

Глава 7. Механічні коливання

7.1. Рух тіла під дією сили пружності

На змашений горизонтальний стержень надінемо кулю, що може ковзати вздовж нього, і циліндричну пружину, один кінець якої закріпимо на стержні, а другий – на кулі (рис. 7.1).



Рис. 7.1

На початку спостереження пружина не деформована і куля перебуває у спокої. Відведемо кулю у нове положення й відпустимо. Здійснивши декілька коливань зі спадаючою амплітудою, куля нарешті зупиниться у положенні рівноваги.

7.1.1. Аналіз процесу (явища)

При малому зміщенні кулі від положення рівноваги пружина деформується і в ній виникає сила пружності $F_{пр}$, яка за законом Гука пропорційна величині деформації Δl і напрямлена до положення рівноваги (тобто проти деформації):

$$F_{пр} = -k\Delta l,$$

де k – жорсткість пружини.

Сила пружності діє на кулю й на пружину і надає прискорення обом цим тілам. Розгляд загального випадку коливань тіла (кулі) масою m_1 під дією пружини масою m_2 являє собою зовсім непросту задачу. Вдамося до ідеалізації і прийнемо деякі спрощуючі припущення.

Припущення 1. Пружина є однорідною, тобто фізичні властивості її однакові вздовж усієї довжини. Це дозволяє вважати жорсткість k пружини величиною сталою.

Припущення 2. Будемо вважати пружину невагомою. Ця вимога задовольняється, якщо маса пружини набагато менша за масу вантажу ($m_{пружини} \ll m_{вантаж}$), тобто всю масу системи будемо вважати зосередженою в кулі.

Припущення 3. Оскільки куля – тверде тіло, то всі її точки рухатимуться однаково і описуватимуть однакові за формою траєкторії, тому рух всієї кулі опишемо, як рух однієї точки – її центра мас.

Для рухів тіл у в'язких середовищах сила опору залежить від

швидкості руху тіла. За таких умов її називають *силою в'язкого тертя*. В нашому прикладі вона обумовлюється ковзанням кульки вздовж *змащеного* стержня. З експериментальних досліджень відомо, що при малих швидкостях руху сила опору пропорційна швидкості, а при великих – квадратів швидкості. Вважаючи швидкість тіла невеликою, прийнемо чергове

Припущення 4. Сила опору середовища пропорційна швидкості тіла:

$$F_{op} = -rv,$$

де r – стала, що зветься *коефіцієнтом опору* і залежить від фізичних властивостей середовища та форми й розмірів рухомого тіла.

7.1.2. Постановка задачі. Концептуальна (змістова) модель

Сформулюємо умову з урахуванням прийнятих припущень.

Нехай тіло масою m , що з'єднане з невагомою пружиною, здійснює малі коливання вздовж горизонтального стержня. Враховуючи опір середовища, встановити характер руху тіла, тобто відшукати відповіді на питання про

- 1) положення (координату), швидкість та прискорення тіла в будь-який момент часу;
- 2) період його коливань;
- 3) характер залежності від часу амплітуди коливань.

Для фізичного опису такого руху цілком достатньо однієї координатної вісі, яку ми спрямуємо в бік початкового відхилення тіла (рис. 7.2, а). На рис. 7.2, б зображено стан тіла у деякий довільний момент часу.

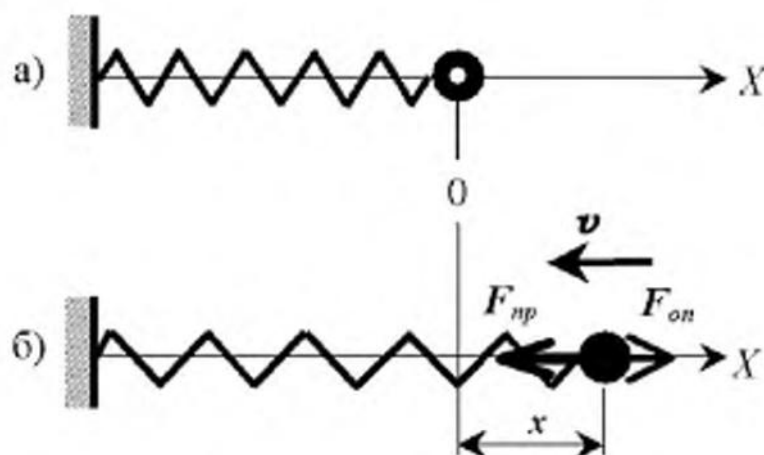


Рис. 7.2

7.1.3. Математична модель

При переході до проєкції сила пружності у довільний момент визначатиметься виразом

$$F_{\text{пр}x} = -kx,$$

де x – координата тіла.

Для сили опору маємо

$$F_{\text{оп}x} = -rv_x.$$

Рівнодійна сил пружності й опору надає тілу прискорення

$$a_x = \frac{F_{\text{пр}x} + F_{\text{оп}x}}{m}$$

або

$$a_x = -\frac{kx + rv_x}{m}.$$

При русі тіла з плином часу відбувається зміна його координати x і проєкції швидкості v_x . Це приводить до відповідної зміни прискорення, що видно з останнього виразу.

Рівняння (1) є математичною моделлю коливального руху тіла на пружині з урахуванням сили в'язкого опору середовища.

7.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю

Таким чином, ми маємо дослідити рух із прискоренням, яке змінюється в часі. Для розв'язання цієї задачі скористаємося чисельним методом і виконаємо розв'язування шляхом покрокових обчислень. Головна ідея методу тут полягає у заміні складного неперервного руху послідовністю окремих короткочасних рівноприскорених рухів.

Розіб'ємо весь час руху тіла на достатньо малі проміжки Δt такі, щоб на протязі кожного з них величина діючих на тіло сил могла б вважатися сталою, тобто зміна прискорення була б настільки малою, аби ми могли вважати рух рівноприскореним. Будемо вважати, що зміна прискорення відбуватиметься стрибкоподібно на початку кожного наступного проміжку Δt . Тоді, зокрема, $a_{0x} = a_{1x}$, де a_{1x} – проєкція вектора прискорення від моменту часу $t = 0$ і аж до моменту $t = 0 + \Delta t$.

1. Спочатку обчислимо прискорення a_{0x} у початковий момент:

$$a_{0x} = a_{1x} = -\frac{kx_0 + rv_{0x}}{m}.$$

2. Далі обчислимо швидкість v_{1x} наприкінці першого проміжку часу Δt . Для рівноприскореного руху

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{1x} \Delta t,$$

де v_{0x} – проекція вектора швидкості у початковий момент $t = 0$.

