку підсвідомо поповнювати брак інформації з попереднього життєвого досвіду. В цьому розумінні життєвий досвід кожної людини можна вважати її власною інтуїтивною моделлю навколишнього світу. Проте, приймаючи відповідальні рішення, не варто перебільшувати ролі людської інтуїції і покладатись тільки на неї.

1.1.4. Знакове моделювання

Знакове моделювання використовує в якості моделі знакові перетворення будь-якого виду: схеми, графіки, креслення, набори символів, формули, та інші умовні позначення. Поза свідомістю та діяльністю людини ніяка знакова система неможлива.

Ось деякі приклади знакових моделей:

- географічні карти;
 - записи шахових партій;
 - різноманітні схеми (електричні, кінематичні тощо);
 - нотні записи мелодій;
 - зображення взаємозв'язку та взаємозалежності між словами в реченні при синтаксичному розборі;
 - записи хімічних реакцій;
 - формули (рівняння) математики, фізики, техніки;
 - різноманітні піктограми
- і таке інше.

1.2. Математичне моделювання

Надзвичайно важливим і поширеним видом знакового моделювання є *математичне моделювання*, в якому дослідження здійснюється з використанням моделі, сформульованої мовою математики (тобто у вигляді математичних виразів).

Оскільки основний зміст нашого курсу присвячений вивченню особливостей створення і методів роботи саме з математичними моделями, зупинимося на цих питаннях більш докладно.

Інформація (дані) про об'єкти, події, процеси вже є деякою їхньою моделлю – інформаційною. Окремим випадком інформаційних моделей є математичні моделі.

Математична модель – це опис деякого реального процесу або деякої досліджуваної ситуації мовою математичних формул та співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних виразів тощо), це подані у математичній формі основні закономірності та зв'язки, притаманні виучуваному об'єкту.

Пригадаймо добре відомі ще з початкової школи задачі на складання рівнянь: “Два поїзди одночасно вийшли назустріч один одному...”, “В басейні встановлено дві труби ...”. В ті часи ви складали потрібні рівняння без усякої підозри про те, що ви займалися побудовою математичних моделей. У подібних задачах усе так просто й зрозуміло, що слова “математична модель” виглядають навіть як недоречний пафос. Проте саме тут і має місце факт опису реального процесу мовою абстрактних математичних понять.

Згадане вище аналогове моделювання за своєю суттю засноване на схожості математичних моделей різних за своєю природою процесів. А наведена формула являє собою узагальнену математичну модель перелічених там явищ. Таким чином, однакові моделі часто дозволяють вивчати різні явища. Але не менш важливим є й обернений факт – можливість і доцільність вивчення одного й того ж явища за допомогою різних моделей. У такому разі результати вивчення взаємно доповнюють один одного, даючи більш повне уявлення про об’єкт дослідження.

Отже, математична модель – це завжди спрощений образ реальної (взятої з оточуючого світу) ситуації; вона дозволяє звести складну реальну проблему до порівняно простої математичної задачі, такої, що має розв’язок, тобто дозволяє одержати результат (відповідь).

Математичне моделювання вже давно (від часів І. Ньютона – XVII ст.) з успіхом застосовувалось у різних галузях науки й техніки. Однак широке використання цього методу стримувалося недосконалими технічними засобами для численних і складних розрахунків. Та в середині XX ст. математичне моделювання зазнало свого другого народження. Це відбулося завдяки появі ЕОМ, які дозволили фахівцям з успіхом працювати зі значно більш складними математичними моделями, що містили тисячі різноманітних параметрів та невідомих величин. Перші ЕОМ, що з’явилися у 50-х роках, були створені саме для “обслуговування” математичних моделей, пов’язаних з оволодінням ядерною енергією та розробкою і вдосконаленням ракетно-космічної техніки. Прийшов час математичних моделей, які більш повно і точно відбивали складні реальні процеси.

Глава 2. Основні етапи моделювання

2.1. Створення моделі

На практиці вихідним пунктом моделювання стає деяка ситуація, що висуває перед дослідником задачу, для якої необхідно знайти відповідь. Проте, вживання в моделюванні таких слів, як “задача” й “відповідь”, можуть увести початківця в оману.

