

## СУТНІСТЬ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У широкому розумінні імітаційне моделювання — це процес конструювання моделі реальної системи та експериментування на цій моделі з метою визначення поведінки системи або оцінити (в рамках обмежень, зумовлених деяким критерієм чи сукупністю критеріїв) різні стратегії, що забезпечують функціонування цієї системи. А у вузькому розумінні імітаційне моделювання — це відтворення на ЕОМ реальної виробничої чи організаційної системи. За такого тлумачення термін «імітаційне моделювання» має той самий сенс, що й «машинна імітація» або «машинне моделювання» (останні терміни відповідають експериментальному методу вивчення економіки за допомогою ЕОМ).

Слід підкреслити, що стандартного терміну цього напрямку моделювання не існує. В англійській літературі здебільшого використовуються такі терміни: *computer simulation* (комп'ютерне моделювання), *systems simulation* (системне моделювання), *digital simulation* (цифрове моделювання). У вітчизняній літературі розповсюджені терміни «машинна імітація», «машинне моделювання», «імітаційне моделювання», причому найбільшого поширення набув останній, на наш погляд, найбільш невдалий термін («імітаційне моделювання» — тавтологія). Наприклад, назву відомої книжки Шеннона «Systems simulation the art and science» на російську мову перекладено як «Имитационное моделирование систем — искусство и наука», тобто термін *Systems simulation* перекладено на *Имитационное моделирование* замість *Системное моделирование*. Вивчаючи літературні джерела, студенти повинні звернути увагу на цю обставину.

Слід також звернути увагу на особливість застосування методу імітаційного моделювання. Щоб застосувати такий метод для досліджень, створюють імітаційну систему, яка містить у собі імітаційну модель, а також внутрішнє і зовнішнє математичне забезпечення. До ЕОМ вводять потрібні вхідні дані і спостерігають зміни показників, які у процесі

моделювання можуть аналізуватися й піддаватися статистичній обробці

Машинна імітація в усьому світі набула значного поширення при дослідженні складних систем завдяки важливим перевагам, що їх дістають користувачі цього методу. При розгляді наступних переваг наведіть конкретні приклади.

1. Вдається відповісти на багато запитань, що постають на ранніх стадіях задуму і попереднього проектування систем, уникнувши застосування методу спроб і помилок, пов'язаного із значними витратами.

2. Метод дає змогу досліджувати особливості функціонування системи за будь-яких умов, зокрема й тих, які не реалізовані в натурних експериментах. При цьому параметри системи і навколишнього середовища можна варіювати у надзвичайно широких межах, відтворюючи довільну обстановку.

3. Стає можливим прогнозувати поведження системи в близькому та віддаленому майбутньому, екстраполюючи на моделі результати промислових випробувань. У такому разі дані, здобуті раніше, поповнюються завдяки застосуванню статистичного підходу.

4. Імітаційні моделі технічних і технологічних систем та пристроїв дають змогу в багато разів скоротити час їх випробування.

5. За допомогою методу машинної імітації можна штучним шляхом швидко й у великому обсязі дістати потрібну інформацію, що відбиває хід реальних процесів, уникнувши дорогих, а часто й неможливих натурних випробувань цих процесів.

6. Імітаційна модель є надзвичайно гнучким пізнавальним інструментом, здатним відтворювати довільні як реальні, так і гіпотетичні ситуації.

7. Імітаційне моделювання на ЕОМ часто буває єдиним реальним способом розв'язання таких задач.

Проте слід зазначити, що метод машинної імітації, попри всі його переваги та універсальність, аж ніяк не завжди прийнятний,

оскільки виконання розрахунків на імітаційних моделях потребує значних грошових витрат та витрат часу дослідників та програмістів.

Машинну імітацію як числовий машинний метод розв'язання складних задач доцільно застосовувати за таких умов:

— непридатність або відсутність аналітичних методів розв'язання задач;

— цілковита впевненість в успішному створенні імітаційної моделі, яка адекватно описує досліджувану систему (процес), зокрема в тому, що вдасться зібрати всю необхідну інформацію про модельовану систему (процес), забезпечивши вірогідну імітацію на ЕОМ реальних ситуацій (будувати імітаційну модель стохастичних процесів, коли не можна дістати опис потрібних характеристик випадкових величин і подій, — марний замір);

— можливість використати сам процес побудови імітаційної моделі для попереднього дослідження системи, що моделюється, з метою напрацювання рекомендацій щодо поліпшення умов її функціонування.

Можливі цілі створення імітаційної моделі, призначеної для вивчення проблем організаційного управління, включають: вивчення діючої функціональної системи, аналіз гіпотетичної функціональної системи, проектування досконалішої системи.

Проте успішне вирішення названих проблем на імітаційних моделях можливе лише на адекватних моделях. Тому під час дослідження складних економічних систем на імітаційних моделях насамперед слід встановити *адекватність* моделі реальним об'єктам. У разі неадекватності моделі дослідник ризикує дістати недостовірні результати, а на їх підставі прийти до помилкових висновків. Тому оцінювання адекватності моделі — обов'язковий етап моделювання, який сам по собі може бути великою і складною задачею. Перевірку достовірності моделі називають її *верифікацією* (від лат. *verus* — істинний і *ficatio (facio)* — роблю).

Адекватна (від лат. *adaquatus* — прирівнюваний) імітаційна модель математично і логічно з певною мірою наближення відображає досліджувану систему. Логічні елементи моделі відповідають операціям, що виконуються у реальній дійсності, а математичний опис визначає функції, що реалізуються в реальній системі. Ймовірнісні оператори адекватної імітаційної моделі відображають випадковий характер подій реальної системи. Ендогенні параметри моделі при відповідних вхідних чинниках мають бути інформативними, тобто давати вірогідні повідомлення про систему.

Оцінювання адекватності моделі передбачає оцінювання адекватності принципової структури моделі та оцінювання достовірності її реалізації. Верифікувати імітаційну модель реальної системи дуже складно. Зробити це можна з допомогою або спеціально дібраних конкретних прикладів, які не обов'язково мають містити реальну інформацію, або реальних задач, для яких відомі розв'язки, здобуті іншими способами.

Під час вивчення цієї теми слід звернути увагу на те, що засобами імітаційного моделювання можна досліджувати лише еволюційні (лат. *evolutio* — еволюція і *evolvo* — розгортаю) процеси, стосовно яких можна зібрати необхідну інформацію з минулого досвіду.

Відомі два способи побудови динамічних імітаційних моделей на ЕОМ:

- однорідне градування системного (модельного) часу;
- неоднорідне градування системного часу.

Програму для ЕОМ можна розробити двома способами:

- 1) звичайними засобами програмування із застосуванням проблемно-орієнтованих або машинно-орієнтованих мов;
- 2) з допомогою спеціалізованих мов моделювання.

Перший спосіб використовується, коли імітаційна модель не дуже складна, застосовується не часто і програмується спеціалістами, які не мають значного досвіду роботи з імітаційними моделями. Проте при цьому програмістові доводиться заново складати підпрограми стандартних

процедур, що використовуються в усіх імітаційних моделях (генерування випадкових змінних, статистична обробка даних, розміщення інформації всередині машинної пам'яті, складання основної програми, яка забезпечує правильну черговість подій та просування імітаційного процесу по осі часу).

Отже, застосування універсальних мов програмування має і переваги (мінімум обмежень на вхідний формат, значна поширеність), і недоліки (чималі витрати часу на програмування та налагодження програм). Створювати програмне забезпечення імітаційного моделювання допомагають спеціалізовані машинні мови. При їх використанні достатньо лише задати функцію розподілу ймовірностей. Тоді автоматично генеруються випадкові події за цим законом розподілу. Деякі із спеціалізованих програм забезпечують збір статистичних даних за тими чи іншими досліджуваними характеристиками імітаційної системи і видачу результатів машинного моделювання в наперед заданій формі. За допомогою таких програм упорядковують події та реєструють у часі кожний перехід системи з одного стану до іншого.

Під час вивчення питання програмної реалізації імітаційних моделей засобами спеціальних мов моделювання слід звернути увагу на значну кількість таких мов, що застосовуються на практиці (число мов перевищує 500). Зокрема, у [9] проводиться аналіз більш як 350 різних систем імітаційного моделювання. У [10] наведено каталог 200 найвідоміших зарубіжних систем моделювання. Студентам пропонується досконало вивчити систему GPSS/PC і виконати лабораторну роботу.

Перед тим, як переходити до вивчення наступних тем курсу, необхідно розібратися з прикладом імітаційної моделі обчислювальної системи і визначити на ній основні проблеми, пов'язані з практичною реалізацією імітаційного моделювання.

### ***2.3. ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК***

**Імітаційна модель** — комплексна математична й алгоритмічна модель досліджуваної системи. Метод, що базується на розробці та дослідженні імітаційних моделей, називається машинною імітацією, або імітаційним моделюванням.

**Машинна імітація** — числовий метод виконання на ЕОМ експериментів з математичними моделями, що описують поведінку складних систем протягом тривалих відтинків часу.

**Імітаційний експеримент** — метод вивчення складних явищ,

зокрема тих, що відбуваються в економіці, шляхом відтворення їх на ЕОМ за допомогою імітаційних моделей та спостереження за машинними результатами з можливим втручанням в обчислювальний процес.

**Адекватність моделі** — відповідність моделі (за деякою сукупністю визначальних характеристик) процесу чи об'єкта, що моделюється.

**Верифікація моделі** — перевірка достовірності (істинності, адекватності) моделі. Верифікація імітаційної моделі зводиться до перевірки відповідності її поведінки основним передумовам експериментатора. Попереднім дослідженням достовірності моделі є перевірка програми її машинної реалізації. Після того, як в програмі виявлені і виправлені всі помилки, приступають до проведення машинного експерименту на основі спеціально підібраних даних, для яких можна передбачити результати машинних розрахунків. Якщо отримані результати збігаються з очікуваним виходом імітаційної моделі, то вона вважається адекватною, тобто її концептуальна структура і логіка не викликають заперечень. Наступним етапом перевірки адекватності імітаційної моделі є її валідація.

**Валідація (перевірка адекватності реалізації) моделі** полягає в тому, що вихідні результати практичної реалізації імітаційної моделі зіставляють з наявною статистичною інформацією про досліджувану систему, і на основі такого

зіставлення роблять висновки щодо адекватності реалізації імітаційної моделі.

**Екзогенні величини** — величини, зумовлені зовнішніми стосовно досліджуваної системи причинами.

**Ендогенні (вихідні) величини** — величини, зумовлені внутрішніми причинами. Ендогенні величини, отримувані на виході імітаційної моделі, часто відображають робочі характеристики економіко-виробничої системи, яка досліджується засобами машинної імітації.

## **ОСНОВНІ ЕТАПИ ПОБУДОВИ ІМІТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ**

### **3.1. МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ ДО ВИВЧЕННЯ ТЕМИ**

Розглянемо детальний аналіз дій, що виконуються на етапі побудови імітаційної моделі. Інші види робіт описані в інших темах навчальної дисципліни.