Зауваження 1. При обчисленні швидкості наприкінці будь-якого i -го інтервалу часу Δt ми й надалі будемо використовувати значення прискорення на початку цього інтервалу:

$$v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t,$$

де $v_{(i-1)x}$ – кінцева швидкість тіла на попередньому інтервалі Δt , яка одночасно є початковою швидкістю на даному інтервалі часу.

3. Нове положення тіла (нову координату) наприкінці першого проміжку Δt знайдемо за рівнянням

$$x_1 = x_0 + v_{1x} \Delta t.$$

Зауваження 2. При обчисленні координати наприкінці будь-якого інтервалу часу Δt будемо використовувати значення координати із попереднього інтервалу, а швидкості – із поточного, оскільки її значення на цей момент буде вже обчислене:

$$x_i = x_{i-1} + v_{ix} \Delta t.$$

Записаний вираз для обчислення нової координати має відверто наближений характер, адже він справджується лише для рівномірного руху. Ось чому цей вираз тим точніший, чим менший інтервал Δt . Саме тому цей інтервал має бути настільки малим, щоб за цей час швидкість не змінювалася б помітним чином. Проте виявляється, що цей вираз може бути *достатньо точним*, навіть коли інтервал Δt і не зникаюче малий.

Маючи нові значення швидкості v_i та координати x_i , на наступному кроці знов можна визначити прискорення:

$$a_{(i+1)x} = -\frac{kx_i + rv_{ix}}{m}.$$

Отже пп. 1–3 будемо повторювати n разів, де $n = t_{\text{mod}}/\Delta t$. Тут t_{mod} – час моделювання, який ми визначимо самі, обираючи тривалість проміжку часу Δt і відповідну кількість рядків таблиці. Стосовно вибору часу моделювання зазначимо, що найчастіше це такий час, через який стає зрозумілою тенденція процесу. Наприклад, припиняються помітні зміни досліджуваних величин (перехід до рівноважного або стаціонарного стану); повторюється характер змін досліджуваних величин (процес є періодичним або стає таким); процес вимушено переривається внаслідок досягнення граничних умов (зокрема, падіння тіла на Землю) і т.п. Значення проміжку Δt має забезпечувати необхідну точність обчислень і стійкість обчислювального алгоритму. Таким чином, послідовність розрахунків має здійснюватися за такою циклічною схемою:



7.1.5. Остаточний алгоритм

1. Підготувати таблицю для введення даних та виведення результатів, перший її рядок заповнити іменами змінних.

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2					$x_0, \text{ м} =$	
3					$v_{0x}, \text{ м/с} =$	
4					$\Delta t, \text{ с} =$	
5					$m, \text{ кг} =$	
6					$k, \text{ Н/м} =$	
7					$r, \text{ кг/с} =$	
...		

Рис. 7.3

2. Увести вхідні дані й початкові умови: заповнити стовпець E іменами змінних, а стовпець F – їх числовими значеннями (рис. 7.3).

3. Заповнити табличними формулами другий рядок (для початкового моменту часу $t = 0$), використовуючи посилання на відповідні комірки стовпця F:

$$t = 0; \quad a_x = -\frac{k}{m}x_0 - \frac{rv_{0x}}{m}; \quad v_x = v_0; \quad x = x_0.$$

Комірки таблиці матимуть такий зміст:

комірки	формули / числа
A2	0
B2	$=-(\text{\$F\$6}*\text{\$F\$2}+\text{\$F\$7}*\text{\$F\$3})/\text{\$F\$5}$
C2	$=\text{\$F\$3}$
D2	$=\text{\$F\$2}$

5. Заповнити третій рядок (для кінця першого проміжку Δt , тобто для моменту часу $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, де $i = 1$):

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t;$$

$$a_{ix} = -\frac{k}{m}x_{i-1} - \frac{rv_{(i-1)x}}{m};$$

$$v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix}\Delta t;$$

$$x_i = x_{i-1} + v_{ix}\Delta t.$$

Відповідно в таблиці

комірки	формули
A3	$=\text{A2}+\text{\$F\$4}$
B3	$=-(\text{\$F\$6}*\text{D2}+\text{\$F\$7}*\text{C2})/\text{\$F\$5}$
C3	$=\text{C2}+\text{B3}*\text{\$F\$4}$
D3	$=\text{D2}+\text{C3}*\text{\$F\$4}$

Для заповнення наступних рядків формули п. 4 повторювати n разів шляхом копіювання третього рядка у n наступних, де $n = t_{\text{мод}}/\Delta t$.

7.2. Тестування моделі: нехтуємо опором

Як було зазначено вище, виконаємо тестування моделі для випадку дії на тіло однієї лише сили пружності. З метою виключення з розгляду сили опору, покладемо $r = 0$ (комірка F7). В такому разі

$$a_x = -\frac{kx}{m} = -\frac{k}{m}x.$$

Цей вираз є математичною моделлю руху тіла під дією сили пружності.

Задамо початкові умови для руху тіла масою $m = 100$ г, прикріпленого до пружини жорсткістю $k = 40$ Н/м, і у початковий момент відведеного від положення рівноваги на відстань $x_0 = 1$ см:

$$t_0 = 0; \quad x_0 = 0,01 \text{ м}; \quad v_0 = 0; \quad k = 40 \text{ Н/м}; \quad m = 0,1 \text{ кг}.$$

Тривалість проміжку часу Δt візьмемо рівною 0,01 с, а час моделювання – 1 с. Тоді кількість рядків таблиці буде $n + 2 = 102$ (два рядки – перший і другий – на цей момент вже заповнені).

Фрагмент таблиці з результатами обчислень і відповідний графік залежності координати від часу $x = x(t)$ подані на рис. 7.4.

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,010	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,040	0,010	$v_{0\text{в}}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,840	-0,078	0,009	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03	-3,526	-0,114	0,008	$m, \text{ кг} = 0,10$	
6	0,04	-3,072	-0,144	0,006	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05	-2,494	-0,169	0,005	$r, \text{ кг/с} = 0$	
...		