2.1.1. Постановка задачі

Реальні ситуації дуже рідко бувають чітко обумовленими, оскільки складні взаємодії досліджуваного об'єкту з навколишнім оточенням призводять до значних утруднень при описі цих ситуацій. Досвід показує, що в багатьох випадках практично неможливо одразу чітко сформулювати задачу так, щоб на її основі стало б можливим створення моделі. Процес народження задачі, який називають *постановкою задачі*, фактично зводиться до послідовних переформулювань проблеми – зміни її сюжетної основи шляхом заміни реальних об'єктів на їхні абстрактні образи. Так, навіть у наведеному вище простому прикладі про оцінку довжини дротини ми замінили будинки і поверхню землі прямими відрізками, і лише після цього задача звелася до знаходження гіпотенузи прямокутного трикутника.

Завершується постановка задачі словесним і математичним описом умови задачі. Словесне (текстове) формулювання задачі разом із пояснювальними рисунками або схемами називають *змістовою (концептуальною) моделлю*, а зв'язки між найбільш важливими характеристиками об'єкту, записані у вигляді математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних виразів), являють собою *математичну модель*.

2.1.2. Зміст відповіді

Відповідь (тобто результат моделювання), як уже зазначалось, має містити інформацію, що надавала б можливості для

- прогнозування нових результатів;
- одержання відомостей про непередбачені до цього властивості об'єкту;
- полегшення прийняття рішень;
- здійснення автоматичного управління.

Відповідь у моделюванні – це не обов'язково те, до чого ми звикли в шкільній математиці, фізиці, хімії: $x = 17$, $R = 400$ Ом або

$M = 98$ г/моль тощо. Результатами моделювання можуть бути також таблиці чисел та відповідні діаграми (графіки), креслення тощо.

Одержану відповідь необхідно *проаналізувати* й осмислити. Виконують це люди (спеціалісти), вони й роблять необхідні *висновки*.

2.1.3. Спрощуючі припущення

Вже на стадії постановки задачі триває процес виявлення основних (суттєвих) ознак об'єкту. Деякі його риси уявляються дослідникові важливими, ряд інших – другорядними. Відмова від ряду особливостей, несуттєвих на думку дослідника, приводить до спрощення й ідеалізації. Опис об'єкту формулюється у вигляді спрощуючих припущень, які входять до сюжетної основи майбутньої концептуальної моделі.

Повертаючись знов до розглянутого прикладу, зазначимо, що, строго кажучи, визначення довжини дротини за теоремою Піфагора є не цілком коректним внаслідок провисання дроту, оскільки цей дріт має деяку певну масу. Використання наведеної формули передбачає припущення про те, що масою дроту, а отже і його провисанням можна знехтувати. З цієї причини одержаний результат слід розглядати тільки як *оцінку* довжини, про що й говориться в прикладі. Спрощуючі припущення зумовлюють існування певних границь застосовності будь-якої моделі.

2.1.4. Головне протиріччя в моделюванні

В моделюванні завжди існує серйозне протиріччя: з *одного боку* моделювання *неможливе без спрощення, без нехтування другорядними чинниками, а з другого – завжди існує ризик “переспростити” модель, відкинувши якісь важливі риси об'єкту разом із другорядними*. Адже заздалегідь важко зрозуміти, які риси об'єкту є важливими, а які – другорядними, адже цей об'єкт ще не вивчено. Як правило, це самий відповідальний етап у моделюванні.

Звернемося ще до наступного прикладу. Приймаючи припущення, що приріст населення деякого міста пропорційний кількості мешканців, ми одержимо математичну модель, яка виявляється правильною лише в дуже грубому наближенні. Якщо ж врахувати кількість людей похилого віку і дітей (непродуктивну частину населення), то модель зазнає певних ускладнень. А якщо включити до моделі такі чинники, як рівень освіти, кількість працюючих жінок, рівень добробуту і т.п., то математична модель стане вже настільки складною, що побудувати й вивчити її буде і зовсім непросто. Однак навіть при

врахуванні подібних факторів модель може виявитись далекою від дійсності: адже в ній не врахований ряд випадкових факторів – міграція населення, статистика шлюбів і розлучень та багато іншого.

Мета дослідника – знайти “золоту середину”: створити достатньо просту модель процесу, не позбавляючи його першорядних властивостей. Тут не існує якихось конкретних рекомендацій. Це сфера особистого досвіду, заснованої на ньому професійної інтуїції, рівня та якості освіти, інтелекту та творчості дослідника. Моделювання – це мистецтво і ним, як, до речі, й будь-яким іншим мистецтвом, можна оволодіти лише через аналіз чужих і власних вдалих і невдалих дій, лише виконуючи постійно вправи, тобто постійно розв’язуючи дослідницькі задачі.

