

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

В. В. Пічкур, О. В. Капустян, В. В. Собчук

ТЕОРІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Луцьк
Вежа-Друк
2020

УДК 517.938

П 36

*Рекомендовано вченою радою
Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 3 від 28 лютого 2020 р.)*

Рецензенти:

Бойчук О. А. – член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач лабораторією крайових задач теорії диференціальних рівнянь Інститут математики НАН України;

Касьянов П. О. – доктор фізико-математичних наук, професор, директор навчально-наукового комплексу “Інститут прикладного системного аналізу” Національного технічного університету “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”;

Чичурін О. В. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки.

Пічкур В. В.

П 36 Теорія динамічних систем : навч. посіб. / Володимир Володимирович Пічкур, Олексій Володимирович Капустян, Валентин Володимирович Собчук. – Луцьк : Вежа-Друк, 2020. – 348 с.

ISBN 978-966-940-301-8

Навчальний посібник висвітлює сучасні напрямки теорії диференціальних рівнянь та динамічних систем.

Книга адресована викладачам, аспірантам, студентам вузів, які здобувають фах за освітніми програмами “Математика”, “Комп’ютерна математика”, “Прикладна математика”, “Середня освіта (Математика)” та спеціалізуються в області теорії диференціальних рівнянь, динамічних систем, теорії стійкості та в галузі математичного моделювання.

УДК 517.938

© Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В., 2020
ISBN 978-966-940-301-8 © Коренга О. М. (обкладинка), 2020

Ministry of Education and Science of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Lesya Ukrainka Eastern European National University

O. V. Kapustyan, V. V. Pichkur, V. V. Sobchuk

THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS

Textbook

Lutsk
Vezha-Druk
2020

ЗМІСТ

Передмова	7
Розділ I. МЕТОДИ АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ	12
1.1. Вступне слово	12
1.2. Означення та класифікація динамічних систем	15
1.3. Особливі точки динамічних систем	24
1.3.1. Особливі точки динамічних систем на площині	24
1.3.2. Точки рівноваги динамічних систем третього порядку	31
1.4. Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестационарних систем	35
1.4.1. Основні означення	35
1.4.2. Дослідження стійкості лінійних нестационарних систем	39
1.4.3. Стійкість розв'язків систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца	44
1.4.4. Дослідження стійкості за першим наближенням	51
1.5. Другий метод Ляпунова	57
1.5.1. Функції Ляпунова	57
1.5.2. Теорема Ляпунова про стійкість для автономних систем	62
1.5.3. Теорема Ляпунова про стійкість для неавтономних систем	72
1.6. Методи конструювання функцій Ляпунова	76
1.6.1. Методи побудови функцій Ляпунова для нелінійних систем	76
1.6.1.1. Метод змінного градієнта	76
1.6.1.2. Метод Красовського	78
1.6.1.3. Метод лінеаризації за системою базисних функцій	79
1.6.2. Числовий метод конструювання функції Ляпунова для нелінійних систем	82
1.6.3. Побудова функцій Ляпунова для лінійних нестационарних систем	84
1.6.4. Випадок лінійних стаціонарних систем	86
1.7. Граничні множини динамічних систем	90
1.8. Типи стійкості траєкторій	93
1.9. Спектр ляпуновських характеристичних показників	97
1.10. Інтегральна лійка та її властивості	105
1.11. Переріз і відображення Пуанкаре	111

1.12. Атрактор Лоренца	116
1.13. Формула Каплана – Йорка	127
1.14. Спектральна густина та інваріантна міра	130
Питання, тести для самоконтролю	136
Обов’язкові та додаткові задачі	138

Розділ II. ПРАКТИЧНА СТІЙКІСТЬ 141

2.1. Вступ. Основні означення	141
2.2. Властивості максимальної множини практичної стійкості	148
2.3. Необхідні і достатні умови практичної стійкості на основі функції Ляпунова	151
2.4. Властивості оптимальної множини практичної стійкості лінійної системи	153
2.5. Оптимальні оцінки практичної стійкості лінійних систем	158
Питання, тести для самоконтролю	164
Обов’язкові та додаткові задачі	165

Розділ III. ХАОС У МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМАХ

З ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ 167

3.1. Фізичний маятник: рівняння руху й стійкість положень рівноваги	168
3.2. Фазові портрети типових коливальних систем	174
3.3. Автоколивальні системи	179
3.4. Детермінованість та хаос в нелінійних системах	181
3.5. Регулярні і дивні атрактори динамічних систем	191
3.6. Точки біфуркації	195
3.7. Порядок Шарковського	201
3.8. Дослідження хаотичних режимів	204
3.9. Карта динамічних режимів	212
3.10. Сферичний маятник	216
Питання, тести для самоконтролю	235
Обов’язкові та додаткові задачі	236

Розділ IV. БІФУРКАЦІЇ. ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ

ТА ФРАКТАЛИ 238

4.1. Математична модель керованого судна	238
4.2. Прояв ефекту фазової плями. Зниження керованості. Початкова некерованість	242

4.3. Стабілізація курсу судна	244
4.4. Біфуркації динамічних систем	248
4.5. Приклади фрактальних множин	253
4.6. Нерухомі точки відображень стиску	256
4.7. Фрактали як нерухомі точки	261
4.8. Фрактальна розмірність множин. Фрактал	267
4.8.1. Поняття фрактальної розмірності множин	268
4.8.2. Приклади знаходження фрактальної розмірності множин на площині	274
4.8.3. Фрактал, як компакт дробової фрактальної розмірності	277
4.8.4. Самоподібність множин	282
4.8.5. Фрактальна розмірність атракторів диференціальних рівнянь	285
Питання, тести для самоконтролю	289
Обов'язкові та додаткові задачі	290
Розділ V. КОМПЛЕКСНА ДИНАМІКА І ФРАКТАЛИ	292
5.1. Множина Жюліа	293
5.2. Орбіти у множинах Жюліа	304
5.3. Множина Мандельброта	306
5.4. Хаос і множина Жюліа	320
5.5. Проблема Келі	322
5.6. Теорія ренормалізації та фрактали Пуанкаре	325
5.6.1. Теорія ре нормалізації	326
5.6.2. Фрактали Пуанкаре	330
Питання, тести для самоконтролю	338
Обов'язкові та додаткові задачі	338
Список використаної літератури	340
Основні позначення	344

Передмова

Теорія динамічних систем – це галузь математичної науки, яка вивчає проблематику аналізу систем, параметри яких змінюється в часі. Теорія динамічних систем, як дисципліна, є природним узагальненням досліджень в класичній механіці та диференціальних рівняннях. Хоча на теперішній момент теорія динамічних систем є математичною дисципліною, спочатку вона була частиною фізики. Предмет виник в середині XVII століття, коли Ньютон застосував диференціальні рівняння для розв’язання задачі двох тіл (руху Землі навколо Сонця). Ньютонівський аналітичний метод був надалі узагальнений на задачу трьох тіл (Земля, Місяць, Сонце). Це потягнуло за собою серйозні труднощі. Після десятків років зусиль математики і фізики прийшли до висновку, що задача взагалі не може бути розв’язана аналітично. Ситуація здавалася безнадійною.

Однак, Анрі Пуанкаре, майже через 200 років після Ньютона, розглянув проблему з іншого точки зору. Він запропонував досліджувати якісну поведінку розв’язків систем диференціальних рівнянь замість кількісної. Наприклад, проблему про знаходження точної позиції планет в кожен момент часу Пуанкаре трансформувал так: сонячна система є стійкою завжди, чи з плином часу деякі планети повинні її залишити? Він розробив основу методів фазового простору, які дають змогу відповісти на це запитання. На теперішній момент ця методологія стала основою теорії динамічних систем і знайшла застосування в небесній механіці. Пуанкаре також був першим, хто ввів поняття хаосу як аперіодичної поведінки системи, що істотно залежить від початкових умов і тому робить неможливим передбачення її поведінки в тривалому часовому періоді [6, 9].

У 1882 році вийшла праця О. М. Ляпунова – «Общая задача об устойчивости движения», в якій для дослідження стійкості розв’язків систем диференціальних рівнянь було вперше запропоновано метод, який називають другим методом Ляпунова. Другий метод Ляпунова базується на застосуванні допоміжних функцій. Виходячи з характеру поведінки цих функцій на розв’язках систем диференціальних рівнянь, метод дозволяє зробити висновки про якісну поведінку сукупності розв’язків в цілому. Метод функцій Ляпунова виявився ефективним при розв’язуванні як теоретичних, так і прикладних задач теорії стійкості. Цей метод в подальшому був розвинений в роботах М. Г. Четаєва, К. П. Персидського,

Є. О. Барбашина, М. М. Красовського та інших дослідників [13, 16, 39, 55, 59].

В першій половині ХХ століття дослідження динамічного хаосу залишались на других ролях, теорія динамічних систем була сконцентрована на задачах нелінійних коливань та їх засновуваннях у фізиці та інженерії. Нелінійні осцилятори відігравали провідну роль в розробці технологій для радіо, радарів та лазерів. Завдяки роботам Ван дер Поля, Андроннова, Літлвуда, Харді, Картрайта, Левінсона, Смейла з'явилася нова математична техніка. Тим часом, паралельно розвивались геометричні методи Пуанкаре, які дозволили значно просунутися в класичній механіці. Сучасна наука поповнила свій доробок в цьому напрямку завдяки роботам Біркгофа і пізніше Колмогорова, Арнольда та Мозера [1–3, 9, 10, 17, 22].

Винахід комп'ютерів став справжнім вододілом в історії динамічних систем. Комп'ютери дозволили проводити експерименти, які раніше неможливо було здійснити через неймовірну складність розрахунків, і тим самим сприяли виникненню нових гіпотез. Саме комп'ютерні експерименти привели Лоренца до відкриття в 1963 році реального хаотичного руху, який тепер називають дивним атрактором. Лоренц вивчав найпростішу модель конвекції в атмосфері. Він виявив, що розв'язки системи ніколи не стають стійкими або періодичними – замість цього вони неперервно осцилюють іррегулярно та неперіодично. Більше того, розв'язки з початковими умовами, які в початковий момент не суттєво відрізняються, через відносно невеликий інтервал часу з еволюцією системи стають абсолютно несхожими. Отже, система має непередбачуваність (хаотичність). Водночас, зобразивши рух у тривимірному просторі, Лоренц показав, що цей хаос має певну структуру. Розв'язки утворюють безліч кривих нахшталт крил метелика [14, 15, 65].

Робота Лоренца дала поштовх численним дослідженням хаосу в 70-х роках. Відзначимо лише головні з них. У 1971 році Рюелль і Такенса запропонували нову теорію для пояснення турбулентної течії рідини, засновану на загальних припущеннях про природу дивного атрактора. Кількома роками пізніше Мей виявив приклади хаосу в популяційній біології. У своїй статті він підкреслив методологічну важливість вивчення простих нелінійних систем, які врівноважують «жінїну» інтуїцію, що часто приводить до помилкових міркувань і яка водночас заповонила традиційні навчальні курси.

У 1964 році Шарковським О. М. була обґрунтована теорема про існування нерухомої точки при ітеруванні відображень відрізка в себе [50]. Наступним етапом було несподіване відкриття фізика Фейгенбаума. Він виявив, що є універсальні закони, які керують переходом з регулярної до хаотичної поведінки. Інакше кажучи, абсолютно різні системи можуть стати хаотичними за певних умов. Зрештою, фізики-експериментатори протестували нові ідеї про хаос на рідинах, в електричних ланцюгах, хімічних реакціях, механічних осциляторах і напівпровідниках.

Хоча хаос й заповнив увагу багатьох дослідників, в теорії динамічних систем з'явилися ще два знакові відкриття. Мандельброт популяризував фрактали, які супроводжуються чудовою комп'ютерною графікою, й показав, як вони можуть застосовуватися в різних задачах динаміки [28]. Геометричні методи Пуанкаре були застосовані Уїнфрі для опису біологічних коливань, таких, наприклад, як добові і серцеві ритми.

Отже, до кінця ХХ століття теорія динамічних систем перетворилася в великий розділ математики, що включає в себе кілька основних дисциплін, таких як якісна теорія динамічних систем, теорія стійкості, гамільтонова динаміка, теорія детермінованого хаосу, фрактальна геометрія, ергодична теорія тощо [2–6, 12, 15–17, 20–22, 25–26, 29–32, 47–49, 52–54, 56–57, 59–63].

Слід відзначити вагомий внесок в розвиток теорії динамічних систем української математичної школи, а саме науковий доробок М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольского, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, О. М. Шарковського, І. В. Скрипника, В. С. Мельника, М. Ф. Кириченка, Ф. Г. Гаращенко, В. О. Плотнікова та інших вчених [7–8, 10–11, 14, 15, 23, 33–34, 36–37, 41, 43, 50–51, 58].

Динамічні системи діляться на два типи – неперервні та дискретні. Перші описують еволюцію моделі в залежності від неперервного часу і задаються, як правило, диференціальними рівняннями (звичайними або в частинних похідних). Такі системи широко використовуються в науці і прикладних дослідженнях, тому ми приділимо основну увагу саме їм. Водночас дискретні системи, що описують ітераційні процеси, також мають суттєве значення. Вони описують математичні моделі складних процесів, дають ефективні приклади хаосу і є інструментом аналізу хаотичних розв'язків диференціальних рівнянь.

Вибір математичної моделі динамічної системи залежить від природи реального об'єкта. Побудувати адекватну загальну модель системи є

складною задачею. Як правило, через багатофункціональність та громіздкість системи, складність залежностей та кількість зв'язків, це зробити проблематично. Тому природним стає підхід „від простого до складного”. При такому підході будують ієрархію моделей, яка поступово ускладнюється. Одним із перспективних методів моделювання логіко-динамічних систем, який відображає такий підхід, є гібридний напрямок. Це один із сучасних напрямків моделювання, який активно розвивається і потребує детального вивчення.

Теорія динамічних систем, як навчальна дисципліна, належить до переліку нормативних навчальних дисциплін, що забезпечують професійний розвиток магістра математика та спрямована на формування в майбутнього фахівця основних понять, теоретичних положень та методів сучасної теорії диференціальних рівнянь і динамічних систем, вміння застосувати їх до розв'язування фізичних й інших прикладних задач. Ця дисципліна є одним з розділів теорії диференціальних рівнянь і читається як логічне продовження класичного курсу „Диференціальні рівняння”. Засвоєння даного курсу дозволяє студентам набути компетенцій пов'язаних з математичним та комп'ютерним моделюванням складних систем.

Метою вивчення даної дисципліни є ознайомлення та оволодіння основними математичними поняттями, теоретичними положеннями і методами сучасної теорії диференціальних рівнянь, уміння створювати й досліджувати математичні моделі динамічних процесів з використанням сучасних методів нелінійної динаміки, з врахуванням природи систем.

Вивчаючи теорію динамічних систем, студенти будуть обізнаними з таких питань:

- сучасна теорія диференціальних рівнянь та динамічних систем;
- використання методів якісної теорії дослідження розв'язків диференціальних рівнянь;
- теорія стійкості;
- методологія дослідження нелінійних динамічних систем;
- теорія біфуркацій;
- теорія фракталів та її застосування до дослідження динаміки систем.

Студенти набудуть вмінь:

- описувати та досліджувати лінійні та нелінійні математичні моделі динамічних процесів, описані звичайними диференціальними рівняннями;
- досліджувати лінійні та нелінійні математичні моделі динамічних процесів;

- застосовувати методи фазової площини для дослідження поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь;
- застосовувати інструментарій методів функції Ляпунова для дослідження систем диференціальних рівнянь.

Власне, основною метою посібника є популяризація теорії динамічних систем, з огляду на її активний розвиток та знаходження широкого спектру застосувань в різноманітних областях сучасної науки.

РОЗДІЛ I

МЕТОДИ АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

1.1. Вступне слово

Однією з важливих наукових проблем природознавства є вирішення завдання передбачення поведінки досліджуваного об'єкта в часі і просторі на основі знань про його початковий стан. Це завдання зводиться до знаходження деякого закону, який дозволяє за наявною інформацією про об'єкт в початковий момент часу t_0 в точці простору x_0 визначити його майбутнє в будь-який момент часу $t > t_0$. Залежно від ступеня складності самого об'єкта цей закон може бути детермінованим або імовірнісним, може описувати еволюцію об'єкту тільки в часі, тільки в просторі, а може описувати просторово-часову еволюцію.

Предметом нашого дослідження будуть не об'єкти взагалі, а динамічні системи в математичному розумінні цього терміну. Під динамічною системою розуміють будь-який об'єкт або процес, для якого однозначно визначено поняття стану як сукупності деяких величин в даний момент часу і заданий закон, який описує зміну (еволюцію) початкового стану з плином часу. Цей закон дозволяє за початковим станом прогнозувати майбутній стан динамічної системи. Його називають законом еволюції.

Динамічні системи описують механічні, фізичні, хімічні, біологічні та обчислювальні процеси, процеси перетворення інформації, що здійснюються відповідно до конкретних алгоритмів. Описи динамічних систем для різноманітних задач в залежності від закону еволюції також різноманітні: за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень, теорії графів, теорії марківських ланцюгів тощо. Вибір одного із способів опису задає конкретний вигляд математичної моделі відповідної динамічної системи [1, 2, 9, 11, 14, 17, 22, 23, 29, 30, 40, 42, 53, 59].

Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введені параметри (координати) системи, що визначають однозначно її стан, і зазначений закон еволюції. Залежно від ступеня наближення одній і тій самій системі можуть бути поставлені у відповідність різні математичні моделі.

Теоретичне дослідження динамічної поведінки реального об'єкта вимагає створення його математичної моделі. У багатьох випадках процедура розробки моделі полягає в складанні математичних рівнянь на основі фізичних законів. Зазвичай ці закони формулюються на мові диференціальних рівнянь. В результаті координати стану системи і її параметри виявляються пов'язаними між собою, що дозволяє приступити до вирішення диференціальних рівнянь при різних початкових умовах і параметрах.

Загалом, отримання хорошої математичної моделі є мистецтвом. Справа в тому, що математичну модель динамічної системи бажано максимально спростити. Водночас при спрощенні рівнянь не повинен зникнути опис тих особливостей поведінки, які слід дослідити.

Головним критерієм тут є відповідність математичної моделі описуваним реальним процесам. Це визначається порівнянням результатів теоретичного розрахунку з результатами експерименту на конкретному об'єкті. Модель заслуговує особливого визнання, якщо з її допомогою вдається теоретично виявити нові особливості поведінки, які потім підтверджуються експериментально. Може виявитися, що математична модель розроблена фахівцями з прикладних наук, а нові явища в поведінці цієї моделі (і відповідної реальної системи) виявлені фахівцями з теорії динамічних систем.

Окремої уваги заслуговує одне із значущих відкриттів ХХ століття – детермінований хаос у динамічних системах [4, 26, 40, 41]. Суть цього відкриття полягає в тому, що повністю визначена (детермінована) динамічна система, при відсутності будь-яких випадкових впливів на неї, може поводитися непередбачуваним (хаотичним) чином.

В сучасній науці цей ефект строго обґрунтований теоретично і достовірно підтверджений експериментально. Може виникнути питання: чи не є цей феномен математичною екзотикою в тому сенсі, що його реалізація теоретично можлива, але практично малоімовірна? Ні і ще раз ні! Після відкриття детермінованого хаосу, ясного розуміння властивостей ефекту і розробки методів його дослідження, хаос був виявлений практично у всіх областях сучасного природознавства: у фізиці, радіотехніці, хімії, біології, механіці, економіці та ін. Може виникнути природне запитання: чому до недавнього часу цей типовий режим функціонування динамічних систем не було виявлено та описано? Цьому є пояснення.

Хоча теоретично переважна кількість реальних систем і процесів нелінійні, існує широкий клас процесів, які досить коректно описуються в лінійному або квазілінійному наближенні. Лінійна теорія динамічних систем і процесів розроблена досить повно і дозволяє дати їх вичерпний опис, що добре узгоджується з експериментом. Але детермінований хаос – явище, притаманне виключно нелінійним системам. А відносно нелінійної теорії справи йдуть набагато гірше. Наприклад, не існує загальної теорії розв’язування нелінійних диференціальних рівнянь. Аналіз динаміки нелінійних систем і зараз вимагає мистецтва, творчого підходу, індивідуального в кожному конкретному випадку.

Саме відсутність строгих теоретичних результатів стосовно нелінійних систем стримувала відкриття і розуміння цього універсального явища. Експериментатори давно стикалися з проявом хаосу. Однак обмеженість теоретичних знань, обумовлена впливом лінійної і квазілінійної структури наукового мислення, призводила до помилок в трактуванні спостережуваних результатів. Був зроблений висновок про те, що шумоподібні коливання обумовлені або дією флуктуацій, чи великою кількістю ступенів свободи системи, або несправністю виміральної апаратури.

Зараз ситуація змінилася. Наше життя все більше наполегливо вимагає кількісного аналізу таких чинників, як надвисока щільність, надвисока температура, тиск, надвисокі швидкості, щільність населення тощо. А, як відомо, облік цих факторів вимагає принципово нелінійного підходу до опису еволюційних процесів. Ці процеси моделюються і аналізуються за допомогою комп’ютерів, для яких нелінійність моделі не є перешкодою для детального аналізу. І з’ясувалося, що в таких системах хаотичний режим функціонування швидше правило, ніж виняток.

Важливим є той факт, що детермінований хаос не є винятковим режимом поведінки динамічних систем. Швидше навпаки, з відкриттям детермінованого хаосу в науковій спільноті розвіялися ілюзії про можливість вичерпного, адекватного опису реальних процесів за допомогою лінійних математичних моделей. Водночас й погляд на нелінійні системи, як на деяке «косметичне» поліпшення лінійних моделей, також беззастережно залишається в минулому.

Все більше новітніх досліджень вивчають задачі, в яких явища детермінованого хаосу властиві не тільки фізичним та механічним системам, а й часто зустрічаються при описі проблем з економіки, соціології, філо-

софії, історії тощо. Відтак дослідження з хаотичної динаміки є одним з провідних напрямків розвитку сучасного природознавства.

1.2. Означення та класифікація динамічних систем

Поняття динамічної системи виникло як узагальнення системи механічної природи. Однак, динамічні системи можуть мати не лише механічну, фізичну, хімічну, а також біологічну, фінансову й соціальну природу. Вони існують в обчислювальних процесах, процесах обробки й перетворення інформації, які здійснюються відповідно до конкретних алгоритмів. Нарешті, динамічною системою є процес розвитку людського суспільства в цілому [20, 25, 31, 33, 53, 57, 63].

Динамічна система вважається заданою, якщо введені координати системи, які дозволяють визначати її стан і заданий оператор, який описує еволюцію початкового стану в часі. Математичне представлення динамічних систем допускає велику різноманітність. Еволюція стану може описуватись за допомогою дискретних систем, систем диференціальних рівнянь, рівнянь в частинних похідних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, систем з імпульсним впливом, гібридних систем, марківських ланцюгів тощо.

Відмітимо, що одній і тій самій динамічній системі, в залежності від ступеня наближення, можуть бути поставлені у відповідність різні математичні моделі. Наприклад, при дослідженні коливань маятника, залежно від міри врахування факторів, ми одержимо різні математичні моделі, які описують якісно відмінні динамічні процеси (коливання маятника з врахуванням і без врахування тертя).

Ще одним яскравим прикладом існування різних моделей є математичне моделювання однієї й тієї ж довільної коливальної системи з врахуванням і без врахування неідеальності збудження. При математичному моделюванні виникають випадки, в яких при дослідженні реальної системи в рамках певних припущень створюється її наближена математична модель, яка надалі використовується для опису процесу іншої природи. Так, різні математичні моделі, отримані при моделюванні маятникових систем, застосовуються для дослідження оболонки, пластин, кілець, для опису коливань вільної поверхні рідини в баках, для моделювання роботи серцевого м'яза, для опису зміни чисельності біологічних популяцій тощо.

Ми будемо говорити, що визначена **динамічна система**, якщо:

- вказано метричний простір $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, який називається *фазовим простором*. Фазовий простір може збігатися з усім n – вимірним евклідовим простором \mathbb{R}^n ;

- задана множина I , якій належить параметр t , що називається *часом*. Параметр t може бути неперервним – тоді $t \in I = \mathbb{R}^1$.

Параметр t також може бути дискретним – тоді $t \in I = \mathbb{Z}$, де \mathbb{Z} – множина цілих чисел.

- визначено *закон (оператор) еволюції*. Оператор еволюції є однозначним відображенням $\varphi: \mathcal{D} \times I \rightarrow \mathcal{D}$, що будь-якій точці $x \in \mathcal{D}$ і довільному значенню часової змінної $t \in I$ ставить у відповідність точку фазового простору $\varphi(t, x) \in \mathcal{D}$ та виконуються теоретико-групові властивості:

- $\varphi(0, x) = x, x \in \mathcal{D}$;
- $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x), x \in \mathcal{D}, t_1, t_2 \in I$;
- відображення $\varphi: \mathcal{D} \times I \rightarrow \mathcal{D}$ є неперервним.

Для кожного фіксованого $t \in I = \mathbb{Z}$ відображення φ задає взаємоднозначне неперервне відображення з \mathcal{D} в \mathcal{D} , тобто *гомеоморфізм*. Тому говорять, що *динамічна система* – це однопараметрична група гомеоморфізмів фазового простору \mathcal{D} .

У випадку, якщо відображення φ є лінійним відносно змінної стану, тобто

$$\begin{aligned}\varphi(t, x_1 + x_2) &= \varphi(t, x_1) + \varphi(t, x_2), \\ \varphi(t, \lambda x) &= \lambda \varphi(t, x),\end{aligned}$$

де $\lambda \in \mathbb{R}^1, x_1, x_2, x \in \mathcal{D}$, то динамічна система називається лінійною.

Якщо $I = \mathbb{Z}$, тобто часова змінна t є дискретною, то умови *i* – *iii* визначають дискретну динамічну систему, яка називається *каскадом*. Каскади володіють такою властивістю. Розглянемо гомеоморфізм $\varphi(1, x)$ і позначимо його через $\psi(x)$. Очевидно, що $\varphi(t, x) = \psi^{(t)}(x)$, де

$$\psi^{(t)}(x) = \psi\left(\psi^{(t-1)}(x)\right), \quad t = 1, 2, \dots, \quad \psi^{(0)}(x) = x.$$

Отже, для означення каскаду досить вказати гомеоморфізм

$$\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}.$$

Для дискретної динамічної системи послідовність

$$\{x_k, k \in \mathbb{Z}\},$$

де $x_{k+1} = \psi(x_k)$, називається траєкторією точки x_0 .