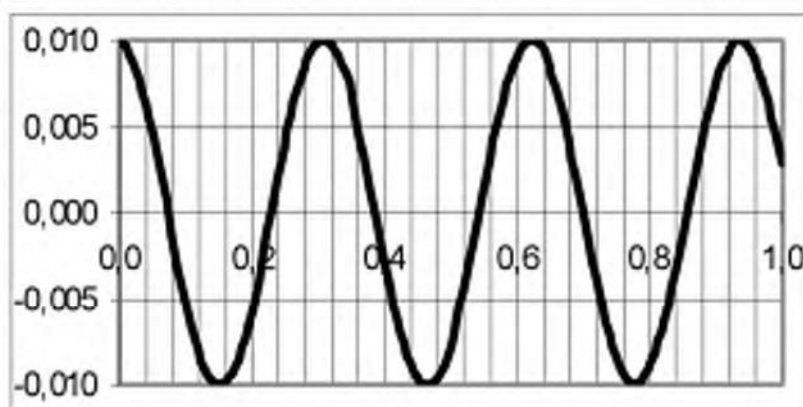


Рис. 7.4

Аналізуючи за таблицею результати моделювання, можна простежити картину руху тіла: спочатку воно знаходиться у спокої, далі поступово набуває швидкості в бік положення рівноваги ($v_x < 0$), а це приводить до зменшення його відстані від положення рівноваги. При цьому, хоч прискорення і стає меншим, швидкість за модулем продовжує зростати.

У міру наближення до положення рівноваги ($x = 0$) прискорення стає все меншим, швидкість зростає все повільніше аж до точки $x = 0$. В цю точку тіло приходить приблизно через 0,08 с після початку руху (встановіть ціну дрібної поділки на горизонтальній вісі t). В цей момент пружина не деформована і на тіло не діє сила пружності. Маючи деяку швидкість, тіло за інерцією продовжує рухатись далі, але тепер усе йде навпаки: координата тіла стає від'ємною, а проекція прискорення – додатною. Швидкість поступово зменшується до нуля, після чого процес повторюється у зворотному порядку.

Покращення точності обчислень

Зі шкільних курсів математики й фізики відомо, що точним аналітичним розв'язком задачі про рух тіла під дією сили пружності при заданих початкових умовах ($x = x_0$ при $t = 0$) є функція

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t.$$

Завдання. З метою порівняння результатів моделювання (стовпець D) із точними значеннями згідно наведеної формули створіть у таблиці два додаткових стовпці, у яких будуть обчислюватися значення x (стовпець E) за щойно наведеною формулою і різниця $x - x_{\text{точн}}$ (стовпець F), як це показано на рис. 7.5. Виявляється, що в межах точності наших розрахунків (чотири десяткові розряди) результат не є задовільним: розбіжність сягає 12%.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	a_x	v_x	x	$x_{\text{точн}}$	$x - x_{\text{точн}}$	Дано:	
2	0,0	-4,000	0,000	0,010	0,0100	0,0E+00	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,040	0,0096	0,0098	-2,0E-04	$v_{\text{об}}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,840	-0,078	0,0088	0,0092	-3,9E-04	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03	-3,526	-0,114	0,0077	0,0083	-5,7E-04	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	0,04	-3,072	-0,144	0,0062	0,0070	-7,3E-04	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05	-2,494	-0,169	0,0045	0,0054	-8,6E-04	$r, \text{ кг/с} = 0$	
...		

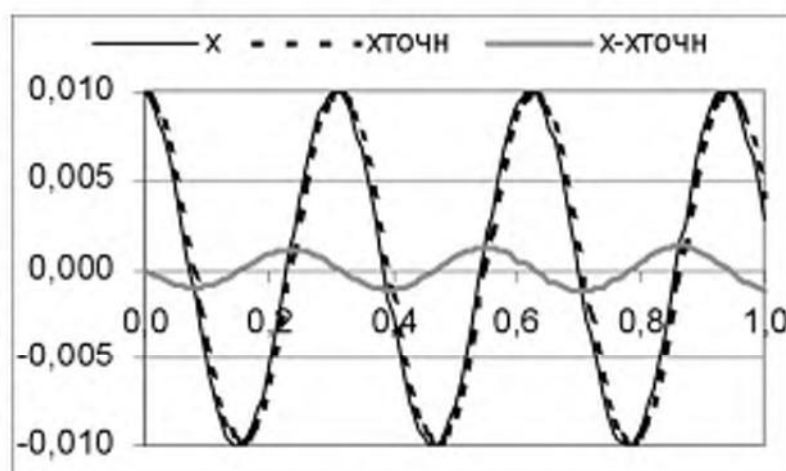


Рис. 7.5

Зрозуміло, що точність можна поліпшити за рахунок зменшення тривалості проміжку часу Δt , але це призведе до збільшення обсягу необхідної оперативної пам'яті комп'ютера і часу виконання обчислень. Відомий інший шлях підвищення точності. Він полягає в покращенні обчислювального алгоритму, що ми і зробимо.

Як було показано при попередньому обговоренні алгоритму, нова координата тіла дорівнює попередній плюс добуток проекції швидкості v_x на інтервал часу Δt . Але що це за швидкість? У який момент? Адже на початку інтервалу швидкість одна, а наприкінці вона зовсім інша. Якщо відома швидкість у деякий момент і відомо, що вона безупинно змінюється, то хіба можна сподіватися одержати задовільний результат, припускаючи, що тіло рухається весь час Δt із однаковою швидкістю, такою, яку воно мало на початку інтервалу?

Доцільнішим буде використати деяку проміжну швидкість між початком та кінцем інтервалу.

Найпростіший прийом підвищення точності обчислень полягає в тому, щоб брати швидкість у середині інтервалу. Для рівноприскореного руху, яким за нашою домовленістю є рух тіла протягом інтервалу Δt , це середня швидкість v_{cix} на цьому інтервалі. Таким чином, необхідно дещо змінити наші міркування: нова координата x_i (наприкінці i -го інтервалу) дорівнює попередній координаті x_{i-1} (наприкінці попереднього інтервалу) плюс добуток швидкості v_{cix} у середині інтервалу на Δt . Ця швидкість, у свою чергу, дорівнює швидкості $v_{c(i-1)x}$ у середині попереднього інтервалу (тобто на проміжок Δt раніше) плюс прискорення на початку інтервалу, помножене на Δt .

Іншими словами, нові рівняння матимуть вигляд:

$$x_i = x_{i-1} + v_{cix} \Delta t, \quad v_{cix} = v_{c(i-1)x} + a_{ix} \Delta t.$$

Тепер, однак, щоб почати обчислення, необхідно скористатися додатковим рівнянням $v_{1x} = v_{0x} + a_{0x} \Delta t/2$.

Додаючи далі до половини першого інтервалу по Δt , ми кожного разу потраплятимемо в середину наступного інтервалу.

У відповідності до наведених міркувань внесемо зміни до п. 4 алгоритму:

$$v_{ix} = \begin{cases} v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t/2 & \text{при } i = 1 \\ v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t & \text{при } i > 1 \end{cases}$$

тобто змінимо вміст однієї лише комірки С3, не змінюючи всі інші.