Послідовність складання імітаційної моделі передбачає такі кроки:

- визначення задачі та її аналіз;
- визначення вимог до інформації;
- збирання інформації;
- висування гіпотез і прийняття припущень;
- встановлення основного змісту моделі;
- визначення параметрів, змінних і критеріїв ефективності;
- опис концептуальної моделі й перевірка її вірогідності;
- побудова логічної структурної схеми (блок-схеми).

На першому етапі моделювання конкретного об'єкта (системи) на ЕОМ необхідно побудувати концептуальну модель процесу функціонування цієї системи, а потім провести її формалізацію. Іншими словами, основним змістом цього етапу моделювання є перехід від загального опису системи за допомогою висловів до її математичного опису. Найбільш відповідальними моментами у цій роботі є спрощений опис системи, тобто відокремлення самої системи від зовнішнього середовища та вибору основного змісту моделі. Під час вибору

основного змісту моделі відкидається все другорядне з точки зору мети, яка ставиться при моделюванні.

Щоб глибше зрозуміти зміст етапів та підходів до моделювання процесу функціонування системи, розглянемо конкретні дії під час моделювання деякої реальної системи.

Мета моделювання полягає в отриманні характеристик часу та ймовірності процесу функціонування фрагменту локальної мережі (ЛС). Ефективність різних варіантів побудови мережі та її фрагментів визначається за допомогою таких показників: середнього часу передачі даних та ймовірністю відмови обладнання мережі, вартості мережі. На практиці часто буває необхідно прийняти рішення щодо вибору топології мережі у конкретній установі.

На етапі постановки задачі імітаційного моделювання необхідно:

звернути увагу на існування задачі та необхідність машинного моделювання;

дослідити задачу за матеріалами літературних джерел;

дати чітке формулювання задачі;

вибрати методику розв'язування;

з'ясувати наявність ресурсів, необхідних для моделювання задачі на комп'ютері;

визначити масштабність задачі та можливість її поділу на окремі підзадачі;

визначити послідовності розв'язання підзадач.

У разі розгляду задачі моделювання ЛОМ проводити поділ на підзадачі немає необхідності. Це пов'язано з тим, що у прикладі обрана не вся мережа підприємства, а лише її фрагмент.

На підставі аналізу [5; 6] можна зробити висновок про неможливість використання для дослідження аналітичних методів, а також про необхідність орієнтації на імітаційні методи.

Моделювання можна проводити на ПЕОМ ІВМ сумісних, починаючи від АТ286 до Pentium 300.



На етапі роботи, пов'язаної з аналізом задачі моделювання виконуються такі функції:

- \* обираються критерії оцінки процесу функціонування системи, що досліджується;

- \* виділяються системи ендогенних та екзогенних змінних моделі;

- \* обираються можливі методи ідентифікації;

- виконується попередній аналіз наступних двох етапів моделювання.

У якості критеріїв оцінки ефективності процесу функціонування локальної мережі обирають такі характеристики: вірогідність передачі пакету по каналу за час  $t_d$ , що не перевищує встановлений час  $T_b$ ; вірогідність передачі пакету підтвердження за час  $t_p$ , який не перевищує визначений час  $T_{вп}$ ; математичне сподівання та дисперсію повного часу передачі пакету з одного вузла комутації до іншого.

Ендогенними (залежними) змінними вважатимемо середній час передачі пакету від одного вузла мережі до іншого та середню довжину черг повідомлень. Екзогенними (незалежними) змінними вважатимемо такі: інтенсивність вхідних потоків пакетів вузла каналу; час обробки пакетів ЦП сервера; час передачі пакету по каналу.

Необхідні уточнення можна зробити після вибору конкретного типу математичних схем для формалізації процесів, які відбуваються у локальній мережі. Скориставшись літературою (наприклад, Блэк Ю. Сети ЭВМ: протоколы, стандарты, интерфейсы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 506 с., ил.), можна провести ідентифікацію впливу зовнішнього середовища на об'єкт моделювання, включаючи вибір типу топології локальної мережі. Так, на топологію мережі впливає конкретне розміщення ПК в установі, відстань між комп'ютерами, надійність елементів мережі та ПК.

Шинна топологія характеризується стійкістю у роботі мережі до можливих виходів з ладу окремих вузлів, гнучкістю, економічністю. У той же час вадою такої мережі є

неможливість її використання, коли комп'ютери знаходяться на значній відстані.

Зіркоподібна топологія значно спрощує взаємодію вузлів мережі, дає змогу використовувати прості мережеві адаптори. У цій топології можуть використовуватися різні типи кабелю. Але цілісність такої мережі багато в чому залежить від дієздатності центрального вузла.

Кільцева топологія, як і шинна, не має центрального вузла керування. Це дозволяє підвищити надійність таких мереж порівняно із зіркоподібними мережами. Інша особливість — ретрансляція інформації проміжними вузлами — також має свої переваги та недоліки. З одного боку, ретрансляція інформації дає змогу використовувати на різних ділянках мережі різні типи кабелю, підсилювати сигнали та забезпечувати значно більшу довжину мережі. З іншого боку, існує вірогідність виникнення такої неполадки у проміжному вузлі, при якій він не зможе ретранслювати інформацію, що призводить до розриву всієї мережі.

При визначенні вимог до шуканої інформації необхідно:

- 1) сформулювати вимоги до початкової інформації про об'єкт моделювання;
- 2) організувати отримання інформації, якої недостатньо;
- 3) підготувати апріорні відомості про систему;
- 4) провести аналіз експериментальних даних про системи аналогічних класів.

У межах задачі моделювання локальної мережі необхідно з'ясувати питання про характеристики інформаційної мережі (трафіка), про параметри передачі по каналу та обробки пакетів. Вихідну інформацію про характер та інтенсивність потоків повідомлень можна отримати з літературних джерел, досвіду функціонування мереж у аналогічних організаціях. Інформацію щодо потоку помилок — з літератури, присвяченої теорії завадостійкого кодування та статистиці помилок у каналах зв'язку. Вхідна інформація про об'єкт моделювання може бути, з одного боку, неповною. Наприклад, точно не були задані конкретні мережеві плати, які мають використовуватися в

моделі, конкретно не задані відстані між ПЕОМ у мережі, не вказаний конкретний перелік додаткового периферійного обладнання (кількість та характеристики принтерів). З іншого боку, інформація може бути збитковою, оскільки частину її можна не враховувати в моделі. Тому перед тим як приступати до моделювання, необхідно провести ряд перетворень вхідної інформації в плані спрощення моделі, додатково зібрати інформацію.

Наступний крок — це збирання інформації. Проте в разі неможливості дістати її, потрібно знайти шляхи заміни інформації, якої бракує, чи розробити інші варіанти розв'язання задачі. При цьому не виключено, що постане потреба виконати додаткові економетричні дослідження або застосувати математичну модель (виробничі функції, моделі прогнозування) для знаходження потрібної інформації.

Встановлення способів здобування інформації, необхідної для розв'язання задачі, — важливий етап усіх операційних досліджень. Адже існують численні методи розв'язання виробничих задач, які, проте, безперспективні через відсутність можливостей забезпечити розрахунки потрібною інформацією.

Здобута інформація має бути оцінена з боку її відповідності розв'язуваній задачі та зручності використання. На етапі збирання інформації не завжди буває відомо, що саме знадобиться в подальшому для досліджень. Крім того, часто буває так, що повернутися до збирання інформації після деякого моменту часу або неможливо, або занадто дорого. Тому слід намагатися зібрати якомога більше даних, щоб не допустити втрат інформації, яка колись може знадобитися. У результаті нагромаджується значний обсяг інформації, причому лише незначна її частина відповідає поставленій задачі. Корисну інформацію потрібно відфільтрувати, відокремити її від непотрібних і випадкових даних.

Зібрана первинна інформація не завжди зручна для безпосереднього використання при розв'язанні задачі. Часто ця інформація підлягає попередній обробці, аналізу та групуванню з допомогою ЕОМ або інших засобів переробки інформації.

У деяких випадках розв'язання задач методом машинної імітації немає змоги здобути всю необхідну інформацію. Для багатьох практично важливих проблем дістати повну інформацію взагалі неможливо. На стадії складання імітаційної моделі іноді відсутні конкретні знання про деякі елементи задачі та умови функціонування системи. Щоб відшукати інформацію, якої бракує, проводять експерименти, висувають *гіпотези* і приймають (роблять) *припущення*, що мають бути чітко й точно сформульовані.

Припущення дають змогу перетворити ускладнені, а також такі, що не піддаються врахуванню, характеристики на величини, якими зручно оперувати.

Наприклад, під час моделювання на ЕОМ виробничого процесу в механічному цеху роблять припущення щодо незалежності цього процесу від кліматичних чинників (насправді, безперечно, існує певна залежність виробничого процесу від кліматичних умов — хвороби працівників при різких перепадах температури, перебої в роботі громадського транспорту, хоч такі обставини не можна врахувати в імітаційних моделях).

При висуванні гіпотез та прийнятті припущень слід брати до уваги таке:

- 1) обсяг наявної інформації, якою можна оперувати для розв'язання задачі;
- 2) релевантність інформації поставленій задачі;
- 3) підзадачі, для яких інформації недостатньо;
- 4) ресурси часу та інші ресурси, необхідні для розв'язання задачі;
- 5) очікувані результати моделювання.

У межах прикладу, що розглядається, виходячи з апіорних відомостей, можна зробити висновок про можливість побудови моделі на підставі тієї інформації, що маємо за умови прийняття ряду гіпотез та припущень стосовно функцій розподілу параметрів процесів, що відбуваються у локальній мережі, і впливу зовнішнього середовища. Для кожного типу топології ЛОМ потоки інформації є суперпозицією великої кількості

потоків з різними законами розподілу між моментами їх появи і з різними інтенсивностями. Це дає змогу на підставі теореми про підсумок потоків прийняти припущення про експоненційний розподіл інтервалів між моментами надходження пакетів у вузлах каналу. Необхідно також прийняти припущення про характер помилок у каналах зв'язку. З урахуванням гіпотези про незалежність помилок у кодових комбінаціях пакетів, що передаються, можна зробити висновок про геометричний закон розподілу числа повторюваних передач, а з урахуванням припущень стосовно потоку інформації можна висунути гіпотези про очікувані результати моделювання з метою побудови імітаційної моделі.

На етапі визначення параметрів та змінних необхідно:

- 1) визначити параметри системи;
- 2) визначити вхідні та вихідні змінні;
- 3) визначити вплив зовнішнього середовища;
- 4) описати й дати стисло характеристику параметрам та змінним у такій формі: символ; одиниця виміру; діапазон змін; місце у моделі.