Існують три види траєкторій:

1. *точка* x_0 . У цьому випадку x_0 є нерухомою точкою гомеоморфізму $\psi(x)$, тобто $\psi(x_0) = x_0$;

2. *цикл* (x_0, \dots, x_{k-1}) , де $x_i = \psi^{(i)}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, $x_0 = \psi^{(k)}(x_0)$. Крім того, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \dots, k-1$. Число k називається *періодом циклу*, а кожна точка x_i — *періодичною з періодом k* .

Зазначимо, що нерухома точка також є періодичною точкою довільного натурального періоду k , $k \in \mathbb{N}$;

3. *нескінченна в обидва боки траєкторія*, тобто послідовність $\{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$, де $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Таку траєкторію будемо називати *незамкненою*.

Якщо $I = \mathbb{R}^1$, тобто часова змінна t є неперервною, то умови 1–3 визначають неперервну динамічну систему, яка називається *поток*ом. Фіксуємо x та змінюючи t від $-\infty$ до $+\infty$, одержимо криву

$$\Gamma = \{\varphi(t, x) : t \in \mathbb{R}^1\} \subset \mathcal{D},$$

яка називається *фазовою траєкторією динамічної системи*.

Один з найбільш розповсюджених способів задання неперервної динамічної системи полягає у тому, що у фазовому просторі \mathcal{D} визначається автономна система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1.1)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{D}$ – вектор фазових координат системи (1.1), $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ – n – вимірна вектор-функція, яка задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для системи (1.1). Наприклад, це можуть бути умови теореми Пікара.

Приклад 1.1 *Математична модель „хижак–жертва” А. Лотка-В. Вольтерра.* Нехай в замкненому ареалі є два види тварин. Перший вид тварин є хижаки, які поїдають інший вид тварин, які називаються жертвами. Кількість хижаків в момент t описується змінною $M(t)$, а чисельність жертв – $N(t)$. Отримуємо математичну модель у формі автономної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= (a - pM)N, \\ \frac{dM}{dt} &= (-b + qN)M.\end{aligned}$$

Тут a, b, p, q – додатні параметри математичної моделі.

Системи (1.1) беруть свій початок в класичній механіці. Саме тому теорія динамічних систем використовує термінологію, прийняту при моделюванні динаміки механічних систем. Розв’язок $x(t, x_0)$ системи диференціальних рівнянь (1.1), який відповідає початковій умові $x(0) = x_0$, задає оператор еволюції, який кожній точці $x_0 \in \mathcal{D}$ і довільному $t \in \mathbb{R}^1$ ставить у відповідність точку $x(t, x_0) \in \mathcal{D}$, при цьому справджуються умови *i – iii*.

Оскільки виконуються умови існування і єдиності розв’язку задачі Коші, то оператор еволюції є однозначним. Точка $x = x(t, x_0) \in \mathcal{D}$ є *фазовою точкою*, яка характеризує стан системи в момент t і називається також *зображуючою точкою*.

Рух зображуючої точки при зміні часової змінної утворює траєкторію системи (1.1). По суті, траєкторія системи є проєкцією інтегральної кривої цієї системи на фазовий простір \mathcal{D} . Оскільки мають місце умови існування і єдиності розв’язку задачі Коші, то кожному розв’язку системи (1.1) відповідає одна траєкторія і через кожен точку фазового простору проходить тільки одна траєкторія. Відтак, перетин двох різних траєкторій неможливий.

У фазовому просторі права частина $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ системи рівнянь (1.1) породжує векторне поле швидкостей, яке співставляє кожній точці $x \in \mathcal{D}$ вектор $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$, який виходить з неї. Вектор $f(x)$ в кожній точці x спрямований по дотичній до фазової траєкторії. Модуль цього вектора дорівнює швидкості руху зображуючої точки по траєкторії.

Прирівняємо праві частини системи (1.1) до нуля, відтак розглянемо алгебраїчну систему рівнянь

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Нехай, $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ – деякий розв’язок системи (1.2). Очевидно, що цей розв’язок також буде розв’язком системи диференціальних рівнянь (1.1). Такий розв’язок є постійним при зміні часу t . Йому відповідає фазова траєкторія, яка складається з однієї точки, причому ця точка нерухома у фазовому просторі. Така точка називається *положенням рівноваги, станом рівноваги, або точкою спокою системи* (1.1). Точки рівноваги відіграють важливу роль при дослідженні якісної поведінки динамічних систем.

Нехай

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \dots, \quad x_n = \varphi_n(t) \quad (1.3)$$

деякий розв’язок системи (1.1), причому існує таке додатне число T , що для довільного $t \in \mathbb{R}^1$ мають місце рівності

$$\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

однак при $\tau_1 - \tau_2 < T$ хоча б для одного $i = 1, 2, \dots, n$ має місце нерівність

$$\varphi_i(\tau_1) \neq \varphi_i(\tau_2).$$

У цьому випадку траєкторія, яка відповідає розв’язку (1.3), буде замкненою лінією у фазовому просторі. Така траєкторія називається *циклом*. Сам розв’язок (1.3) називається *періодичним розв’язком*.

Цей розв’язок називається *ізолюваним періодичним розв’язком*, а його траєкторія називається *граничним циклом*, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ фазового простору, яка перебуває від циклу на відстані меншій ніж ε , розв’язок системи (1.1), який проходить через точку M , не є періодичним. Геометрично це означає, що у фазовому просторі поблизу замкненої траєкторії не проходять інші замкнені траєкторії.

В теорії диференціальних рівнянь доведено, що в системи (1.1) є три види траєкторій:

1. *положення рівноваги*;
2. *цикли*, які є замкненими кривими у фазовому просторі;
3. *траєкторії без самоперетинів* (незамкнені траєкторії).

Приклад 1.2. Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -kx \end{cases}$$

задає динамічну систему з неперервним часом, що називається *гармонійним осцилятором*. Її фазовим простором є площина (x, v) , де v – швидкість точки x . Гармонійний осцилятор моделює різноманітні коливні процеси, наприклад, поведінку ваги на пружині. Його фазовими кривими є еліпси з центром в нулі.

Приклад 1.3. Нехай φ – кут, що задає положення точки на одиничному колі. Відображення подвоєння $f(\varphi) = 2\varphi \pmod{2\pi}$ задає динамічну систему з дискретним часом, фазовим простором якої є коло.

За *енергетичною ознакою* динамічні системи діляться на *консервативні* й *дисипативні*:

- *дисипативними* називають динамічні системи, енергія яких зменшується із часом внаслідок тертя, розсіювання та інших факторів;
- *консервативні* системи характеризуються незмінним у часі запасом енергії. У фізиці їх називають *гамільтоновими*.

З математичної точки зору динамічна система називається дисипативною, якщо існує обмежена множина в фазовому просторі, яка притягує кожену точку фазового простору [57].

Для консервативних систем з n степенями свободи визначається *гамільтоніан* системи $H(p, q)$, де q – узагальнені координати, p – узагальнені імпульси системи. Гамільтоніан повністю характеризує динамічну природу системи і з фізичної точки зору в більшості випадків характеризує повну енергію системи. Еволюція в часі консервативних систем описується рівняннями Гамільтона

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}. \quad (1.4)$$

Динамічні системи із змінним в часі запасом енергії називаються *неконсервативними*.

Динамічні системи називаються *автономними*, якщо вони не схильні до дії зовнішніх сил, змінних в часі.

Рівняння автономних систем явної залежності від часу не містять. Більшість реальних *коливальних систем* у фізиці, радіофізиці, біології, хімії та інших областях знань неконсервативні.

Серед них виділяється особливий клас *автоколивальних систем*, які принципово неконсервативні і нелінійні.

Автоколивальною називають динамічну систему, що перетворює енергію джерела в енергію незгасаючих коливань, причому основні характеристики коливань (амплітуда, частота, форма коливань тощо) визначаються параметрами системи і в певних межах не залежать від вибору вихідного початкового стану.

Приклад 1.4. Розглянемо механічну систему з одним ступенем вільності, а саме, консервативну систему, яка описується диференціальним рівнянням Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x),$$

де $f(x)$ – диференційована на деякій області з \mathbb{R}^2 функція. Запишемо рівняння у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x)$$

і введемо позначення:

$$P(x) = - \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{– потенціальна енергія;}$$

$$T(y) = \frac{y^2}{2} \quad \text{– кінетична енергія;}$$

$$E(x, y) = P(x) + T(y) \quad \text{– повна механічна енергія.}$$

Повна енергія $E(x, y) = C$ є першим інтегралом системи і тому кожна фазова крива цієї системи цілком лежить на деякій множині (лінії) рівня енергії, тобто на множині $\{(x, y): P(x) + T(y) = C\}$ при певному значенні C .

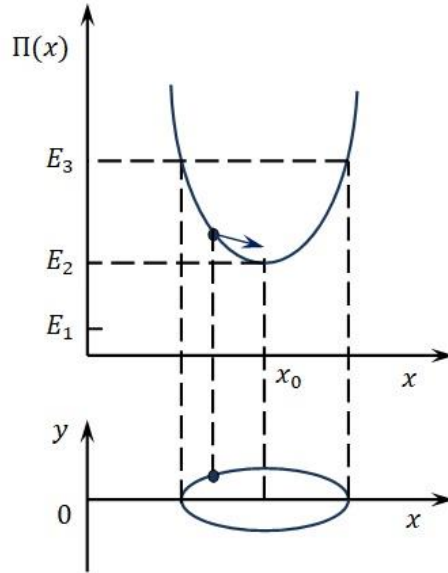


Рис. 1.1. Нескінченно глибока потенціальна яма з одним притягуючим центром x_0

Щоб побудувати лінії рівня енергії, уявімо кульку, що перебуває у «потенціальній ямі» Π (рис. 1.1). Зафіксуємо значення повної енергії E . Оскільки кінетична енергія невід’ємна, то потенціальна енергія не більша від повної енергії. Отже, лінія рівня енергії E проєктується на вісь Ox , в результаті одержуємо множину

$$\{x \in I: \Pi(x) \leq E\}$$

(кулька не може піднятися вище рівня E в потенціальній ямі). Далі, швидкість є тим більшою, чим менша потенціальна енергія

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = |y| = \sqrt{2(E - \Pi(x))}$$

(скочуючись в яму, кулька набуває більшої швидкості, а піднімаючись – втрачає її).

У точках повороту, де $\Pi(x) = E$, швидкість дорівнює 0. З парності енергії відносно y випливає, що лінія рівня енергії симетрична відносно осі Ox (кулька проходить кожную точку в прямому і зворотному напрямку з однаковою швидкістю). Цих міркувань достатньо для того, щоб побудувати лінії рівня енергії систем з різними потенціалами $\Pi(x)$.

Розглянемо найпростіший випадок, власне, нескінченно глибоку потенціальну яму з одним притягуючим центром x_0 . Це означає, що функція $f(x)$ монотонно спадає, $f(x_0) = 0$ (рис 1.1).

Якщо значення повної енергії E_1 менше від мінімуму потенціальної енергії E_2 , то множина рівня енергії $E(x, y) = E_1$ порожня, тобто рух кульки фізично неможливий. Множина рівня $E(x, y) = E_2$ складається з однієї точки $(x_0, 0)$, тобто кулька перебуває в спокої на дні ями.

Якщо значення E_3 повної енергії більше від критичного $E_3 = \Pi(x_0)$, то множина рівня $E(x, y) = E_3$ – гладка замкнена симетрична крива, що охоплює положення рівноваги $(x_0, 0)$ на фазовій площині. Тобто кулька рухається в ямі вперед і назад, піднімається до висоти E_3 . В цей момент її швидкість перетворюється в нуль і вона скочується назад в яму, проходить точку x_0 . В цей момент її швидкість максимальна. Далі кулька піднімається з іншого боку і т. д.

Досліджуючи більш складні випадки, треба аналогічно попередньому послідовно збільшувати значення повної енергії E , віднімаючи значення E , що дорівнюють критичним значенням потенціальної енергії, де $\Pi'(x) = 0$ і розглядати криві, що відповідають околом критичних значень E .

Наприклад, у системі, близькій до системи малих коливань маятника

$$\frac{dx}{dt} = y + \varepsilon f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -y + \varepsilon f_2(x, y), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

достатньою умовою існування граничного цикла є існування додатних розв'язків $a = a_0 > 0$ рівняння $F(a) = 0$, де

$$F(a) = -a \int_0^{2\pi} (f_1(a \cos \varphi - a \sin \varphi) \cos \varphi - f_2((a \cos \varphi - a \sin \varphi) \sin \varphi)) d\varphi.$$

Цей цикл є асимптотично стійким, якщо $F'(a_0) < 0$ і нестійким у випадку $F'(a_0) > 0$.

На практиці часто використовується така достатня умова існування граничного циклу для диференціального рівняння Ньютона, яка називається принципом кільця. Цей принцип полягає в такому: якщо на фазовій площині можна знайти таке кільце

$$r_1^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r_2^2,$$

що всі траєкторії системи диференціальних рівнянь Ньютона, які починаються на границі цього кільця, входять всередину кільця або одночасно всі виходять з кільця, то всередині кільця є граничний цикл даної системи. Детальніше поняття та властивості граничного циклу розглянуто нижче.

1.3. Особливі точки динамічних систем

1.3.1. Особливі точки динамічних систем на площині

Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1.8)$$

Якщо $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) задовольняє умовам теореми Пікара, то через точку (x_0, y_0) проходить лише одна інтегральна крива диференціального рівняння (1.8) [40, 42, 44].

Припустимо, що функція $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) не є неперервною. Тоді можливі випадки:

- a. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ (A – деяке число);
- b. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty$;
- c. $f(x, y)$ – невизначена в точці (x_0, y_0) (таку точку називають ізольованою особливою точкою)

Перші два випадки зводяться до випадку, який розглядає теорема Пікара:

- a. $f(x, y)$ можна довизначити у такий спосіб: $f(x_0, y_0) = A$;
- b. замість диференціального рівняння (1.8) розглядати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)} \quad (1.9)$$

і, покладаючи $\frac{1}{f(x, y)} = 0$, знайти єдиний розв'язок $x = \varphi(y)$ з вертикальною дотичною в точці (x_0, y_0) .

Дослідження особливих точок проведемо для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad (1.10)$$

де a, b, c, d – дійсні числа, $ad - bc \neq 0$, оскільки в протилежному випадку диференціальне рівняння (1.10) зводиться до рівняння $\frac{dy}{dx} = \text{const}$.

Нас цікавить поведінка інтегральних кривих в околі точки $(0,0)$. Перепишемо диференціальне рівняння (1.10) у вигляді

$$\frac{dx}{cx+dy} = \frac{dy}{ax+by}$$

і перейдемо до системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} = ax + by. \end{cases} \quad (1.11)$$

Зазначимо, що геометричне зображення поведінки траєкторій системи диференціальних рівнянь називається фазовим портретом. Прийнято стрілками на траєкторіях зображувати напрямок руху рухомої точки при $t \rightarrow +\infty$.

Запишемо характеристичне рівняння системи (1.11)

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & d \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Нехай λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння. Розглянемо такі випадки.

А. Корені дійсні, різні і відмінні від нуля, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В базисі з власних векторів матриця системи діагональна. У цьому випадку система (1.11) зводиться до вигляду

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \lambda_1 q_1, \\ \frac{dq_2}{dt} = \lambda_2 q_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

і має загальний розв'язок

$$q_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad q_2 = c_2 e^{\lambda_2 t},$$

c_1 та c_2 – довільні сталі. Виключаючи t , отримаємо рівняння траєкторій

$$q_2 = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \text{ (при } c_1 \neq 0 \text{) та } q_1 = 0 \text{ (при } c_1 = 0 \text{)}. \quad (1.13)$$

Якщо λ_1 та λ_2 одного знаку, то траєкторії схожі з дугами парабол, які дотикаються осі Oq_1 в точці $(0,0)$ (якщо $|\lambda_2| > |\lambda_1|$), чи осі Oq_2 (якщо $|\lambda_2| < |\lambda_1|$). Координатні півосі також є траєкторіями. Така особлива точка називається *вузлом* (рис. 1.2. а)).

По всіх траєкторіях відбувається рух до точки $(0,0)$, якщо $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ – *стійкий вузол*, рис 1.2.а) і від неї, якщо $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ – *нестійкий вузол* рис. 1.2. б). Напрямок руху вказується стрілками на траєкторіях.

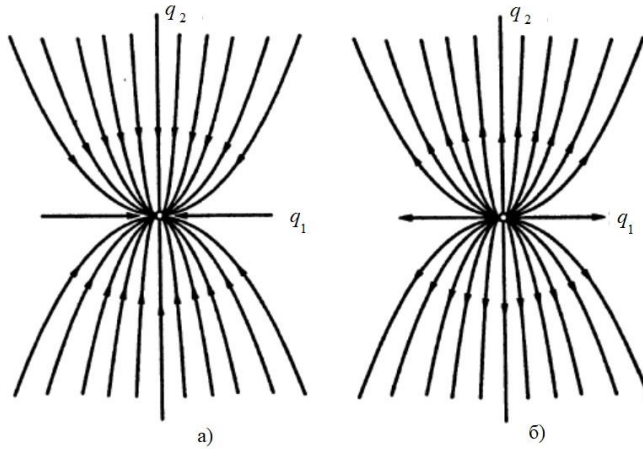


Рис. 1.2. Особлива точка: а) стійкий вузол; б) нестійкий вузол

В. Якщо ж λ_1, λ_2 – різних знаків, то траєкторії (крім тих, що рухаються по координатних півосях) схожі на гіперболи, оскільки в силу (1.13) $|q_2| \rightarrow \infty$ при $y_1 \rightarrow 0$ та $y_2 \rightarrow 0$ при $|q_1| \rightarrow \infty$ (рис. 1.3). Особлива точка називається *сідлом*. Сідло завжди нестійке, оскільки одне з власних чисел матриці – додатне.

Якщо $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, то по обох половинах осі Oq_1 рух напрямлений до точки O , так як $q_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). Водночас по обох половинах осі Oq_2 рух відбувається від точки O , оскільки $q_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, |q_2| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$).

С. Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, то жорданова форма матриці системи може бути або діагональною, або ні.

а) В першому випадку система має вигляд (1.12) з $\lambda_1 = \lambda_2$ і траєкторії (1.13) – півпрямі з кінцем в точці $(0,0)$ (рис. 1.4) при $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Рух по траєкторії відбувається в напрямку до точки рівноваги.

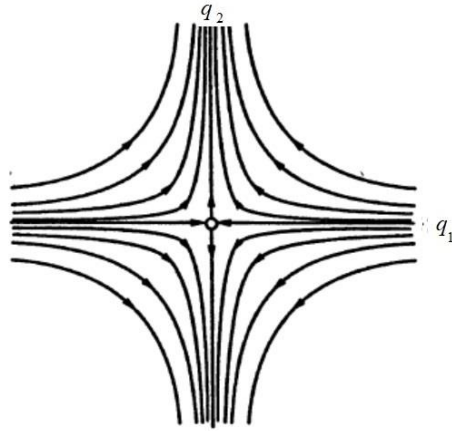


Рис. 1.3. Особлива точка сідло

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, то стрілки напрямлені в протилежному напрямку. Особлива точка називається *дикритичним вузлом*.

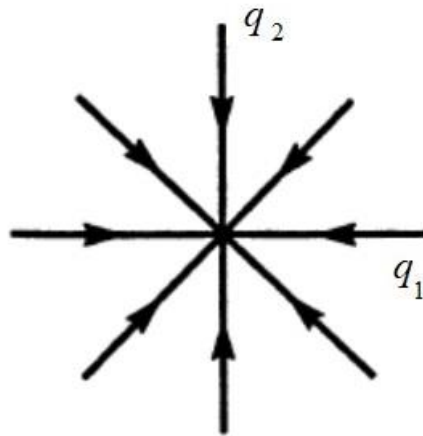


Рис. 1.4. Особлива точка дикритичний вузол

б) В іншому випадку система (1.11) має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \lambda q_1 + q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} = \lambda q_2. \end{cases} \quad (1.14)$$

Загальний розв'язок системи (1.14)

$$q_2 = c_2 e^{\lambda t}, \quad q_1 = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}. \quad (1.15)$$

Рівняння траєкторій

$$q_1 = \frac{c_1}{c_2} q_2 + \frac{1}{\lambda} q_2 \ln \frac{q_2}{c_2} \quad \text{та} \quad q_2 = 0. \quad (1.16)$$

Особлива точка називається *виродженим вузлом* (рис. 1.5 у випадку $\lambda < 0$).

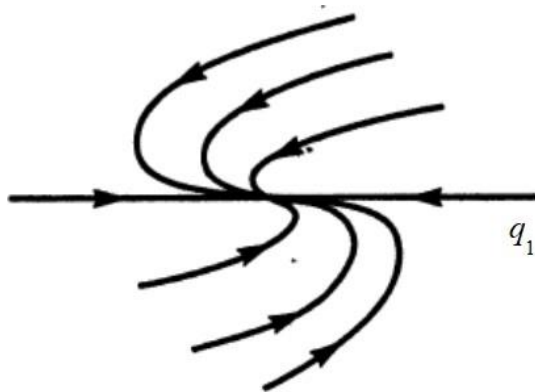


Рис. 1.5. Особлива точка вироджений вузол

Вузли двох останніх типів є *стійкими*, якщо $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, і *нестійкими*, якщо $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Д. Якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$ – комплексні корені, то власні вектори комплексні, лінійно незалежні (оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Нехай w – власний вектор для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, тобто

$$Aw = (\alpha + i\beta)w.$$

Замінюючи всі числа, включаючи координатори вектора w , на спряжені, отримуємо

$$A\bar{w} = -(\alpha + i\beta)\bar{w}.$$

Тобто \bar{w} – власний вектор для $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Нехай $w = u + iv$, де вектори u та v – дійсні. Тоді $\bar{w} = u - iv$.
Вектори

$$u = \frac{w + \bar{w}}{2} \quad \text{та} \quad v = \frac{w - \bar{w}}{2i}$$

лінійно незалежні, оскільки отримуються з w та \bar{w} невідродженим лінійним перетворенням.

Вектор-функція $x = ce^{(\alpha+i\beta)t}w$, де c – будь-яке число, є розв'язком системи (1.11). Підставляючи $c = \rho e^{i\theta}$, $w = u + iv$, отримуємо

$$\begin{aligned} x &= \rho e^{\alpha t + i(\beta t + \theta)}(u + iv) = (q_1(t) + iq_2(t))(u + iv), \\ q_1(t) &= \rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta), \quad q_2(t) = \rho e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Переходячи до полярних координат r, φ , тобто поклавши

$$q_1 = r \cos \varphi, \quad q_2 = r \sin \varphi,$$

отримуємо

$$r = \rho e^{\alpha t}, \quad \varphi = \beta t + \theta, \quad (1.18)$$

де $\rho \geq 0$ та θ – довільні сталі. Формула (1.18) дає всі дійсні розв'язки, оскільки початкова точка розв'язку

$$q_1(0) = r \cos \varphi, \quad q_2(0) = r \sin \varphi$$

є довільною точкою площини q_1, q_2 .

У випадку $\alpha = 0$, тобто $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ траєкторії (1.18) – кола з центром в початку координат і радіусом $r = \text{const}$ (рис. 1.6).

Особлива точка називається *центром*.

У випадку $\alpha \neq 0$ траєкторії (1.18) – логарифмічні спіралі

$$\varphi = \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho} + \theta \quad (0 < r < \infty),$$

які роблять нескінченно багато обертів навколо початку координат (рис. 1.7). Особлива точка називається *фокусом*. Фокус *стійкий*, як на рис. 1.7, якщо $\alpha < 0$ і *нестійкий*, якщо $\alpha > 0$.

Е. Якщо матриця системи A має одне чи два власних значення рівних нулю, то її жорданова форма має один з трьох виглядів

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

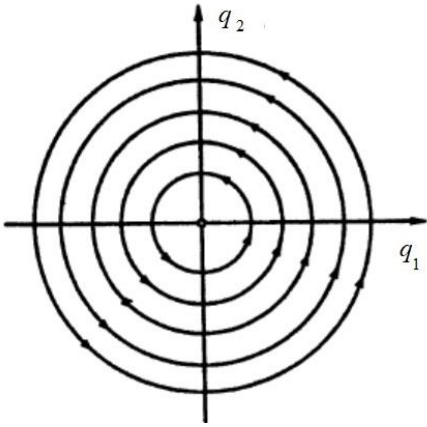


Рис. 1.6. Особлива точка центр

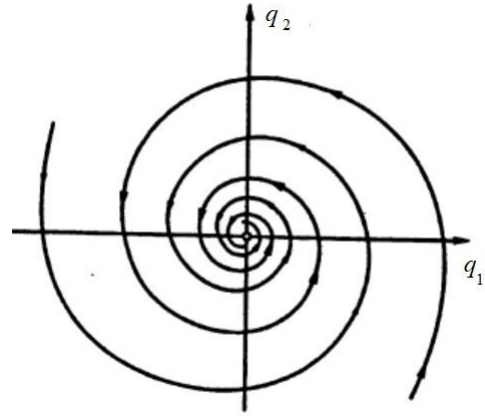


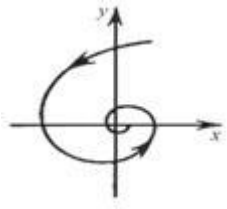
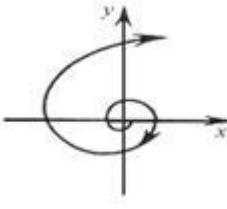
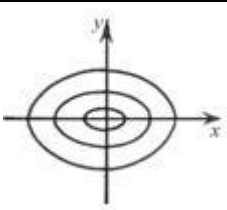
Рис. 1.7. Особлива точка фокус

Оскільки $\det A = 0$, то система $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ має нескінченно багато розв'язків, а відтак особливих точок у системи (1.11) нескінченно багато.

Класифікацію особливих точок системи (1.11) зручно зобразити в таблиці.