Результат не примусить на себе чекати (рис. 5.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	a_x	v_x	x	$x_{\text{точн}}$	$x-x_{\text{точн}}$	Дано:	
2	0,0	-4,000	0,000	0,0100	0,0100	0,0E+00	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,020	0,0098	0,0098	-6,7E-07	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,920	-0,059	0,0092	0,0092	-2,6E-06	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03	-3,683	-0,096	0,0082	0,0083	-5,7E-06	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	0,04	-3,299	-0,129	0,0070	0,0070	-9,6E-06	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05	-2,783	-0,157	0,0054	0,0054	-1,4E-05	$r, \text{ кг/с} = 0$	
...		

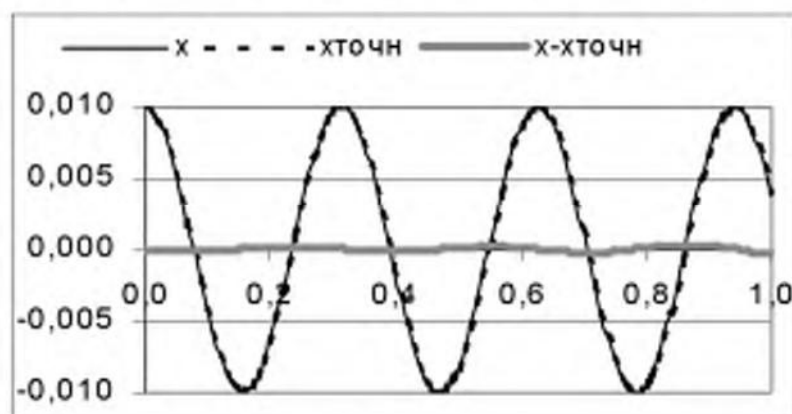


Рис. 7.6

Так що тепер ми маємо наочне уявлення про ефективність чисельного аналізу: такий простий розрахунок за поліпшеним алгоритмом дає такий гарний результат. Адже тепер розбіжність не перебільшує 2,5%.

Вправа. З підручника фізики відомо, що частота власних коливань пружинного маятника визначається за формулою

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Оскільки джерелом і критерієм фізичного знання є експеримент, пропонуємо наступне:

1. Сплануйте і виконайте натурне лабораторне дослідження для перевірки останньої формули. Особливу увагу приділіть методу визначення жорсткості k пружини та способам її *практичної зміни* (збільшення або зменшення), а також питанню про порівняння жорсткостей різних пружин.

2. Наша модель не передбачає наведеної формули. Перевірте, як вона відреагує на зменшення k у чотири рази; на збільшення m у чотири рази. В обох випадках час моделювання брати однаковим.

3. Обчисліть за наведеною вище формулою частоту коливань тягара на пружині, підставляючи у формулу параметри даної моделі. Чи узгоджуються результати моделювання з теоретичними розрахунками? Зробіть висновок щодо адекватності моделі.

4. Виведіть на екран на одному рисунку графіки залежностей

$$x = x(t), \quad v = v(t) \quad a = a(t).$$

Це завдання має на меті проілюструвати зміст уявлень про зсуви фаз коливань координати, швидкості та прискорення або їхніх аналогів у електродинаміці (заряду, сили струму та швидкості зміни сили струму) при розгляді електромагнітних коливань.

При виконанні завдання може виникнути проблема одночасного виведення графіків несумірних (непорівнянних) величин. Так у нашій конкретній моделі $|a_{max}| \gg |x_{max}|$. Тому в середовищі електронних таблиць ми радимо виводити графік $x = x(t)$ з використанням додаткової вісі та добором для неї придатного масштабу.

Висновки

1. Точність комп'ютерних обчислень можна помітно поліпшити шляхом удосконалення обчислювального алгоритму.

2. Комп'ютерне моделювання є одним з ефективних методів *теоретичних* досліджень, і тому при вирішенні питання про адекватність моделі особливо важливо, щоб результати обчислювального експерименту хоча б задовільно узгоджувалися з результатами *натурного* експерименту.

3. Тестування моделі довело її задовільну адекватність відносно дослідних даних і результатів теоретичного аналізу.

7.3. Рух тіла на пружині за наявності в'язкого опору

Продовжимо експеримент, поклавши числове значення r (коефіцієнта опору) рівним не 0, а, наприклад, 0,4 (рис. 7.7).

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,000	-4,000	0,000	0,010	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,010	-4,000	-0,020	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	-3,840	-0,058	0,009	-0,003	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	-3,453	-0,093	0,008	-0,005	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	-2,943	-0,122	0,007	-0,006	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	-2,336	-0,146	0,006	-0,007	$r, \text{ кг/с} = 0,1$	
...		

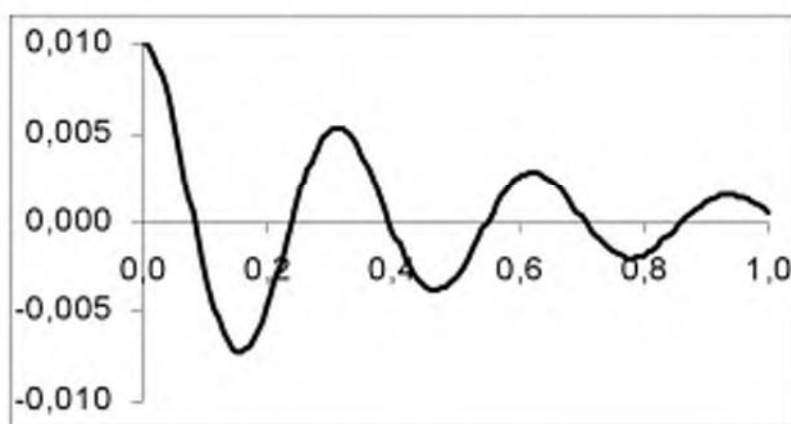


Рис. 7.7

Запитання

1. У який спосіб, на вашу думку, відреагує модель, якщо коефіцієнтові опору r надати від'ємного значення? Перевірте для $r = -0,1$.
2. Який фізичний зміст може мати отриманий результат?
3. Якого змісту слід було б тепер надати виразові $F_{op} = -rv$?

7.4. Рух тіла на пружині за наявності сили сухого тертя

При вивченні в шкільному курсі фізики сили тертя основну увагу приділяють розгляду сили сухого тертя, а при вивченні механічних коливань з урахуванням опору зазвичай розглядають силу в'язкого тертя. Справа в тому, що і фізичний аналіз коливань з урахуванням сухого тертя, і аналітичний розв'язок відповідного рівняння руху тут помітно складніші, ніж у випадку в'язкого тертя. Проте можливість застосування комп'ютера для чисельного розв'язування рівняння руху суттєво спрощує проблему.