У моделі ЛОМ залежно від топології мережі можуть використовуватися різні параметри та змінні. Наприклад, параметр SZM можна використовувати для фіксації стану зайнятості мережі (цей параметр може застосовуватися при описі мережі стандарту Token Ring у випадку, коли кілька комп'ютерів починають одночасно передавати інформацію у мережу); SNK — стану виходу з ладу фрагмента кабелю; SVZ — стану відмови у роботі центрального вузла (при зіркоподібній топології мережі); SVV — стану виникнення неполадок у проміжному вузлі (при кільцевій топології мережі).

Під час моделювання ЛОМ можна використовувати такі змінні для опису моделі.

*Вихідні змінні.* Qi — середня довжина черги на пристрій; Api — середнє число пакетів, що чекають подальшої обробки; A<sub>ti</sub> — середній час передачі повідомлення між джерелом інформації, який враховує можливі повторення передачі у разі

виникнення помилок. У моделі вихідні змінні оцінюються на підставі обробки статистики, яка збирається у результаті імітації передавання пакетів по ЛОМ.

*Екзогенні змінні.*  $t_p$  — час передачі пакету по каналу, значення часу являє собою випадкову величину із законом розподілу, який визначається числом повторюваних передач через появу помилок у ЛОМ;  $t_{op}$  — час обробки кожного пакету у вузлі. Цей час являє собою випадкову величину із законом розподілу, який визначається часом зайнятості вузла та характеристиками самої мережевої плати.

Вплив зовнішнього середовища під час моделювання ЛОМ визначається інтенсивністю вхідного потоку пакетів у мережі, яка складається з потоків усіх повідомлень користувачів.

У моделі час передачі, час обробки та час появи повідомлення генерується за допомогою датчиків випадкових чисел.

Основний зміст моделі розробляється з урахуванням висунутих гіпотез і зроблених припущень. При цьому необхідно зважати також на специфічні особливості *реальної обстановки, самої задачі та засобів її розв'язання*. Таким чином, на цьому етапі створення імітаційної моделі визначається зміст концептуальної моделі та обирається шлях (метод) побудови математичної моделі на підставі прийнятих гіпотез та припущень.

Розглядаючи реальну обстановку як елемент при створенні моделі, необхідно визначити:

- 1) функції системи і способи їх реалізації;
- 2) детерміновані й недетерміновані функції;
- 3) апроксимацію цих функцій у моделі;
- 4) вплив факторів середовища на роботу системи;
- 5) способи взаємодії людини та системи, людини та середовища, системи та середовища;
- 6) апроксимацію цих взаємодій у моделі.

Важливо також враховувати обмеження задачі й наявність ресурсів (грошові засоби, чисельність обслуговуючого

персоналу) для проведення імітаційних експериментів, а також фактор часу.

На етапі опису концептуальної моделі та перевірки її вірогідності проводять такі операції: опис моделі за допомогою абстрактних термінів та понять з використанням типових математичних схем; обґрунтовують вибір процедур апроксимації реальних процесів при побудові моделі; перевіряють вірогідність моделі.

Вірогідність концептуальної моделі перевіряють у такому порядку.

1. З'ясування задуму моделі та доцільності її створення.
2. Виявлення зв'язку задуму моделі та доцільності її побудови з детермінованими, рандомізованими (імовірними) і середніми значеннями характеристик моделі.
3. Дослідження прийнятих апроксимацій (від лат. *approximato* — зближення) реальних процесів.
4. Розгляд критеріїв ефективності.
5. Дослідження прийнятих припущень і гіпотез.
6. Встановлення зв'язку п. 4 і 5 з реальними процесами; вивчення системи та збурюючих факторів зовнішнього середовища.
7. Встановлення достовірності інформації та її джерел, що використовуються при побудові моделі.
8. Розгляд процедури в цілому у зв'язку з визначенням задачі.
9. Розгляд постановки задачі.

Іншим методом перевірки достовірності концептуальної моделі є розгляд моделі спеціалістами, які не брали участі в її створенні.

Заключним етапом побудови імітаційної моделі є створення її логічної структурної схеми. Далі розробляється машинна схема і відбувається програмування задачі. Логічна структурна схема імітаційної моделі являє собою упорядковане й наочне зображення процесу, в якому визначені не лише дії, а й порядок їх виконання. У створеній на базі згаданої схеми машинній

схемі довільна процедура подається у вигляді сукупності елементарних операцій, що реалізують цю процедуру.

Логічну схему імітаційної моделі рекомендується створювати за *модульним (блоковим) принципом*, тобто у вигляді сукупності стандартних блоків-модулів. Якщо реалізація імітаційної моделі відбуватиметься з використанням пакету GPSS/PC, то при розробці схеми імітаційної моделі доцільно використовувати спеціальні графічні блоки, розроблені для цієї мови моделювання.

Побудувавши схему імітаційної моделі, перевіряють її логічну достовірність такими діями:

1) порівнюють кожну функцію концептуальної моделі з її реалізацією в блок-схемі;

2) перевіряють повноту опису блок-схеми;

3) з'ясовують, чи немає на схемі непередбачених циклів і нелогічних віток;

4) пересвідчуються в тому, що всі блоки та підблоки описано зрозуміло, точно й повно;

5) перевіряють наявність «входу» і «виходу» на схемі;

6) переглядають усі цикли, переконуючись, що кожний з них має «вхід» і «вихід»;

7) перевіряють правильність застосовуваного способу нумерації блоків;

8) порівнюють справжні вихідні величини моделі з бажаним виходом;

9) перевіряють правильність написання і використання всіх математичних виразів;

10) перевіряють фізичні розмірності всіх величин у рівняннях;

11) контролюють правильність здобуття всіх констант, параметрів і змінних;

12) перевіряють, чи немає помилок у застосуванні індексів;

13) встановлюють, чи правильно відображають датчики всі функції;

14) перевіряють правильність роботи датчиків випадкових величин;



15) перевіряють правильність реалізації у блоках усіх математичних виразів.

### **ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК**

**Апроксимація** (від лат. *approximatio* — зближення) — наближене зображення одних математичних об'єктів іншими у тому чи іншому значенні, близькому до вихідних, зокрема наближене подання складної функції однією або кількома більш простими функціями.

**Гіпотези** — наукові припущення, висунуті для пояснення певних явищ дійсності. Вони замінюють невідомі закономірності розвитку системи і доvizначають постановку задачі. За відсутності інформації висувають гіпотезу щодо можливих результатів, вірогідність якої далі перевіряють експериментально. Доводячи правильність гіпотез, дістають повніше уявлення про розв'язання задачі.

**Концептуальна модель** — сприйняття чи система поглядів на певне явище (спосіб розуміння, тлумачення якихось явищ) являє собою принципову основу або ідейну структуру імітаційної моделі, яка згодом може бути реалізована математичними і технічними засобами.

**Припущення** — твердження, яке тимчасово (доки не буде встановлено істину) вважається правильним, у контексті створення імітаційних моделей роблять у разі, коли деякі дані невідомі або їх не можна здобути. Водночас припущення можуть висуватися й щодо відомих даних, які не повністю відповідають сутності обраної задачі. Тому для відшукання необхідних результатів припустимі певні спрощення чи скорочення.

**Релевантна інформація** — інформація, необхідна для розв'язання обраної задачі.

**Локальна обчислювальна мережа (ЛОМ)** — сукупність засобів передачі та розподілу даних.

**Дані** — факти або поняття, описані у формалізованому вигляді. У локальній мережі існують дані користувача та дані, що керують передачею інформації (протоколи).

**Дані користувача** — дані, що вводяться користувачем у ЛОМ або отримуються ним з мережі.

**Протоколи** (дані керування) — дані, які використовуються для керування локальною мережею.

**Пакет інформації (кадр, фрейм)** — логічна одиниця інформації мережевого потоку (трафіка). Вся інформація між вузлами передається у вигляді пакетів, які мають інформаційні поля та поля керування, що містять службову інформацію: порядковий номер, контрольну суму тощо. У локальній мережі реалізований режим комутації пакетів, який являє собою такий спосіб передачі, при якому дані користувача розбиваються на окремі пакети. Маршрути передачі у мережі від джерела до отримувача визначаються у кожному вузлі комутації, куди пакети потрапляють.

**Трафік** — потік повідомлень або даних у мережі передачі даних; робоче навантаження лінії зв'язку.

**Повідомлення** — кінцева сукупність символів, що мають змістовний сенс.

**Канал зв'язку** — сукупність технічних засобів середовища передачі даних, що забезпечує передачу даних у визначене місце мережі.

**Мережевий адаптор (карта, плата)** — пристрій, за допомогою якого забезпечується підключення обчислювальної техніки до середовища передачі (кабелю) ЛОМ.

**Швидкість передачі** — показник, який вимірюється кількістю біт, що передаються за секунду (bps). У локальній мережі розрізняють дві швидкості передачі даних: швидкість передачі даних по основному комунікаційному кабелю (вона має постійне значення для кожного типу мережі й не залежить від типу вузла. Саме цю швидкість зазначають у довідниках локальних мереж. Наприклад, у мережі Ethernet вона становить 10 Mbps, Arcnet — 2,5 Mbps, Token Ring — 4/16 Mbps) та швидкість передачі даних між вузлами мережі (вона, як правило, значно менша, ніж основна швидкість передачі й залежить від умов функціонування вузла: швидкості процесора,

його завантаженості, конструкції мережевого адаптора, інформаційної шини, особливості ОС та інших факторів).

**Топологія ЛОМ** — геометрична схема з'єднання вузлів мережі. Більшість ЛОМ використовують одну з трьох таких топологій: шинну (шина); кільцеву (кільце); або зіркоподібну (зірка).

**Шинна топологія** — при такій топології комунікаційний кабель, який об'єднує вузли у мережу, утворює незамкнену лінію, тобто кабель має лівий та правий кінці, на які встановлюються спеціальні обмежувачі, що мають назву термінатори. Дані від вузла, який передає інформацію, розповсюджуються в обидва кінці кабелю. Проміжні вузли не виконують ніякої ретрансляції інформації. Вузол, що приймає інформацію, впізнає дані, призначені для нього, і читає отримане повідомлення.

**Зіркоподібна топологія.** У цьому випадку вузли мережі з'єднані «променем» з центральною точкою зірки. Залежно від конкретного типу мережі у центрі зірки можуть розташовуватися або центральний вузол, або пристрій, який виконує синхронізацію роботи периферійних вузлів мережі. Кожний периферійний вузол має свій власний канал для зв'язку з центром, який ретранслює, комутує чи виконує маршрутизацію інформаційного потоку до отримувача.