Таблиця 1.1

Власні значення	Тип особливої точки	Графічна інтерпретація
1	2	3
1. Дійсні корені рівняння одного знака: а) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Стійкий вузол	
б) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Нестійкий вузол	
2. Дійсні корені різного знака $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Сідло	

1	2	3
3. Комплексні корені $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ а) $\alpha < 0$	Стійкий фокус	
б) $\alpha > 0$	Нестійкий фокус	
в) $\alpha = 0$	Центр	

Особливі точки, що притягують до себе фазові траєкторії, наприклад, стійкий вузол і стійкий фокус, є атракторами. Але атракторами в дисипативних системах можуть бути не лише стійкі стаціонарні точки, а й замкнені фазові криві, що відповідають періодичному руху. Нижче ці питання будуть розглянуті більш детально.

1.3.2. Точки рівноваги динамічних систем третього порядку

Розглянемо поведінку розв'язків динамічної системи

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= P(x, y, z), \\
 \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, z), \\
 \frac{dz}{dt} &= R(x, y, z).
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

Тут $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – неперервно-диференційовані функції. Не обмежуючи загальності припускаємо, що початок координат є точкою

рівноваги системи (1.19) [14]. Після лінеаризації правої частини системи (1.19) в околі початку координат одержуємо систему лінійного наближення третього порядку. Спочатку розглянемо частинний випадок такої системи, а саме, припустимо, що

$$\frac{\partial P(0)}{\partial z} = \frac{\partial Q(0)}{\partial z} = \frac{\partial R(0)}{\partial x} = \frac{\partial R(0)}{\partial y} = \frac{\partial R(0)}{\partial z} = 0.$$

Тоді в системі лінійного наближення достатньо розглядати лише перші два рівняння

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Характеристичне рівняння системи (1.20) має вигляд

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{1.21}$$

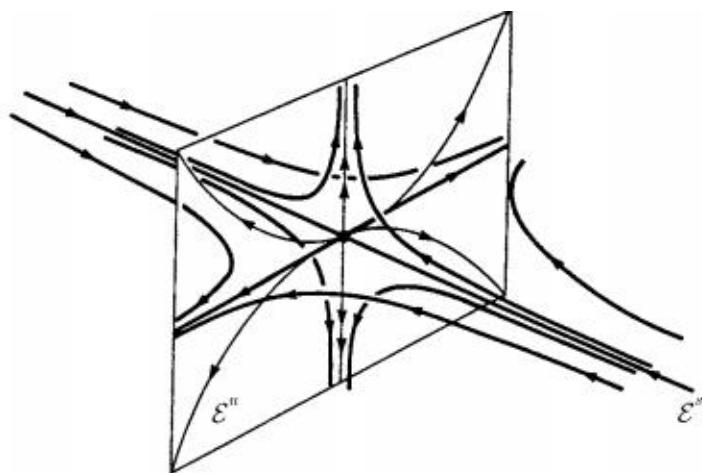


Рис. 1.8. Фазовий портрет сідла

Корені характеристичного рівняння (1.21) визначаються співвідношенням

$$\lambda_{1,2} = (a_{11} + a_{22})/2 \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2/4 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Першим основні положення рівноваги двовимірних систем означив Пуанкаре. Залежно від характеристичних показників $\lambda_{1,2}$ виділяють різні типи фазових портретів складних типів.

Якщо характеристичні показники існують як зліва, так і праворуч від осі, то фазові портрети є або сідлом, або сідло-фокусом (рис. 1.8, 1.9).

Розглянемо ще один випадок. Припустимо, що система лінійного наближення має вигляд

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y, \quad \dot{z} = \lambda_3 z. \quad (1.22)$$

Якщо жорданова форма матриці системи лінійного наближення є діагональною, то існує власний базис, в якому система лінійного наближення має вигляд (1.22). Припустимо, що $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_s < 0$ ($s = 2, 3$). Тоді фазовий портрет системи (1.22) подібний до *сідла*. Власне, таке положення рівноваги завжди нестійке.

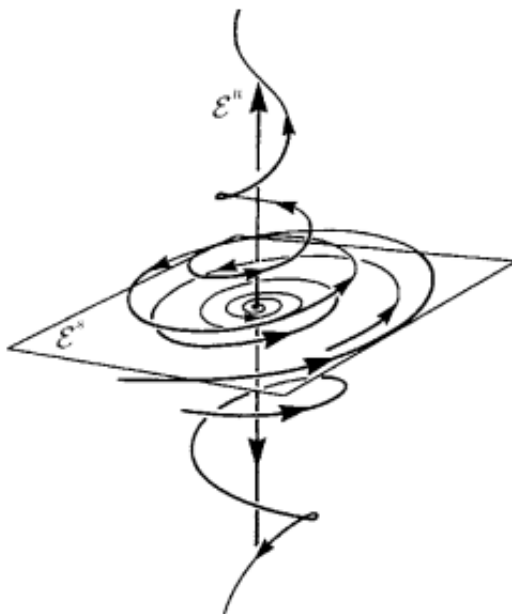


Рис. 1.9. Сідло-фокус в фазовому підпросторі: двовимірному – E^s та одновимірному стійкому підпросторі E^u

Оскільки $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, то при $t \rightarrow +\infty$ координати y та z експоненціально зменшуються до нуля, тоді як координата x прямує до

нескінченності. З іншого боку, координата x зменшується до нуля при $t \rightarrow -\infty$. Отже, всі траєкторії, що лежать в стійкому підпросторі $\mathcal{E}^s = \{x, y, z: x = 0\}$, прямують до O при $t \rightarrow +\infty$, водночас всі траєкторії, що лежать в нестійкому підпросторі $\mathcal{E}^u = \{x, y, z: y = z = 0\}$, прямують до O при $t \rightarrow -\infty$. Траєкторії поза $\mathcal{E}^s \cup \mathcal{E}^u$ проходять поблизу O , однак не потрапляють в точку рівноваги.

Якщо один з коренів характеристичного рівняння системи лінійного наближення дійсний, а два інших – комплексно спряжені числа, причому знак їхньої дійсної частини протилежний знаку дійсного кореня, то такий фазовий портрет називається *сідло–фокус*. Положення рівноваги сідло-фокус завжди нестійке.

Траєкторії системи при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{2,3} = -\rho \pm i\omega$, де $\rho > 0$, в околі сідло-фокуса проходять аналогічно. Різниця полягає в тому, що для сідла точка O в стійкому підпросторі є вузлом, а для сідло–фокуса – стійким фокусом.

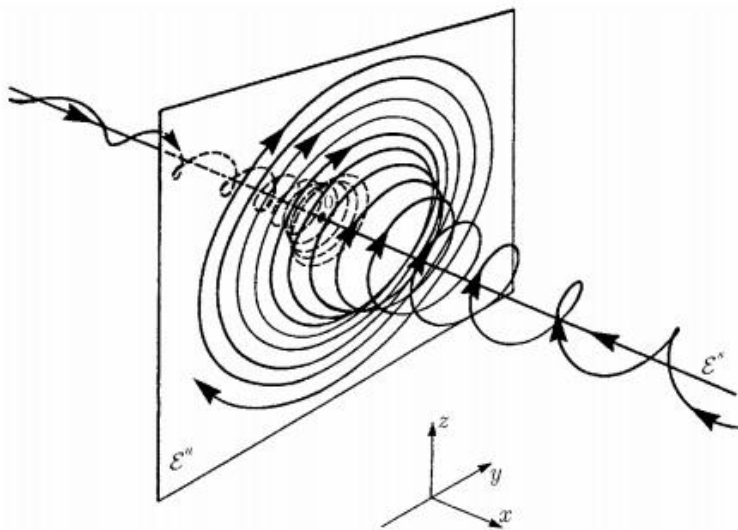


Рис. 1.10. Сідло-фокус, у випадку $\lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2 > 0, \operatorname{Re} \lambda_3 > 0$

Випадок, коли $\lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2 > 0, \operatorname{Re} \lambda_3 > 0$, зводиться до двох випадків, розглянутих вище, за допомогою заміни змінної часу на протилежну за знаком $t = -\tau \rightarrow -\infty$ (рис. 1.10).

1.4. Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестационарних систем

1.4.1. Основні означення

При дослідженні розв'язку системи на стійкість виникає питання, у який спосіб зміна початкового стану системи впливає на розв'язок системи [13, 16, 39, 42, 44, 53]. Якщо мала зміна (збурення) початкових умов призводить до несуттєвої зміни розв'язку, то у такому випадку відповідний розв'язок системи є стійким. У випадку, якщо мале збурення початкових умов призводить до суттєвого збурення розв'язку, то такий розв'язок інтерпретують як нестійкий. Таке розуміння стійкого розв'язку є описовим.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), t \geq t_0, \quad (1.23)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n – вимірний вектор стану системи (1.23), $f(x, t)$ – вектор-функція розмірності n , яка задовольняє умовам теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Будемо позначати $x(t, x_0, t_0)$ розв'язок задачі Коші (1.23), $x(t_0) = x_0, t \geq t_0$.

Для того, щоб дати математичне означення стійкості розв'язку системи (1.23), необхідно вказати розв'язок, який досліджується на стійкість. Такий розв'язок називається *незбуреним* (або в застосуваннях – розрахунковим). Змінимо початкові умови, що відповідають незбуреному розв'язку і знайдемо розв'язок системи (1.23), який відповідає зміненим (збуреним) початковим умовам. Одержаний розв'язок в теорії стійкості називається *збуреним*.

Без обмеження на загальність міркувань будемо вважати, що $x(t) = 0, t \geq t_0$ є незбуреним розв'язком. У іншому випадку можна заміною змінних перейти до системи диференціальних рівнянь, для якої незбурений розв'язок буде нульовим.

Дійсно, нехай $z(t)$ є незбуреним розв'язком. Зробимо заміну

$$x = y + z(t).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} = f(x, t) - f(z(t), t) = f(y + z(t), t) - f(z(t), t).$$

Позначимо

$$F(y, t) = f(y + z(t), t) - f(z(t), t).$$

Одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t),$$

для якої $y(t) = 0, t \geq t_0$ є незбуреним розв'язком.

Отже, вважаємо, що $x(t) = 0, t \geq t_0$ є розв'язком системи (1.23), який досліджується на стійкість, тобто є *незбуреним*. Інші розв'язки системи (1.23) будемо називати збуреними. Слід зазначити, що $x(t) = 0, t \geq t_0$ є точкою рівноваги системи (1.23), так як за означенням розв'язку з (1.23) впливає $f(0, t) = 0, t \geq t_0$.

Означення 1.1 *Незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи диференціальних рівнянь (1.23) будемо називати стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

як тільки $\|x_0\| < \delta$.

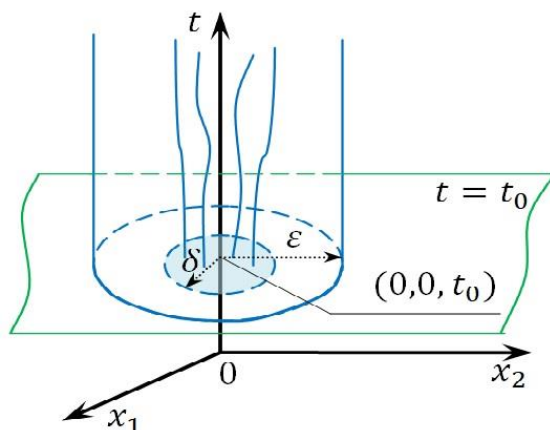


Рис. 1.11. *Стійкість за Ляпуновим незбуреного розв'язку*

Зауважимо, що в означенні 1.1 має місце $0 < \delta(\varepsilon, t_0) \leq \varepsilon$. Якщо в означенні 1.1 $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$, то нульовий розв'язок системи (1.23) називається рівномірно стійким за Ляпуновим.

Означення 1.2. Незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи диференціальних рівнянь (1.23) називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він є стійким за Ляпуновим, тобто має місце означення 1.1 та існує $\Delta > 0$, для якого

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0, \|x_0\| \leq \Delta.$$

Множина

$$\Omega(t_0) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n: \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0\}$$

називається областю асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (1.23).

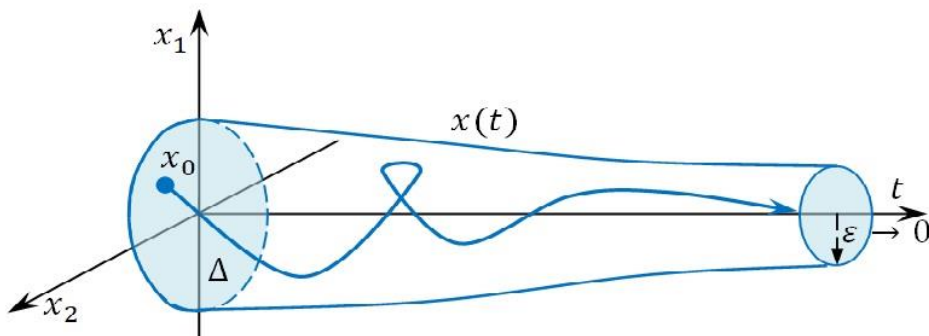


Рис. 1.12. Асимптотично стійкий за Ляпуновим розв'язок

Якщо $\Omega(t_0) = \mathbb{R}^n$, то незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи диференціальних рівнянь (1.23) називається асимптотично стійким в цілому, або глобально асимптотично стійким. Якщо нульовий розв'язок системи (1.23) є глобально асимптотично стійким, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0$ для довільного $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Означення 1.3. Якщо означення 1.1 не виконується, то незбурений розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи (1.23) називається нестійким за Ляпуновим.

Приклад 1.5 Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

в залежності від параметра a . Загальний розв'язок даного рівняння запишемо в формі Коші

$$x(t) = x_0 e^{at}, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

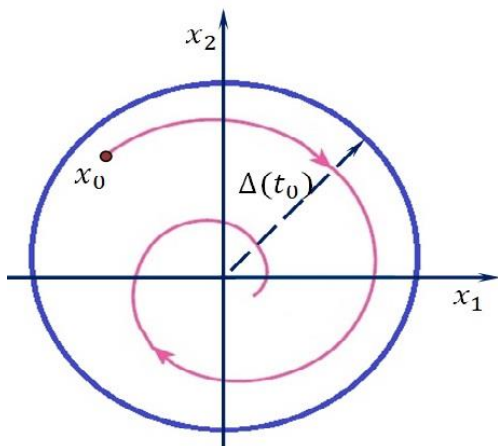


Рис. 1.13. Геометрична інтерпретація асимптотичної стійкості за Ляпуновим

Нехай $a \leq 0$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покажемо, що можна підібрати $\delta > 0$ так, що виконується означення 1.1. Дійсно, вибравши $\delta = \varepsilon$, $|x_0| < \delta$ маємо,

$$|x(t)| = |x_0| \cdot e^{at} \leq |x_0| < \delta = \varepsilon,$$

$t \geq 0$. Отже, має місце означення 1.1 і при $a \leq 0$ нульовий розв'язок стійкий за Ляпуновим.

Оскільки при $a < 0$ для довільного $x(0) = x_0$ справджується

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_0| \cdot e^{at} = 0,$$

то виконується означення 1.2 і нульовий розв'язок є асимптотично стійким за Ляпуновим, причому в цілому.

Якщо $a > 0$, то для $\varepsilon = 1$, яким би не було $\delta \in (0,1)$, існують $x_0 = \frac{\delta}{2}$, $t \geq \frac{1}{a} \ln \frac{2}{\delta}$ такі, що

$$|x(t)| = |x_0| \cdot e^{at} = \frac{\delta}{2} \cdot e^{at} \geq 1 = \varepsilon.$$

Отже, означення 1.1 не виконується і при $a > 0$ нульовий розв'язок нестійкий за Ляпуновим.

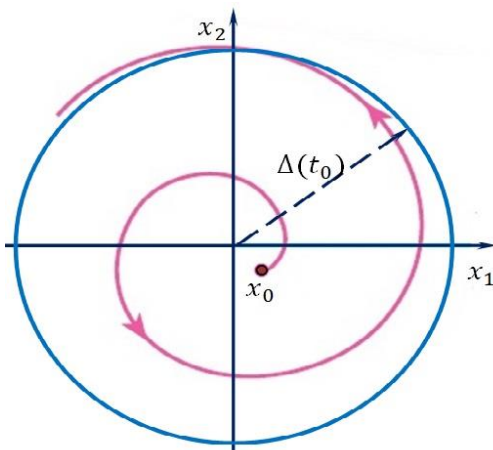


Рис. 1.14. Геометрична інтерпретація нестійкості за Ляпуновим

Для дослідження стійкості незбуреного розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.23) застосовуються *перший і другий методи Ляпунова*.

I. Суть першого методу Ляпунова полягає в тому, що аналіз стійкості незбуреного розв'язку системи диференціальних рівнянь ґрунтується на тому, що ми знаходимо структуру загального розв'язку (1.23), виходячи з якої судимо про стійкість незбуреного руху. Основна проблема першого методу Ляпунова полягає в тому, що конструювання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.23) можливе для вузького класу задач, що обмежує область використання методу.

II. Другий метод Ляпунова базується на застосуванні спеціальних функцій до аналізу стійкості незбуреного руху. Такі функції називаються функціями Ляпунова. Перевагою другого методу Ляпунова в порівнянні з першим є те, що для його застосування не обов'язково знати загальний розв'язок (1.23). Недоліком цього методу є відсутність ефективної загальної методики конструювання функцій Ляпунова.

1.4.2. Дослідження стійкості лінійних нестационарних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1.24)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n – вимірний вектор стану системи (1.24), $A(t)$ – $n \times n$ –матриця з неперервними компонентами, $t \geq t_0$ [13, 16, 42, 44]. Загальний розв’язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (1.24) можна записати у формі Коші

$$x(t, x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0, t \geq t_0, \quad (1.25)$$

де $X(t, t_0)$ – фундаментальна матриця розв’язків системи (1.24), нормована за моменом t_0 , $x(t_0) = x_0$. За означенням фундаментальної матриці

$$\frac{dX(t, t_0)}{dt} = A(t)X(t, t_0), X(t_0, t_0) = E. \quad (1.26)$$

Тут E – одинична матриця розмірності $n \times n$.

Без обмеження загальності вважаємо, що $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ є незбуреним розв’язком. В іншому разі, як і попередньому пункті, робимо заміну змінних і приходимо до лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь з матрицею $A(t)$. Дійсно, нехай $z(t)$ є незбуреним розв’язком. Зробимо заміну

$$x = y + z(t).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} = A(t)x - A(t)z(t) = A(t)y.$$

Одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

для якої $y(t) = 0$, $t \geq t_0$ є незбуреним розв’язком. Це означає, що характер стійкості будь-якого незбуреного розв’язку системи (1.24) визначається характером стійкості нульового розв’язку цієї системи.

Проблема дослідження стійкості незбуреного розв’язку системи (1.24) розв’язується шляхом аналізу властивостей фундаментальної матриці $X(t, t_0)$.

Теорема 1.1 Для того, щоб нульовий розв'язок системи (1.24) був стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ цієї системи була обмеженою, $t \geq t_0$.

Доведення. Необхідність. Від супротивного. Припустимо, що нульовий розв'язок системи (1.24) є стійким за Ляпуновим, але її фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ необмежена, $t \geq t_0$. Це означає, що серед всіх стовпців матриці $X(t, t_0)$ існує хоч би один j – й стовпець $x^{(j)}(t)$, а також послідовність $t_k \geq t_0, k = 1, 2, \dots$, для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(j)}(t_k)\| = \infty.$$

Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$. Оскільки нульовий розв'язок системи (1.24) є стійким за Ляпуновим, то за означенням 1.1 існує $\delta > 0$ таке, що

$$\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad (1.27)$$

як тільки $\|x_0\| < \delta$.

З умови $X(t_0, t_0) = E$ маємо, що j – й стовпчик матриці $X(t_0, t_0)$ співпадає з j – м ортом $e^{(j)}$, тобто $x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$. З (1.26) також слідує, що будь-який стовпчик фундаментальної матриці є розв'язком системи (1.24). Отже, $x^{(j)}(t)$ є розв'язком системи (1.24) і за формулою Коші (1.25)

$$x^{(j)}(t) = X(t, t_0)e^{(j)}.$$

Розглянемо $y(t) = \frac{\delta}{2}x^{(j)}(t)$. Оскільки система (1.24) лінійна, то $y(t)$ є її розв'язком, при цьому $\|y(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. З (1.27) випливає $\|y(t)\| < \varepsilon, t \geq t_0$. Але

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y(t_k)\| = \frac{\delta}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(j)}(t_k)\| = \infty.$$

Одержали протиріччя.

Достатність. Якщо фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ обмежена, $t \geq t_0$, то знайдеться константа $C > 0$, така, що $\|X(t, t_0)\| \leq C, t \geq t_0$. Тоді з формули Коші (1.25) випливає

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \|X(t, t_0)\| \|x_0\| \leq C \|x_0\|, t \geq t_0. \quad (1.28)$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Тоді з (1.28) при $\|x_0\| < \delta$ одержуємо

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq C\|x_0\| < C\delta = \varepsilon, t \geq t_0.$$

З означення 1.6 випливає, що нульовий розв'язок системи (1.24) є стійким за Ляпуновим. □

Приклад 1.6 Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Фундаментальна матриця цієї системи має вигляд

$$X(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Норма фундаментальної матриці є обмеженою, так як

$$\|X(t, 0)\| = \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{2}.$$

За теоремою 1.1 нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь є стійким за Ляпуновим.

Теорема 1.2 *Для того, щоб нульовий розв'язок системи (1.24) був нестійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ цієї системи не була обмеженою, $t \geq t_0$.*

Доведення теореми випливає з означення 1.3 нестійкого незбуреного розв'язку та з теореми 1.1.

Теорема 1.3 *Для того, щоб нульовий розв'язок системи (1.24) був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t, t_0)\| = 0$.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, від супротивного, що нульовий розв'язок системи (1.24) є асимптотично стійким за Ляпуновим, але умова $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t, t_0)\| = 0$ не виконується. Тоді знайдеться j -й стовпчик $x^{(j)}(t)$ матриці $X(t, t_0)$ такий, що $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x^{(j)}(t)\| \neq 0$. З умови $X(t_0, t_0) = E$ маємо $x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$, де $e^{(j)}$ – j -й орт.

Зафіксуємо довільне $\Delta > 0$ і розглянемо $y(t) = \frac{\Delta}{2} x^{(j)}(t)$. Оскільки $x^{(j)}(t)$ є розв'язком системи (1.24) і система (1.24) лінійна, то $y(t)$ є розв'язком цієї системи, при цьому $\|y(t_0)\| = \frac{\Delta}{2} < \Delta$. Отже,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = \frac{\Delta}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x^{(j)}(t)\| \neq 0.$$

Одержали протиріччя з означенням асимптотичної стійкості розв'язку.

Достатність. Якщо $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t, t_0)\| = 0$, то фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ є обмеженою при $t \geq t_0$. За теоремою 1.1 нульовий розв'язок системи (1.24) є стійким за Ляпуновим. З формули Коші (1.25) випливає

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \|X(t, t_0)\| \|x_0\|, t \geq t_0. \quad (1.29)$$

Для довільного $\Delta > 0$ і початкових умов, що задовольняють умову $\|x_0\| < \Delta$ з нерівності (1.29) одержуємо $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0$. □

Слід зазначити, що в умовах теореми 1.3 область асимптотичної стійкості співпадає з \mathbb{R}^n . Це означає, що вказана теорема дає умови асимптотичної стійкості в цілому.

Наслідок 1.1 Для того, щоб нульовий розв'язок системи (1.24) був стійким (нестійким) за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t)$ цієї системи (не обов'язково нормована за моментом t_0) була обмеженою (необмеженою), $t \geq t_0$. Для того, щоб нульовий розв'язок системи (1.24) був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t)$ цієї системи володіла властивістю $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$.

Доведення наслідку випливає з того, що $X(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$.

Приклад 1.7 Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases}$$

Фундаментальна матриця цієї системи має вигляд

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Норма фундаментальної матриці $\|X(t)\| = \sqrt{2(e^{2t} + e^{-2t})}$ є необмеженою при $t \geq 0$. Отже, нульовий розв'язок системи є нестійким.

Приклад 1.4 Проаналізуємо стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Фундаментальну матрицю можна записати так

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Норма фундаментальної матриці $\|X(t)\| = \sqrt{2e^{-2t} + 5e^{-4t}}$, тому $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$. Отже, нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким.

1.4.3. Стійкість розв'язків систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца

Припустимо, що в системі (1.24) матриця A цієї системи має постійні елементи. Отже, система має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (1.30)$$

Загальний розв'язок системи (1.30) і її фундаментальну матрицю $X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ одержують на основі фундаментальної системи розв'язків [13, 16, 39, 42, 44, 53]. Фундаментальна система розв'язків складається з n лінійно незалежних вектор-функцій $x^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, які знаходяться на основі власних значень і відповідних власних векторів матриці A . Тоді загальний розв'язок системи (1.30) визначається так

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^{(j)}(t), \quad t \geq t_0,$$

де c_j , $j = 1, 2, \dots, n$ – довільні константи. Тому умови стійкості лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (1.30) аналізують, виходячи з власних значень матриці A , враховуючи структуру власного базису.

Розглянемо метод знаходження фундаментальної системи розв'язків лінійної стаціонарної системи (1.30). Для цього визначаємо власні числа матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= |A - \lambda E| = \\ &= p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Тут p_0, p_1, \dots, p_n – дійсні числа, $p_0 \neq 0$.

Кожному кореню характеристичного рівняння відповідає один член фундаментальної системи розв'язків, лінійна комбінація яких складає загальний розв'язок системи (1.30). Розрізняють такі випадки.

1. Корінь λ рівняння (1.31) дійсний, кратності 1. Тоді відповідний йому член фундаментальної системи розв'язків записується так

$$x(t) = he^{\lambda t},$$

де h – власний вектор матриці A , який відповідає λ , тобто

$$(A - \lambda E)h = 0, h \neq 0.$$

Якщо корені λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ характеристичного рівняння (1.31) є дійсними і різними, то загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь записується так

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j h^{(j)} e^{\lambda_j t}, \quad t \geq t_0,$$

де c_j – довільні константи, $h^{(j)}$ – власні вектори матриці A , тобто

$$(A - \lambda_j E)h^{(j)} = 0, \quad h^{(j)} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Корінь λ характеристичного рівняння (1.31) дійсний і має кратність k . В цьому випадку аналізують ранг матриці $A - \lambda E$. Якщо $\text{rang}(A - \lambda E) = r$ і $r = n - k$, то існує k лінійно незалежних власних векторів матриці A , що відповідають власному числу λ . Отже, рівняння $(A - \lambda E)h = 0$ має k лінійно незалежних розв'язків $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(k)}$.