Як відомо, модуль сили сухого тертя при горизонтальному русі визначається виразом $F_{тр} = \mu mg$ і в певних межах не залежить від швидкості. Напрямок цієї сили завжди протилежний напрямку вектора швидкості. При коливаннях тіла проекція вектора швидкості

періодично змінює свій знак, тому й проекція сили тертя також має змінювати знак, але у *протилежній фазі*.

У попередній версії моделі ця властивість сили опору не створювала проблем, тому що проекція швидкості входила до виразу для сили опору безпосередньо, але тепер така проблема є. Розв'язати її можна, дописавши в останній вираз множником функцію $\text{sgn}(v_x)$, яка передає у вираз знак свого аргументу v_x :

$$F_{\text{тр}} = -\mu mg \cdot \text{sgn}(v_x).$$

А саме:

$$\text{sgn}(v_x) = \begin{cases} 1 & \text{при } v_x > 0 \\ 0 & \text{при } v_x = 0 \\ -1 & \text{при } v_x < 0 \end{cases}.$$

Завдання. Доведіть, що таку саму властивість має вираз $\frac{v_x}{|v_x|}$.

Перехід до нової версії моделі зводиться до зміни у виразі a_x :

$$a_x = -\frac{kx + \mu g \cdot \text{sgn}(v_x)}{m}.$$

Останнє рівняння є математичною моделлю коливального руху тіла на пружині з урахуванням сили сухого тертя.

У відповідності до цього внесемо зміни й до комірок таблиці:

комірки	формули / числа
B2	$=-(\$F\$6*\$F\$2+\$F\$7*9,81*3\text{НАК}(\$F\$3))/\$F\5
B3	$=-(\$F\$6*D2+\$F\$7*9,81*3\text{НАК}(C2))/\$F\$5$

Результати моделювання подані на рис. 7.8.

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,0	-4,00	0,00	0,010	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,00	-0,04	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,64	-0,08	0,009	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03	-3,34	-0,11	0,008	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	0,04	-2,90	-0,14	0,006	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05	-2,34	-0,16	0,005	$\mu = 0,002$	
...		

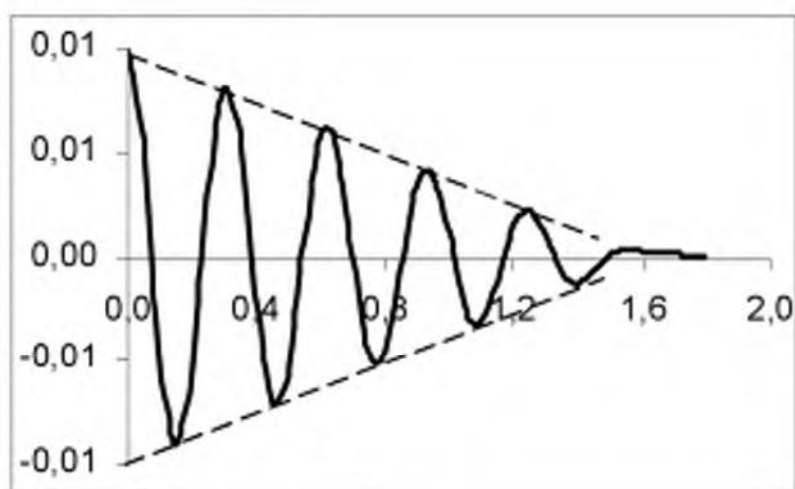


Рис. 7.8

Вправи

1. Підберіть таке мінімальне значення μ , при якому коливання припиняються за 2,5 с від початку. Скільки повних коливань здійснює кулька за цей час?

2. Замість функції $\text{sgn}(v_x)$ скористайтесь виразом $\frac{v_x}{|v_x|}$. Порівняйте результати.

3. Добудовані штрихові прямі на рис. 7.8 наводять на думку, що послідовність значень амплітуд є спадаючою лінійною функцією часу. У який спосіб можна в цьому переконатись, не будуючи прямі лінії, а користуючись таблицею?

В разі утруднення пропонуємо в окремому стовпці вивести різниці значень *двох послідовних амплітуд* і переконатись, що всі такі різниці однакові. Звідси випливає, що послідовність значень амплітуд утворює спадаючу арифметичну прогресію. Отже, залежність амплітуди від часу є спадаючою лінійною функцією.

4. Користуючись моделлю, розв'яжіть задачу.

Задача. Брусок масою 500 г, сполучений із закріпленою пружиною жорсткістю 2,45 Н/см, може ковзати на горизонтальній площині. Коефіцієнт сухого тертя становить 0,055.

Скільки коливань здійснить брусок до повної зупинки, якщо у початковий момент пружина розтягнута на 3 см?

На рис. 7.9 подано чисельне розв'язання задачі (з відповідним графіком), одержане на основі побудованої моделі.

Таким чином, обчислювальний експеримент із математичною моделлю усуває багато ускладнень, що виникають при аналітичному

розв'язуванні задач. Це робить їх цілком доступними для школярів.

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,00	-14,70	0,00	0,030	$x_0, \text{м} = 0,03$	
3	0,01	-14,70	-0,15	0,029	$v_{0x}, \text{м/с} = 0$	
4	0,02	-12,90	-0,28	0,026	$\Delta t, \text{с} = 0,01$	
5	0,03	-11,55	-0,39	0,022	$m, \text{кг} = 0,5$	
6	0,04	-9,63	-0,49	0,017	$k, \text{Н/м} = 245$	
7	0,05	-7,24	-0,56	0,011	$\mu = 0,055$	
...		

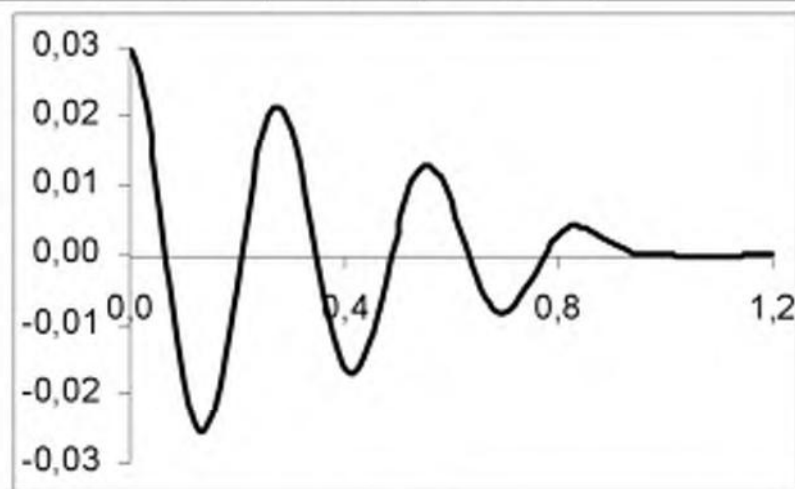


Рис. 7.9

На закінчення настійно радимо опрацювати наступний матеріал про дуже ефективний метод аналізу коливальних процесів – *метод фазових діаграм*.