**Кільцева топологія.** У цій топології вузли з'єднуються послідовно один з одним, утворюючи кільце. Дані по мережі передаються від вузла до вузла. Передача інформації по кільцю здійснюється тільки в одному напрямі. Вузол-передавач відправляє повідомлення по кільцю до вузла, який приймає повідомлення. Кожний проміжний вузол між приймачем та відправником ретранслює

## ІМІТАЦІЙНА МОДЕЛЬ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ

Запасом називають придатний для застосування, але тимчасово не використовуваний певний додатковий обсяг

ресурсу. Такими ресурсами можуть бути людські ресурси, матеріали, машини та гроші. На промислових підприємствах завдання матеріально-технічного постачання полягає насамперед у забезпеченні виробництва матеріальними ресурсами (сировиною, напівфабрикатами, комплектуючими деталями і виробами тощо), запаси яких містяться або на центральних складах підприємства, або на складах основних цехів. Тому далі під виробничими запасами розумітимемо запаси матеріальних ресурсів, хоча це й не істотно для складання та дослідження оптимізаційних задач аналітичними методами чи засобами імітаційного моделювання.

Існують об'єктивні фактори, які зумовлюють потребу створення запасів. До них належать:

*розбіжність ритмів постачання (або виробництва) і використання матеріальних ресурсів.* Наприклад, навіть для ідеального випадку, коли споживання матеріалів безперервне, а постачання регулярне з фіксованим обсягом, то початковий запас (у момент прибуття поставки) дорівнює величині поставки, а далі, у міру споживання, зменшується до нуля;

*випадкові коливання попиту в проміжку часу між поставками, тривалості інтервалу часу між поставками, обсягів поставок.* У цьому разі проблема забезпечення ритмічності виробничих процесів матиме ймовірнісний характер, тобто надійність виробництва безпосередньо залежить від величини запасу;

*кон'юнктурні міркування, що враховують сезонність попиту та сезонність виробництва предметів споживання.*

З погляду дії перелічених факторів впливає, що чим більший запас, тим краще. Водночас існують і серйозні передумови на користь зменшення або зведення до нуля запасів матеріальних ресурсів. Сюди належать:

*плата за фізичне зберігання запасу;*

*втрачений економічний вигаиш через зв'язування оборотних коштів у запасах;*

*втрати в кількості і якості матеріальних ресурсів, включаючи моральний знос.*

Отже, задача вибору необхідних запасів виробничих ресурсів має альтернативний характер, і розв'язувати її слід оптимізаційними методами. Оптимальне керування запасами як науковий напрям належить до однієї з найбільш розроблених галузей теорії дослідження операцій.

Як і в будь-якій теорії управління, у задачі про запаси виокремлюють *керовані й некеровані параметри*.

До керованих параметрів (змінних керування) належать **обсяг на поставку** замовленого ресурсу і **момент часу подачі замовлення** на поповнення запасу. Органи постачання, обираючи певним чином обсяг і час замовлення (які утворюють так звану «точку замовлення»), можуть регулювати динаміку руху виробничого запасу на складах підприємства. Оптимальне керування запасами полягає у виборі таких обсягів і моментів на поповнення запасів, щоб сумарні витрати на організацію системи постачання набували мінімального значення.

Некеровані параметри задачі керування запасами, які дають змогу розрізняти математичні моделі оптимізації рівнів запасу, утворюють такий перелік із шести елементів: 1) система постачання; 2) попит на предмети постачання; 3) система поповнення запасів; 4) вартісні функції витрат; 5) обмеження, які застосовуються до запасів; 6) стратегії (політики) керування запасами.

**Система постачання.** У теорії керування запасами під системою постачання розуміють сукупність складів, між якими під час виконання операцій з постачання виникають інформаційні та матеріальні потоки. Звичайно, система постачання має свою систему управління, яка виконує відповідні для такого підрозділу функції.

Система постачання може будуватися за *централізованим і децентралізованим принципами*. У першому випадку склади мають ієрархічні рівні (до 5), причому лише склади найнижчого рівня обслуговують споживачів, а недостача предметів постачання на цих складах покривається за рахунок наявних запасів на складах вищих рівнів.

У децентралізованих системах постачання всі склади безпосередньо обслуговують споживачів, а можливі недостачі на окремих складах ліквідуються за рахунок надлишків матеріалів на інших.

У моделях керування запасами система постачання розглядається як один об'єкт, і саме для нього створюється єдина цільова функція. Стосовно промислових підприємств можна зауважити, що хоча в підпорядкуванні органів постачання перебувають кілька складів, проте специфіка їх функціонування дає змогу розглядати систему постачання як таку, що утворена одним складом, територіально розподіленим на кілька частин.

Залежно від числа ресурсів, що зберігаються на складі, системи постачання поділяються на одно- та багатопродуктові. Щоб спростити дослідження моделей керування запасами, багатопродуктові системи постачання іноді вдається розчленувати за кожним ресурсом на однопродуктові й рішення щодо організації забезпечення виробництва кожним матеріалом приймати окремо.

**Попит на предмети постачання** визначається поточними потребами виробництва і може поділитися на такі групи: стаціонарний або нестаціонарний; детермінований або стохастичний; неперервно або дискретно розподілений; залежний від попиту на інші номенклатури або незалежний.

**Система поповнення запасів.** Поповнення запасів характеризується обсягом поставки і часом затримки прибуття поставки щодо моменту подачі замовлення. За обсягом поставка може дорівнювати замовленій або бути випадковою величиною, параметри і функції розподілу якої залежать здебільшого від замовлення. У реальних ситуаціях завжди відбувається затримка прибуття замовлених матеріалів. Проте залежно від впливу цієї затримки на організацію постачання нею можна знехтувати (миттєва поставка), вважати її фіксованою або випадковою величиною з відомим законом розподілу.

**Вартісні функції витрат.** Витрати на організацію постачання складаються з трьох компонентів: витрат на зберігання матеріалів на складі; витрат на організацію поставок; витрат на штрафи через нестачу (дефіцит) необхідних ресурсів. Сукупність усіх витрат у формалізованому вигляді використовується як цільова функція в моделях керування запасами.

*Розрахунок вартості зберігання.* Вартість зберігання матеріальних ресурсів, яка здебільшого зростає прямо пропорційно до вартості матеріалів, що становлять запас, і терміну їх зберігання на відміну від інших витрат зумовлює необхідність скорочення запасів. Така необхідність є наслідком дії двох вартісних факторів:

— витрат через зв'язування (омертвління) обігових коштів у запасах;

— витрат, зумовлених фізичним зберіганням запасів.

Витрати першого типу, які мають певною мірою абстрактний характер і породжуються потенційно втраченою вигодою, що може бути отримана від обороту грошових засобів, ураховуються практично в усіх моделях керування запасами. Математично вони виражаються функцією, прямо пропорційною до середньої вартості запасу і терміну його існування. При випадковому попиті або випадкових поставках середній рівень запасу також є випадковою величиною. Тому в моделях оптимізації відповідні витрати через зв'язування обігових коштів подаються математичним сподіванням.

При розрахунках витрат другого типу необхідно враховувати шість складових витрат.

*1. Плата за складське приміщення.* Якщо підприємство змушене орендувати складські приміщення, то плата за них дорівнює відповідно ціні оренди. Плата за власні складські приміщення включає плату за основні фонди (вартість складу, помножена на відсоток нарахування), амортизаційні відрахування (вартість складу, поділена на строк служби), оплату комунальних послуг (опалення, освітлення, подача води тощо). Математично цей компонент витрат є прямо

пропорційною функцією від величини запасу і часу його існування.

2. *Витрати на облік та адміністративні витрати.* Сюди включаються витрати на організацію складського обліку та конторські витрати, пов'язані з обслуговуванням споживачів. Ці витрати математично являють собою нелінійну (східчасту, розривну) функцію від числа номенклатур матеріалів і величини запасу (інтенсивності споживання). У першому наближенні для більшості задач керування запасами витрати на облік і адміністративні витрати можна вважати постійними величинами.

3. *Витрати на складські операції.* До цих витрат входить вартість робочої сили, що виконує розвантаження, навантаження і переміщення матеріалів, які утворюють запас; плата за складську техніку; витрати на інвентаризацію, періодичний огляд, прибирання приміщення; витрати на регламентні роботи, що виконуються на складах з метою зберігання матеріалів. Для практичних цілей відповідний компонент цільової функції можна вважати або сталою величиною (якщо сумарні поставки дорівнюють сумарному споживанню, а змінювання запасів у широкому діапазоні не впливає на величину витрат), або прямо пропорційною до величини запасу і часу його існування.

4. *Витрати від псування матеріалів, що утворюють запаси.* Збитки через псування продукції (наприклад, сільськогосподарської) зумовлені як зменшенням її кількості, так і зниженням її споживчих властивостей. Збитки, зумовлені природними причинами зменшення запасу (наприклад, випаровуванням), прямо пропорційні до величини запасу і часу його існування. Витрати через погіршення споживчих властивостей матеріальних цінностей визначаються або відсотком відбракування, або зниженням ціни одиниці продукції за одиницю часу. У будь-якому з цих випадків витрати являють собою лінійну функцію величини запасу і часу його існування.



5. *Витрати через утворення надмірних запасів.* При випадковому попиті або поставках, а також у результаті дії інших виробничих причин на складах можуть утворюватися запаси непотрібних матеріалів, так звані неліквіди. Витрати через це визначаються величиною збитку, який дорівнює початковій вартості даної кількості матеріалу за винятком суми, що її можна дістати від реалізації невикористаних цінностей. Математично цей компонент витрат виражається лінійною функцією від залишку запасу на кінець періоду планування.

6. *Витрати через моральний знос.* Збитки, зумовлені моральним зносом матеріалів, що утворюють запас, математично виражаються функцією, яка дорівнює величині залишку запасу на кінець періоду планування, помноженого на різницю між початковою ціною одиниці продукції та її значенням після зниження ціни.

Отже, витрати на зберігання як функція від величини запасу в загальному випадку мають три складові:

- постійну величину;
- величину, пропорційну до середньої величини запасу і часу його існування;
- величину, пропорційну до залишку матеріалу, що утворює запас, на кінець періоду планування.

Першу складову немає потреби враховувати під час дослідження оптимальної стратегії керування запасами, а з двох інших до цільової функції доцільно включити домінуючу за абсолютним значенням витрат, якщо вони не еквівалентні.

*Розрахунок вартості поставок.* У функції витрат на організацію поповнення запасів необхідно враховувати лише ті затрати, які безпосередньо залежать від обраної стратегії керування запасами. У загальному випадку вартість поставки може включати постійний компонент; компонент, пропорційний до обсягу поставки; компонент, пропорційний до кількості замовлених номенклатур. Можливі випадки складнішої залежності вартості поставки від обсягу поставки та числа замовлених матеріалів — нелінійної.

Під час розрахунку витрат на поставки слід брати до уваги таке:

- конторські та поштові витрати;
- транспортні витрати;
- витрати виробництва;
- витрати, пов'язані з варіацією закупівельних цін.

*Конторські та поштові витрати.* Конторські (виписування й оформлення нарядів) та поштові витрати не залежать від обсягу поставок і в однопродуктових моделях керування запасами вважаються сталими. У багатопродуктових моделях ці витрати утворюють складову витрат, пропорційну до числа замовлених номенклатур.