Таким способом одержуємо k членів фундаментальної системи розв'язків системи (1.30)

$$x^{(j)}(t) = h^{(j)}e^{\lambda t}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Якщо $\text{rang}(A - \lambda E) = r$ і $r > n - k$, то існує $n - r$ лінійно незалежних власних векторів

$$h^{(1)}, \quad h^{(2)}, \dots, \quad h^{(n-r)}$$

матриці A , що відповідають власному числу λ . Тоді вказаний власний базис слід доповнити, додаючи $s = k - (n - r)$ векторів, які шукаються за правилом

$$Ag^{(0)} = \lambda g^{(0)}, \quad Ag^{(j)} = \lambda g^{(j)} + g^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

де $g^{(0)}$ – один з власних векторів матриці A , що відповідає власному числу λ . Для визначеності покладемо $g^{(0)} = h^{(n-r)}$. Тоді система векторів

$$\{h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(n-r)}, g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(s)}\}$$

утворює базис Жордана, який відповідає власному числу λ . У цьому випадку члени фундаментальної системи розв'язків системи (1.31) такі

$$\begin{aligned} x^{(j)}(t) &= h^{(j)}e^{\lambda t}, \quad j = 1, 2, \dots, n - r, \\ x^{(n-r+1)}(t) &= (g^{(0)}t + g^{(1)})e^{\lambda t}, \\ x^{(n-r+2)}(t) &= \left(\frac{g^{(0)}}{2!}t^2 + g^{(1)}t + g^{(2)} \right) e^{\lambda t}, \\ &\vdots \\ x^{(k)}(t) &= \left(\frac{g^{(0)}}{s!}t^s + \frac{g^{(1)}}{(s-1)!}t^{s-1} + \dots + g^{(s-1)}t + g^{(s)} \right) e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

де $g^{(0)} = h^{(n-r)}$.

3. Корінь λ характеристичного рівняння (1.31) – комплексний кратності 1. Тобто $\lambda = a + ib$, де a, b – дійсні числа, $i^2 = -1$ – комплексна одиниця. Тоді $\bar{\lambda} = a - ib$ – також корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку маємо два члени фундаментальної системи розв'язків.

Кореню λ відповідає комплексний власний вектор $h = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Два лінійно незалежні розв'язки будуються таким способом

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= \operatorname{Re}[he^{\lambda t}] = \operatorname{Re}[(u + iv)e^{at}(\cos bt + i\sin bt)] = \\ &= e^{at}[u\cos bt - v\sin bt], \\ x^{(2)}(t) &= \operatorname{Im}[he^{\lambda t}] = \operatorname{Im}[(u + iv)e^{at}(\cos bt + i\sin bt)] = \\ &= e^{at}[u\sin bt + v\cos bt]. \end{aligned}$$

Випадок кратних комплексних коренів є комбінацією другого і третього випадків.

Аналіз структури загального розв'язку приводить нас до такої теореми.

Теорема 1.4 *Для того, щоб незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (1.30) був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння (1.31) мали від'ємні дійсні частини $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.*

Якщо серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи звичайних диференціальних рівнянь (1.30) є нестійким.

Нехай корені характеристичного рівняння (1.31) задовольняють умови: $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = m + 1, \dots, n$. Якщо корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – прості, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (1.30) є стійким. Якщо серед $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ є кратні, але вони задовольняють умову $r = n - k$, $r = \operatorname{rang}(A - \lambda E)$, k – кратність кореня, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (1.30) є стійким. В іншому випадку розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ є нестійким.

Приклад 1.7 Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Запишемо характеристичний многочлен

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Коренями характеристичного рівняння є $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. За теоремою 1.4 нульовий розв'язок системи є стійким. Втім умова асимптотичної стійкості не виконується.

Приклад 1.8 Здійснимо аналіз стійкості нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Характеристичний многочлен має вигляд

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Коренями характеристичного рівняння є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Оскільки є корінь з додатною дійсною частиною, то за теоремою 1.4 нульовий розв'язок системи є нестійким.

Якщо порядок системи (1.30) перевищує 2, то застосування теореми 1.4 в загальному випадку ускладнюється. Тоді доцільно застосовувати *критерій Гурвіца*. Критерій Гурвіца не застосовується до знаходження коренів характеристичного рівняння системи, але дозволяє аналізувати знак дійсної частини цих коренів. Це, в свою чергу, дає змогу ефективно застосовувати теорему 1.4.

Вважаємо, що в характеристичному рівнянні (1.31) справджується умова $p_0 > 0$. За коефіцієнтами характеристичного многочлена формуємо матрицю Гурвіца. Вона має вигляд

$$\Gamma = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

де $p_i = 0$, $i > n$. Позначимо Δ_i – головні мінори матриці Γ , $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 1.5 (критерій Гурвіца) Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння (1.31) мали від'ємні дійсні частини необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори матриці Гурвіца були додатними

Разом з теоремою 1.4 критерій Гурвіца дає необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (1.30), а саме, нульовий розв'язок системи (1.30) є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли головні мінори матриці Гурвіца додатні: $\Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Приклад 1.9 За допомогою критерія Гурвіца визначимо, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок

$$x''' + ax'' + bx' + 4x = 0$$

буде асимптотично стійким.

Знайдемо характеристичний многочлен рівняння. Він має вигляд

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 4.$$

За виглядом характеристичного многочлена формуємо матрицю Гурвіца

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 4 & b & a \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо головні мінори матриці Γ :

$$\Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = ab - 4, \quad \Delta_3 = 4(ab - 4).$$

Застосовуючи критерій Гурвіца, одержуємо, що при всіх a і b таких, що $a > 0, ab > 4$, нульовий розв'язок запропонованого рівняння є асимптотично стійким.

Приклад 1.10 Дослідимо на стійкість лінійну однорідну двовимірну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases}$$

Матриця системи має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

а її характеристичний многочлен записується так

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - cb = \lambda^2 - \text{tr}A\lambda + \det A.$$

Тут $\text{tr}A = a + d$ – слід матриці A , $\det A = ad - bc$ – її визначник. Згідно з критерієм Гурвіца система є асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли

$$\text{tr}A < 0, \quad \begin{vmatrix} -\text{tr}A & 1 \\ 0 & \det A \end{vmatrix} > 0,$$

тобто якщо

$$\text{tr}A < 0, \quad \det A > 0. \quad (1.32)$$

Якщо виконується (1.32) і

$$\text{tr}^2 A > 4\det A,$$

то маємо пару дійсних від'ємних власних чисел матриці A

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}A \pm \sqrt{\text{tr}^2 A - 4\det A} \right).$$

Фазовий портрет – стійкий вузол.

Якщо виконуються нерівності (1.32) і

$$\text{tr}^2 A < 4\det A,$$

то маємо пару комплексно–спряжених власних чисел з від'ємною дійсною частиною

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}A \pm i\sqrt{4\det A - \text{tr}^2 A} \right), \quad i^2 = -1.$$

У цьому випадку фазовий портрет – стійкий фокус. Зауважимо, що якщо $\text{tr}A > 0$, то ми одержимо фазовий портрет нестійкий фокус.

Стійкий вироджений вузол з'являється, коли (1.32) виконується разом з умовами

- $\text{tr}^2 A = 4\det A$ (кратний корінь);
- $|b| + |c| \neq 0$ (матриця A – не діагональна).

Стійкому дискретичному вузлу відповідає випадок

$$a = d < 0, \quad c = b = 0.$$

Система є стійкою, але не асимптотично, в таких випадках:

1. матриця A має пару суто уявних власних чисел. У цьому випадку

$$\operatorname{tr}A = 0, \quad \det A > 0.$$

Фазовий портрет – центр;

2. одне власне число матриці A дорівнює нулю, інше – від’ємне:

$$\operatorname{tr}A < 0, \quad \det A = 0;$$

3. A – нульова матриця.

1.4.4. Дослідження стійкості за першим наближенням

Розглянемо методику дослідження стійкості нелінійної системи за допомогою системи першого наближення [13, 16, 42, 44, 53].

Лема 1.1 (Гронуола – Белмана) *Нехай функції $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$ – неперервні при $t \geq t_0$, $c \geq 0$ – стала і при $t \geq t_0$ виконується нерівність*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(\tau)v(\tau)d\tau. \quad (1.33)$$

Тоді при $t \geq t_0$ справджується нерівність

$$u(t) \leq c e^{\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}. \quad (1.34)$$

Доведення. Позначимо

$$a(t) = c + \int_{t_0}^t u(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Оскільки функції $u(t)$, $v(t)$ є неперервними і інтеграл зі змінною верхньою межею від неперервної функції є неперервно диференційова-

ним, то функція $a(t)$ є неперервно диференційованою. Тому, враховуючи, що з (1.33) випливає $u(t) \leq a(t)$, одержуємо

$$a'(t) = u(t)v(t) \leq a(t)v(t).$$

Звідси

$$a'(t) - a(t)v(t) \leq 0.$$

Домножуємо ліву і праву частини останньої нерівності на додатню функцію $e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}$. У такий спосіб маємо

$$e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau} a'(t) - e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau} a(t)v(t) \leq 0.$$

Помітимо, що

$$e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau} a'(t) - e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau} a(t)v(t) = \frac{d}{dt} \left(a(t) e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau} \right).$$

Тому

$$\frac{d}{dt} \left(a(t) e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau} \right) \leq 0, t \geq t_0.$$

Остання нерівність означає, що функція $F(t) = a(t) e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}$ не зростає при $t \geq t_0$. Тому

$$F(t_0) = a(t_0) \geq F(t) = a(t) e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}, t \geq t_0.$$

Враховуючи, що $a(t_0) = c$, одержуємо $c \geq a(t) e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}, t \geq t_0$.

Звідси

$$a(t) \leq c e^{\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}, t \geq t_0.$$

Але, як наслідок (1.33), $u(t) \leq a(t)$, тому має місце (1.34). □

Розглянемо неавтономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (1.35)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n – вимірний вектор стану системи (1.23), $f(x, t)$ – вектор-функція розмірності n , яка є неперервною за t і неперервно диференційованою за x , $f(0, t) = 0$, $t \geq t_0$.

Нехай $x(t) = 0$ – незбурений розв’язок системи (1.35), $t \geq t_0$. Проводимо лінеаризацію правої частини системи диференціальних рівнянь (1.35) в околі точки $x(t) = 0$ і одержуємо

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + R(x, t), t \geq t_0, \quad (1.36)$$

де $A(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial x}$, $R(x, t) = f(x, t) - A(t)x$. При цьому система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, t \geq t_0$$

називається *системою першого наближення* для системи (1.36).

Припустимо, що в достатньо малому околі нуля $\|x\| < \delta$ має місце

$$\|R(x, t)\| \leq \alpha \|x\|, t \geq t_0, \quad (1.37)$$

де $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ – стала величина. Позначимо $X(t, \tau)$ фундаментальну матрицю системи першого наближення $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ нормовану за моментом $\tau \geq t_0$. Має місце така теорема.

Теорема 1.6 *Нехай існують незалежні від t , t_0 константи $k > 0$ і $\rho > 0$ такі, що при будь-яких $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$*

$$\|X(t, \tau)\| \leq k e^{-\rho(t-\tau)} \quad (1.38)$$

та має місце умова (1.37), $\alpha < \frac{\rho}{k}$. Тоді незбурений розв’язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи звичайних диференціальних рівнянь (1.35) асимптотично стійкий за Ляпуновим. При цьому для будь-якого розв’язку $x(t, x_0, t_0)$ системи звичайних диференціальних рівнянь (1.35), для якого $\|x(t_0)\| < \frac{\delta}{k}$ справджується нерівність

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq e^{-(\rho - \alpha k)(t - t_0)} \delta, \quad t \geq t_0. \quad (1.39)$$

Доведення. Подамо розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ системи звичайних диференціальних рівнянь (1.36) у вигляді

$$x(t) = X(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t X(t, \tau)R(x(\tau), \tau)d\tau, t \geq t_0.$$

Враховуючи (1.37), (1.38), одержуємо

$$\|x(t)\| \leq ke^{-\rho(t-t_0)}\|x(t_0)\| + k\alpha \int_{t_0}^t e^{-\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|d\tau, t \geq t_0.$$

Звідси

$$\|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)} \leq k\|x(t_0)\| + k\alpha \int_{t_0}^t e^{\rho(\tau-t_0)}\|x(\tau)\|d\tau, t \geq t_0.$$

Позначимо

$$u(t) = \|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)}, c = k\|x(t_0)\|, v = k\alpha.$$

Тоді з леми Гронуола–Белмана слідує

$$u(t) \leq k\|x(t_0)\|e^{k\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Оскільки $u(t) = \|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)}$, $\|x(t_0)\| < \frac{\delta}{k}$, то

$$\|x(t)\| \leq e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}k\|x(t_0)\| \leq \delta e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Так як за умовами теореми $\rho - k\alpha > 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$. □

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), t \geq 0. \tag{1.40}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n – вимірний вектор стану системи (1.40), $f(x)$ – вектор-функція розмірності n , яка є неперервно диференційованою в деякому околі початку координат, $f(0) = 0$.

Припустимо, що $x(t) = 0$ – незбурений розв’язок системи (1.40), $t \geq t_0$. Лінеаризуємо праву частину системи (1.40) в околі точки $x = 0$. Одержимо систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x), t \geq 0, \quad (1.41)$$

де $A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$, $R(x) = f(x) - Ax$. Має місце така теорема.

Теорема 1.7 *Якщо всі власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матриці A мають від’ємні дійсні частини, тобто $\text{Re} \lambda_j < 0, j = 1, 2, \dots, n$, то незбурений розв’язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи звичайних диференціальних рівнянь (1.40) асимптотично стійкий за Ляпуновим.*

Якщо серед власних чисел матриці A знайдеться хоча б одне з додатною дійсною частиною, то незбурений розв’язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи (1.40) є нестійким.

Якщо $\max_{j=1,2,\dots,n} \text{Re} \lambda_j = 0$, тобто серед власних чисел матриці A знайдеться хоча б одне, дійсна частина якого рівна нулеві, при цьому решта власних чисел мають або від’ємну, або нульову дійсну частину, то наявність стійкості або нестійкості незбуреного розв’язку $x(t) = 0, t \geq t_0$ системи (1.40) залежить не тільки від матриці A , але і від функції $R(x)$ („критичний” випадок).

Приклад 1.11 Дослідимо на стійкість нульовий розв’язок скалярного рівняння

$$\dot{x} = g(x), \quad g \in C^1(-r, r), \quad g(0) = 0.$$

Згідно з теоремою 1.7

1. $x(t) = 0$ – асимптотично стійкий, якщо $g'(0) < 0$;
2. $x(t) = 0$ – нестійкий, якщо $g'(0) > 0$;
3. якщо $g'(0) = 0$, то про характер стійкості $x(t) = 0$ за першим наближенням нічого сказати не можна.

Наприклад, для рівняння

$$\dot{x} = x^3 - ax$$

маємо $g'(0) = -a$. Отже, при $a > 0$ розв’язок $x(t) = 0$ – асимптотично стійкий, при $a < 0$ розв’язок $x(t) = 0$ – нестійкий. При $a = 0$ справ-

джується $g'(0) = 0$ і перше наближення відповіді не дає. Безпосередній аналіз загального розв'язку в цьому випадку показує, що $x(t) = 0$ – нестійкий. Натомість для рівняння

$$\dot{x} = x^5 - x^3,$$

у якого також $g'(0) = 0$, аналіз загального розв'язку показує, що $x(t) = 0$ – асимптотично стійкий.

Приклад 1.12 Дослідимо, при яких значеннях параметра a має місце асимптотична стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - 5x_2 + x_1^4, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 2x_1x_2. \end{cases} \quad (1.42)$$

Система першого наближення для системи (1.42) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Знайдемо характеристичний многочлен системи першого наближення. Він має вигляд

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & -5 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1 + a)\lambda + a + 5.$$

Застосовуючи критерій Гурвіца, одержуємо, що якщо $1 + a < 0$, $a + 5 > 0$, то корені характеристичного многочлена мають від'ємні дійсні частини. Тому при $a \in (-5, -1)$ за теоремою 1.7 нульовий розв'язок системи (1.42) є асимптотично стійким за Ляпуновим.

Приклад 1.13 Дослідимо на стійкість положення рівноваги $x = 0$, $y = 0$ математичного маятника

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a \sin x - by, \end{cases}$$

де $a > 0$, $b > 0$ (наявне тертя), або $b = 0$ (без тертя).

Матриця першого наближення при $x = 0$, $y = 0$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні числа матриці A

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}).$$

Отже, при $a > 0$, $b > 0$ маємо $Re\lambda_{1,2} < 0$ і положення рівноваги $x = 0$, $y = 0$ є асимптотично стійким. Натомість при $a > 0$, $b = 0$ має місце $Re\lambda_{1,2} = 0$ і за першим наближенням нічого сказати не можна.

1.5. Другий метод Ляпунова

1.5.1. Функції Ляпунова

Функцією Ляпунова називають неперервну функцію, яка застосовується для аналізу стійкості розв'язків системи на основі теорем другого методу Ляпунова [13, 16, 39, 42, 44, 53]. Вона в певному сенсі характеризує відстань від збуреного розв'язку до незбуреного. Однією з основних властивостей таких функцій є знаковизначеність, або знакопостійність.

Розглянемо неперервну функцію $V: \mathcal{D}_H \rightarrow \mathbb{R}^1$, де $\mathcal{D}_H = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < H\}$, $H > 0$.

Означення 1.4 Функція $V(x)$ називається додатновизначеною, якщо $V(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}_H$, $x \neq 0$ і $V(0) = 0$. Функція $V(x)$ називається від'ємновизначеною, якщо $-V(x)$ — додатновизначена функція.

Так, функція $V(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2$ є додатновизначеною.

Означення 1.5 Функція $V(x)$ називається знакопостійною на множині \mathcal{D}_H , якщо вона є або недодатною, або невід'ємною для всіх $x \in \mathcal{D}_H$. В першому випадку функція називається від'ємнопостійною, а в другому — додатнопостійною. Функція $V(x)$ називається знаковмінною в області \mathcal{D}_H , якщо вона набуває в цій області як додатні, так і від'ємні значення.

Наприклад, функція $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2$ є додатнопостійною, а функція $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ є знаковмінною.

Додатновизначену функцію зручно вибирати як квадратичну форму

$$V(x) = x^T B x = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j. \quad (1.43)$$

Тут матриця $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ є симетричною, тобто $b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. У цьому випадку для дослідження функції Ляпунова на додатну визначеність застосовують таке твердження.

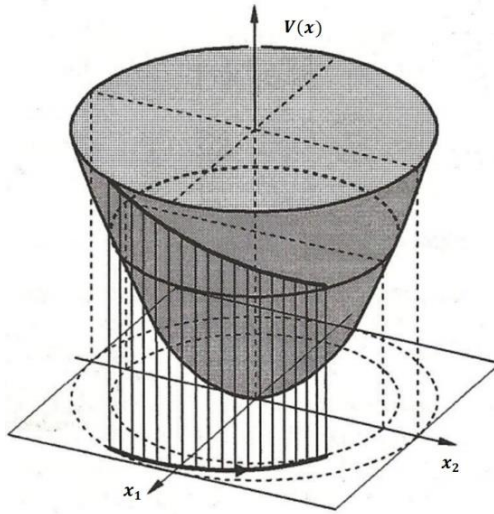


Рис. 1.15. Приклад додатновизначеної функції $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Теорема 1.8 (Критерій Сильвестра) Для того, щоб квадратична форма (1.43) була додатновизначеною необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори

$$\Delta_1 = b_{11}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \Delta_n = |B|$$

матриці B були додатні.

Для від'ємної визначеності квадратичної форми необхідно і достатньо, щоб головні мінори матриці B змінювали по черзі свої знаки, починаючи з від'ємного. Тобто $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$.

Приклад 1.14 Розглянемо функцію

$$V(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Матриця квадратичної форми

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори $\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = |B| = 3 > 0$. Відповідно до критерія Сильвестра $V(x_1, x_2)$ є додатновизначеною.

Для аналізу стійкості застосовують співвідношення Релея

$$\rho_{\min}(B) \leq \frac{x^T B x}{x^T x} \leq \rho_{\max}(B), \quad (1.44)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, B – $n \times n$ – симетрична додатновизначена матриця, $\rho_{\min}(B)$, $\rho_{\max}(B)$ – мінімальне і максимальне власні значення матриці B .

Розглянемо неперервну додатновизначену функцію $V(x)$, визначену в області \mathcal{D}_H . Проаналізуємо властивості пов'язаної з нею лінії рівня

$$\gamma_c = \{x \in \mathcal{D}_H: V(x) = c\}, \quad (1.45)$$

де $c > 0$.

Якщо $c = 0$, то співвідношення (1.45) задовольняє тільки одна точка $x = 0$. Ми покажемо, що при достатньо малому $c > 0$ поверхня (1.45) є замкненою в певному розумінні.

Означення 1.6 Поверхня γ_c називається замкненою відносно точки 0, якщо на довільній неперервній кривій, яка сполучає початок координат з точкою границі області \mathcal{D} , яка охоплює поверхню γ_c , існує хоч би одна точка, що належить γ_c .

Отже, доведемо, що якщо $V(x)$ є неперервною додатновизначеною функцією, то γ_c є замкненою відносно точки 0 для достатньо малих $c > 0$. Для цього виберемо довільне $r > 0$ і нехай ℓ – точна нижня грань функції $V(x)$ на множині $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = r\}$. Тобто

$$\inf_{\|x\|=r} V(x) = \ell.$$

Таким способом

$$V(x) \geq \ell, \quad x \in S_r.$$

Число ℓ – додатне, так як $V(x)$ – додатновизначена неперервна функція.

Візьмемо $c < \ell$. Не обмежуючи загальності $\mathcal{D} = K_r(0)$, $\partial\mathcal{D} = S_r$. Розглянемо довільну неперервну криву $\xi(s)$, $s \in [0,1]$, $\xi(0) = 0$, $\xi(1) \in S_r$. Тоді функція $f(s) = V(\xi(s))$ є неперервною, причому $f(0) = 0$, $f(1) \geq \ell > c$. Отже, знайдеться $\tau \in (0,1)$ таке, що $f(\tau) = V(\xi(\tau)) = c$. Це означає, що крива $\xi(s)$, $s \in [0,1]$ перетинає поверхню γ_c в момент τ . Звідси випливає, що кожній точці з $\partial\mathcal{D} = S_r$ відповідає точка на поверхні γ_c . Для того, щоб знайти таку відповідність, потрібно довільну точку $z \in S_r$ сполучити з початком координат кривою $\xi(s) = sz$, $s \in [0,1]$. Знайдеться точка $\tau \in (0,1)$ така, що $V(\xi(\tau)) = V(\tau z) = c$. Отже, $\tau z \in \gamma_c$.

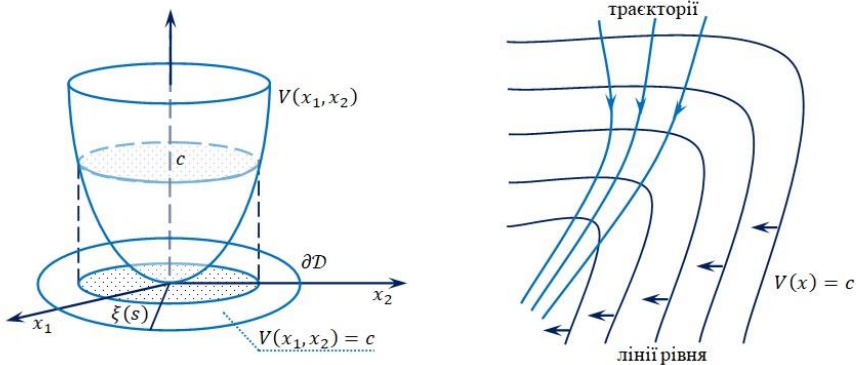


Рис. 1.16. *Замкненість поверхні рівня додатновизначеної функції відносно точки 0*

Властивість замкненості відносно точки 0 характерна тільки для знаковизначених функцій. Для знакопостійних, знакозмінних функцій поверхні рівня можуть бути розімкнені в такому сенсі.

Приклад 1.15 Розглянемо лінії рівня, які задовольняють рівності

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + 2x_1^2 + 2x_2^2} = c.$$

Це співвідношення можна записати так

$$(1 - 2c)x_1^2 + (1 - 2c)x_2^2 = c.$$

Звідси випливає, що такі лінії рівня замкнені при $0 < c < \frac{1}{2}$, оскільки в цьому випадку квадратична форма додатновизначена.

При дослідженні розв'язків неавтономних систем на стійкість функція V залежить від t . Наприклад, розглянемо функцію

$$V(x_1, x_2, t) = e^{-t}(x_1^2 + x_2^2). \quad (1.46)$$

Функція (1.46) є додатновизначеною в сенсі означення 1.4. Але про близькість зображуючої точки до початку координат з допомогою (1.46) судити не можна, так як при довільних x_1, x_2 функцію (1.46) можна зробити малою завдяки належному вибору t і малості експоненти e^{-t} . Тому у випадку, коли функція V залежить від t , означення додатної визначеності вводиться у інший спосіб.

Означення 1.7 Неперервна функція $V(x, t)$ називається додатно-визначеною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$, якщо знайдеться така неперервна додатно-визначена функція $W(x)$, для якої

$$V(x, t) \geq W(x), \quad V(0, t) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_H, \quad t \geq t_0.$$

Неперервна функція $V(x, t)$ називається від'ємно-визначеною, якщо $-V(x, t)$ є додатно-визначеною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$.

Означення 1.8 Функція $V(x, t)$ допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що

$$|V(x, t)| < \varepsilon$$

для всіх $\|x\| < \delta$, $t \geq t_0$. Тобто в цьому разі для функції $V(x, t)$ рівномірно за t виконується співвідношення

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} V(x, t) = 0.$$

Суть нескінченно малої вищої границі полягає в тому, що значення $|V(x, t)|$ можна зробити як завгодно малим для довільного $t \geq t_0$ завдяки зменшенню $\|x\|$. В силу неперервності, нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$ має будь-яка неперервна функція $V(x)$ така, що $V(0) = 0$. Але навіть для неперервних обмежених функцій, які залежні від t , нескінченно мала вища границя в точці $x = 0$ може не існувати.