7.5. Фазова площина

7.5.1. Теоретичні відомості

Вивчаючи механічні рухи тіл, ми можемо цікавитися тим, яким буде їхнє положення в деякий момент часу (головна задача механіки), або тим, *коли* тіло прийде у деяке певне положення (саме так ставиться задача у сферичній астрономії при прогнозуванні моментів настання затемнень Сонця або Місяця, схожа задача розв'язується при проектуванні виробничого конвеєра).

Однак можна зацікавитися й іншим: загальним характером руху – тим, зокрема, є він періодичним чи ні. Саме такий підхід є характерним для *теорії коливань*. Наприклад, питання про те, чи може під дією поштовхів сильно розгойдатися міст, вирішується не тим, наскільки вони сильні, а тим, яким є ритм цих поштовхів і скільки часу вони тривають. Інакше кажучи, цікавим є *питання про харак-*

тер руху, взятого в цілому. Це означає, що ми бажаємо мати таке графічне зображення (діаграму) руху коливальної фізичної системи, яке охоплює усі значення часу t . Бажано, крім того, відобразити на одній діаграмі все розмаїття рухів, що їх може здійснювати рухоме тіло.

Найпростішим прикладом механічної коливальної системи є вантаж на пружині. В такій системі рух відбувається за законом

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (*)$$

Якщо показати в координатах x, t всі можливі графіки цієї функції з урахуванням різних початкових умов (x_0 і φ_0), то, як можна бачити з рис. 7.10, бажаної мети ми не досягаємо.

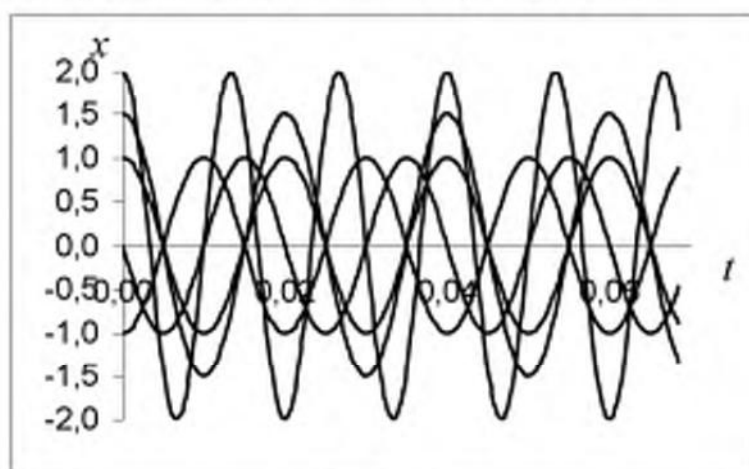


Рис. 7.10

Вийшло щось не зовсім розбірливе: графіки перетинаються між собою і, до того ж, на такій діаграмі можна показати лише частину кожного графіка внаслідок обмеження вісі t розмірами рисунку. До того ж збільшення значень часу t (продовження вісі абсцис) ніякої нової інформації стосовно процесу не дасть.

Проте ми отримуємо те, чого бажаємо, якщо візьмемо декартову систему координат і будемо відкладати на вісі абсцис зміщення x , а на вісі ординат – його похідну, тобто швидкість руху v (ще краще, пропорційну їй величину v/ω). Нагадаємо, що ω має назву *циклічна частота* і вона пов'язана зі звичайною частотою ν співвідношенням

$$\omega = 2\pi\nu. \quad \text{Ці дві величини } x \text{ і } \frac{v}{\omega} \text{ повністю характеризують стан тіла,}$$

що здійснює коливання: будь-яка точка на площині змінних $x, \frac{v}{\omega}$ зображує стан системи. Таку точку називають *зображуючою точкою*. Оскільки характеристику стану коливальної системи називають *фазою*, площину $x, v/\omega$ називають *фазовою площиною*. Коли вантаж

на пружині здійснює коливання, його швидкість змінюється, зображуюча точка переміщується на фазовій площині. Диференціюючи вираз (*), знаходимо: $\frac{v}{\omega} = -x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Розглянемо тепер систему рівнянь

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{v}{\omega} = -x_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Вони є параметричними рівняннями лінії (траєкторії), вздовж якої переміщується зображуюча точка на фазовій площині, параметром є час t . Параметр легко виключити, підносячи кожне з рівнянь до квадрату і далі додаючи їх. Це дає: $x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = x_0^2$, тобто рівняння кола з радіусом, рівним амплітуді x_0 (рис. 7.11а).

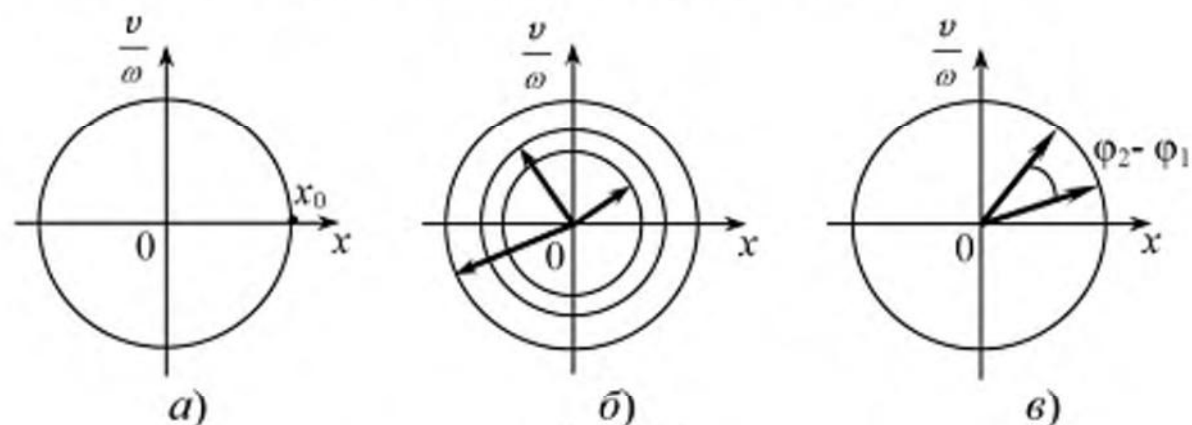


Рис 7.11

Коліванням з різними амплітудами відповідають концентричні кола з центром у початку координат (рис. 7.11б).