*Транспортні витрати* залежно від обраного способу доставки можуть бути сталими або можуть залежати від обсягу поставки. Перший випадок реалізується тоді, коли поставка пов'язана з організацією спеціального рейсу транспортного засобу (літака, автомобіля, залізничного контейнера), вантажопідйомність якого використовується не повністю. У вартість доставки включаються витрати, пов'язані з організацією цього рейсу.

Іноді постійна складова транспортних витрат може являти собою функцію цілого аргументу (наприклад, кількості вагонів, необхідних для реалізації поставки). При цьому сумарні витрати являють собою розривну функцію обсягу поставки.

В усіх інших випадках транспортні витрати пропорційні до обсягу поставки. Коефіцієнт пропорційності визначається діючими на даному типі транспорту тарифами.

*Витрати виробництва*, які включаються до вартості поставки, виникають тоді, коли виконання замовлень пов'язане з організацією виробничого циклу виготовлення партії замовленої продукції, що спричинюється до зупинки і переналагодження технологічних ліній. Зумовлені цією обставиною додаткові витрати (зарплата наладчиків, підготовка нової документації, збитки від простоювання обладнання за час переналагоджування і можливого спаду продуктивності, витрати на наймання та навчання робочої

сили) не включаються до собівартості створюваної продукції, а оплачуються системою постачання, яка зробила замовлення. Розглянута стаття витрат не залежить від обсягу замовленої партії поставки, тобто є сталою величиною.

*Витрати, пов'язані з варіацією закупівельних цін.* Іноді ціна одиниці матеріалів, що замовлюються, залежить від обсягу поставки, оскільки таким чином організація-постачальник стимулює якомога більші за обсягом замовлення, встановлюючи диференційовано закупівельну ціну. У моделях керування запасами необхідно враховувати цей фактор, вважаючи його організаційним.

*Визначення величини штрафу.* Під дефіцитом розуміють ті потреби в матеріальних ресурсах, які не можуть бути задоволені в потрібний момент часу, тобто йдеться про відсутність у цей момент необхідних матеріалів, що означає порушення матеріального забезпечення виробництва. В умовах, коли спостерігається стохастичність потреб і поставок, поява дефіциту, як правило, не виключається. Цілковите виключення подібної ситуації означало б створення великих, економічно не обґрунтованих запасів.

Нестача необхідних матеріалів може мати різні наслідки. Для ліквідації дефіцитних ситуацій підприємство може вживати надзвичайні заходи. Як порушення безпосередньо процесів виробництва і збуту, так і вживання надзвичайних заходів пов'язані з додатковими витратами і збитками для підприємства. Усі вони називаються *витратами дефіциту (вартістю штрафів)*.

У загальному випадку функція витрат на штрафи може мати складний аналітичний опис і включати такі компоненти: пропорційні до величини нестачі та часу її існування; пропорційні до значення нестачі на кінець періоду планування; постійні при ненульовій нестачі. У реальних системах постачання одна з перелічених складових витрат є відносною домінуючою, що дозволяє тільки її включити до цільової функції.

**Обмеження, що застосовуються до запасів.** У задачах керування запасами стикаємося з різного роду обмеженнями, які необхідно враховувати при складанні математичних або імітаційних моделей. Обмеження можуть бути на максимальний обсяг (масу чи вартість) величини поточного запасу, середню вартість запасу, число поставок у заданому проміжку часу, максимальний обсяг (масу чи вартість) окремої поставки тощо.

**Стратегії (політики) керування запасами.** Стратегією (політикою) керування запасами називають сукупність правил, за допомогою яких визначають моменти часу і обсяги замовлень на поповнення запасів. У моделях керування запасами стратегія керування обирається заздалегідь, і задача зводиться, таким чином, до пошуку параметрів цієї стратегії. Найбільшого поширення набули так звані *найпростіші стратегії* управління запасами: *періодичні* та *з критичними рівнями*.

Нехай  $y, h, H$  — запас ресурсу відповідно поточний, нижній (пороговий) і верхній (граничний);  $T$  — період планування;  $q$  — обсяг (партія) замовлення.

У періодичних стратегіях замовлення формуються в кожному періоді  $T$ . До них належать:

стратегія постійного рівня  $(T, H)$ , згідно з якою через кожний проміжок часу  $T$  запас поповнюється до граничного значення  $H$ ; обсяг замовлення — змінна величина

$$q = H - y;$$

стратегія фіксованої поставки  $(T, q)$ , згідно з якою через інтервал часу  $T$  видається замовлення розміром  $q$ .

У стратегіях з критичними рівнями постійно стежать за рівнем поточного запасу, і тільки-но він опускається нижче порогового рівня, видається замовлення на поповнення запасу. Це такі стратегії.

Стратегія фіксованого розміру замовлення  $(h, q)$ , сутність якої полягає у такому.

Якщо  $y < h$ , замовити  $q$ ,

якщо  $y \geq h$ , нічого не замовляти;  
стратегія двох рівнів  $(h, H)$ :

Якщо  $y < h$ , замовити  $q = H - y$ ;

якщо  $y \geq h$ , нічого не замовляти.

Зауважимо, що вибір стратегії керування запасами, який є найвідповідальнішим моментом під час складання математичних або імітаційних моделей, має ґрунтуватися на ретельному аналізі системи постачання. Отже, розв'язок задачі керування запасами потрібно знаходити спочатку в просторі стратегій керування, а потім, згідно з обраною стратегією, — у просторі її параметрів.

Для більш глибокого розуміння сутності задачі керування запасами і необхідності її розв'язання методом машинного моделювання потрібно розглянути дві найвідоміші постановки задач керування запасами, результати яких широко застосовуються на практиці.

#### **А. Статична детермінована модель**

##### *Основні передумови*

1. Розглядається процес керування однопродуктовим запасом на ізольованому складі; процес руху запасів — нескінченний.

2. Попит неперервний і має сталу інтенсивність  $\mu$ .

3. Поповнення запасів — миттєве.

4. Дефіцит не допускається, тобто витрати на штрафи (витрати через дефіцит)  $L_D$  відсутні і вважаються такими, що дорівнюють нулю:

$$L_D = 0. \quad (4.1)$$

5. Кожній поставці відповідають сталі витрати  $g$ ,

$$L_P = g, \quad (4.2)$$

де  $L_P$  — витрати на поставку.

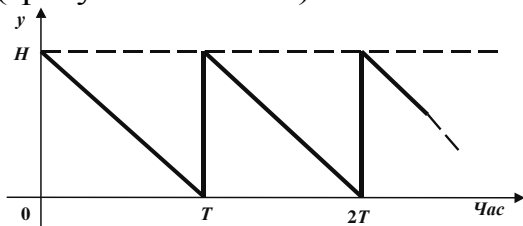
6. Вартість зберігання  $L_Z$  пропорційна до середнього рівня запасу і часу його існування, коефіцієнт пропорційності дорівнює  $s$ .

7. Обирається стратегія керування запасами  $(T, H)$ .

8. Треба знайти оптимальні параметри стратегії керування запасами  $T^*$  і  $H^*$ , які мінімізують загальні витрати за одиницю часу.

### *Економіко-математична модель*

Схему руху запасу матеріалу на складі зображено на рис. 4.1. Оскільки рух запасу циклічний, то для створення економіко-математичної моделі достатньо розглянути один цикл (трикутник на схемі).



**Рис. 4.1.** Схема руху запасу

Загальні витрати за період  $T$

$$L_T = L_P + L_Z + L_D. \quad (4.3)$$

Витрати на зберігання згідно з шостою передумовою наберуть вигляду

$$L_Z = \frac{1}{2} sHT. \quad (4.4)$$

Підставивши в (4.3) вирази (4.1), (4.2) і (4.4), дістанемо

$$L_T = g + \frac{1}{2} sHT.$$

Цільова функція — витрати за одиницю часу

$$L = \frac{L_T}{T},$$

або

$$L = \frac{g}{T} + \frac{1}{2} sH. \quad (4.5)$$

Згідно з другою передумовою

$$H = \mu T. \quad (4.6)$$

Підставляючи (4.6) у (4.5), знаходимо цільову функцію, яку потрібно мінімізувати:

$$L = \frac{1}{2} s\mu T + \frac{g}{T} \rightarrow \min. \quad (4.7)$$

Оскільки цільова функція (4.7) опукла і унімодальна, то її мінімум знаходиться стандартним методом:

$$\frac{dL}{dT} = \frac{1}{2} s\mu - \frac{g}{T^2} = 0.$$

Звідси

$$T^* = \sqrt{\frac{2g}{s\mu}}. \quad (4.8)$$

Скориставшись формулою (4.6), знайдемо оптимальне значення граничного запасу

$$H^* = \mu T^* = \sqrt{\frac{2g\mu}{s}}.$$

Оскільки в даних умовах граничний запас дорівнює партії поставки, то

$$q^* = \sqrt{\frac{2g\mu}{s}}. \quad (4.8')$$

Формулу (4.8) дістав Вільсон (1928 р.), а тому її названо на його честь. Іноді цю формулу називають формулою для визначення *найбільш економічної партії поставок*. Незважаючи на досить жорсткі та ідеальні умови її створення, формула Вільсона (або її модифікації) часто застосовується на практиці.

## **Б. Керування багатопродуктовими запасами**

### *Основні передумови*

1. Система постачання забезпечує попит на  $n$  продуктів протягом одного року.

2. Для поповнювання запасів система має необхідні виробничі потужності. Витрати на підготовчо-заклучні операції, які вважають витратами на поставку, пропорційні до числа поставок протягом року і вартості однієї поставки:

$$L_p = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{q_i} g_i, \quad (4.9)$$

де  $b_i$  — річна потреба в  $i$ -му продукті;  $g_i$  — витрати на підготовчо-заклучні операції на виготовлення однієї партії поставки  $i$ -го продукту (не залежить від розміру партії поставки  $q_i$ ).

3. Поставки миттєві.

4. Дефіцит виключається ( $L_D = 0$ ).

5. Витрати на зберігання, зумовлені зв'язуванням оборотних фондів у запасах протягом року, пропорційні до середньої вартості запасу і часу його існування:

$$L_Z = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{2} c_i \tilde{T} \rho, \quad (4.10)$$

де  $c_i$  — ціна за одиницю  $i$ -го продукту;  $\tilde{T}$  — кількість одиниць часу в одному році;  $\rho$  — коефіцієнт нарахування на зв'язані оборотні фонди, фізична розмірність якого  $[\rho] = [\text{час}]^{-1}$ .