Приклад 1.16 Розглянемо функцію

$$V(x, t) = \sin^2(\|x\|^2 t).$$

Ця функція не допускає нескінченно малої вищої границі в точці $x = 0$, хоч вона є неперервною і обмеженою. Дійсно, виберемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Покажемо, що яке б ми не взяли $\delta > 0$, знайдеться $x \in \mathbb{R}^n$ таке, що $\|x\| < \delta$ і t , для якого $\sin^2(\|x\|^2 t) \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо нерівність $\sin^2 y \geq \frac{1}{2}$. Одержуємо, що

$$y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\pi \left(\frac{1}{4} + k \right), \pi \left(\frac{3}{4} + k \right) \right]$$

є розв'язком цієї нерівності. Виберемо довільне $\delta > 0$ і накладемо умову $\|x\| < \delta$. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$ таке, що $\|x\| = p$, де $p \in (0, \delta)$. При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ для довільного $\delta > 0$, вибираючи $x \in \mathbb{R}^n$ так, щоб $\|x\| = p$ і для

$$t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{p^2} \left(\frac{1}{4} + k \right), \frac{\pi}{p^2} \left(\frac{3}{4} + k \right) \right],$$

одержуємо $\sin^2(\|x\|^2 t) \geq \frac{1}{2}$. Це показує, що функція $V(x, t) = \sin^2(\|x\|^2 t)$ не допускає в точці $x = 0$ нескінченно малої вищої границі.

1.5.2. Теореми Ляпунова про стійкість для автономних систем

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \geq t_0, \quad f(0) = 0. \quad (1.47)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ – вектор-функція, яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші в області $\mathcal{D}_H = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < H\}$, $H > 0$. Припустимо, що $V(x)$ є неперервно диференційованою функцією, $x \in \mathcal{D}_H$ [13, 16, 39, 42, 44, 53, 59].

Означення 1.9 Повною похідною за змінною t від функції $V(x)$ в силу системи диференціальних рівнянь (1.47) називається функція

$$\left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(1.47)} = \text{grad}^T V(x) f(x). \quad (1.48)$$

Слід зауважити, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи (1.47) справджується

$$\left(\frac{dV(x(t))}{dt} \right)_{(1.47)} = \frac{dV(x(t))}{dt}.$$

Дійсно

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= \text{grad}^T V(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} = \text{grad}^T V(x(t)) f(x(t)) \\ &= \left(\frac{dV(x(t))}{dt} \right)_{(1.47)}. \end{aligned}$$

Має місце така теорема.

Теорема 1.9 (Ляпунова про стійкість) Якщо для системи диференціальних рівнянь (1.47) знайдеться неперервно диференційована додатно-визначена функція $V(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$, повна похідна від якої за змінною t в силу системи (1.47) є функцією від'ємнопостійною, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (1.47) є стійким за Ляпуновим.

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$. Розглянемо сферу

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = \varepsilon\}.$$

Оскільки функція $V(x)$ є неперервною, то за теоремою Вейерштрасса знайдеться точка $x_* \in S_\varepsilon$ така, що

$$\min_{x \in S_\varepsilon} V(x) = V(x_*) = C.$$

Так як функція $V(x)$ є додатновизначеною, то $V(x) > 0$, $x \in S_\varepsilon$ і тому $C > 0$. З неперервності функції $V(x)$ і з умови $V(0) = 0$ випливає, що існує $\delta \in (0, \varepsilon)$ таке, що $V(x) < C$ при $\|x\| < \delta$. Отже, куля

$$U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < \delta\}$$

лежить у множині

$$\{x \in \mathcal{D}_H: V(x) < C\}.$$

Виберемо довільну точку $x_0 \in U_\delta$. Покажемо, що траєкторія системи (1.47), яка відповідає розв'язку $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, залишається всередині сфери S_ε при $t \geq t_0$. Тобто $\|x(t)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$.

Від супротивного. Припустимо, що знайдеться точка $t_1 > t_0$ така, що $\|x(t)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1)$, але $\|x(t_1)\| = \varepsilon$. Так як $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(1.47)} \leq 0$, то

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dV(x(\tau))}{d\tau} d\tau \leq 0.$$

Звідси $V(x(t_1)) \leq V(x_0)$. Оскільки $x_0 \in U_\delta$, то $V(x_0) < C$ і тому $V(x(t_1)) < C$. Але $x(t_1) \in S_\varepsilon$. Отже, виходячи з того, що

$$C = \min_{x \in S_\varepsilon} V(x),$$

маємо $V(x(t_1)) \geq C$. Отримуємо протиріччя, так як

$$C \leq V(x(t_1)) < C.$$

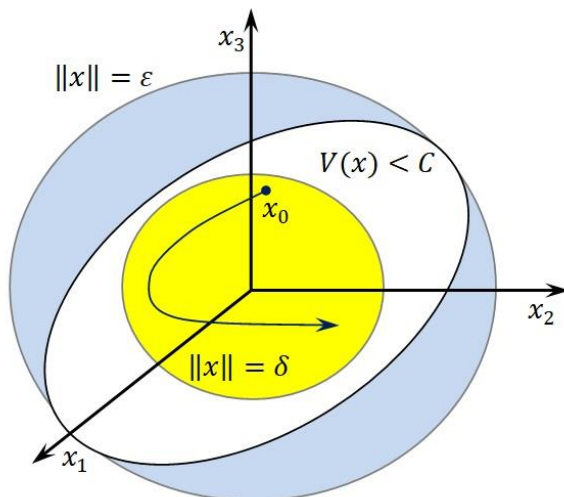


Рис. 1.17. Геометрична суть теореми Ляпунова про стійкість

Протиріччя свідчить про те, що будь-який розв'язок $x(t)$ системи (1.47), який в момент t_0 належить U_δ , залишається у внутрішності кулі $K_\varepsilon(0)$ при $t \geq t_0$.

Таким способом для довільного $\varepsilon > 0$ ми вказали $\delta > 0$ таке, що $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ як тільки $\|x(t_0)\| < \delta$. Це означає, що нульовий розв'язок системи (1.47) є стійким за Ляпуновим. \square

Означення 1.10 Функція $V(x)$, яка задовольняє умови теореми 1.9, називається функцією Ляпунова системи (1.47).

Слід зазначити, що функцією Ляпунова називають функцію, що застосовується для дослідження незбуреного розв'язку систем на стійкість в твердженнях, які належать до другого методу Ляпунова та до його узагальнень. Зокрема, до таких тверджень належать теореми 1.9 – 1.14.

Приклад 1.17 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1x_2 - x_2^3. \end{cases} \quad (1.49)$$

Застосуємо другий метод Ляпунова, вибираючи функцію Ляпунова у вигляді

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Маємо

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(1.49)} = x_1(-x_1 + 3x_2^2) + x_2(-x_1x_2 - x_2^3) = -(x_1 - x_2^2)^2 \leq 0. \quad (1.50)$$

Тобто в силу теореми 1.9 розв'язок $x_1(t) = x_2(t) = 0$ є стійким.

Теорема 1.10 (Ляпунова про асимптотичну стійкість) *Якщо для системи звичайних диференціальних рівнянь (1.47) існує неперервно диференційована додатновизначена функція $V(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$, повна похідна від якої за змінною t в силу системи (1.47) є функцією від'ємновизначеною, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (1.47) є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Умови теореми 1.10 є сильнішими від умов теореми 1.9. Тому незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ є стійким за Ляпуновим. Це означає, що для $\varepsilon \in (0, H)$ існує $\delta_0 \in (0, \varepsilon)$ таке, що розв'язок $x(t) = x(t, x_0)$ системи (1.47) задовольняє умову $\|x(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$ як тільки $\|x_0\| < \delta_0$, де $x_0 = x(t_0)$. Покажемо, що для такого розв'язку

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Від супротивного. Припустимо, що існує послідовність $\{t_k\} \subset [t_0, +\infty)$ така, що $t_k \rightarrow +\infty$ і $\|x(t_k)\| \geq a$, $k = 1, 2, \dots$, де $a > 0$. Оскільки функція V є неперервною і додатновизначеною, то знайдеться $b > 0$ таке, що

$$V(x) \geq b, \quad a \leq \|x\| \leq \varepsilon.$$

Тому $V(x(t_k)) \geq b$, $k = 1, 2, \dots$.

Повна похідна в силу системи

$$W(x) = \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(1.47)}$$

є неперервною від'ємновизначеною функцією. Як було показано при доведенні теореми 1.9, функція $V(x(t))$ не зростає, $t \geq t_0$. Тому $V(x(t)) \geq b$ для всіх $t \geq t_0$. Дійсно, якщо $V(x(t)) < b$ при деякому $t \geq t_0$, то для всіх членів послідовності $\{t_k\}$, які більші за t , в силу того, що $V(x(t))$ не зростає, виконувалася б умова $V(x(t_k)) < b$. А це протирічить припущенню.

Виходячи з того, що $V(0) = 0$ і $V(x)$ є додатновизначеною неперервною функцією, то знайдеться $\delta > 0$ таке, що $V(x) < b$ при $\|x\| < \delta$. Тому розв'язок $x(t)$ системи (1.47) не задовольняє умову $\|x(t)\| < \delta$ (рис. 1.18).

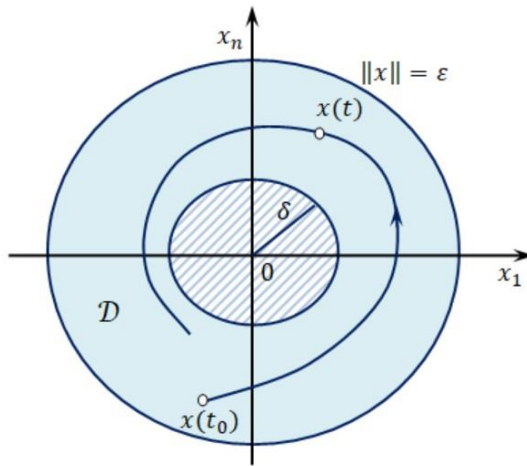


Рис. 1.18. Обґрунтування теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість

Отже,

$$x(t) \in \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D}_H, \quad \delta \leq \|x\| \leq \varepsilon\}, \quad t \geq t_0.$$

Оскільки

$$W(x) = \left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(1.47)}$$

є неперервною від'ємновизначеною функцією, то знайдеться константа $p > 0$ така, що $W(x) \leq -p$, $x \in \mathcal{D}$. Отже

$$\left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(1.47)} \leq -p$$

і тому

$$V(x(t)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{dV(x(s))}{ds} ds \leq V(x_0) - p(t - t_0), \quad t \geq t_0.$$

Звідси випливає, що можна підібрати $t > t_0$, для якого $V(x(t)) < 0$. Для цього

$$V(x_0) - p(t - t_0) < 0,$$

звідки $t > t_0 + \frac{V(x_0)}{p}$. Одержали протиріччя з умовою додатної визначеності функції V . Протиріччя показує, що $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.

□

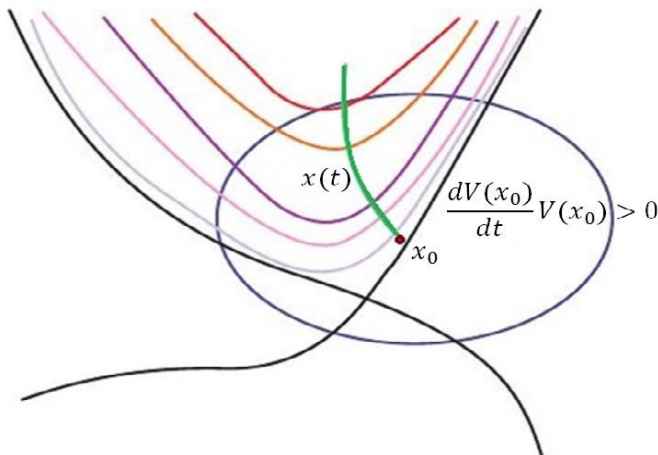


Рис. 1.19 Ілюстрація до теореми Ляпунова про нестійкість

Теорема 1.11 (Ляпунова про нестійкість) Якщо для системи диференціальних рівнянь (1.47) знайдеться неперервно диференційовна функція $V(x)$, $V(0) = 0$, повна похідна від якої в силу системи (1.47) є функцією знаковизначеною, але в будь-якому h -околі нуля знайдеться точка x_0 , така, що

$$\frac{dV(x_0)}{dt} V(x_0) > 0, \quad \|x_0\| < h,$$

то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ є нестійким.

На рис. 1.19 показано лінії рівня функції Ляпунова (в початковий момент часу в області її додатновизначеності). Фазова траєкторія $x(t)$ поблизу нестійкого положення рівноваги виходить з області околу положення рівноваги, в якій похідна додатня. Очевидно, що траєкторія $x(t)$ неминуче віддаляється від точки рівноваги і врешті-решт покидає зазначений окіл.

Приклад 1.18 Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок скалярного рівняння

$$\dot{x} = g(x), \quad g \in C^1(-r, r), \quad g(0) = 0.$$

За першим наближенням маємо, що $x(t) = 0, t \geq 0$ – асимптотично стійкий розв'язок, якщо $g'(0) < 0$ і $x(t) = 0, t \geq 0$ – нестійкий, якщо $g'(0) > 0$. При $g'(0) = 0$ маємо „критичний” випадок, тому, застосовуючи другий метод Ляпунова, розглянемо функцію

$$V(x) = \int_0^x g(s) ds.$$

Якщо $g(x) \neq 0$ на $(-a, 0) \cup (0, a)$, то повна похідна в силу системи

$$\frac{dV}{dt} = g^2(x) > 0, \quad x \in (-a, 0) \cup (0, a)$$

і тому є додатновизначеною. Тоді можливість застосування теорем Ляпунова визначається знаковими властивостями функції $V(x)$. Наприклад, для рівняння

$$\dot{x} = x^3$$

маємо, що $V(x) = \frac{x^4}{4}$. За теоремою Ляпунова про нестійкість розв'язок $x(t) = 0$ – нестійкий, $t \geq 0$. Натомість для рівняння

$$\dot{x} = x^5 - x^3$$

маємо, що $V(x) = \frac{x^4}{2} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{2} \right)$. Ця функція є від'ємновизначеною в області $|x| < \sqrt{3/2}$. За теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість розв'язок $x(t) = 0$ – асимптотично стійкий, $t \geq 0$.

Приклад 1.19 Проведемо аналіз стійкості незбуреного розв'язку $x_1(t) = x_2(t) = 0$ системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 3x_2. \end{cases} \quad (1.51)$$

Для цього використаємо додатновизначену функцію

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Похідна $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1.51)} = -2x_1^2 - 3x_2^2$ є від'ємновизначеною в \mathbb{R}^2 . Отже, незбурений розв'язок $x_1(t) = x_2(t) = 0$ асимптотично стійкий, $t \geq 0$.

Приклад 1.20 Дослідимо на стійкість положення рівноваги $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$ математичного маятника без тертя

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1, \quad t \geq 0, \quad a > 0. \end{cases}$$

Оскільки перше наближення в цьому випадку відповіді не дає, то застосуємо другий метод Ляпунова. Природним вибором функції Ляпунова є функція енергії

$$V(x_1, x_2) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Очевидно, що $V(0,0) = 0$ і $V(x_1, x_2)$ – додатновизначена функція в області $-2\pi < x_1 < 2\pi$. Похідна в силу системи має вигляд

$$\frac{dV(x)}{dt} = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 \equiv 0.$$

Отже, умови теореми Ляпунова про стійкість виконуються і початок координат є стійким. Оскільки $\frac{dV(x)}{dt} = 0$, то ми можемо сказати, що початок координат не є асимптотично стійким. Траєкторії, що починаються на поверхні $V(x_1, x_2) = c$, залишаються на цій поверхні при всіх $t \geq 0$.

Означення 1.11 Незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи звичайних диференціальних рівнянь (1.47) будемо називати експоненціально стійким, якщо існують додатні числа a , c , H_0 такі, що

$$\|x(t, x_0, t_0)\|^2 \leq ce^{-at} \cdot \|x_0\|^2, \quad \|x_0\| \leq H_0, \quad t \geq t_0.$$

Має місце таке твердження.

Теорема 1.12 Нехай для системи (1.47) існує квадратична форма

$$V(x) = x^T Bx,$$

похідна від якої за змінною t в силу системи звичайних диференціальних рівнянь (1.47) задовольняє нерівності

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(1.47)} \leq -x^T Dx, \quad (1.52)$$

де $\|x\| \leq H_0$, B і D – $n \times n$ – симетричні додатновизначені матриці. Тоді розв'язок $x(t) = 0$ системи (1.47) є експоненціально стійким, $t \geq t_0$.

Доведення. При доведенні теореми застосовується співвідношення Релея

$$\lambda_{\min}(B) \leq \frac{x^T Bx}{x^T x} \leq \lambda_{\max}(B), \quad (1.53)$$

$$\lambda_{\min}(D) \leq \frac{x^T Dx}{x^T x} \leq \lambda_{\max}(D), \quad (1.54)$$

де $\lambda_{\min}(B)$, $\lambda_{\max}(B)$, $\lambda_{\min}(D)$, $\lambda_{\max}(D)$ – мінімальні і максимальні власні значення матриць B і D відповідно, $x \neq 0$. Оскільки матриці B і D є додатновизначеними, то їхні власні значення є додатними. Використовуючи (1.54), нерівність (1.52) перепишемо так

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(1.47)} \leq -x^T Dx \leq -\lambda_{\min}(D)x^T x. \quad (1.55)$$

З (1.53) отримаємо

$$-x^T x \leq -\frac{x^T Bx}{\lambda_{\max}(B)} = -\frac{V(x)}{\lambda_{\max}(B)}.$$

Беручи до уваги останню нерівність, (1.55) подамо у вигляді

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(1.47)} \leq -\frac{\lambda_{\min}(D)}{\lambda_{\max}(B)} \cdot V(x). \quad (1.56)$$

Позначимо

$$a = \frac{\lambda_{\min}(D)}{\lambda_{\max}(B)} > 0.$$

З (1.56) випливає

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + aV(x(t)) \leq 0, \quad t \geq t_0,$$

де $x(t) = x(t, x_0, t_0)$. Домножимо одержану нерівність на додатну функцію $e^{a(t-t_0)}$. Маємо

$$e^{a(t-t_0)} \frac{dV(x(t))}{dt} + ae^{a(t-t_0)}V(x(t)) \leq 0, \quad t \geq t_0.$$

Ліва частина останньої нерівності є похідною функції

$$F(t) = e^{a(t-t_0)}V(x(t)), \quad t \geq t_0.$$

Таким способом $F'(t) \leq 0$, функція $F(t)$ не зростає і тому $F(t) \leq F(t_0)$, $t \geq t_0$. Як наслідок

$$e^{a(t-t_0)}V(x(t)) \leq V(x(t_0)).$$

Звідси одержуємо нерівність

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0))e^{-a(t-t_0)}. \quad (1.57)$$

З (1.53), (1.57) випливає

$$\begin{aligned} x^T(t)x(t) = \|x(t)\|^2 &\leq \frac{x^T(t)Bx(t)}{\lambda_{\min}(B)} = \frac{V(x(t))}{\lambda_{\min}(B)} \leq \frac{V(x_0)}{\lambda_{\min}(B)} e^{-a(t-t_0)} = \\ &= \frac{x_0^T B x_0}{\lambda_{\min}(B)} e^{-a(t-t_0)} \leq \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)} e^{-a(t-t_0)} \|x_0\|^2. \end{aligned} \quad (1.58)$$

З (1.58) слідує, що при

$$a = \frac{\lambda_{\min}(D)}{\lambda_{\max}(B)}, \quad c = \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)} e^{at_0}$$

справджується

$$\|x(t)\|^2 \leq ce^{-at} \|x_0\|^2,$$

де $\|x_0\| \leq H_0$, $t \geq t_0$. За означенням 1.11 незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (1.47) є експоненціально стійким. □

1.5.3. Теорема Ляпунова про стійкість для неавтономних систем

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad t \geq t_0. \quad (1.59)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор стану системи (1.59), $f(x, t)$ – n -вимірний вектор-функція, яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $x \in \mathcal{D}_H$, причому $f(0, t) = 0$, $t \geq t_0$. Припустимо, що $V(x, t)$ є неперервно диференційованою скалярною функцією, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$ [13, 16, 39, 42, 44, 53, 59].

Означення 1.12 Повною похідною за змінною t від функції $V(x, t)$ в силу системи диференціальних рівнянь (1.59) називається функція

$$\left(\frac{dV(x, t)}{dt} \right)_{(1.59)} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x, t) f(x, t). \quad (1.60)$$

Зазначимо, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи (1.59) справджується

$$\left(\frac{dV(x(t), t)}{dt} \right)_{(1.59)} = \frac{dV(x(t), t)}{dt}.$$

Дійсно

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t), t)}{dt} &= \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x(t), t) \frac{dx(t)}{dt} = \\ &= \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x(t), t) f(x(t), t) = \left(\frac{dV(x(t), t)}{dt} \right)_{(1.59)}. \end{aligned}$$

Має місце теорема.

Теорема 1.13 (Ляпунова про стійкість) *Якщо для системи диференціальних рівнянь (1.59) знайдеться неперервно диференційована додатновизначена функція $V(x, t)$, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$, повна похідна від якої за змінною t в силу системи (1.59) є функцією від'ємнопостійною, то незбудений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (1.59) є стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Нехай $\varepsilon \in (0, H)$, $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = \varepsilon\}$. Функція $V(x, t)$ є додатновизначеною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$. Тому за означенням 1.7 знайдеться неперервна додатновизначена функція $W(x)$ така, що

$$V(x, t) \geq W(x), \quad x \in \mathcal{D}_H, \quad t \geq t_0. \quad (1.61)$$

За теоремою Вейерштрасса існує точка $x_* \in S_\varepsilon$, для якої

$$\min_{x \in S_\varepsilon} W(x) = W(x_*) = C > 0. \quad (1.62)$$

З (1.61), (1.62) випливає

$$V(x, t) \geq W(x) \geq W(x_*) = C > 0, \quad x \in S_\varepsilon, \quad t \geq t_0. \quad (1.63)$$

З неперервності функції $V(x, t)$ та з умови $V(0, t) = 0$, $t \geq t_0$ слідує, що знайдеться $\delta \in (0, \varepsilon)$ таке, що $V(x, t_0) < C$ як тільки $\|x\| < \delta$. Це означає, що множина

$$U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < \delta\}$$

лежить в множині

$$\{x \in \mathcal{D}_H: V(x, t_0) < C\}.$$

Виберемо довільну точку $x_0 \in U_\delta$. Покажемо, що траєкторія системи (1.59), яка починається з точки x_0 , не дійде до сфери S_ε і залишиться в множині

$$U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < \varepsilon\}.$$

Від супротивного. Припустимо, що знайдеться $t_1 > t_0$ таке, що $x(t_1) \in S_\varepsilon$, при цьому $x(t) \in U_\varepsilon$, $t \in [t_0, t_1)$, де $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ – розв'язок задачі Коші (1.59), $x(t_0) = x_0$. Тоді з (1.63) випливає $V(x(t_1), t_1) \geq C$.

Але з $x_0 \in U_\delta$ слідує $V(x_0, t_0) < C$. Повна похідна за змінною t від функції $V(x, t)$ в силу системи (1.59) є від'ємнопостійною, тому

$$V(x(t_1), t_1) - V(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dV(x(s), s)}{ds} ds \leq 0.$$

Остаточно маємо

$$C \leq V(x(t_1), t_1) \leq V(x_0, t_0) < C. \quad (1.64)$$

Одержали протиріччя, яке показує, що з умови $x_0 \in U_\varepsilon$ випливає $x(t) \in U_\varepsilon$, $t \geq t_0$. Це означає, що нульовий розв'язок системи (1.59) є стійким за Ляпуновим. \square

Теорема 1.14 (Ляпунова про асимптотичну стійкість) *Якщо для системи звичайних диференціальних рівнянь (1.59) знайдеться неперервно диференційована додатновизначена функція $V(x, t)$, яка в точці $x = 0$ допускає нескінченно малу вищу границю, а повна похідна від $V(x, t)$ за змінною t в силу системи (1.59) є функцією від'ємновизначеною, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (1.59) є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Умови теореми 1.14 є сильнішими за умови теореми 1.13. Тому нульовий розв'язок системи (1.59) є стійким за Ляпуновим. Це означає, що для $\varepsilon \in (0, H)$ знайдеться $\delta_0 \in (0, \varepsilon)$ таке, що розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ системи (1.59) задовольняє умову $\|x(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$ як тільки $\|x_0\| < \delta_0$, де $x_0 = x(t_0)$. Покажемо, що для такого розв'язку

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Від супротивного. Припустимо, що знайдеться послідовність $\{t_k\} \subset [t_0, +\infty)$ така, що $t_k \rightarrow +\infty$ і $\|x(t_k)\| \geq a$, $k = 1, 2, \dots$, де $a > 0$. Оскільки функція $V(x, t)$ є неперервною і додатновизначеною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$, то за означенням 1.7 знайдеться додатновизначена неперервна функція $V_0(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$ така, що

$$V(x, t) \geq V_0(x) \geq b, \quad a \leq \|x\| \leq \varepsilon.$$

де $b > 0$ – деяка константа. Тому $V(x(t_k), t_k) \geq b$, $k = 1, 2, \dots$. Повна похідна функції $V(x, t)$ в силу системи (1.59) є від'ємновизначеною непе-

рервною функцією. Тому $V(x(t), t)$ є спадною і $V(x(t), t) \geq b$ для всіх $t \geq t_0$. Дійсно, якщо $V(x(t), t) < b$ при деякому $t \geq t_0$, то для всіх членів послідовності $\{t_k\}$, які більші за t , виконується умова $V(x(t_k), t_k) < b$. Це протирічить припущенню.