2.1.5. Істотні й другорядні властивості об’єкту

Кожному об’єкту в залежності від мети дослідження можна поставити у відповідність різні моделі. Наприклад, якщо взяти таку складну систему, як популяція тварин, то для опису процесів життєдіяльності буде використано модель окремої тварини як біологічної істоти – представника біологічного виду, для моделювання поведінки тварин у численній групі (зграї) дослідник створить іншу, етологічну модель (етологія – наука про поведінку і повадки тварин), а для прогнозування динаміки зміни кількості особин із плином часу буде створена зовсім інша, екологічна модель. При цьому властивості об’єкта, суттєві при побудові однієї моделі, можуть виявитися (і часто виявляються) другорядними для іншої.

2.2. Обчислювальний експеримент

Математичне моделювання часто порівнюють з натурним (лабораторним) експериментом. При цьому аналогом математичної моделі є спеціально побудована дослідна установка, за допомогою якої дослідники задають питання природі шляхом контрольованої зміни умов досліду і вивчаючи наслідки таких дій. Саме так поводитися й ви при виконанні лабораторних та практичних робіт з фізики, хімії чи біології.

В математичному моделюванні питання задають математичній моделі. І якщо в сучасних складних і коштовних дослідних установках зміна деяких умов може призвести до значних технічних і економічних утруднень, то математичним моделям такі утруднення, як правило, невідомі.

Отже, після того, як математична модель створена, переходять

до наступного етапу, що має назву *обчислювальний експеримент*. Цей етап становить основний зміст розв'язування задачі з допомогою комп'ютера. Суть його найчастіше зводиться до повторення однотипних, однакових за змістом серій обчислень при зміні вхідних даних, або до пошуку відповіді на питання "Що відбудеться, якщо ...?"

Обчислювальний експеримент сьогодні – це сучасна технологія теоретичних досліджень, заснованих на експериментуванні з комп'ютерною математичною моделлю.

Дослідження математичних моделей реальних об'єктів часто (але не завжди) передбачає виявлення виду функціональних залежностей між характеристиками цих об'єктів. Таку роботу, як це зазначалося вище, зручно проводити в спеціалізованих середовищах для моделювання – математичних пакетах, пристосованих для певних предметних галузей знань (техніки, економіки, бухгалтерської справи тощо). Наш посібник орієнтований на використання знайомого всім школярам середовища «Електронні таблиці». В цьому середовищі ми й будемо проводити *обчислювальні експерименти*.

Відомо, що одним із можливих способів дослідження функціональних залежностей між змінними є подання цих залежностей у графічному вигляді. Електронні таблиці дозволяють легко будувати такі графіки. До того ж за необхідності можна одночасно будувати декілька графіків функцій від одного або декількох аргументів. Зрозуміло, що коли залежність має простий вигляд, такої потреби може й не бути, але в шкільному курсі фізики трапляються і не зовсім прості функції. Проілюструємо сказане двома прикладами з фізики.

2.2.1. Дослідження замкнутого електричного кола постійного струму

При вивченні шкільного курсу фізики відповідне лабораторне дослідження виконується в темі "Закон Ома для повного кола постійного струму".

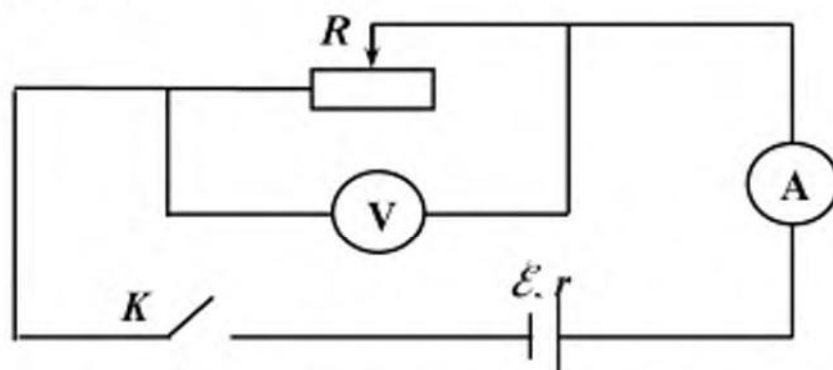


Рис. 2.1. Схема для дослідження повного кола постійного струму

Схема електричного кола для виконання лабораторної роботи має вигляд, поданий на рис. 2.1. Елементами кола є джерело струму з електрорушійною силою \mathcal{E} і внутрішнім опором r , вимикач K , споживачем є реостат R . Електровимірювальні прилади (амперметр і вольтметр) є єдиними джерелами числової інформації.