Коліванням з однаковими амплітудами, але з різними фазами відповідає рух зображуваних точок уздовж одного кола, але при цьому в однакові моменти часу зображуючі точки займають різні положення. Різниця фаз дорівнює куту між відповідними радіусами-векторами зображуваних точок у однакові моменти часу (рис. 7.11в).

Розгляд питання про фазовий простір (у даному випадку двовимірний) відповідає головному принципу математичного моделювання – *принципу множинності математичних моделей*: оскільки при використанні будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі сторони реальності, то для більш повного її вивчення необхідною виявляється сукупність моделей, які дозволяють з різних боків і з

різним ступенем деталізації відобразити об'єкт дослідження.

Так при вивченні коливальних процесів широко використовуються відомі вам часові діаграми, що відображують залежність коливної величини від часу, в електротехніці поширеними є так звані векторні діаграми, в загальній теорії коливань до щойно згаданих підходів додається метод фазових діаграм. Всі ці підходи реалізують різні моделі певних об'єктів (процесів, явищ).

Слід розуміти, що фазовий простір не має нічого спільного з реальним простором (у випадку плоского руху – з координатною площиною XOY). Зокрема, траєкторія руху зображуючої точки – фазова траєкторія (фазовий портрет) – не є траєкторією руху тіла (матеріальної точки).

7.5.2. Дослідження коливальних процесів методом фазових діаграм

Розглянемо застосування методу фазових діаграм для вивчення різних прикладів механічних коливань.

1. Незатухаючі коливання (у відповідності з рис. 7.4).

Спочатку створимо нову таблицю, скопіюємо в неї всі комірки таблиці з рис. 7.4.

Для побудови графіка залежності $v/\omega = f(x)$ – фазової траєкторії – слід врахувати, що при коливаннях вантажу на пружині $\omega = \sqrt{k/m}$. Тому після стовпця D таблиці вставимо допоміжний стовпець для значень v/ω . Саме ж значення ω помістимо в комірку G9, вміст якої становитиме таблична формула $= (G6/G5)^{0,5}$. Значення комірки E2 обчислимо за формулою $= C2/\$G\9 , і цю формулу скопіюємо у всі наступні комірки стовпця E. Нижче наведено остаточний вигляд нової таблиці (рис. 7.12).

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	a_x	v_x	x	v_x/ω	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,0100	0,000	$x_0, \text{ м} =$	0,01
3	0,01	-4,000	-0,020	0,0098	-0,001	$v_{0x}, \text{ м/с} =$	0
4	0,02	-3,920	-0,059	0,0092	-0,003	$\Delta t, \text{ с} =$	0,01
5	0,03	-3,683	-0,096	0,0082	-0,005	$m, \text{ кг} =$	0,1
6	0,04	-3,299	-0,129	0,0070	-0,006	$k, \text{ Н/м} =$	40
7	0,05	-2,783	-0,157	0,0054	-0,008	$r, \text{ кг/с} =$	0
8	$\omega, \text{ с}^{-1} =$	20
...		

Рис. 7.12

Виділивши стовпці D і E, будемо графік залежності $v/\omega = f(x)$, показаний на рис. 7.13а.

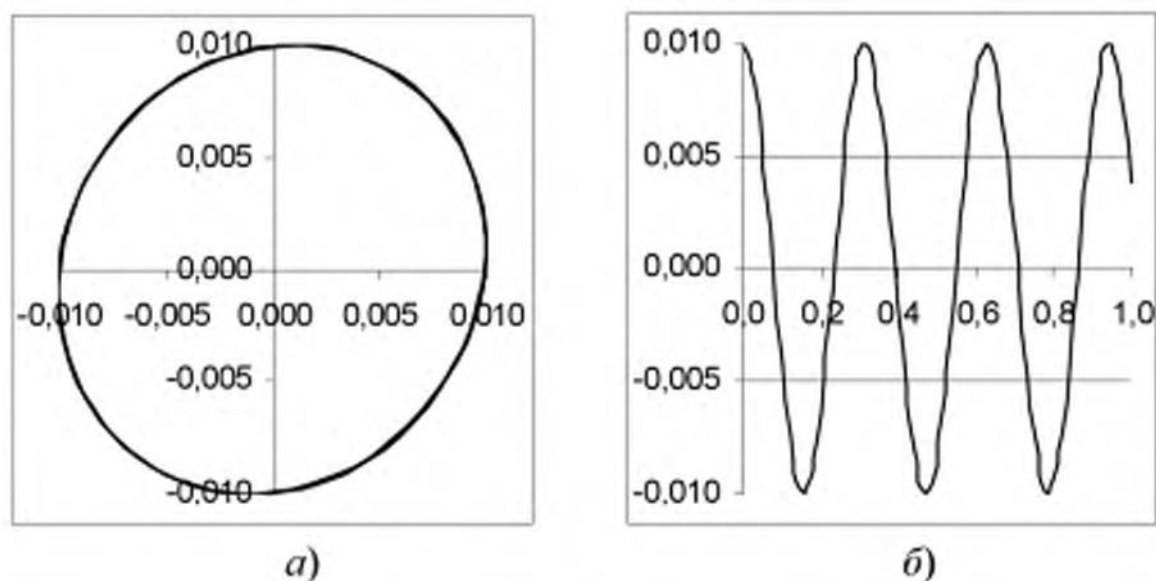


Рис. 7.13

- а) графік залежності $v/\omega = f(x)$ для незатухаючих коливань;
 б) для порівняння – відповідний графік залежності $x = f(t)$.

2. Коливання, що загасають при дії сили опору, пропорційної швидкості руху (відповідна таблиця була розглянута на рис. 7.7).

Знов слід виконати процедуру, описану в п. 1 стосовно створення нової таблиці і заповнення стовпця E. Прийmemo $r = 0,5$.

Результат поданий на рис. 7.14а.