Якщо за одиницю часу обрати  $\rho i k$  (тобто в усіх величинах моделі фізичну розмірність часу подати відносно цієї одиниці), то формула (4.10) дещо спроститься:

$$L_Z = \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i. \quad (4.11)$$

6. Заданий норматив  $E$  оборотних фондів щодо величини запасу (середня вартість запасу має не перевищувати цієї величини), тобто

$$E \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i,$$

або

$$E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i \geq 0. \quad (4.12)$$

7. Знайти значення  $q_i^*$ , які мінімізують річні витрати на організацію постачання  $L_R$ :

$$L_R = L_Z + L_P \rightarrow \min. \quad (4.13)$$

#### *Економіко-математична модель*

Підставивши в (4.13) значення складових витрат згідно з виразами (4.9) і (4.11), дістанемо цільову функцію оптимізаційної задачі:

$$L_R = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{q_i} g_i + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i \rightarrow \min. \quad (4.14)$$



Обмеженнями задачі буде формалізована вимога щодо додержання нормативу на оборотні фонди (4.12), а також умова невід'ємності

$$q_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.15)$$

Економіко-математична модель — цільова функція (4.14) разом з обмеженими (4.12) і (4.15) — належить до задач цілочислового нелінійного сепарабельного програмування. Для її розв'язання найдоцільніше застосовувати метод множників Лагранжа.

Задача полягає в мінімізації функції (4.14) за невід'ємними змінними  $q_i (i=1, 2, \dots, n)$  за умови виконання обмеження (4.12). Для її розв'язання скористаємося функцією Лагранжа

$$F = \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i c_i \rho}{2} + \frac{b_i g_i}{q_i} \right) + \lambda \left( E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i \right), \quad (4.16)$$

де невизначений множник Лагранжа  $\lambda$  задовольняє такі умови:

$$\lambda = 0, \text{ якщо } E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i > 0, \quad (4.17)$$

$$\lambda < 0, \text{ якщо } E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i = 0. \quad (4.18)$$

Для мінімізації загальних витрат достатньо продиференціювати функцію Лагранжа (3.16) за змінними  $q_i$  і, прирівнявши похідну нулю, знайти оптимальні партії поставок:

$$\frac{1}{2} c_i \rho - \frac{b_i g_i}{q_i^2} - \frac{1}{2} \lambda c_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (4.19)$$

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2b_i g_i}{(\rho - \lambda)c_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.20)$$

Коли обмеження (4.12) не ефективно (виконується строга нерівність), то  $\lambda = 0$  і умова щодо обмеженості оборотних засобів неістотна. Проте в разі ефективності обмеження (4.12) постає задача обчислення невизначеного множника Лагранжа ( $\lambda < 0$ ).

Алгоритм розв'язання задачі полягає у такому.

1. Підставимо значення  $\lambda = 0$  у (4.20):

$$q_i = \sqrt{\frac{2b_i g_i}{\rho c_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.21)$$

2. Величини партій поставок, обчислених згідно з (4.21), підставимо в нерівність

$$E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i > 0.$$

Якщо нерівність виконується, то здобутий у п. 1 результат є кінцевим, тобто

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2b_i g_i}{\rho c_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Якщо нерівність не справджується, переходимо до п. 3.

3. Підставимо вираз (4.20) у рівність

$$E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i c_i = 0.$$

Тоді

$$E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{2c_i b_i g_i}{\rho - \lambda}} = 0,$$

звідки

$$\sqrt{\rho - \lambda} = \frac{1}{2E} \sum_{i=1}^n \sqrt{2c_i b_i g_i}. \quad (4.22)$$

4. Підставимо (4.22) у (4.20) і знайдемо розв'язок задачі  $q_i^*$ .

Імітаційна модель керування запасами має такі основні передумови:

1. Моделюється однопродуктова система керування запасами. Кількість продукту, яка вивозиться щоденно зі складу, визначається поточним попитом. Використовується стратегія фіксованого розміру замовлення  $(h, q)$ : коли рівень поточного запасу  $u$  падає нижче від заданої позначки  $h$ , керівництво складу замовляє поставку товару в кількості  $q$ . Після закінчення терміну виконання замовлення ця продукція надходить на склад і доповнює запас, що вже є там у даний момент. Система постачання функціонує  $T$  днів.

2. Щодня виникає попит на предмет зберігання, причому дорівнює цей попит величині  $X$  — випадковій величині з відомим законом розподілу ймовірностей.

3. Встановлюється такий порядок виконання операцій на складі протягом кожного дня:

1) визначаються обсяги замовлень на поповнення запасу, які будуть реалізовані протягом поточного дня;

2) товар поставляється споживачеві, тобто задовольняється попит;

3) оцінюється запас, що залишився, і в разі потреби (якщо поточний запас досягає порогового рівня) оформляється замовлення на поповнення запасу.

4. Затримка поставки  $\lambda$  (кількість днів між моментами часу подачі замовлення на поставку та її надходженням) тлумачиться як випадкова величина з відомим законом розподілу ймовірностей.

5. Незадоволені замовлення споживачів товару анулюються, тобто переносити дефіцит на наступний день не дозволяється.

6. Заявка на поповнення запасу приймається до виконання лише в тому разі, коли подана раніше заявка реалізована, тобто в кожний момент часу на стадії реалізації не може перебувати більш як одна заявка.

7. За цільову функцію для вибору оптимальних значень змінних керування беруть сумарні витрати (вартість зберігання і поставки, штраф) за період  $T$ .

$$L(q, h) = L_Z + L_P + L_D \rightarrow \min .$$

Оскільки щоденний попит і затримка поставок — випадкові величини, то й сума витрат системи постачання  $L(q, h)$  також є випадковою величиною, закон розподілу ймовірностей якої в загальному випадку невідомий. Тому цільова функція являє собою математичне сподівання витрат  $M [L(q, h)]$ .

8. Математичне сподівання витрат при фіксованих значеннях змінних керування  $q, h$  оцінюється з допомогою вибіркового середнього

$$\bar{L}(q, h) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L_j(q, h),$$

де  $N$  — число циклів прогонів (дублювань) імітаційної моделі при фіксованих значеннях змінних керування  $q, h$  і незмінних факторах моделі (у разі машинної реалізації

імітаційної моделі беруть 1000 циклів прогонів);  $L_j(q, h)$  — значення сумарних витрат у  $j$ -му прогоні.

9. Вартість поставки — стала величина, що не залежить від обсягу поставки і дорівнює  $g$ :

$$L_p = g = \text{const} .$$

10. Вартість зберігання пропорційна до величини залишку продукту на кінець дня, коефіцієнт пропорційності дорівнює  $s$

11. Витрати на штрафи пропорційні до залишкової величини дефіциту на кінець дня, коефіцієнт пропорційності дорівнює  $p$

12. Ендогенна змінна системи (відгук):  $L$  — сумарні витрати.

13. Змінні, що визначають стан системи в довільний момент часу:

$L_z$  — витрати на зберігання;

$L_p$  — вартість поставки;

$L_D$  — витрати на штрафи;

$t$  — поточний (системний, модельний) час;

$t'$  — момент часу (день), коли реалізується поставка;

$y$  — поточне значення запасу (у разі дефіциту — від'ємне);

$j$  — індекс циклів роботи імітаційної моделі.

14. Змінні керування:

$q$  — обсяг (партія) замовленої поставки;

$h$  — нижній (пороговий) рівень запасу.

15. Некеровані параметри:

$s$  — витрати на зберігання одиниці продукції на кінець дня;

$p$  — витрати через дефіцит, пов'язані з нестачею одиниці продукції;

$g$  — витрати на організацію однієї поставки;

$z$  — початковий рівень запасу;

$T$  — тривалість (кількість днів) функціонування системи постачання.

16. Екзогенні (вхідні) змінні:

$X$  — щоденний попит на продукт;

$\lambda$  — час затримки поставки.

17. Характеристики функціонування системи:

$F(X)$  — функція розподілу ймовірності попиту;

$F(\lambda)$  — функція розподілу ймовірності затримки поставки.

18. За допомогою методу імітаційного моделювання потрібно знайти оптимальні значення  $h^*$  і  $q^*$ , при яких сумарні витрати на організацію постачання протягом  $T$  днів будуть мінімальні. Для експериментального пошуку оптимального розв'язку задачі застосовується метод Бокса–Уїлсона.

Логічна структурна схема імітаційної моделі задачі пошуку оптимальної стратегії керування запасами складається з двох контурів — зовнішнього і внутрішнього. Зовнішній контур реалізує схему проведення експериментів за методом Бокса–Уїлсона (див. Тему 12), тобто на цьому рівні визначаються точки факторного простору, в яких відбувається імітаційний експеримент для визначення цільової функції — сумарних витрат на постачання.

На вхід до внутрішнього контура надходить пара чисел (вектор)  $(q, h)$ , визначених згідно з процедурою руху в напрямі антиградієнта або в околі базової точки факторного простору. Після проведення машинного експерименту в точці  $(q_k, h_k)$  і статистичної обробки результатів моделювання дістаємо значення цільової функції  $\bar{L}(q_k, h_k)$ , яке відсилається на зовнішній контур моделі для прийняття рішення щодо подальшого проведення експерименту.

На вхід до внутрішнього контура надходить пара чисел (вектор)  $(q, h)$ , визначених згідно з процедурою руху в напрямі антиградієнта або в околі базової точки факторного простору. Після проведення машинного експерименту в точці  $(q_k, h_k)$  і статистичної обробки результатів моделювання дістаємо значення цільової функції  $\bar{L}(q_k, h_k)$ , яке відсилається на зовнішній контур моделі для прийняття рішення щодо подальшого проведення експериментів.

Логічну структурну схему (блок-схему) внутрішнього контура імітаційної моделі, що реалізує  $N$  повторів спроби при фіксованих значеннях параметрів системи і змінних керування  $(q, h)$ , зображено на рис. 4.2.