Побудова математичної моделі. На відміну від лабораторної роботи математична модель не зобов'язана включати електричну схему; теоретичну основу для побудови математичної моделі складають наступні співвідношення:

$$- \text{закон Ома для повного кола постійного струму } I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

а також вирази, за якими обчислюються

$$\begin{aligned} &- \text{напруга на кінцях споживача } U = IR; \\ &- \text{корисна потужність } P_{\text{кор}} = IU; \\ &- \text{коефіцієнт корисної дії } \eta = \frac{R}{R + r}. \end{aligned}$$

Характеристики джерела струму – ЕРС \mathcal{E} і внутрішній опір r – будемо вважати відомими.

Метою дослідження поставимо вивчення залежності перелічених величин (I , U , $P_{\text{кор}}$, η) від опору R споживача шляхом побудови відповідних графіків.

Таким чином, математичною моделлю поставленої задачі є наступна система чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \\ U = IR \\ P_{\text{кор}} = IU \\ \eta = \frac{R}{R + r} \end{cases}$$

Після створення математичної моделі запишемо з урахуванням особливостей роботи в обраному середовищі моделювання (електронних таблицях)

Алгоритм подальшої роботи:

1. Створити таблицю за зразком, поданим нижче.
2. Заповнити перший рядок іменами змінних.
3. Заповнити стовпці F (“Дано:”) і G (числові значення).

	A	B	C	D	E	F	G
1	R	I	U	$P_{кор}$	η	Дано:	
2						$\mathcal{E}, B = 3$	
3						$r, Ом = 0,5$	
...		

4. Заповнити вміст ключових комірок таблиці (комірок, які слід заповнювати з клавіатури):

комірка	формула/число
A2	0
A3	=A4+0,1
B2	=\$G\$2/(\$G\$3+A2)
C2	=B2*A2
D2	=B2*C2
E2	=A2/(\$G\$3+A2)

5. Формули з комірок B2, C2, D2, E2 копіювати в третій рядок.

6. Всі формули третього рядка копіювати в наступні 45 рядків.

7. За даними стовпців A, B, C, D, E побудувати в одній координатній площині графіки залежності змінних I , U , $P_{кор}$, η від опору R зовнішньої ділянки кола (споживача), як це показано на рис. 2.2.

З цією метою помічаємо всі комірки в стовпцях A, B, C, D, E і звертаємось до програми *Мастер диаграмм*. На вкладинці *Стандартные* вибираємо тип *Точечная* (саме цей тип забезпечує подання функціональної залежності виду $y = y(x)$ на відміну від типу *График*). При цьому за замовченням аргументами стають дані з першого виділеного стовпця (у даному випадку стовпця A), для них не будується лінія графіка, як це має місце для типу *График*. (Перевірте!).

Обчислювальний експеримент.

	A	B	C	D	E	F	G
1	R	I	U	$P_{кор}$	η	Дано:	
2	0,0	6,00	0,00	0,00	0,00	$\mathcal{E}, B = 3$	
3	0,1	5,00	0,50	2,50	0,17	$r, Ом = 0,5$	
...		