Оскільки $V(0, t) = 0$, $t \geq t_0$, функція $V(x, t)$ допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$ та є додатновизначеною, то знайдеться $\delta > 0$ таке, що $V(x, t) < b$ при $\|x\| < \delta$ для всіх $t \geq t_0$. Тому розв'язок $x(t)$ системи (1.59) не задовольняє умову $\|x(t)\| < \delta$, $t \geq t_0$. Отже,

$$x(t) \in \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D}_H, \quad \delta \leq \|x\| \leq \varepsilon\}, \quad t \geq t_0.$$

Оскільки повна похідна в силу системи

$$W(x, t) = \left(\frac{dV(x, t)}{dt} \right)_{(1.59)}, \quad x \in \mathcal{D}_H, \quad t \geq t_0$$

є функцією від'ємновизначеною, то за означенням 1.7 знайдеться додатновизначена функція $W_0(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$ така, що

$$-W(x, t) \geq W_0(x) > p, \quad x \in \mathcal{D},$$

де $p > 0$ – деяка константа. Тому

$$W(x, t) \leq -p, \quad x \in \mathcal{D}, \quad t \geq t_0.$$

Так як $x(t) \in \mathcal{D}$ при $t \geq t_0$, то

$$\frac{dV(x(t), t)}{dt} = \left(\frac{dV(x(t), t)}{dt} \right)_{(1.59)} \leq -p$$

і

$$V(x(t), t) = V(x_0(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dV(x(s), s)}{ds} ds \leq V(x_0, t_0) - p(t - t_0),$$

$t \geq t_0$. Звідси випливає, що існує $t \geq t_0$ при якому $V(x(t), t) < 0$. Для цього $V(x_0, t_0) - p(t - t_0) < 0$ і $t > t_0 + \frac{V(x_0, t_0)}{p}$. Одержали протиріччя з додатною визначеністю функції $V(x, t)$. Протиріччя показує, що $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$. □

1.6. Методи конструювання функцій Ляпунова

1.6.1. Методи побудови функцій Ляпунова для нелінійних систем

1.6.1.1. Метод змінного градієнта

Розглянемо нелінійну автономну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1.65)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ – вектор-функція розмірності n , яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв’язку задачі Коші, $f(0) = 0$. Нехай $V(x)$ – скалярна функція і $g(x) = \text{grad } V(x) = (\partial V(x)/\partial x)^T$ [59]. Похідна в силу системи (1.65) визначається рівністю

$$\dot{V}(x) = g^T(x)f(x).$$

Суть методу полягає в виборі вектор-функції $g(x)$ так, щоб ця функція була градієнтом додатновизначеної функції $V(x)$ і при цьому $\dot{V}(x)$ була б від’ємновизначеною. За допомогою цього методу можна для певних класів систем обґрунтувати асимптотичну стійкість положення рівноваги.

Відомо, що вектор-функція $g(x)$ є градієнтом деякої скалярної функції тоді і лише тоді, коли матриця Якобі $\partial g/\partial x$ є симетричною, тобто

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

З урахуванням цього обмеження вибираємо функцію $g(x)$ так, щоб скалярний добуток $g^T(x)f(x)$ був від’ємновизначеним. Тоді функція $V(x)$ може обчислюватись за формулою

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0) dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, \dots, 0) dy_2 + \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n) dy_n.$$

Залишаючи деякі параметри $g(x)$ невизначеними, можна спробувати вибрати інші таким чином, щоб функція $V(x)$ була додатновизначеною.

Проілюструємо цей метод на такому прикладі. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2. \end{cases}$$

Щоб застосувати метод змінного градієнта, ми маємо знайти вектор-функцію $g(x)$ розмірності 2 таку, що

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1},$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= g_1(x)x_2 - g_2(x)(x_1^3 + x_2) < 0, \quad x \neq 0, \\ V(x) &= \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0)dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2)dy_2 > 0, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Виберемо таку функцію

$$g(x) = (a(x)x_1 + b(x)x_2, c(x)x_1 + d(x)x_2)^T.$$

Умова симетричності дає рівність

$$b(x) + \frac{\partial a}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial b}{\partial x_2}x_2 = c(x) + \frac{\partial c}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial d}{\partial x_1}x_2.$$

Вона, очевидно, виконується, якщо функції b , c , d є константами, причому $b = c$ і $a(x) = a(x_1)$. Далі

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (a(x_1)x_1 + bx_2)x_2 - (bx_1 + dx_2)(x_1^3 + x_2) = \\ &= a(x_1)x_1x_2 + bx_2^2 - bx_1^4 - bx_1x_2 - dx_1^3x_2 - dx_2^2. \end{aligned}$$

Щоб виключити перехресні доданки, виберемо $a(x_1)$ так, щоб

$$a(x_1)x_1 - bx_1 - dx_1^3 = 0,$$

тобто $a(x_1) = b + dx_1^2$. Тоді

$$\dot{V}(x) = (b - d)x_2^2 - bx_1^4.$$

Для $V(x)$ маємо

$$V(x) = \int_0^{x_1} a(y_1)y_1 dy_1 + \int_0^{x_2} (bx_1 + dy_2)dy_2 = \\ = \frac{1}{2}bx_1^2 + \frac{1}{4}dx_1^4 + bx_1x_2 + \frac{1}{2}dx_2^2.$$

Бачимо, що за умови

$$b > 0, \quad d > b$$

функція $V(x)$ – додатновизначена, функція $\dot{V}(x)$ – від’ємновизначена. Отже, за теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість розв’язок $x_1(t) = 0, x_2(t) = 0, t \geq 0$ вихідної системи є асимптотично стійким.

1.6.1.2. Метод Красовського

Розглянемо нелінійну автономну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1.66)$$

Тут $x = (x_1, \dots, x_n)^T, f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ – вектор-функція розмірності n , яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв’язку задачі Коші, $f(0) = 0$ [13]. Функцію Ляпунова шукаємо у вигляді

$$V(x) = f^T(x)Bf(x). \quad (1.67)$$

Симетричну матрицю B розмірності $n \times n$ вибираємо так, щоб

$$\frac{\partial f^T(x)}{\partial x} B + B \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -H, \quad (1.68)$$

де H – задана додатновизначена матриця розмірності $n \times n$. Дійсно,

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1.66)} = f^T(x)B \frac{\partial f(x)}{\partial x} f(x) + f^T(x) \frac{\partial f^T(x)}{\partial x} Bf(x) = \\ = f^T(x) \left(B \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f^T(x)}{\partial x} B \right) f(x) = -f^T(x)Hf(x).$$

Функція Ляпунова (1.67) задовольняє теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість за умови, що матриця B – додатновизначена. Якщо си-

стема (1.66) є лінійною, тобто $f(x) = Ax$, де A – матриця з постійними елементами розмірності $n \times n$, то (1.68) є матричним рівнянням Ляпунова

$$A^T B + BA = -H.$$

1.6.1.3. Метод лінеаризації за системою базисних функцій

Розглянемо систему (1.66). Введемо систему лінійно незалежних функцій

$$\{\varphi_i(x): i = 1, 2, \dots\}, \quad (1.69)$$

які утворюють клас \mathcal{L} визначених в області Γ функцій, де $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Gamma$ [13]. Припустимо, що

$$\text{grad} \varphi_i^T(x) f(x) \in \mathcal{L}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Вважаємо, що функції (1.69) мають такі властивості:

1. $\varphi_i(x) = x_i, i = 1, \dots, n$;
2. $\varphi_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots$;
3. Клас функцій \mathcal{L} є повним, тобто для довільного $p \in \mathcal{L}$ має місце

$$p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x), \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty;$$

4. $\sum_{i=M+1}^{\infty} \varphi_i^2(x) \leq \varphi_M^2, \varphi_M \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

При зроблених припущеннях

$$\text{grad} \varphi_i^T(x) f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ij} \varphi_j(x), i = 1, 2, \dots$$

Позначимо $y_i = \varphi_i(x), i = 1, 2, \dots$. Тоді

$$\frac{dy_i}{dt} = \text{grad} \varphi_i^T(x) f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots$$

У такий спосіб одержуємо зліченну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.70)$$

Виберемо досить велике $M > 0$ і з системи (1.70) утворимо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^M a_{ij}y_j, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

яку можемо подати ще так

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \quad (1.71)$$

Тут $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)^T$, A – матриця з постійними елементами розмірності $M \times M$, елементами якої є коефіцієнти a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, M$. Якщо матриця A є асимптотично стійкою, то функцію Ляпунова будемо у вигляді квадратичної форми

$$V(y) = y^T B y,$$

де B є додатновизначеною симетричною матрицею розмірності $M \times M$, яку знаходимо згідно матричного рівняння Ляпунова

$$A^T B + B A = -H.$$

Тут H – додатновизначена симетрична матриця розмірності $M \times M$. Позначимо

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_M(x))^T.$$

Тоді функція Ляпунова має такий вигляд

$$V(x) = \varphi^T(x) B \varphi(x), \quad x \in \Gamma.$$

Перехід до системи вигляду (1.71) можна здійснити також за допомогою методу мінімізації середньоквадратичної похибки. Для цього знайдемо похідні від $\varphi(x)$ в силу системи

$$\left(\frac{d\varphi(x)}{dt} \right)_{(1.66)} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x), \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right), \quad (1.72)$$

$i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, n$. Тому систему (1.71) розглянемо у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi.$$

Матрицю A розмірності $M \times M$ знайдемо як розв'язок задачі мінімізації функціоналу

$$\mathcal{J}(A) = \int_{\Gamma} \left\| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) - A\varphi(x) \right\|^2 dx. \quad (1.73)$$

Будемо позначати $\mathbb{R}^{n \times m}$ – множину матриць розмірності $n \times m$ з дійсними компонентами, $tr M = \sum_{j=1}^n m_{jj}$ слід матриці $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$. Слід матриці має такі властивості:

- 1) $tr(PQ) = tr(QP)$, $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
- 2) $x^T y = tr(y^T x)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- 3) $\frac{\partial}{\partial P} tr(P^T Q) = Q$, $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$;
- 4) $\frac{\partial}{\partial P} tr(PVP^T) = 2PV$, $P, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V^T = V$.

Тоді функціонал (1.73) можна подати у такий спосіб

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(A) &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) - A\varphi(x) \right)^T \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) - A\varphi(x) \right) dx = \\ &= \int_{\Gamma} \left\| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) \right\|^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \varphi^T(x) A^T \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} \varphi^T(x) A^T A \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Gamma} \left\| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) \right\|^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \varphi^T(x) A^T \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} \varphi^T(x) A^T A \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Gamma} \left\| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) \right\|^2 dx - 2 \int_{\Gamma} tr \left(A^T \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) \varphi^T(x) \right) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} tr (A\varphi(x) \varphi^T(x) A^T) dx = \\ &= \int_{\Gamma} \left\| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) \right\|^2 dx - 2 tr \left(A^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) \varphi^T(x) dx \right) \\ &\quad + tr \left(A \int_{\Gamma} \varphi(x) \varphi^T(x) dx A^T \right). \end{aligned}$$

Для того, щоб знайти мінімум функціонала (1.73), застосовуємо необхідну умови екстремуму і властивості сліду

$$\frac{\partial J}{\partial A} = -2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) \varphi^T(x) dx + 2A \int_{\Gamma} \varphi(x) \varphi^T(x) dx = 0. \quad (1.74)$$

Матриця $\int_{\Gamma} \varphi(x) \varphi^T(x) dx$ є невідродженою, оскільки вона є матрицею Грама за системою лінійно незалежних функцій $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, M$. З (1.74) випливає

$$A = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(x) \varphi^T(x) dx \left(\int_{\Gamma} \varphi(x) \varphi^T(x) dx \right)^{-1}.$$

1.6.2. Числовий метод конструювання функції Ляпунова для нелінійних систем

Розглянемо неавтономну нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad t \geq t_0, \quad (1.75)$$

для якої розв'язок $x(t) = 0, t \geq t_0$ є асимптотично стійким [13]. Тут $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор стану системи, $F(x, t)$ – вектор-функція розмірності n , яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $x(t, x_0, t_0)$ – розв'язок системи (1.75) з умовою Коші $x(t_0) = x_0, t \geq t_0$.

Задамо додатновизначену функцію $W(x, t)$. Функцію Ляпунова $V(x, t)$ знаходимо з умови

$$\left(\frac{dV(x, t)}{dt} \right)_{(1.75)} = -W(x, t). \quad (1.76)$$

Припустимо, що точка (x_0, t_0) належить області асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (1.75). Підставивши розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ в (1.76), отримаємо

$$\frac{dV(x(t, x_0, t_0), t)}{dt} = -W(x(t, x_0, t_0), t). \quad (1.77)$$

Інтегруємо (1.77) від t_0 до t і отримуємо

$$V(x(t), t) - V(x_0, t_0) = - \int_{t_0}^t W(x(s), s) ds. \quad (1.78)$$

Оскільки нульовий розв'язок системи (1.75) є асимптотично стійким, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t, x_0, t_0), t) = 0. \quad (1.79)$$

Переходячи в (1.78) до границі при $t \rightarrow +\infty$ і враховуючи (1.79), одержимо

$$V(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} W(x(t, x_0, t_0), t) dt. \quad (1.80)$$

Замінивши x_0 на z , а t_0 на t , формулу (1.80) подамо у такий спосіб

$$V(z, t) = \int_t^{\infty} W(x(s, z, t_0), s). \quad (1.81)$$

Розглянемо загальний підхід до створення числових методів знаходження функції Ляпунова $V(x, t)$ з використанням (1.81). Область асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (1.75) покриваємо достатньо щільною сіткою, що складається з точок (x_k, t_k) , $k = 1, 2, \dots, N$. Для кожної точки (x_k, t_k) з утвореної сітки шукаємо розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), t), & x(t_k) = x_k, \\ \frac{dV_k(t)}{dt} = W(x(t), t), & V_k(t_k) = 0, \quad t \in [t_k, t_k + T], \end{cases} \quad (1.82)$$

де $T > 0$ – достатньо велике число, $k = 1, 2, \dots, N$. Згідно (1.81), (1.82) значення $V(x_k, t_k)$ апроксимуються співвідношенням

$$V_k(t_k + T) = \int_{t_k}^{t_k + T} W(x(t_k, x_k, s), s) ds, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Використовуючи знайдені наближені значення $V(x_k, t_k)$ і методи інтерполяції функцій, знаходимо апроксимацію функцію $V(x, t)$.

Припустимо, що система (1.75) є автономною, тобто має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \geq 0. \quad (1.83)$$

Тут $f(x)$ – вектор-функція розмірності n , яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв’язку задачі Коші. У цьому випадку розв’язок системи звичайних диференціальних рівнянь (1.83) не залежить від початкового моменту t_0 і $x(t, x_0) = x(t, x_0, 0)$. При цьому функцію Ляпунова можна вибрати незалежною від часової змінної t . Отже, вибираємо додатновизначену функцію $W(x)$, функцію Ляпунова $V(x)$ знаходимо з умови $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(1.83)} = -W(x)$. Аналогічно до (1.81) одержуємо

$$V(z) = \int_0^\infty W(x(s, z))ds. \quad (1.84)$$

Тоді метод (1.82) матиме такий вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), & x(0) = x_k, \\ \frac{dV_k(t)}{dt} = W(x(t)), \\ V_k(0) = 0, & k = 1, 2, \dots, N, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.85)$$

Таким чином одержуємо $V(x_k)$, яке апроксимується співвідношенням

$$V_k(T) = \int_0^T W(x(s, x_k))ds, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.86)$$

За наближеними значеннями $V(x)$ в точках x_k , $k = 1, 2, \dots, N$ застосовуємо методи інтерполяції і знаходимо апроксимацію функції Ляпунова $V(x)$.

1.6.3. Побудова функцій Ляпунова для лінійних нестационарних систем

Розглянемо лінійну нестационарну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1.87)$$

де $A(t)$ – матриця розмірності $n \times n$ з обмеженими і неперервними за t елементами [13, 16, 39, 42, 44, 53, 59]. Припустимо, що нульовий розв’язок системи (1.87) асимптотично стійкий за Ляпуновим. Функцію Ляпунова $V(x, t)$ шукаємо у вигляді нестационарної квадратичної форми

$$V(x, t) = x^T B(t)x,$$

де $B(t)$ – симетрична матриця розмірності $n \times n$, яку потрібно визначити. Задамо додатновизначену квадратичну форму

$$W(x, t) = x^T C(t)x.$$

Тут $C(t)$ – симетрична додатновизначена матриця розмірності $n \times n$ з обмеженими і неперервними елементами. Тоді

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV(x, t)}{dt} \right)_{(1.87)} &= x^T \frac{dB(t)}{dt} x + x^T B(t)A(t)x + x^T B^T(t)A(t)x = \\ &= x^T \frac{dB(t)}{dt} x + x^T B(t)A(t)x + x^T A^T(t)B(t)x = -x^T C(t)x. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо матричне диференціальне рівняння Ляпунова

$$\frac{dB(t)}{dt} + A^T(t)B(t) + B(t)A(t) = -C(t). \quad (1.88)$$

Нехай $X(t, \tau)$ – фундаментальна матриця розв'язків системи (1.87), нормована за моментом τ , $X(\tau, \tau) = E$. Домножимо (1.88) справа на $X(t, \tau)$, зліва на $X^T(t, \tau)$. Одержуємо

$$\begin{aligned} X^T(t, \tau) \left[\frac{dB(t)}{dt} + A^T(t)B(t) + B(t)A(t) \right] X(t, \tau) = \\ = -X^T(t, \tau)C(t)X(t, \tau). \end{aligned}$$

Останнє матричне співвідношення перепишемо так

$$\frac{\partial}{\partial t} [X^T(t, \tau)B(t)X(t, \tau)] = -X^T(t, \tau)C(t)X(t, \tau). \quad (1.89)$$

Проінтегруємо (1.89) від τ до t і одержимо

$$X^T(t, \tau)B(t)X(t, \tau) = B(\tau) - \int_{\tau}^t X^T(s, \tau)C(s)X(s, \tau)ds.$$

Звідси

$$B(\tau) = X^T(t, \tau)B(t)X(t, \tau) + \int_{\tau}^t X^T(s, \tau)C(s)X(s, \tau)ds.$$

Оскільки система звичайних диференціальних рівнянь (1.87) асимптотично стійка, отримуємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, \tau) = 0.$$

Тому

$$B(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} X^T(s, \tau) C(s) X(s, \tau) ds. \quad (1.90)$$

Формулу (1.90) доцільно використати для створення числового методу, який полягає у застосуванні методів наближеного інтегрування. Крім того, матрицю $B(t)$ можна шукати на основі матричного рівняння Ляпунова (1.88) на інтервалі $t \in [0, T]$ з умовою $B(T) = 0$, де $T > 0$ – досить велике число.

1.6.4. Випадок лінійних стаціонарних систем

Розглянемо лінійну систему з постійними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (1.91)$$

де A – асимптотично стійка матриця розмірності $n \times n$ [13, 16, 39, 42, 44, 53, 59]. Функцію Ляпунова шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T B x. \quad (1.92)$$

Тут B – симетрична $n \times n$ -матриця. Задамо додатновизначену симетричну $n \times n$ -матрицю C . Знайдемо повну похідну функції (1.92) в силу системи (1.91) з умови

$$\left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(1.91)} = x^T (A^T B + B A) x = -x^T C x.$$

Тоді має місце теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (1.91). Таким способом одержуємо матричне рівняння Ляпунова

$$A^T B + B A = -C \quad (1.93)$$

для знаходження матриці B , яка визначає функцію Ляпунова (1.92). З (1.81) отримаємо рівність

$$z^T B z = \int_0^{\infty} x^T(t, z) C x(t, z) dt. \quad (1.94)$$

Загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (1.88) має вигляд

$$x(t, z) = e^{At} z,$$

де e^{At} – матрична експонента. Підставивши останню рівність в (1.94), отримаємо

$$z^T B z = \int_0^{\infty} z^T e^{A^T t} C e^{At} z dt = z^T \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} dt z.$$

Звідси

$$B = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} dt.$$

Має місце теорема.

Теорема 1.15 (О. М. Ляпунова) *Нехай всі власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матриці A системи (1.91) мають від'ємні дійсні частини, тобто*

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.95)$$

Тоді для довільної додатновизначеної симетричної матриці C існує єдиний розв'язок B матричного рівняння Ляпунова (1.93), який є додатновизначеною симетричною матрицею. При цьому справджується формула

$$B = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} dt.$$

І навпаки, нехай знайдеться додатновизначена симетрична матриця C така, що існує єдиний розв'язок B матричного рівняння Ляпунова (1.93), який є додатновизначеною симетричною матрицею. Тоді матриця A – стійка, тобто має місце умова (1.95) і нульовий розв'язок системи (1.91) є асимптотично стійким.

Приклад 1.21 Застосуємо теорему 1.15 до дослідження на стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Позначимо матрицю системи і матрицю, яка визначається з матричного рівняння Ляпунова

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця B – симетрична, то $b_{12} = b_{21}$. Виберемо додатно-визначену симетричну матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

і запишемо матричне рівняння Ляпунова

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Розкриваючи добутки матриць, одержуємо систему лінійних рівнянь для знаходження компонент матриці B

$$\begin{cases} -2b_{21} - 2b_{12} & = -4, \\ b_{11} - 2b_{22} - 3b_{12} & = 0, \\ b_{11} - 2b_{22} - 3b_{21} & = 0, \\ b_{21} + b_{12} - 6b_{22} & = -10. \end{cases}$$

Враховуючи умову $b_{12} = b_{21}$, одержуємо $b_{11} = 7$, $b_{12} = b_{21} = 1$, $b_{22} = 2$. Отже, розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

За критерієм Сільвестра матриця B є додатновизначеною. За теоремою 1.15 нульовий розв'язок запропонованої системи диференціальних рівнянь є асимптотично стійким. При цьому функція Ляпунова має вигляд

$$V(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Розглянемо один з методів обчислення невластного інтегралу

$$B = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{A t} dt.$$

на основі методу прямокутників. За означенням матричної експоненти

$$e^{A t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!}.$$

Задамо деяке $h > 0$ і знайдемо $e^{A h}$. Для цього обчислюємо

$$A_0 = E, \quad A_k = \frac{1}{k} h A A_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Звідси

$$e^{A h} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i.$$

Виберемо досить великі числа N, M . Знайдемо

$$Q = \sum_{i=0}^N A_i.$$

Для наближеного знаходження матриці B згідно формули прямокутників інтеграл

$$B = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{A t} dt$$

обчислюємо на відрізку $[0, Mh]$ за співвідношенням

$$B \approx \int_0^{Mh} e^{A^T t} C e^{A t} dt \approx \sum_{i=0}^{M-1} h e^{A_i^T h} C e^{A_i h} = h \sum_{i=0}^{M-1} Q_i,$$

де $Q_0 = C$, $Q_1 = Q^T Q_0 Q$, \dots , $Q_{s+1} = Q^T Q_s Q$, \dots .

Розглянемо ще один підхід до знаходження функції Ляпунова у вигляді (1.92) на основі (1.85). Нехай $e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T$, $e^{(2)} = (0, 1, \dots, 0)^T$, ..., $e^{(n)} = (0, 0, \dots, 1)^T$. З (1.85) одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \\ \frac{dV_{k,s}(t)}{dt} = x^T(t)Cx(t), \\ x(0) = e^{(k)} + e^{(s)}, \quad V_{k,s}(0) = 0, \\ k, s = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Тоді

$$V(e^{(k)} + e^{(s)}) = V_{k,s}(T), \quad k, s = 1, 2, \dots, n.$$

Слід зауважити, що $V_{k,s}(T) = V_{s,k}(T)$, $k, s = 1, 2, \dots, n$. Нехай b_{ks} — елементи матриці B , $k, s = 1, 2, \dots, n$. Одержуємо

$$\begin{aligned} (e^{(k)} + e^{(s)})^T B (e^{(k)} + e^{(s)}) &= e^{(k)T} B e^{(k)} + \\ + 2e^{(s)T} B e^{(k)} + e^{(s)T} B e^{(s)} &= b_{kk} + b_{ss} + 2b_{ks}, \quad k, s = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} b_{kk} &= \frac{1}{4} V_{k,k}(T), \\ b_{ks} = b_{sk} &= \frac{1}{2} (V_{k,s}(T) - b_{kk} - b_{ss}), \quad k, s = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким способом знаходимо матрицю B .

1.7. Граничні множини динамічних систем

Припустимо, що досліджувана динамічна система описується системою звичайних диференціальних рівнянь (1.1)

$$\dot{x} = f(x),$$

де x — вектор з компонентами x_1, x_2, \dots, x_n , а $f(x)$ — вектор-функція з компонентами $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$.

Нехай початковий стан системи (1.1) задається вектором x_0 . Припустимо, що в фазовому просторі динамічної системи існують дві множини B і $A \subset B$. Причому B – сукупність усіх точок x_0 фазового простору, для яких $x \in A$ при $t \rightarrow +\infty$ або $t \rightarrow -\infty$. У цьому випадку множина A називається *граничною множиною динамічної системи* [51].

Розглянемо можливі типи граничних множин дисипативної динамічної системи, які можуть існувати в обмеженій області фазового простору.

Означення 1.13 Якщо всі точки $x_0 \in B$ прямують до A при $t \rightarrow +\infty$, то гранична множина A є притягуючою й називається *атрактором*. Відповідно множина B називається *басейном притягання атрактора*.

Означення 1.14 Якщо всі точки $x_0 \in B$ прямують до A при $t \rightarrow -\infty$, то гранична множина A є відштовхуючою й називається *репелером*.

Означення 1.15 Множина B може складатися із двох підмножин, W^s і W^u , причому точки, які належать W^s , прямують до A у прямому часі, водночас точки, які належать W^u , прямують до A у зворотному часі. У цьому випадку A називається *сідловою множиною* або просто *сідлом*. Множини W^s та W^u називаються, відповідно, *стійким і нестійким многовидами сідла*.

Найпростішою граничною множиною динамічної системи, яка складається з однієї точки, є положення рівноваги. Воно може бути атрактором (стійкий вузол, стійкий фокус), репелером (нестійкий вузол, нестійкий фокус) або сідлом. Причому в сідла стійким і нестійким многовидами є, відповідно, його стійка й нестійка сепаратриси. На рис. 1.20 показані, зліва направо, атрактор (стійкий фокус), репелер (нестійкий фокус) і сідло.

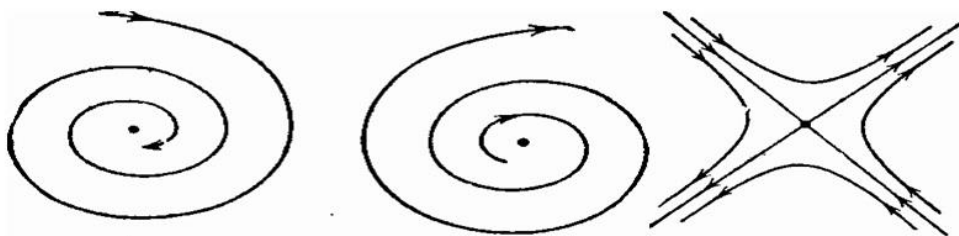


Рис. 1.20. Положення рівноваги: атрактор, репелер і сідло

Відмітимо, що точка типу центр не є ні атрактором, ні репелером, ні сідлом, тому що відсутня будь-яка множина точок, які наближаються до центру в прямому або зворотному часі. Точка типу центр – це особливий випадок граничної множини, для якої $A = B$.