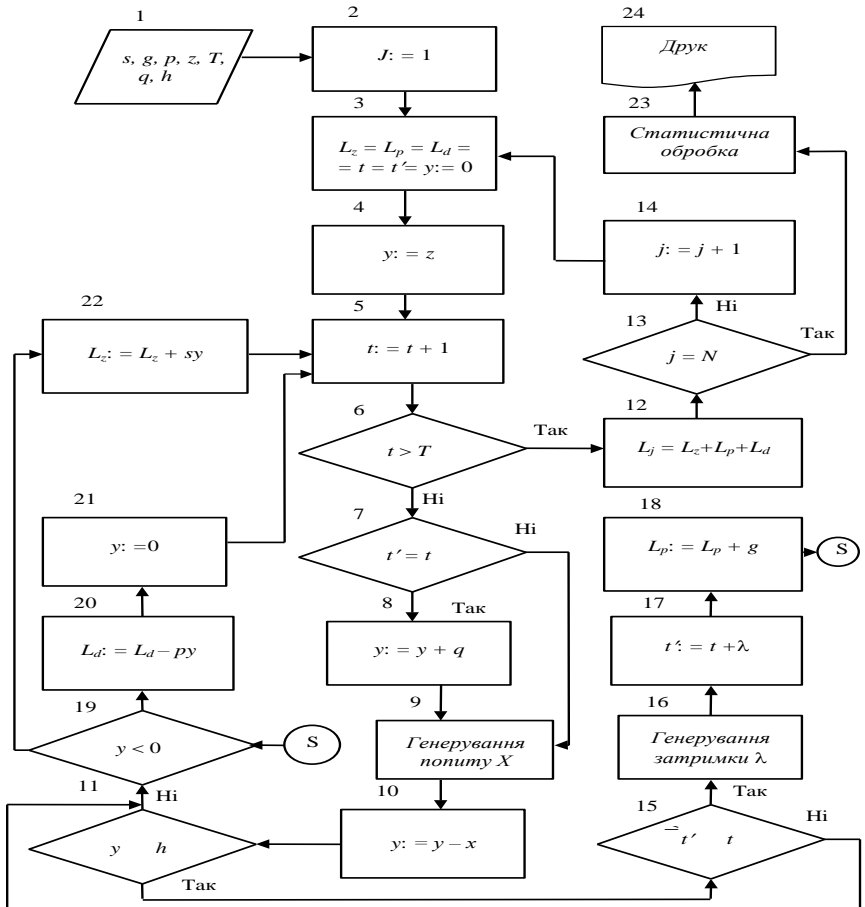
Початком роботи імітаційної моделі (внутрішнього контура) є введення до ЕОМ конкретних числових значень некерованих параметрів  $(s, g, p, z, T)$ , керуючих змінних  $(q, h)$ , а також числа циклів  $N$ . Далі в комірки пам'яті машини, які призначені для записування змінних стану системи  $L_z, L_p, L_D, t, t'$ , засилаються нулі. Оператори 2, 13 і 14 організують зовнішній цикл роботи алгоритму, що забезпечує  $N$ -кратний прогін спроби за однакових умов. Початкове значення поточного запасу (оператор 4) дорівнює величині  $z$ .

Оператори моделі 5 і 6 призначені для організації еволюційного процесу (тут використовується однорідне градування часу, крок руху по часовій осі дорівнює одному дню).

Якщо поточне значення системного часу  $t$  перевищує заданий термін планування  $T$ , то блок 12 обчислює сумарні витрати системи постачання  $L_j$  за даний  $j$ -й прогін моделі ( $j=1, 2, \dots, N$ ). Потім здобуті значення  $L_j$  обробляються у блоці 23: відшуковуються середнє арифметичне значення  $\bar{L}(q, h)$ , яке беруть за статистичну оцінку математичного сподівання витрат, та вибіркова дисперсія  $\bar{\sigma}_L^2$ , за допомогою якої визначаються надійний інтервал оцінки  $L$  і необхідна кількість дублювань спроби  $N$ :

$$\bar{L} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L_j;$$

$$\bar{\sigma}_L^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (L_j - \bar{L})^2.$$



**Рис. 4.2.** Блок-схема імітаційної моделі керування запасами

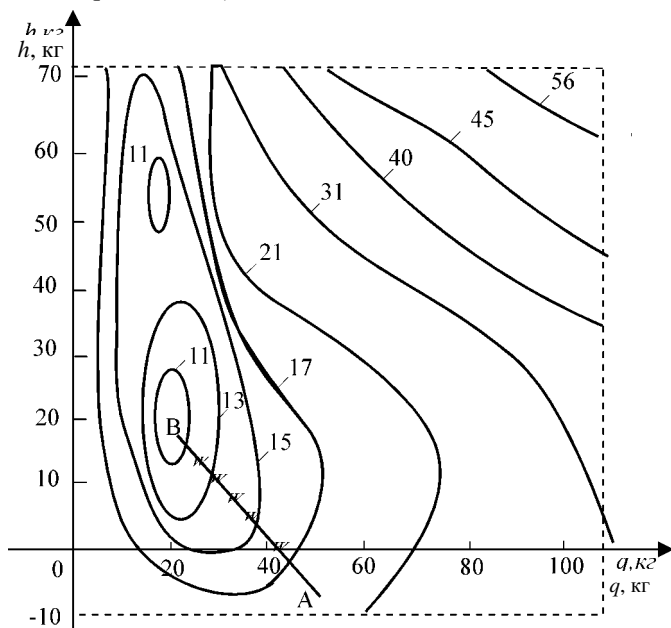
Оператор 7 перевіряє, чи надходить у поточний момент часу замовлена раніше поставка. Якщо поставка надходить, то поточний рівень запасу збільшується на партію поставки  $q$ . Попит  $X$  і затримка поставки  $\lambda$  генеруються з допомогою методу Монте-Карло згідно із заданими розподілами  $F(X)$  (оператор 9) і  $F(\lambda)$  (оператор 16).

Оператор 10 реалізує поставку товару споживачам, тобто задовольняється попит. При цьому, якщо попит задовольняється повністю (оператор 19, позиція «Ні»), то оператор 22 обчислює вартість зберігання. У противному

разі обчислюється величина штрафу (оператор 20) і виключається можливість перенести дефіцит на наступний день (оператор 21).

Логічні оператори 11 і 15 імітують організацію замовлення на поставку, яка здійснюється за умови, що поточний рівень запасу досягає рівня  $h$  і момент часу реалізації попередньої заявки на поставку не перевищує системного часу. Якщо замовлення на поставку сформоване, то оператор 17 імітує час надходження чергової поставки, а оператор 18 враховує пов'язані з цим витрати.

Результати реалізації описаної імітаційної моделі керування запасами на ЕОМ унаочнює рис. 4.3. Поверхню відгуку зображено лініями однакового рівня  $L = 11, 13, 15, \dots$ . Для їх побудови з метою проілюструвати специфіку застосування методики планування експериментів виконувалися спеціальні імітаційні спроби в точках факторного простору з кроком руху по координаті  $q$  — 10 кг, по  $h$  — 5 кг.



**Рис. 4.3.** Зображення функції відгуку лініями однакового рівня



Зауважимо, що функція відгуку — багатоекстремальна (див. рис. 4.3). Для безпосереднього пошуку оптимальних значень  $q^*$  і  $h^*$  методом Бокса–Уїлсона відбувався рух по антиградієнту.

Точка  $A$  з координатами  $q = 50$ ,  $h = -5$  була обрана як початкова точка імітаційного експерименту. За 5 кроків (відповідні точки зображені на прямій  $AB$ ) досягнуто точки локального мінімуму функції відгуку:  $q^* = 20$ ,  $h^* = 18$ ,  $L^* = 10,5$ .

### ПОНЯТТЯ ПРО МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Слід зазначити, що більшість виробничих і соціальних процесів значною мірою відбуваються під впливом випадкових факторів, які не підлягають контролю з боку осіб, відповідальних за прийняття і реалізацію рішень у контексті забезпечення оптимального функціонування систем. Проте з позицій системного аналізу врахування невизначеностей обов'язковим елементом є процедури вироблення планово-управлінських рішень. Тому задача полягає в тому, щоб якомога повніше врахувати вплив неконтрольованих випадкових факторів і зробити в таких умовах аргументований висновок щодо можливих напрямів розвитку системи та оптимальної стратегії управління нею. Такі задачі розв'язують за допомогою методу Монте-Карло (методу статистичних досліджень).

Під час розробки імітаційних моделей завжди постає питання опису моделі з допомогою відповідних характеристик (ймовірність, щільність розподілу ймовірностей тощо), тобто тих характеристик, що вивчаються на базі емпіричних даних, дібраних або при систематизації наявних звітних матеріалів, або в результаті обробки спеціально поставлених експериментів. Тому, розробляючи імітаційну модель, яка містить стохастичні елементи, завжди стикаються з проблемою: чи доцільно в методі Монте-Карло застосовувати безпосередньо емпіричні дані? Можливо, є рація скористатися одним з апроксимуючих теоретичних розподілів.

Питання про використання емпіричних або теоретичних розподілів дуже важливе, і ось чому.

1. Коли використовують «сірі» емпіричні дані, мають на увазі, що моделюється лише минуле. Дані, одержані раніше, строго кажучи, відбивають лише колишню поведінку системи; можливими подіями виявляються тільки ті, які вже відбувалися. Звідси випливає необхідність припустити, що основна форма розподілу ймовірностей залишиться з часом без змін і що особливості цього розподілу, які стосуються певного періоду часу, будуть повторюватися.

2. Завдяки застосуванню теоретичного розподілу здебільшого вдається зменшити витрати машинного часу і потрібної пам'яті ЕОМ.

3. У разі використання теоретичного розподілу легше змінювати параметри генератора випадкових чисел, коли потрібно перевірити чутливість моделі або «програти» на ній різні можливі ситуації.

Якщо з допомогою аналізу емпіричного розподілу вдається дібрати відомий теоретичний розподіл, який узгоджується на статистично прийнятному рівні надійності з експериментальними даними, то ним слід скористатися для імітації випадкових факторів.

Метод Монте-Карло застосовується в багатьох галузях науки і техніки. За допомогою процедур Монте-Карло розроблено численні методи для обчислення кратних інтегралів, розв'язування інтегральних і диференціальних рівнянь. У задачах оптимізації процедура Монте-Карло використовується для генерування випадкових точок з області визначення цільової функції та установлення випадкових напрямів руху до екстремуму в пошукових методах.

Метод Монте-Карло часто застосовується в експериментальних дослідженнях. При постановці натурних експериментів випадковим способом вибираються поточні точки факторного простору в умовах нестандартного проходження досліджуваних процесів. У машинних експериментальних

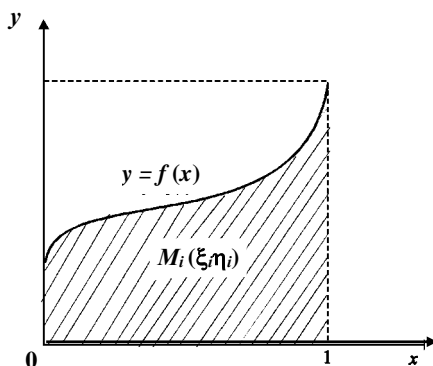
дослідженнях, які виконуються на імітаційних моделях, метод Монте-Карло дає змогу імітувати випадкові явища, що відбуваються в реальних модельованих системах.

Ідею застосування методу Монте-Карло, зокрема для розв'язання цілком детермінованих задач, легко зрозуміти на прикладі обчислення визначеного інтеграла. Нехай потрібно обчислити інтеграл від деякої функції на заданому відрізку змінювання аргументу. Після нескладних перетворень початкову задачу можна звести до задачі обчислення інтеграла

$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad (5.1)$$

де  $0 \leq f(x) \leq 1$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

Схему, що ілюструє обчислення визначеного інтеграла методом Монте-Карло, зображено на рис. 5.1.



**Рис. 5.1.** Схema до обчислення визначеного інтеграла

Визначимо площу  $I$  фігури, обмеженої кривою  $y = f(x)$ , віссю  $x$  і прямими  $x = 0$ ,  $x = 1$  (див. рис. 5.1, заштрихована частина).