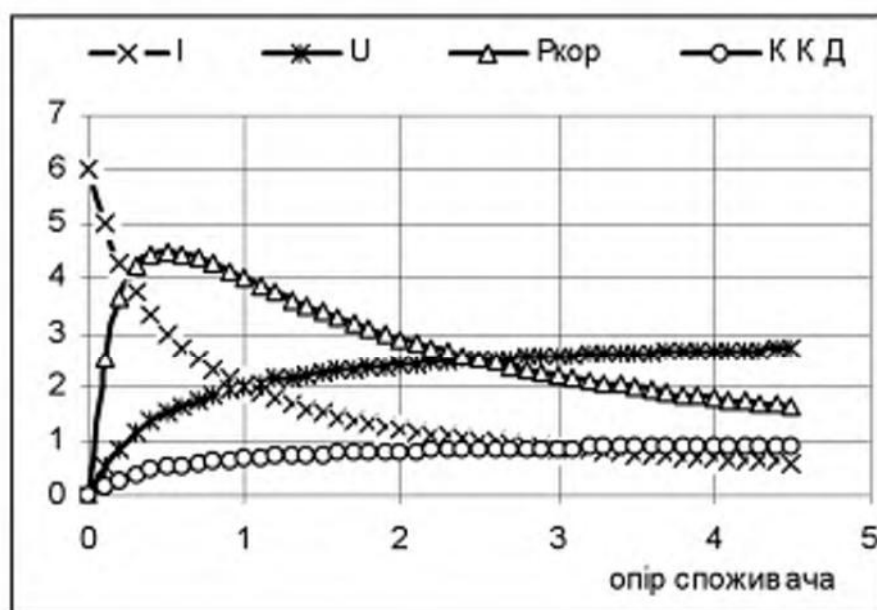


Рис. 2.2. Графіки залежності I , U , $P_{кор}$, η від опору R споживача

Аналіз результатів

Розглянута математична модель дозволяє висунути наступну гіпотезу:

максимальна корисна потужність $P_{кор}$ струму в колі розвивається, коли опір споживача дорівнює внутрішньому опорі джерела струму (як це видно з рис. 2.2, при $R = r = 0,5$ Ом), однак значення коефіцієнта корисної дії η при цьому не є максимально можливим (100%), а становить тільки 50%.

З метою перевірки гіпотези змодельуйте заміну джерела струму на нове з такою самою ЕРС, але з внутрішнім опором $r = 1,0$ Ом. Як це вплине на максимальні значення змінних $P_{кор}$ і η ? Повторіть обчислювальний експеримент, поклавши $\mathcal{E} = 5,0$ В, а внутрішній опір $r = 1,0$ Ом. Чи підтверджується гіпотеза за нових умов?

Цей висновок є справедливим для будь-яких електричних кіл. Його можна отримати і без комп'ютера, користуючись виключно аналітичними методами, але зараз ми маємо нагоду перевірити зазначений факт на комп'ютерній моделі.

Запитання і вправи

1. Чому копіювання вмісту комірок слід виконувати не з другого рядка таблиці, а саме з третього?

2. Зверніть увагу: максимального значення сила струму I набуває при $R = 0$ ("коротке замикання"). При цьому напруга U на кінцях споживача дорівнює нулеві. За яких умов це дуже небезпечний

режим експлуатації електричного кола, а коли це не так?

3. Аналітично дослідіть на екстремум наступні функції:

$$\text{а) } P_{\text{кор}} = P_{\text{кор}}(R) = \mathcal{E}^2 \frac{R}{R+r}; \quad \text{б) } \eta = \frac{R}{R+r}.$$

2.2.2. Дослідження електричного кола змінного струму

Схема досліджуваного кола, подана на рис. 2.3. Під дією джерела змінної напруги в колі виникають *вимушені електричні коливання сили струму – змінний струм*. Амплітуда цих коливань залежить не тільки від прикладеної напруги U і параметрів кола R , X_L і X_C , але й від частоти ν вимушених коливань.

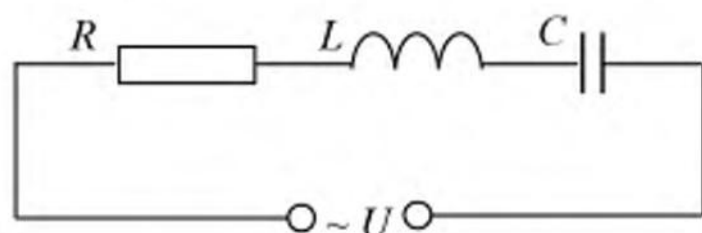


Рис. 2.3. Схема для дослідження кола змінного струму

Математична модель, як і в попередньому прикладі, не потребує схеми і будується на основі таких співвідношень:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad - \text{закон Ома для ділянки кола змінного}$$

струму, яка містить активний опір R , індуктивність L і ємність C . Тут U_0 – амплітуда напруги на кінцях ділянки кола;

$$X_L = 2\pi\nu L, \quad X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad -$$

формули відповідно індуктивного X_L , ємнісного X_C та повного Z опорів. Знаючи Z – повний опір кола, можна обчислити амплітуду сили струму: $I_0 = \frac{U_0}{Z}$.