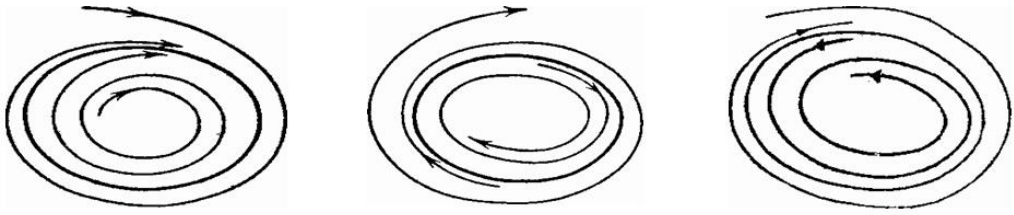


Рис. 1.21. *Граничні цикли: атрактор, репелер та сідловий*

У свою чергу, граничний цикл динамічної системи буде атрактором, якщо він стійкий, і репелером, якщо він цілком нестійкий. Напівстійкий граничний цикл є сідлом і називається сідловим. На рис. 1.21 зображені зліва направо: граничний цикл, який є атрактором, граничний цикл, який є репелером і сідловий граничний цикл. В зображеного на цьому малюнку граничного циклу стійкий й нестійкий многовиди розташовуються, відповідно, зовні й у середині циклу. Таким чином, атрактор – це гранична множина у фазовому просторі, до якого притягаються всі інші траєкторії з басейну притягання. Підкреслимо, що атрактори існують тільки в дисипативних системах.

Рух у дисипативних системах доцільно розділити на два класи: клас перехідних, нестационарних рухів, які відповідають процесу переходу від початкової до граничної множини станів, і клас усталених, стаціонарних рухів, фазові траєкторії яких належать граничним множинам. Часто точну границю між цими класами рухів провести неможливо. Ця границя залежить від точності проведених обчислень при розв'язуванні конкретної задачі.

У загальній теорії динамічних систем доведено, що дисипативна динамічна система може мати такі типи атракторів:

- i. положення рівноваги* (точки у фазовому просторі);
- ii. граничні цикли* (замкнені лінії у фазовому просторі);
- iii. квазіперіодичні атрактори* (тороїдальні поверхні у фазовому просторі).

Вище перераховані атрактори називаються регулярними. Їм відповідають повністю передбачувані в часі рухи дисипативних динамічних систем. Тривалий час вважалося, що тільки такі типи атракторів існують у динамічних системах. Однак в 60-х роках минулого століття були відкриті зовсім нові типи атракторів у динамічних системах. Виявилось, що рух повністю визначеної (детермінованої) динамічної системи може стати зовсім непередбачуваним (хаотичним). Причому, що особливо важливо, ця

непередбачуваність пояснюється властивостями самої динамічної системи, а не будь-яким зовнішнім хаотичним впливом. Однак, при всій своїй непередбачуваності, такі рухи мають ряд чітких кількісних і якісних закономірностей, що суттєво відрізняє їх від класичних стаціонарних випадкових процесів. Тому для позначення таких типів рухів динамічних систем почав вживатися парадоксальний термін – *“детермінований хаос”*. В свою чергу, для рухів які описуються регулярними атракторами почав застосовуватися термін – *“порядок”*.

Математичним образом детермінованого хаосу у фазовому просторі є складним чином влаштовані притягуючі множини, які не належать до жодного типу регулярних атракторів. При цьому фазові траєкторії не залишають при $t \rightarrow +\infty$ замкненої області й не притягуються до регулярних атракторів. Зображуюча точка траєкторії час від часу повертається в окіл довільно обраного на траєкторії початкового стану, однак ці повернення непередбачувані й мають вигляд випадкової послідовності. Такі *атрактори називаються дивними (хаотичними)* [12, 25, 51].

1.8. Типи стійкості траєкторій

Знову розглянемо динамічну систему, задану системою диференціальних рівнянь у векторному вигляді (1.1)

$$\dot{x} = f(x),$$

і припустимо, що її стан задається n – вимірним вектором x , а вектор-функція $f(x)$ відображає n – вимірний евклідовий простір \mathbb{R}^n у себе. Як було встановлено в численних дослідженнях, основним механізмом виникнення детермінованого хаосу є нестійкість за Ляпуновим траєкторій на атракторі [51].

Не обмежуючи загальності, в подальшому початковим моментом часу будемо вважати $t = 0$. Позначимо відповідний початковому часу стан системи (1.1) через x_0 .

Означення 1.16 *Точка x_0 , а також вихідна з неї траєкторія $x(t)$ називаються стійкими за Лагранжем, якщо траєкторія $x(t)$, при всіх $t > 0$, залишається в деякій обмеженій області фазового простору.*

Іншими словами, існує така константа M , що для всіх $t > 0$ виконується нерівність $\|x(t)\| < M$.

Означення 1.17 Точка n – вимірного фазового простору у називається ω – граничною точкою фазової траєкторії $x(t)$, якщо можна вказати таку послідовність моментів часу $t_k \rightarrow +\infty$, що $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k) = y$. Аналогічно точка z називається α – граничною, якщо можна вказати таку послідовність моментів часу $t_k \rightarrow -\infty$, що $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k) = z$.

Означення 1.18 Множина всіх ω – граничних точок називається ω – граничною множиною даної траєкторії й позначається через Ω_x . Відповідно множина всіх α – граничних точок називається α – граничною множиною даної траєкторії й позначається через Λ_x .

Означення 1.19 Траєкторія $x(t)$ називається стійкою за Пуассоном, якщо кожна її точка ϵ ω – граничною та α – граничною, тобто $x(t) \in \Omega_x \cap \Lambda_x, t \in \mathbb{R}^1$.

З означення стійкості за Пуассоном випливає, що будь-який усталений режим коливань (як регулярний, так і хаотичний) нелінійних дисипативних систем зображується траєкторіями стійкими за Пуассоном. Зворотнє твердження невірне. Дійсно, не кожна стійка за Пуассоном траєкторія зображує режим динаміки, який можна вважати усталеним. Це пов'язано з тим, що сама по собі властивість стійкості за Пуассоном ще нічого не говорить про те, як поведуться сусідні траєкторії, чи притягаються вони до вихідної траєкторії, або віддаляються від неї. Однак зрозуміло, що траєкторії, які відповідають перехідним процесам на фазовій площині від одної області притягання до іншої, не є стійкими за Пуассоном.

Розглянемо кілька прикладів різних типів траєкторій.

А. Самою простою траєкторією є *положення рівноваги*. Така траєкторія складається тільки з однієї точки й, очевидно, стійка за Пуассоном. Якщо розглянути траєкторію відмінну від нерухомої точки, то, як впливає з означення, стійкою за Пуассоном вона буде в тому випадку, якщо має властивість повертатися в як завгодно малий окіл кожної своєї точки нескінченне число раз.

Означення 1.20 Повернення траєкторії в ϵ – окіл довільно обраної на ній початкової точки називається *поверненням Пуанкаре*.

В. Тепер розглянемо *граничний цикл*. Очевидно, що повернення Пуанкаре в довільно обрану початкову точку циклу будуть фіксуватися періодично з як завгодно великою точністю (рис. 1.22 а). Час повернення T у цьому випадку буде просто періодом циклу. Він не залежить від вибору ϵ , принаймні, для досить малих ϵ .

Розглянемо приклад: припустимо, що для будь-якого заданого ε можна вказати період повернення $T(\varepsilon)$, один і той самий для довільної початкової точки на даній траєкторії, причому при $\varepsilon \rightarrow 0$ цей період прямує до нескінченності. Отже, повернення з даним ступенем точності слідує одне за іншим регулярно, із правильною періодичністю, однак період зростає, якщо ми бажаємо збільшити точність порівняння станів (рис. 1.22 б). Як відомо, такі рухи називаються *квазіперіодичними*. Зокрема, до них належить суперпозиція двох періодичних коливань з раціонально незпівмірними частотами. У фазовому просторі цьому типу руху відповідає траєкторія, яка всюди щільно покриває тороїдальну поверхню.

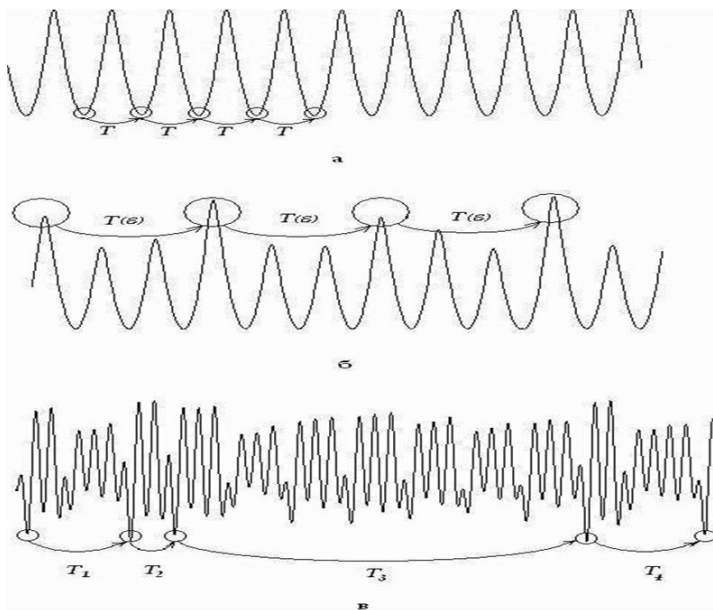


Рис. 1.22. Повернення Пуанкаре

І врешті, *детермінований хаос* – це така ситуація, коли повернення Пуанкаре в ε – окіл початкової точки відбуваються без ознак регулярності, а інтервал часу між двома послідовними поверненнями кожного разу інший. У підсумку спостерігається деяка хаотична послідовність часу таких повернень (рис. 1.22 в). Хаотичність таких повернень може допомогти нам ідентифікувати той факт, що в динамічній системі існує дивний атрактор.

Відмітимо, що означення стійкості за Лагранжем та Пуассоном характеризують будь-яку окремо узятую траєкторію й нічого не говорять про поведінку близьких до неї траєкторій. Таку поведінку описує стійкість за Ляпуновим.

Припустимо, що система (1.1) при старті із точки x_0 породжує траєкторію $x(t)$, при старті із точки y_0 – траєкторію $y(t)$. Нагадаємо, що траєкторія $x(t)$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої стартової точки y_0 , яка задовольняє нерівності

$$\|y_0 - x_0\| < \delta$$

при всіх $t > 0$ виконується нерівність

$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Таким чином, якщо дві траєкторії близькі в початковий момент часу, то вони залишаються близькими й у будь-який наступний момент часу.

Асимптотично стійкою є траєкторія $x(t)$, якщо вона стійка за Ляпуновим існує таке $\Delta > 0$, що з $\|y_0 - x_0\| < \Delta$ випливає

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$$

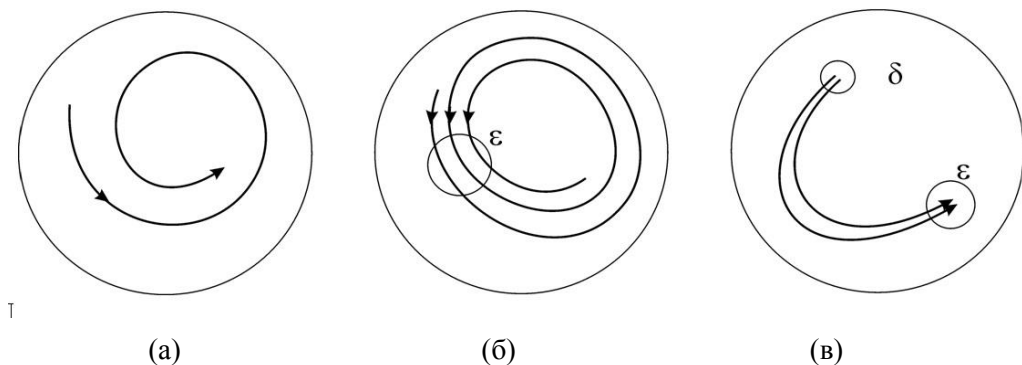


Рис. 1.23. Стійкість за Лагранжем (а), Пуассоном (б) і Ляпуновим (в)

Наочна ілюстрація різних типів стійкості наведена на рис. 1.23. Ліворуч показана траєкторія стійка за Лагранжем. Вона увесь час залишається в замкненій області. У центрі траєкторія стійка за Пуассоном. Вона багаторазово повертається в ε – окіл стартової точки. Нарешті, праворуч траєкторія стійка за Ляпуновим. Дві близькі в початковий момент часу траєкторії назавжди залишаються близькими.

Надалі, якщо не зазначено протилежне, під стійкістю будемо розуміти стійкість за Ляпуновим. Має місце теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема 1.16 *Якщо неперіодична траєкторія стійка за Пуассоном та за Ляпуновим, то вона квазіперіодична.*

З цієї теореми відразу випливає, що всі регулярні атрактори динамічних систем (положення рівноваги, граничні цикли й квазіперіодичні атрактори) стійкі як за Пуассоном, так і за Ляпуновим. У свою чергу, всі дивні атрактори динамічних систем стійкі за Пуассоном і нестійкі за Ляпуновим.

1.9. Спектр ляпуновських характеристичних показників

Розглянемо динамічну систему у векторній формі (1.1). Нехай $x(t)$ – деякий розв’язок цієї системи, який ми будемо називати незбуреним [16, 51].

Далі, нехай $y(t) = x(t) + \tilde{x}(t)$ – близький до незбуреного розв’язок, який реалізується при незначно зміненій початковій умові. Назвемо розв’язок $y(t)$ збуреним. Тоді еволюція малого збурення $\tilde{x}(t)$ описується рівнянням першого наближення

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A(t) \tilde{x}, \quad (1.96)$$

де матриця $A(t)$ має вигляд

$$A(t) = \left(\frac{\partial f_i(x(t))}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n.$$

Має місце теорема.

Теорема 1.17 (Ляпунова). *Нехай існує така константа $M > 0$, що для всіх елементів A_{ij} матриці A і для довільного $T > 0$*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |A_{ij}(t)| dt \leq M.$$

Тоді

1. для будь-якого розв’язку $\tilde{x}(t)$ рівняння (1.96) існує ляпуновський характеристичний показник – дійсне число, відмінне від $\pm\infty$, яке визначається за формулою

$$\lambda(\tilde{x}) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{x}(T)\|;$$

2. при множенні розв'язку на константу $C \neq 0$ ляпуновський характеристичний показник не змінюється

$$\lambda(C\tilde{x}) = \lambda(\tilde{x}); \quad (1.97)$$

3. ляпуновський характеристичний показник лінійної комбінації двох розв'язків не перевищує більшого з показників цих двох розв'язків

$$\lambda(C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2) \leq \max(\lambda(\tilde{x}_1), \lambda(\tilde{x}_2)); \quad (1.98)$$

4. існує n лінійно незалежних розв'язків $\tilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (фундаментальна система розв'язків) рівняння (1.96), яким відповідає n ляпуновських характеристичних показників, які нумеруються в порядку спадання $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – вони не обов'язково різні!

Означення 1.21 Набір чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ називається спектром ляпуновських характеристичних показників. Найбільше із цих чисел λ_1 називається старшим ляпуновським показником. Множину всіх ляпуновських характеристичних показників (відмінних від $-\infty$ та $+\infty$) розв'язків системи (1.96) називають її спектром.

Спектр ляпуновських характеристичних показників слід розглядати як характеристику лінійної системи рівнянь (1.96) у цілому, а не якогонебудь одного розв'язку $\tilde{x}(t)$, оскільки розв'язок не залежить від вибору фундаментальної системи $\{\tilde{x}_i(t)\}$. Оскільки будь-який розв'язок $\tilde{x}(t)$ системи (1.96) є лінійною комбінацією фундаментальної системи розв'язків, то згідно (1.97) – (1.98) ляпуновським характеристичним показником розв'язку $\tilde{x}(t)$ обов'язково буде одне з чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Якщо матриця системи (1.96) буде постійною, то ляпуновські характеристичні показники співпадають з дійсними частинами власних значень матриці системи.

Тепер повернемося до вихідної нелінійної системи рівнянь (1.1). Для кожної траєкторії $x(t)$ система першого наближення (1.96) дає цілком певний спектр ляпуновських характеристичних показників. Присутність в цьому спектрі показника λ означає, у силу (1.97), що існує таке збурення вихідної траєкторії, яке еволюціонує в часі, у лінійнім наближенні, як $e^{\lambda t}$. Отже, присутність у спектрі хоча б одного додатного показника означає нестійкість відповідної траєкторії. Якщо всі показники від'ємні, то це свідчить про асимптотичну стійкість траєкторії.

Можна довести, що для положення рівноваги системи (1.1) спектр ляпуновських характеристичних показників складається з дійсних частин власних чисел матриці системи першого наближення. Для граничного циклу системи (1.1) спектр ляпуновських характеристичних показників визначається за формулою

$$\lambda_i = \frac{\ln|\rho_i|}{T}, i = 1, 2, \dots, n,$$

де ρ_i – мультиплікатор граничного циклу, а T – його період.

Дотепер, говорячи про спектр ляпуновських характеристичних показників, ми приписували його деякій фазовій траєкторії. Задасмося тепер більш загальним питанням про стійкість динамічної системи в усталеному режимі, що диктує необхідність визначення спектра ляпуновських характеристичних показників атрактора. Якщо атрактор є положенням рівноваги або граничним циклом, то він складається з однієї траєкторії й уже визначений нами спектр, природно, буде спектром ляпуновських характеристичних показників такого атрактора. Якщо ж атрактор складається з множини траєкторій, як, наприклад, тор або дивний атрактор, то виникає далеко не очевидне питання, чи можливо приписати атрактору в цілому спектр якої-небудь траєкторії цього атрактора. Тут на допомогу приходить *мультиплікативна ергодична теорема* В. Оселедця [32], яка стверджує, що типова, взята навмання, траєкторія на атракторі з одиничною ймовірністю буде мати цілком визначений спектр ляпуновських характеристичних показників, який можна приписати атрактору в цілому.

Спектр ляпуновських характеристичних показників атрактора дисипативної динамічної системи повинен задовольняти таким вимогам:

1. сума всіх n показників повинна бути від'ємною

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0.$$

Це умова дисипативності, завдяки якій атрактор є притягуючою граничною множиною нульової міри у фазовому просторі;

2. в атрактора, відмінного від положення рівноваги, обов'язково повинен бути хоча б один нульовий показник.

Дійсно, розглянемо дві траєкторії на атракторі, які стартують, відповідно, з точок $x_0 = x(t_0)$ і $y_0 = x(t_0 + \Delta t)$, де часовий зсув Δt вважа-

ється малим. За припущенням, атрактор не є положенням рівноваги, тому y_0 не збігається з x_0 . Обидві зображуючі точки слідуєть по одній траєкторії, тобто відрізняються тільки часовим зсувом, тому

$$y(t) - x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \approx \dot{x}(t)\Delta t = f(x(t))\Delta t.$$

Однак праві частини системи (1.1) обмежені за нормою, $\|f(x(t))\| < M$, тому $\|f(x(t))\Delta t\| < M|\Delta t|$. Таким чином, ляпуновський характеристичний показник для збурення типу зсуву траєкторій дорівнює

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|y(T) - x(T)\| = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln M|\Delta t| = 0.$$

Припустимо, що ляпуновські характеристичні показники упорядковані за спаданням.

Будемо позначати:

додатний показник – знаком ‘+’,

від’ємний показник – знаком ‘-’,

нульовий показник – ‘0’.

Тоді атрактору динамічної системи у фазовому просторі розмірності n буде відповідати набір з n знаків, який ми будемо називати сигнатурою спектра ляпуновських характеристичних показників. Вивчимо якими можуть бути ці сигнатури при різних розмірностях фазового простору.

При $n = 1$ можливий тільки один варіант сигнатури $\langle - \rangle$, що відповідає атрактору у вигляді нерухомої точки – асимптотично стійкому положенню рівноваги.

При $n = 2$ можливі тільки два варіанти сигнатури:

$\langle -, - \rangle$ – стійке положення рівноваги;

$\langle 0, - \rangle$ – граничний цикл.

Покажемо, що при $n = 2$ усі інші варіанти сигнатур неможливі. Дійсно, сигнатури $\langle +, 0 \rangle$, $\langle 0, 0 \rangle$ неможливі, тому що такі сигнатури суперечать умові дисипативності (сума ляпуновських показників не буде від’ємною). Варіант $\langle +, - \rangle$ також виключений, тому що положення рівноваги з такою сигнатурою нестійке й не є атрактором. Якщо ж атрактор не є положенням рівноваги, то така сигнатура виключена в силу умови обов’язкової наявності, в цьому випадку, нульового показника.

Можливість виникнення атрактора з додатним ляпуновським характеристичним показником виникає, починаючи з розмірності фазового простору $n = 3$. Тут можливі такі варіанти сигнатур:

$\langle -, -, - \rangle$ – стійке положення рівноваги;

$\langle 0, -, - \rangle$ – граничний цикл;

$\langle 0, 0, - \rangle$ – двовимірний тор;

$\langle +, 0, - \rangle$ – дивний атрактор.

Усі інші варіанти сигнатур суперечать або умові дисипативності, або необхідності наявності нульового показника для атракторів, які не є нерухомими точками, або – визначенню атрактора.

При зростанні розмірності фазового простору число можливих варіантів сигнатур суттєво зростає. Наприклад, при $n = 4$ крім дивного атрактора з одним додатним ляпуновським показником $\langle +, 0, -, - \rangle$ може існувати дивний атрактор із двома додатними показниками $\langle +, +, 0, - \rangle$.

Означення 1.22 *Дивні атрактори, які мають у спектрі ляпуновських характеристичних показників більш одного додатного показника, називаються гіперхаотичними.*

Таким чином, для динамічних систем, які описуються автономними диференціальними рівняннями, ми прийшли до фундаментального висновку – *принципова можливість реалізації дивного атрактора починається з розмірності фазового простору $n = 3$. На фазовій площині існування дивних атракторів неможливе.*

До речі, неможливість дивного атрактора на площині може бути доведена такими простими міркуваннями. Будь-який атрактор, зокрема й дивний, повинен бути стійким за Лагранжем (розташовуватися в обмеженій області фазового простору) і за Пуассоном (зображуюча точка повинна нескінчену кількість разів повертатися в ε – окіл стартової точки траєкторій атрактора). На фазовій площині це обов'язково призведе до самоперетину траєкторії, що суперечить теоремі Коші–Пікара. Отже, дивний атрактор на фазовій площині не може існувати.

Наявність у спектрі ляпуновських характеристичних показників додатного показника є одним з основних критеріїв ідентифікації дивних атракторів у конкретних прикладних динамічних системах. Тому дуже важливо вміти обчислювати спектр ляпуновських характеристичних показників, або хоча б старший показник спектра. На жаль, для більшості практичних динамічних систем безпосереднє обчислення показника за формулою

$$\lambda = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{x}(T)\| \quad (1.99)$$

неможливе, тому що траєкторія атрактора не може бути знайдена для довільної системи за допомогою квадратурних формул. Тому для обчислення ляпуновських характеристичних показників доводиться розробляти чисельні методи. Однією з найбільш поширених методик є алгоритм Бенеттіна.

Отже, знову розглянемо динамічну систему (1.1)

$$\dot{x} = f(x).$$

Процедура обчислення старшого ляпуновського показника починається з побудови чисельного розв'язку системи (1.1) на інтервалі часу, достатньому для того, щоб траєкторії $x(t)$ гарантовано потрапили на атрактор. Тобто методом перебору відкидаються фазові координати траєкторії, які не потрапляють на шуканий атрактор, а є траєкторіями перехідного процесу, що прямують в нескінченність чи то до іншого положення рівноваги. Тривалість перехідного процесу не підкоряється яким-небудь загальним закономірностям і тому її доводиться визначати експериментально для кожної конкретної задачі.

Вибираємо навмання початковий стан системи (1.1) і одним з чисельних методів на тривалому інтервалі часу знаходимо її розв'язок. Кінцеву точку цього розв'язку позначимо через x_0 та приймемо її за початкову точку траєкторії на атракторі. Потім розв'язуємо систему рівнянь першого наближення

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial f(x(t, x_0))}{\partial x} \tilde{x} \quad (1.100)$$

разом з системою (1.1). Причому для системи рівнянь (1.1) за початкову точку беремо x_0 , а для системи (1.100) – деяку точку \tilde{x}_0 , для якої виконується співвідношення $\|\tilde{x}_0\| = 1$. Наприклад, за початковий вектор збурення можна вибрати $\tilde{x}_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$. Задамо деякий часовий інтервал T і розв'яжемо чисельно системи (1.1) та (1.100), знайшовши вектор стану і його збурення $x(T) = x_1$, $\tilde{x}(T) = \tilde{x}_1$ в момент часу T .

Тепер перевизначимо вектор збурення таким способом $\tilde{x}_1^0 = \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|}$. Необхідність такого перенормування пов'язана з тим, що в тому випадку, коли траєкторія нестійка (наприклад, належить дивному атрактору), збурена траєкторія прямує до нескінченності, що суттєво ускладнює процес обчислення.

Далі знову продовжуємо процедуру чисельного розв'язування системи (1.1) з початковою точкою x_1 і системи (1.100) з початковою точкою \tilde{x}_1^0 . Відшукавши вектор стану й вектор збурення $x(2T) = x_2$, $\tilde{x}(2T) = \tilde{x}_2$ в момент $2T$, перевизначаємо вектор збурення $\tilde{x}_2^0 = \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}_2\|}$. Потім багаторазово повторюємо аналогічну процедуру знаходження розв'язків і перенормування.

Якісно алгоритм Бенеттіна можна проілюструвати за допомогою рис. 1.24.