Уявімо тепер симетричну дзигу у вигляді десятигранника, кожна з граней якого позначено однією з цифр  $0, 1, 2, \dots, 9$ . Пустимо дзигу. Після її падіння на верхній грані з однаковою ймовірністю можна очікувати будь-яку з десяти згаданих цифр.

Розглянемо два десяткові  $k$ -розрядні числа  $\xi$  і  $\eta$ , значення яких містяться між нулем та одиницею і утворюються таким чином. Пускаючи  $k$  раз дзигу, вважатимемо здобуту послідовність цифр десятковими розрядами числа  $\xi$ .

Повторивши експеримент, дістанемо число  $\eta$ . Наприклад, якщо  $k = 5$  і на верхній грані дзиги випали відповідно цифри 0, 3, 7, 0, 5, то шукане число дорівнює 0,03705. Точку з координатами  $M(\xi, \eta)$  називатимемо *випадковою точкою*, а спосіб її утворення — *киданням*.

Очевидно, що ймовірність попадання випадкової точки в заштриховану область дорівнює відношенню площі цієї фігури, тобто значення інтеграла  $I$ , до площі квадрата, яка дорівнює одиниці. Отже, ймовірність попадання випадкової точки в заштриховану область дорівнює значенню шуканого інтеграла. Тому задача обчислення інтеграла зводиться до задачі пошуку ймовірності. Останню оцінимо статистичними методами з допомогою відносної частоти.

Кидаємо  $n$  випадкових точок на площину квадрата. Нехай виконується умова

$$\eta_i < f(\xi_i). \quad (5.2)$$

Тоді точка  $M_i$  належить заштрихованій області. Припустимо тепер, що  $m$  — число точок, для яких виконується умова (5.2). Відносна частота попадання точки в заштриховану область дорівнює  $\frac{m}{n}$ . Згідно з теоремою Бернуллі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Отже,  $\frac{m}{n}$  є наближеним значенням шуканого інтеграла.

Зауважимо, що метод Монте-Карло для обчислення інтеграла доцільно застосовувати для багатовимірних задач, оскільки число необхідних повторень  $n$  при заданій точності не залежить від кратності інтеграла.

Знайдемо точність методу, коли ймовірність оцінюється з допомогою відносної частоти. З такими задачами часто стикаються при імітаційному моделюванні.

Нехай моделюються появи випадкової події  $A$ , імовірність якої дорівнює  $p$ .

Візьмемо  $\delta_i = 1$ , якщо при  $i$ -й спробі настала подія  $A$ , і  $\delta_i = 0$ , коли подія  $A$  не настала. Отже, загальна кількість спроб, в яких настала подія  $A$ , подається так:

$$m = \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad (5.3)$$

де  $n$  — загальне число спроб.

Оскільки розглядається схема незалежних випробувань, то відносна частота  $\frac{m}{n}$  появи події  $A$  є випадкова величина, яка при досить великому  $n$  має розподіл, близький до нормального.

Для нормально розподіленої випадкової величини виконується правило «трьох сигм»:

$$P(|X - m_X| < 3\sigma) = 0,997. \quad (5.4)$$

Тому для практичних розрахунків праву частину цієї рівності вважають такою, що дорівнює одиниці, а дослідні дані, які не задовольняють зазначену умову, відкидаються як такі, що не мають імовірнісного характеру.

Для випадку, що розглядається,  $X = \frac{m}{n}$ . Знайдемо математичне сподівання даної величини  $m_X$  та середнє квадратичне  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} m_X &= M\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{1}{n} M[m] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^n \delta_i\right] = p, \\ \sigma^2 &= D\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n \delta_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[\delta_i] = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n [M[\delta_i^2] - M[\delta_i]^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (p - p^2) = \frac{p(1-p)}{n}. \end{aligned}$$

Згідно з (5.4) маємо

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \quad (5.5)$$

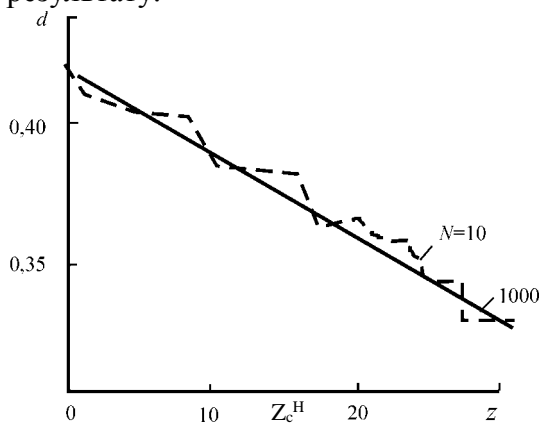
Позначивши символом  $\varepsilon$  помилку визначення  $p$ , тобто  $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$ , дістанемо  $\varepsilon = 3\sigma$ , або

$$\varepsilon = 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \quad (5.6)$$

Звідси

$$n = \frac{9p(1-p)}{\varepsilon^2}. \quad (5.7)$$

*Зауваження 1.* Формула (5.7) дає завищені результати. Наприклад, при  $p = 0,5$  і  $\varepsilon = 0,01$  необхідна кількість повторень експериментів для пошуку значення ймовірностей оцінюється нерівністю  $n \leq 22500$ . Автор експериментально визначив необхідне число спроб на імітаційній моделі виробничого процесу машинобудівного заводу. Залежність імовірності простою цеху від величини страхового запасу деталей при різних значеннях числа спроб (10, 1000) наведено на рис. 5.2. Очевидно, що однієї тисячі спроб достатньо для здобуття достовірного результату.



**Рис. 5.2.** Залежність імовірності  $d$  простоювання складального цеху від розміру страхового запасу  $Z_c^H$  при різних значеннях числа дублювань спроб  $N$

*Зауваження 2.* Проблема визначення тривалості імітаційного експерименту, котра в більшості випадків зводиться до визначення числа необхідних спроб (дублювань експерименту), в літературі інколи має назву «правило зупинки». У загальному випадку встановлення оптимального правила зупинки є досить складною задачею. Зокрема, для визначення числа необхідних спроб можна використовувати

інтервальну оцінку невідомої ймовірнісної характеристики розподілу.

Наведений приклад обчислення інтеграла методом Монте-Карло показав, що для розв'язання цієї задачі на ЕОМ потрібний механізм генерування рівномірно розподілених випадкових чисел, значення яких належать відрізку  $[0, 1]$ . Такі числа надзвичайно важливі для методу Монте-Карло. Вони дають змогу імітувати на машині ситуації зі складною стохастичною природою. Опишемо властивості цих чисел.

Нагадаємо, що випадкова величина  $X$  має рівномірний розподіл на відрізку  $[a, b]$ , коли її щільність розподілу ймовірностей має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини

$$m_x = \frac{a+b}{2},$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Якщо випадкова величина розподілена на відрізку  $[0, 1]$ , то

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1; \end{cases} \quad (5.8)$$

$$m_x = 0,5;$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{12}.$$

Рівномірно розподілену на відрізку  $[0, 1]$  випадкову величину позначимо  $\xi$ . Для неї характерна унікальна (притаманна лише даному розподілу) властивість: *ймовірність того, що значення цієї випадкової величини потраплять на деякий інтервал з межами  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ , дорівнює довжині цього інтервалу:*

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} d\xi = \beta - \alpha. \quad (5.9)$$

Ця властивість часто використовується в методі Монте-Карло як необхідна і достатня умова того, що деяка випадкова величина має розподіл (5.8).

Принципова можливість генерувати послідовні реалізації випадкової величини  $\xi$  впливає з такого перетворення:

$$\xi = z_1 2^{-1} + z_2 2^{-2} + \dots + z_i 2^{-i} + \dots, \quad (5.10)$$

де  $z_i$  — реалізація випадкової величини  $Z$ , що набуває лише двох значень — 0 і 1 — з однаковою ймовірністю 0,5.

Можна показати, що отримувана з допомогою перетворення (5.10) випадкова величина  $\xi$  має властивість (5.9). Наприклад,

$$P\left(\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right) = P(z_1 = 0 \cap z_2 = 1) = P(z_1 = 0) \cdot P(z_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Випадкову величину  $Z$  можна реалізувати, наприклад, підкиданням монети, коли вважати, що при випаданні «герба» випадкова величина набуває значення 1, а в протилежному разі — значення 0.

Випадкова величина  $\xi$ , рівномірно розподілена на відрізьку  $[0, 1]$ , може мати нескінченну кількість реалізацій. Проте при машинному використанні методу Монте-Карло на ЕОМ можна утворити лише  $2^k$  випадкових чисел, що не збігаються одне з одним ( $k$  — кількість двійкових розрядів машинної пам'яті). Тому рівномірна випадкова послідовність чисел (скорочено РВП  $[0, 1]$ ), використана при машинних розрахунках, фактично є реалізацією дискретної випадкової величини, розподіл якої називається квазірівномірним (від лат. *quasi* — майже, ніби, неначе).

Від сукупності чисел  $0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$ , які можна подати з допомогою двійкових розрядів, легко перейти до можливих значень дискретної випадкової величини  $\xi$ , що має квазірівномірний розподіл на інтервалі  $[0, 1]$ :

$$x_i = \frac{i}{2^k - 1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1).$$

В останньому виразі знаменник має вигляд  $2^k - 1$ , а не  $2^k$  для того, щоб до сукупності  $2^k$  величин  $x_i$  можна було включати як 0, так і 1, а інтервали між ними на числовій осі було однакові.



Крім того, математичне сподівання величини  $x_i$  дорівнює 0,5, а при діленні на  $2^k$  оцінка математичного сподівання була б зсуненою  $\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right)$ .

Імовірності, що відповідають можливим значенням  $x_i$ , мають вигляд

$$p = \frac{1}{2^k}.$$

Визначимо математичне сподівання і дисперсію дискретної квазірівномірної випадкової величини  $\xi$  :

$$\begin{aligned} m_\xi &= \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{i}{2^k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{(2^k-1)2^k} \sum_{i=0}^{2^k-1} i = \frac{1}{2}; \\ \sigma_\xi^2 &= \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{1}{2^k} \left(\frac{i}{2^k-1} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{2^k-1} \left(\frac{i^2}{(2^k-1)^2} - \frac{i}{2^k-1} + \frac{1}{4}\right) = \\ &= \frac{2 \cdot 2^k - 1}{6(2^k-1)} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{2^k+1}{2^k-1}. \end{aligned}$$

У перетвореннях було використано відомі формули:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2}; \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Отже, математичне сподівання квазірівномірної випадкової величини збігається з математичним сподіванням РСП  $[0, 1]$ , а дисперсія відрізняється лише множником  $\frac{2^k+1}{2^k-1}$ , який для великих  $k$  дуже близький до 1. Наприклад, для  $k = 10$   $\frac{2^{10}+1}{2^{10}-1} = 1,002$ . Тому для  $k > 10$  відмінність між дисперсіями рівномірної і квазірівномірної випадкових величин стає неістотною, а це дає підставу в імітаційному моделюванні використовувати програмно створені випадкові числа.