Оскільки повне аналітичне дослідження функції $I_0 = I_0(\nu)$ засобами диференціального числення потребує чимало часу, то, як правило, на уроці фізики його не виконують, а обмежуються якісними оцінками. Ми ж виконаємо дослідження з наступною графічною інтерпретацією за алгоритмом, майже таким, як попередній. Відмінність полягає в тому, що змінюється вміст ключових комірок нової таблиці:

Комірка	Формула/число
A2	=\$G\$6
A3	=A2+\$G\$7
B2	=2*3,14*A2*\$G\$4
C2	=1/(2*3,14* A2*\$G\$5)
D2	=(G\$3^2+(B2-C2)^2)^0,5
E2	=G\$2/D2*1000

Вміст комірок A2, B2, C2, D2, E2 слід копіювати в ті самі стовпці третього рядка, а всі формули третього рядка копіювати в наступні 18 рядків.

За даними стовпців A, B, C, D, E побудувати в одній координатній площині графіки залежності змінних X_L , X_C , Z , I_0 від частоти ν змінного струму, як це показано на рис. 2.4.

Графік функції $I_0 = I_0(\nu)$ називають резонансною кривою.

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\nu, \text{Гц}$	$X_L, \text{Ом}$	$X_C, \text{Ом}$	$Z, \text{Ом}$	$I_0, \text{мА}$	Дано:	
2	25	118	455	337	44	$U_0, \text{В} = 15$	
3	30	141	379	238	63	$R, \text{Ом} = 10$	
4	35	165	325	160	93	$L, \text{Гн} = 0,75$	
5	40	188	284	96	155	$C, \text{Ф} = 1,4\text{E}-05$	
6	45	212	253	42	357	$\nu_0, \text{Гц} = 25$	
7	50	236	227	13	1170	$\Delta\nu, \text{Гц} = 5$	
...		

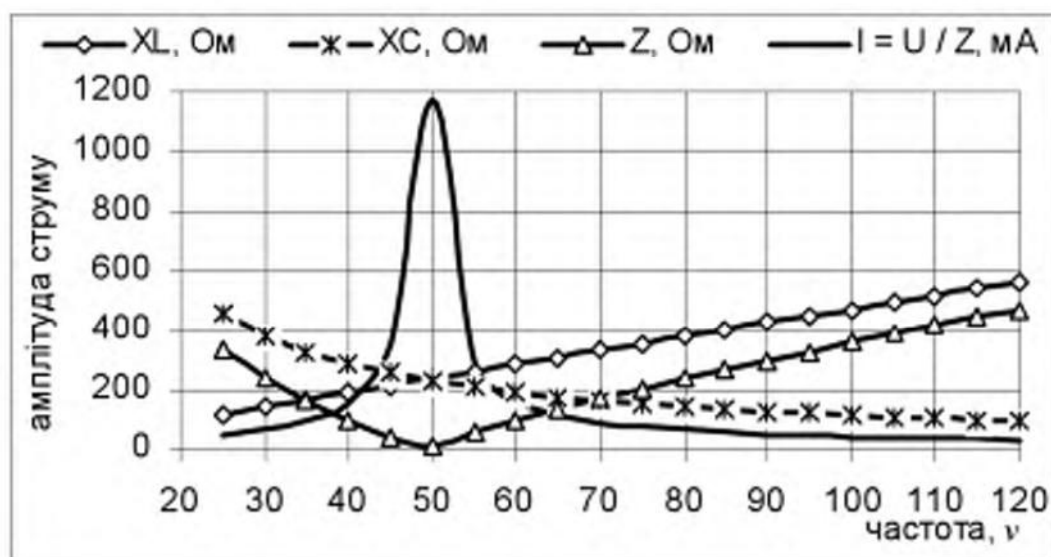


Рис. 2.4. Побудова резонансної кривої

1. Для одночасного виведення на екран усіх чотирьох графіків $X_L = X_L(\nu)$, $X_C = X_C(\nu)$, $Z = Z(\nu)$ та $I_0 = I_0(\nu)$ слід виділити всі заповнені

комірки у стовпцях А, В, С, D, Е. Якщо потрібна змістовна легенда, виділення слід починати з рядка 1, інакше – з рядка 2 (*перевірте!*).