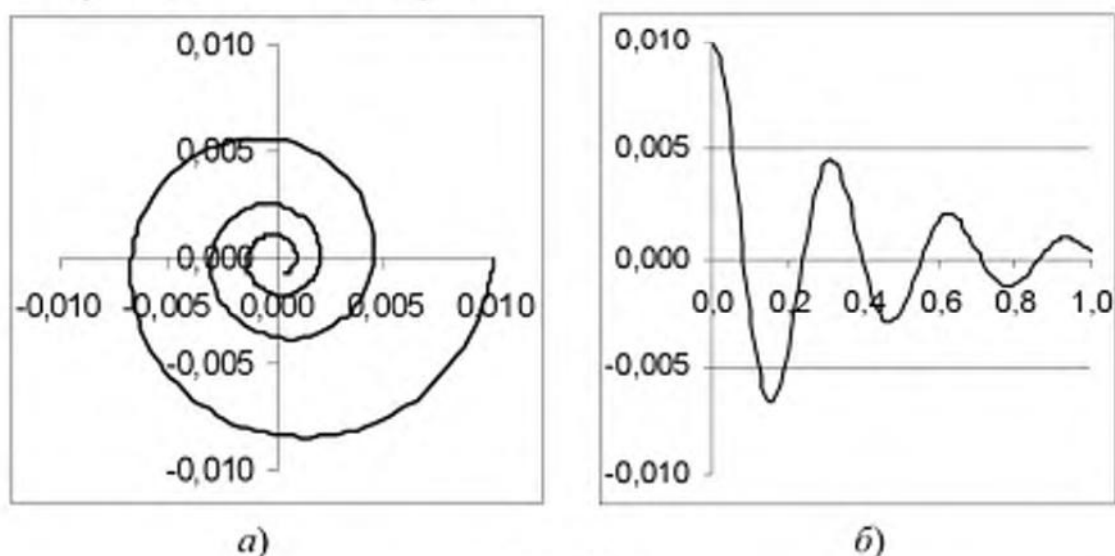


Рис. 7.14

- а) фазовий портрет коливань, що загасають при дії сили опору, пропорційної швидкості руху;
 б) для порівняння – відповідний графік залежності $x = f(t)$.

3. Коливання, що загасають при дії сили сухого (кулонівського) тертя. Основою для побудови діаграми тут буде таблиця на рис. 7.8, а результатом – рис 7.15а.

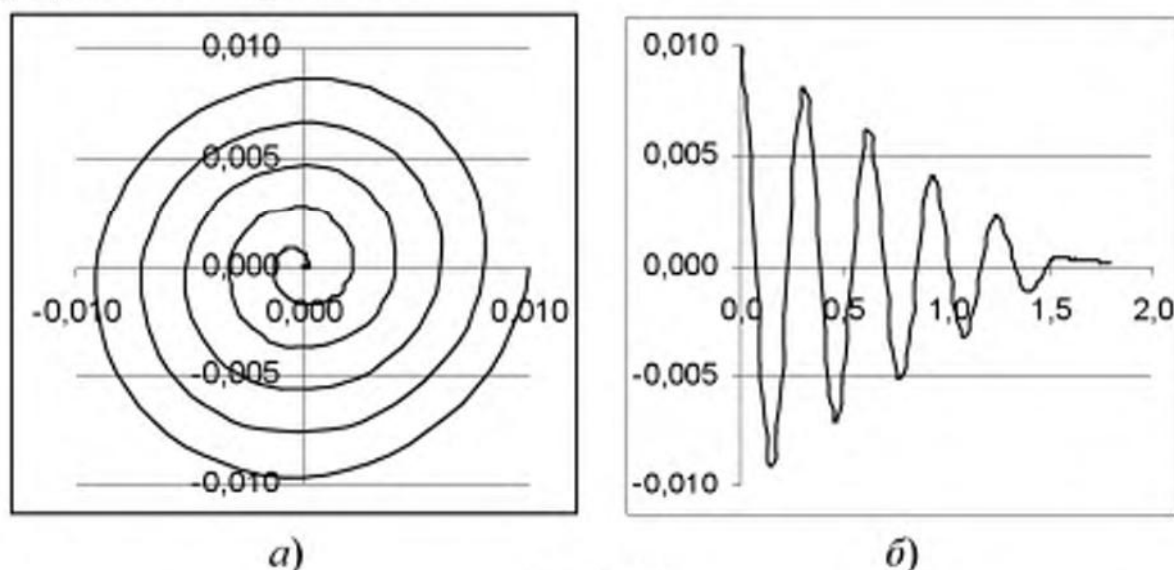


Рис. 7.15

- а) фазовий портрет коливань, що загасають при дії сухого тертя;
 б) відповідний графік залежності $x = f(t)$.

4. Порівняльний аналіз результатів за рис. 7.13 – 7.15.

4.1. Ознакою незатухаючих коливань на фазовій площині є замкнута траєкторія руху зображуючої точки (рис. 7.13).

4.2. Якщо коливання гальмуються внаслідок дії сили опору, пропорційної швидкості руху ($F_{op} = -rv$), то, як відомо, послідовність значень амплітуди утворює спадаючу геометричну прогресію (рис. 7.14б). Які точки перетинає фазова траєкторія (рис. 7.14а) після кожного повного коливання тіла?

Відповідь. Зображуюча точка починає переміщуватись на фазовій площині від вісі абсцис ($x = x_0, x > 0$). Наступний перетин фазової траєкторії з віссю абсцис в області $x > 0$ відповідає черговому значенню амплітуди, тобто завершенню чергового періоду.

З обох графіків (а і б) видно, що рухоме тіло за час спостереження здійснило чотири повних коливання.

4.3. При дії на коливне тіло сили сухого тертя ($F_{тр} = -\mu N$) відбувається загасання коливань, причому послідовність значень амплітуд утворює спадаючу арифметичну прогресію (рис. 7.15).

4.4. Яких змін зазнає цей рисунок при збільшенні часу спостереження за процесом від 1 с до 2 с?

5. Чим відрізняються фазові діаграми функцій

$$x = x_0 \cos \omega t \text{ і } x = x_0 \sin \omega t?$$

6. Поверніться до п. 5 Глави 5 “Хижак–жертва” нашого посібника і для опрацювання розглядуваних там питань скористайтесь відомостями про фазові діаграми.

Висновки

1. Завдяки своїй високій інформативності метод фазових діаграм є досить поширеним у практиці дослідження коливальних процесів різної природи. Довгий час ознайомлення з цим методом у школі стримувалося відсутністю засобів швидкої побудови і подання графічної інформації. Комп'ютеризація та інформатизація освіти, а також розробка ефективного програмного забезпечення створюють сприятливі умови для ознайомлення школярів із цим методом.

2. При побудові фазової діаграми слід в декартовій системі координат на осях відкладати коливну величину та її похідну (наприклад, x і ω або пропорційні їм величини). Часто при побудові фазових діаграм у механіці користуються системою координат “імпульс – кінетична енергія”, оскільки кінетична енергія є похідною від імпульсу.

3. Подані вище відомості стосовно особливостей методу фазових діаграм розглянуті лише на рівні ознайомлення. Більш докладне вивчення цього методу виходить за рамки нашого посібника.