2. Відповідні графіки наведені в нижньому фрагменті рис. 2.4.

$$X_L = 2\pi\nu L; X_C = 1/(2\pi\nu C); Z = (R^2 + (X_L - X_C)^2)^{1/2}; I_0 = U_0/Z.$$

3. З графіків добре видно, що при частоті вимушених коливань $\nu \approx 50$ Гц маємо: а) $X_L = X_C$; б) $Z = Z_{min}$; в) $I = I_{max}$.

4. Змінюючи по черзі значення активного опору R (комірка G3), індуктивності L (комірка G4) та ємності C (комірка G5), дослідіть їхній вплив на вигляд кожної кривої і, зокрема, резонансної кривої.

Висновки

1. З розглянутих прикладів видно, що математичне моделювання із залученням комп'ютера (комп'ютерне моделювання) відкриває широкі можливості для графічної інтерпретації (подання, представлення) складних аналітичних залежностей.

2. В обох випадках були продемонстровані приклади *адекватного використання комп'ютера* при вивченні природничих наук, і зокрема, фізики. В даному контексті «адекватне використання» означає використання комп'ютера тільки в тих випадках, коли без нього або незручно, або взагалі неможливо. Саме завдяки цій обставині економиться час роботи за рахунок автоматизації рутинних обчислювальних операцій.

3. Обчислювальний експеримент з математичною моделлю здатний суттєво спростити процедуру розв'язування задач.

2.3. Перевірка моделі на адекватність

Побудовану модель слід піддати перевірці на вірогідність, тобто встановити, чи досить правильно її результати відбивають поведінку об'єкта-оригінала в досліджуваних ситуаціях, тобто, чи достатньо повною є відповідність результатів моделювання поведінці реально-го об'єкта. Це своєрідний «момент істини» для моделі. В такому разі говорять про *перевірку моделі на адекватність*. Ознакою адекватності моделі є, насамперед, задовільний збіг результатів моделювання з відомими та (або) достатньо надійними дослідними даними.

З метою перевірки моделі на адекватність обчислювальний експеримент часто спрямовують на підтвердження очевидних і заздалегідь відомих властивостей об'єкта. Така процедура має назву *тестування моделі*. Що ж до тих випадків, коли відсутня можливість порівняння результатів, одержаних на моделі, з поведінкою самого об'єкта, порівняння проводять за результатами, що їх дають теорія та

відповідні розрахунки.

Модель, яка пройшла тестування, може вважатися якщо не задовільною, то щонайменше – правдоподібною.

2.4. Комп'ютерне моделювання та його особливості

Для ясного розуміння подальшого викладу нам слід на певний час вдатися до з'ясування ряду фактів, що зумовлюють деякі специфічні особливості комп'ютерного моделювання.

Майже все, про що йшлося вище, взагалі можна робити і без комп'ютерів. З появою ЕОМ можливості для моделювання піднялися на значно вищий рівень. Завдяки здатності комп'ютерів працювати з великими обсягами інформації, і, що не менш важливо, величезній (у порівнянні з іншими засобами) швидкості опрацювання інформації, комп'ютери стали в моделюванні основним робочим інструментом.

2.4.1. Особливості, що залежать від комп'ютерів

З природничих наук відомо, що процеси в природі можуть мати неперервний (в просторі й у часі) характер або переривчастий, стрибкоподібний. Ця переривчастість має спеціальну назву – *дискретність*.

Зрозумілий приклад щодо цього дає математика. Так множина всіх дійсних чисел при їх зображенні на числовій осі являє собою неперервну послідовність точок, а множина цілих чисел при цьому утворює послідовність дискретну.

Ще один приклад можна взяти з фізики. Для регулювання сили струму в електричному колі користуються реостатами, які бувають здебільшого двох типів: повзункові та ступінчасті. У перших опір змінюється плавно, неперервно, а у других – стрибками, переривчасто. Тому, в залежності від конструкції взятого реостату, сила струму в колі в одному випадку буде змінюватись неперервно, плавно, а в іншому – дискретно.

Цифровий комп'ютер за принципом своєї дії є дискретним пристроєм: опрацювання інформації в ньому відбувається переривчасто, дискретно під управлінням спеціальних тактових імпульсів, що дає можливість здійснення потрібної послідовності операцій. До речі, саме частота слідування цих імпульсів визначає швидкість виконання обчислювальних операцій або, як говорять, швидкодію. Оскільки і пам'ять комп'ютера має кінцевий обсяг, і кількість операцій в одиницю часу є скінченою, то й математичні моделі, які підлягають комп'ютерній обробці, також повинні бути дискретними і скінченими.

ми. Так при моделюванні процесів у рідинах, що, як відомо, містять величезну кількість частинок, яка значно перебільшує обсяг оперативної пам'яті комп'ютера, для задоволення обмежуючих вимог комп'ютера при моделюванні рідину представляють як систему елементарних комірок, до складу кожної з яких входить дуже багато молекул ($\sim 10^4$), а це не що інше, як дискретизація, що закладається в модель.

Відмітимо ще один принциповий факт. Комп'ютери не оперують з дійсними числами нескінченної точності, вони працюють з числами, що мають деякий фіксований набір цифр. Кількість цифр у такому наборі визначається апаратними засобами і програмним забезпеченням. Арифметичні операції, що виконуються з дійсними числами, можуть призводити до специфічної похибки, яку називають *похибкою округлення*. Якби, наприклад, наш комп'ютер оперував з дійсними числами, що містять лише один десятковий розряд, то результатом множення 2,1 на 3,2 було б число 6,7. Походження похибок округлення дозволяє зрозуміти, по-перше, їхню невідворотність, і, по-друге, той негативний факт, що вони нагромаджуються в міру зростання обсягу обчислень. Щоб якоюсь мірою послабити похибки округлення, намагаються обирати або створювати такі алгоритми, у яких ці похибки помітним чином не нагромаджуються.

2.4.2. Особливості, пов'язані з методами роботи

В математиці добре відомі ситуації, коли рівняння складене, але не існує відомих методів його точного аналітичного розв'язування (тобто одержання розв'язку у вигляді точної формули). Не набагато легше й у тих випадках, коли метод розв'язування існує, але він є настільки трудомістким та громіздким, що розв'язування вимагає значних витрат часу. До того ж далеко не завжди буває необхідною дуже висока точність. Тому математики наполегливо працюють над розробкою так званих *чисельних методів* розв'язування рівнянь, що становить зміст окремого і дуже важливого розділу математики, який має назву *обчислювальна математика*.

Оскільки комп'ютерне моделювання в наш час є дуже розповсюдженим видом дослідницької та конструкторської діяльності, то для задоволення потреб користувачів спеціалістами вже створені і продовжують створюватись окремі пакети програм, призначені для роботи з математичними моделями – так звані *спеціалізовані середовища* для комп'ютерного моделювання.

Підсумки

1. Математичне моделювання є ефективним інструментом теоретичних досліджень і важливою складовою сучасної інформатики.

2. Задачі моделювання виникають з практики й не бувають чітко сформульованими: перед створенням моделі завжди має пройти процес постановки задачі.

3. Створення математичної моделі завжди починають з ідеалізації об'єкту на основі спрощуючих припущень. З метою більш глибокого вивчення об'єкту до попередньої спрощеної версії його моделі вводять нові фактори, які розглядають тепер як суттєві.

4. Якщо в процесі створення моделі комп'ютер іноді безпосередньо не використовується, він все одно буде наступною ланкою в роботі з моделлю. Тому слід враховувати дискретний принцип його дії, а також невідворотність появи похибок округлення.

5. Центральне місце в моделюванні посідає обчислювальний експеримент, який має на меті дослідити поведінку моделі внаслідок зміни вхідних даних: саме так виявляють особливості перебігу процесу чи явища за різних умов.

6. Оскільки ніколи не існує повної впевненості в тому, що створена модель правильно відтворює описуване нею явище (процес), то завжди необхідною є перевірка моделі на адекватність.

7. Заключним етапом у моделюванні є аналіз результатів і формулювання висновків. Слід розуміти, що ці висновки справджуються лише в межах прийнятих припущень, поширювати їх поза ці межі, строго кажучи, не можна. Якщо ж інколи і вдаються до такого кроку, то йдуть на це свідомо і аналізують результати особливо обережно.

Для практичної роботи з моделлю (обчислювального експерименту) принциповим є *вибір середовища для моделювання* конкретної задачі. Найпростішим середовищем, яке задовольняє основні вимоги до подання результатів моделювання, є *електронні таблиці*, якими ми й скористуємось.

Загальні зауваження стосовно моделювання не можуть утворити більш-менш цілісного уявлення про цю непросту, але цікаву роботу, яку фахівці часто розглядають як мистецтво. Отже перейдемо до практичного вивчення прикладів.