Якщо початкова точка x_0 належить типовій траєкторії атрактора, а початкове збурення \tilde{x}_0 взяте навмання, то еволюція амплітуди збурення буде визначатися старшим ляпуновським характеристичним показником. На підставі формули (1.99) наближено одержимо

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{x}(T_i)\|, \quad T_i \rightarrow \infty. \quad (1.101)$$

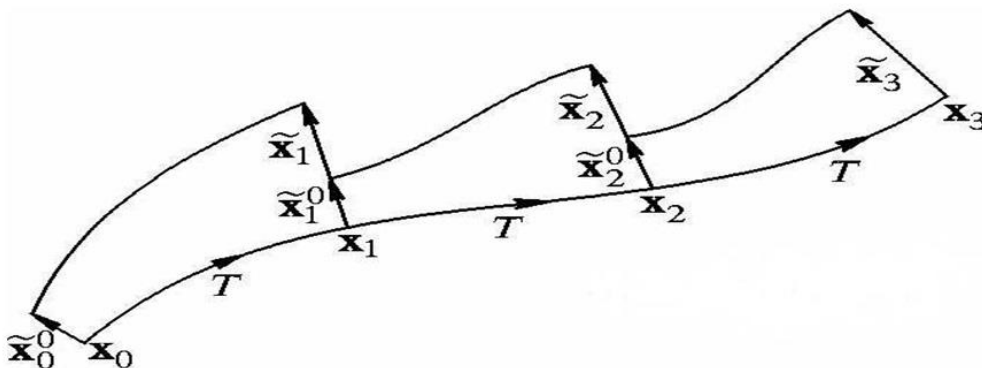


Рис. 1.24. Якісна схема алгоритму Бенеттіна

При цьому число кроків K повинно бути досить великим. Практично ми закінчуємо обчислення, коли значення величини λ_1 задовольняє критерію наперед заданої точності. Далі описану процедуру бажано повторити кілька разів з різними початковими умовами для вектора стану й вектора збурення та провести обробку отриманих результатів. Довжина інтервалу перенормування T вибирається індивідуально для кожної конкретної задачі. При комп'ютерних обчисленнях ця величина, з одного боку, не повинна бути дуже великою, водночас не повинна бути дуже малою.

Тепер перейдемо до процедури обчислення повного спектра ляпуновських характеристичних показників атрактора. Якщо проводити роз-

рахунки за вищеописаним алгоритмом Бенеттіна, то буде домінувати складова вектора збурення з максимальним ляпуновським показником. Тому для обчислення інших показників необхідно модифікувати алгоритм. Такий узагальнений алгоритм був запропонований Бенеттіном в якому перенормування векторів збурення супроводжується їхньою ортогоналізацією за Грамом-Шмідтом.

Опишемо узагальнений алгоритм Бенеттіна на прикладі системи розмірності $n = 3$. У цьому випадку кількість ляпуновських характеристичних показників рівна трьом. Розв'язуємо систему рівнянь (1.1) на інтервалі часу, достатньому для того, щоб набути впевненості в завершенні перехідного процесу й виході траєкторії на атрактор. Потім обчислюємо розв'язки системи першого наближення (1.100) разом з системою рівнянь (1.1) з трьох різних початкових точок $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0$, які утворюють ортонормовану систему векторів. Наприклад

$$\tilde{x}_0^0 = (1,0,0)^T, \quad \tilde{y}_0^0 = (0,1,0)^T, \quad \tilde{z}_0^0 = (0,0,1)^T.$$

Через деякий час T траєкторія системи (1.1) прийде в точку x_1 , вектори збурень, відповідно, будуть наближатися. Ортогоналізуємо їх за Грамом-Шмідтом

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^0 &= \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|}, \quad \tilde{y}_1' = \tilde{y}_1 - (\tilde{y}_1^T \tilde{x}_1^0) \tilde{x}_1^0, \quad \tilde{y}_1^0 = \frac{\tilde{y}_1'}{\|\tilde{y}_1'\|}, \\ \tilde{z}_1' &= \tilde{z}_1 - (\tilde{z}_1^T \tilde{x}_1^0) \tilde{x}_1^0 - (\tilde{z}_1^T \tilde{y}_1^0) \tilde{y}_1^0, \quad \tilde{z}_1^0 = \frac{\tilde{z}_1'}{\|\tilde{z}_1'\|}. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Далі продовжуємо чисельні розрахунки, починаючи з точки x_1 і векторів збурень $\tilde{x}_1^0, \tilde{y}_1^0, \tilde{z}_1^0$. Потім через інтервал часу T одержимо набір векторів збурень $\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2$, який знову ортогоналізуємо і перенормуємо відповідно до процедури (1.102). Описана послідовність дій повторюється велику кількість разів K . Знаходимо

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{x}(T_i)\|, \quad \Lambda_2 = \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{y}(T_i)\|, \quad \Lambda_3 = \sum_{i=1}^K \ln \|\tilde{z}(T_i)\|. \quad (1.103)$$

У формулі (1.103) наявні вектори збурень до перенормування. Тоді ляпуновські характеристичні показники наближено дорівнюють

$$\lambda_i \approx \frac{\Lambda_i}{KT}, \quad i = 1,2,3. \quad (1.104)$$

Аналогічно визначається спектр ляпуновських характеристичних показників у випадку довільної розмірності фазового простору.

1.10. Інтегральна лійка та її властивості

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (1.105)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану, $t \in \mathbb{R}^n$, $(x, t) \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – функція, яка в області \mathcal{D} задовольняє умови існування і єдиності розв’язку задачі Коші системи (1.105). Зокрема, можемо вважати, що відображення f задовольняє умову неперервності за змінною t і локальної ліпшицевості за x . Позначимо $x(t, x_0, t_0)$ розв’язок системи (1.105) з умовою Коші $x(t_0) = x_0$.

Теорема 1.18 *Припустимо, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ – компакт в \mathbb{R}^{n+1} , всі розв’язки $x(t, x_0, t_0)$ системи (1.75) з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_0) \in \mathcal{A}$ при $t \in [a, b]$ існують і їхні графіки належать області \mathcal{D} . Тоді сукупність Ψ таких розв’язків є компактом в просторі $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Крім того, множина*

$$\mathcal{H} = \{(x, t) \in \mathcal{D} : x = x(t, x_0, t_0), t \in [a, b], (x_0, t_0) \in \mathcal{A}\},$$

яка складається з точок, що лежать на графіках розв’язків системи (1.105) з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_0) \in \mathcal{A}$ при $t \in [a, b]$ є компактом в \mathbb{R}^{n+1} .

Доведення. Нагадаємо, що сім’я Φ функцій $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, визначених на відрізку $[a, b]$, називається рівномірно обмеженою, якщо існує константа $K > 0$ така, що $\|\phi(t)\| \leq K$, $t \in [a, b]$.

Сім’я функцій Φ називається *одностайно неперервною*¹, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що

$$\|\phi(t) - \phi(s)\| < \varepsilon$$

для всіх $t, s \in [a, b]$, $|t - s| < \delta$ і для всіх $\phi \in \Phi$. За теоремою Арцела, для того, щоб сім’я неперервних функцій Φ була передкомпактною в

¹ Одностайно неперервні функції (анг. *equicontinuous functions*) – термін запропонований професором Горбачуком М. Л. та запроваджений ним на лекціях для студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

$C([a, b], \mathbb{R}^n)$, необхідно і достатньо, щоб Φ була рівномірно обмеженою і одностайно неперервною.

Оскільки область D є обмеженою, то існує $m > 0$ таке, що $\|f(x, t)\| \leq m$, $(x, t) \in D$. Звідси випливає, що всі розв'язки $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ системи (1.105), які задовольняють умови $x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_0) \in \mathcal{A}$, $t \in [a, b]$ є такими, що

$$\left\| \frac{dx(t)}{dt} \right\| \leq m, \quad t \in [a, b].$$

Зазначимо, що всі такі функції $x(\cdot)$ складають множину Ψ . Тоді

$$\|x(t) - x(s)\| \leq \left\| \int_s^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \right\| \leq \int_s^t \left\| \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau \leq m|t - s|,$$

де $t, s \in [a, b]$, $x \in \Psi$. З останньої нерівності випливає, що сукупність Ψ є рівномірно обмеженою і одностайно неперервною в $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

За теоремою Арцела це означає, що Ψ є передкомпактною в $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ [21]. Крім того, будь-яка збіжна послідовність розв'язків системи (1.105) збігається до розв'язку цієї системи. Враховуючи компактність множини початкових умов \mathcal{A} , звідси одержуємо, що якщо послідовність $x^{(k)}(\cdot) \in \Psi$ збігається в нормі простору $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ до деякої функції $x(\cdot)$, то $x(\cdot) \in \Psi$. Тобто множина Ψ є замкненою, а тому компактною в $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Обґрунтуємо компактність множини \mathcal{H} . Виберемо послідовність точок

$$z^{(k)} = (y^{(k)}, s^{(k)}) \in \mathcal{H}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу компактності $[a, b]$ виділимо з послідовності $s^{(k)} \in [a, b]$ збіжну підпослідовність. Виберемо в послідовності $\{z^{(k)}\}$ ті члени, які відповідають членам послідовності $\{s^{(k)}\}$, що входять в збіжну підпослідовність і перепозначимо одержану підпослідовність знову як $\{z^{(k)}\}$. Тоді послідовність $\{z^{(k)}\}$ є такою, що $\lim_{k \rightarrow \infty} s^{(k)} = s^{(0)}$, $s^{(0)} \in [a, b]$. В силу побудови множини \mathcal{H} , можна вибрати функції $x^{(k)}(\cdot) \in \Psi$ такі, що

$$x^{(k)}(s^{(k)}) = y^{(k)}, \quad (y^{(k)}, s^{(k)}) = z^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ми довели, що множина Ψ є компактом в $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Тому з послідовності $\{x^{(k)}(\cdot)\}$ можна виділити збіжну до деякого елемента $x^{(0)}(\cdot) \in \Psi$ підпослідовність. Перепозначимо цю підпослідовність, а також відповідні їй члени послідовності $\{z^{(k)}\}$ знову як $\{x^{(k)}(\cdot)\}$, $\{z^{(k)}\}$ відповідно. Таким чином,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} \|x^{(k)}(t) - x^{(0)}(t)\| = 0.$$

Позначимо $y^{(0)} = x^{(0)}(s^{(0)})$. Тоді з

$$\begin{aligned} \|y^{(k)} - y^{(0)}\| &= \|x^{(k)}(s^{(k)}) - x^{(0)}(s^{(0)})\| \leq \\ &\leq \|x^{(k)}(s^{(k)}) - x^{(0)}(s^{(k)})\| + \|x^{(0)}(s^{(k)}) - x^{(0)}(s^{(0)})\| \leq \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} \|x^{(k)}(t) - x^{(0)}(t)\| + \|x^{(0)}(s^{(k)}) - x^{(0)}(s^{(0)})\| \end{aligned}$$

одержуємо $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = y^{(0)}$. Звідси випливає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} = z^{(0)}, \quad z^{(0)} = (y^{(0)}, s^{(0)}) \in \mathcal{H}.$$

Отже, з послідовності $\{z^{(k)}\}$ ми виділили збіжну до точки $z^{(0)} \in \mathcal{H}$ підпослідовність. Це означає, що множина \mathcal{H} є компактною в \mathbb{R}^{n+1} . □

Означення 1.23 Множина \mathcal{H} у формулюванні теореми 1.11 називається відрізком інтегральної лійки. Перетин множини \mathcal{H} гіперплощиною $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}: t = \tau\}$ називається перетином інтегральної лійки в момент $\tau \in [a, b]$ (рис. 1.25.)

$$\mathcal{H}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n: (x, \tau) \in \mathcal{H}\}.$$

Теорема 1.19 Припустимо, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ – компакт в \mathbb{R}^{n+1} . Тоді перетин інтегральної лійки $\mathcal{H}(\tau)$ є компактом в \mathbb{R}^n . Якщо множина \mathcal{A} є однозв'язною, то сукупність $\mathcal{H}(\tau)$ є однозв'язною.

Доведення. Компактність $\mathcal{H}(\tau)$ є наслідком теореми 1.19 і замкненості Γ . Покажемо однозв'язність $\mathcal{H}(\tau)$ за умови, що \mathcal{A} є однозв'язною. Виберемо довільні точки $x^{(1)}, x^{(2)}$ з множини $\mathcal{H}(\tau)$. Тоді знайдуться точки $z^{(1)} = (y^{(1)}, s^{(1)})$, $z^{(2)} = (y^{(2)}, s^{(2)})$ з множини \mathcal{A} такі, що $x^{(1)} = x(\tau, y^{(1)}, s^{(1)})$, $x^{(2)} = x(\tau, y^{(2)}, s^{(2)})$. Оскільки множина \mathcal{A} – однозв'язна, то існує неперервна функція $\phi(p)$, $p \in [c, d]$ така, що $\phi(p) \in \mathcal{A}$, $p \in [c, d]$,

$\phi(c) = z^{(1)}$, $\phi(d) = z^{(2)}$. За теоремою про неперервну залежність розв'язків системи (1.105) від початкових умов функція $\psi(p) = x(\tau, \phi(p), t_0)$ є неперервною, $p \in [c, d]$, при цьому $\psi(p) \in \mathcal{H}(\tau)$, $p \in [c, d]$, $\psi(c) = x^{(1)}$, $\psi(d) = x^{(2)}$. Отже, $\mathcal{H}(\tau)$ є однозв'язною. □

Наслідок 1.1 Нехай множина \mathcal{A} має вигляд $\mathcal{A} = \{(x, t_0) : x \in \mathcal{A}_0\}$, де \mathcal{A}_0 є компактом в \mathbb{R}^n , $t_0 \in [a, b]$. Тоді $\mathcal{H}(\tau)$ є компактом.

Теорема 1.20 Припустимо, що \mathcal{A}_0 є компактом в \mathbb{R}^n ,

$$\mathcal{H}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(\tau, x_0, t_0), x_0 \in \mathcal{A}_0\}$$

є перетином інтегральної лійки в момент $\tau \in [a, b]$, тоді:

якщо $x_0 \in \partial \mathcal{A}_0$, то $x(\tau, x_0, t_0) \in \partial \mathcal{H}(\tau)$;

якщо $x_0 \in \text{int } \mathcal{A}_0$, то $x(\tau, x_0, t_0) \in \text{int } \mathcal{H}(\tau)$.

Доведення. Якщо $x_0 \in \partial \mathcal{A}_0$, то знайдеться послідовність $x_0^k \notin \mathcal{A}_0$, $k = 1, 2, \dots$ така, що $\lim_{k \rightarrow \infty} x_0^k = x_0$. Тоді $x(\tau, x_0^k, t_0) \notin \mathcal{H}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots$. За теоремою про неперервну залежність розв'язків системи (1.105) від початкових умов

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(\tau, x_0^k, t_0) = x(\tau, x_0, t_0).$$

Оскільки $x(\tau, x_0, t_0) \in \mathcal{H}(\tau)$, то це означає, що $x(\tau, x_0, t_0) \in \partial \mathcal{H}(\tau)$.

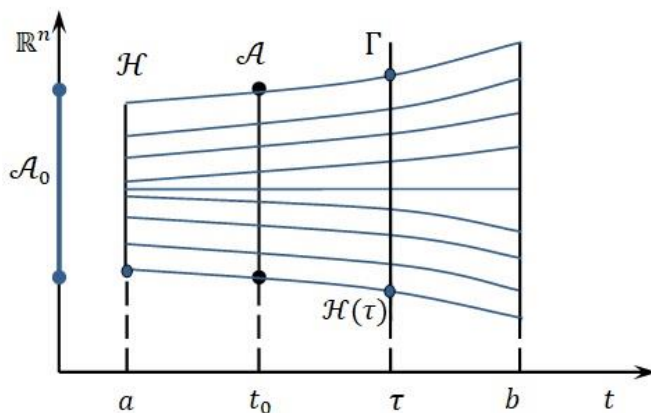


Рис. 1.25. Ілюстрація властивостей інтегральної лійки

Нехай $x_0 \in \text{int } \mathcal{H}_0$. Припустимо, від супротивного, що $x(\tau, x_0, t_0) \in \partial \mathcal{H}(\tau)$. Тоді існує послідовність $y^k \notin \mathcal{H}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots$ така, що

$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = y = x(\tau, x_0, t_0)$. Тоді, враховуючи те, що виконуються умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, послідовність

$$x_0^k = x(t_0, y^k, \tau) \notin \mathcal{A}_0, k = 1, 2, \dots,$$

при цьому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_0^k = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_0, y^k, \tau) = x(t_0, y, \tau) = x_0.$$

Ми одержали протиріччя з припущенням $x_0 \in \text{int } \mathcal{A}_0$. □

Розглянемо властивості перетину інтегральної лійки лінійної системи диференціальних рівнянь. Розглянемо систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + g(t), \quad (1.106)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $C(t)$ – $n \times n$ – матриця з неперервними компонентами, $g(t)$ – n -вимірна неперервна функція, $t \in [a, b]$.

Позначимо $X(t, s)$ фундаментальну матрицю системи $\frac{dx}{dt} = C(t)x$ нормовану за моментом s , де $t, s \in [a, b]$. За формулою Коші

$$x(t, x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0 + a(t), \quad a(t) = \int_{t_0}^t X(t, s)g(s)ds.$$

З формули Коші, наслідком теореми 1.19 і означенням 1.23 перетину інтегральної лійки впливає таке твердження.

Теорема 1.21 *Нехай \mathcal{A}_0 є опуклим компактом в \mathbb{R}^n . Тоді перетин інтегральної лійки має вигляд*

$$\mathcal{H}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n: x = x(\tau, x_0, t_0), x_0 \in \mathcal{A}_0\} = X(\tau, t_0)\mathcal{A}_0 + a(\tau)$$

і є опуклим компактом, $\tau \in [a, b]$.

Теорема 1.22 *Нехай*

$$\mathcal{A}_0 = E(Q_0, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle Q_0^{-1}(x - x_0), x - x_0 \rangle \leq 1\}$$

є еліпсоїдом, точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ є центром еліпсоїда, Q_0 – симетрична додатно визначена $n \times n$ – матриця. Тоді перетин інтегральної лійки є еліпсоїдом

$$\mathcal{H}(\tau) = E(Q(\tau), z(\tau)),$$

де $z(t)$ є розв'язком системи (1.106) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, $Q(t)$ – симетрична додатновизначена $n \times n$ – матриця, яка є розв'язком матричного диференціального рівняння Ляпунова

$$\frac{dQ(t)}{dt} = C(t)Q(t) + Q(t)C^T(t), \quad Q(t_0) = Q_0, \quad (1.107)$$

де $\tau \in [a, b]$.

Доведення. Враховуючи, що $E(Q_0, x_0) = E(Q_0, 0) + x_0$, за теоремою 1.21

$$\mathcal{H}(\tau) = X(\tau, t_0)E(Q_0, x_0) + a(\tau) = X(\tau, t_0)E(Q_0, 0) + X(\tau, t_0)x_0 + a(\tau).$$

За формулою Коші $X(\tau, t_0)x_0 + a(\tau) = z(\tau)$. Виходячи з означень добутку матриці на множину і еліпсоїда, одержуємо

$$X(\tau, t_0)E(Q_0, 0) = E(Q(\tau), 0),$$

де $Q(\tau) = X(\tau, t_0)Q_0X^T(\tau, t_0)$. Оскільки фундаментальна матриця є невиродженою, а матриця Q_0 є додатновизначеною і симетричною, то $Q(\tau)$ є також додатновизначеною і симетричною. Це впливає з означення додатновизначеної і симетричної матриці. За означенням фундаментальної матриці

$$\frac{dX(t, t_0)}{dt} = C(t)X(t, t_0), \quad X(t_0, t_0) = E.$$

Звідси одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} &= \frac{dX(t, t_0)}{dt} Q_0 X^T(t, t_0) + X(t, t_0) Q_0 \frac{dX^T(t, t_0)}{dt} = \\ &= C(t) X(t, t_0) Q_0 X^T(t, t_0) + X(t, t_0) Q_0 X^T(t, t_0) C^T(t) = \\ &= C(t) Q(t) + Q(t) C^T(t). \end{aligned}$$

При цьому $Q(t_0) = Q_0$. Отже, матриця $Q(t)$ задовольняє рівняння (1.107).

□

1.11. Переріз і відображення Пуанкаре

Розглянемо динамічну систему з неперервним часом, динаміка якої описується деякими диференціальними рівняннями. Нехай, для визначеності, маємо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z), \\ \dot{y} = f_2(x, y, z), \\ \dot{z} = f_3(x, y, z). \end{cases} \quad (1.108)$$

Тут $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ – функції, які забезпечують виконання умов існування і єдиності розв’язків задачі Коші [14, 51]. Розглянемо деякий розв’язок системи (1.108), якому відповідає у фазовому просторі траєкторія Γ . Помістимо в фазовому просторі деяку площину S , рівняння якої має вигляд

$$S(x, y, z) = 0. \quad (1.109)$$

Вибір такої площини досить довільний, однак вона повинна розміщуватися так, щоб траєкторія Γ багаторазово її перетинала і дотик траєкторії до площини був неможливий (трансверсальне перетинання). Така площина S називається січною Пуанкаре фазової траєкторії Γ . Позначимо точки перетину траєкторії Γ з січною S через a_1, a_2, \dots, a_n (рис. 1.25). Відмітимо, що послідовність точок $\{a_n\}$ задається перетинами Γ з S в одному напрямку. Отримана дискретна множина точок $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ на січній Пуанкаре називається перерізом Пуанкаре для траєкторії Γ .

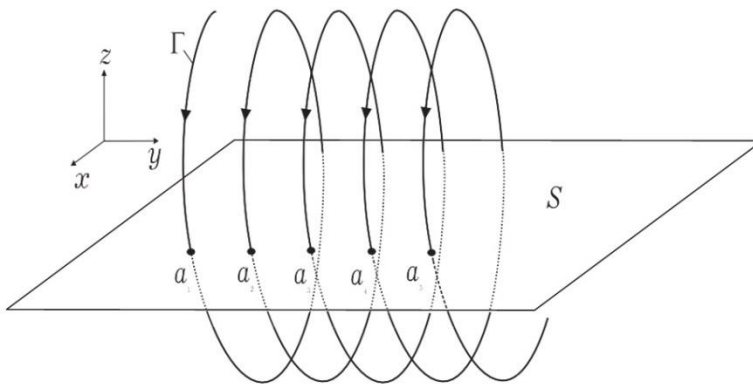


Рис. 1.26. Переріз Пуанкаре

Переріз Пуанкаре також породжує деяке дискретне відображення, яке ставить у відповідність будь-якій точці a_n найближчу наступну за a_n точку a_{n+1} . Закон відповідності між попередньою й наступною точками перерізу Пуанкаре називається відображенням послідування або відображенням Пуанкаре.

Для розглянутого тривимірного випадку це відображення буде вже двовимірним

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= P_2(x_n, y_n), \end{aligned} \quad (1.110)$$

тому що точки перерізу Пуанкаре розташовуються на площині й третю координату завжди можна виразити через дві перші.

Таким чином, задача дослідження динамічної системи (1.108) може бути зведена до задачі вивчення відповідного відображення Пуанкаре, яке має розмірність на одиницю меншу, ніж розмірність вихідної динамічної системи. При цьому структура динамічної системи однозначно (але не взаємно однозначно) визначає структуру породжуваного нею дискретного відображення (1.110). Ця підміна об'єкта дослідження не супроводжується будь-якими апроксимаціями, аналіз залишається точним. Однак при такій підміні об'єкта дослідження ми втрачаємо інформацію про характер динаміки в проміжках часу між послідовними перетинами січної площини, зокрема, про тривалість інтервалів часу між цими перетинами й про топологічні властивості фазової траєкторії. Проте зберігається можливість аналізувати низку принципів питань, наприклад, чи виникає в системі регулярний, або хаотичний режим.

Нехай дискретні рівняння (1.110) є відображенням Пуанкаре диференціальних рівнянь (1.108). Припустимо, що (x_0, y_0) – стійка нерухома точка цього відображення. Їй буде відповідати стійкий однокітний граничний цикл системи (1.108).

Припустимо, що дискретні рівняння (1.110) мають періодичний розв'язок

$$x_{n+k} = x_n, \quad y_{n+k} = y_n, \quad (1.111)$$

де k – дискретний період. Такий розв'язок будемо називати k – циклом. Тоді k – циклу відображення буде відповідати більш складний k – тактний граничний цикл системи (1.111). Причому спектр ляпуновських характеристичних показників такого k – циклу дискретного відображення (1.110),

доповнений нульовим показником, збігається зі спектром ляпуновських характеристичних показників системи.

Якщо розв'язком дискретної системи (1.110) є квазіперіодична або хаотична послідовність, то відповідно квазіперіодичний або хаотичний режим буде встановлюватися в системі диференціальних рівнянь (1.111). При цьому спектри ляпуновських характеристичних показників квазіперіодичних і хаотичних відображень збігаються з відповідними спектрами ляпуновських характеристичних показників квазіперіодичних, або хаотичних атракторів системи (1.111) за винятком одного нульового показника.

Знайти відображення Пуанкаре для конкретних нелінійних систем у явному виді вдається дуже рідко, у тих виняткових випадках, коли диференціальні рівняння допускають аналітичний розв'язок. Однак можна побудувати відображення Пуанкаре за допомогою чисельного алгоритму. При цьому виникають дві самостійні задачі:

перша – знаходження деякої траєкторії Γ системи (1.111) при заданих початкових умовах;

друга – визначення координат точок перетину траєкторії з січною площиною, тобто побудова перерізу γ відображення Пуанкаре.

Розрахувати траєкторію можна за допомогою будь-якого відомого чисельного методу. Для цього найчастіше застосовуються методи Рунге–Кутти [27, 49]. А для визначення точок перетину траєкторії з січною площиною необхідно на кожному кроці чисельного інтегрування системи (1.111) обчислювати значення функції $S(x, y, z)$ доти, поки не буде зафіксований момент зміни знака $S(x, y, z)$, який відповідає моменту перетину траєкторією січної площини.

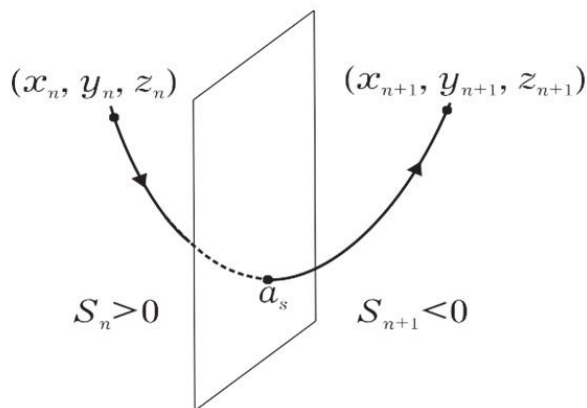


Рис. 1.27. Крок чисельного інтегрування

Наприклад, нехай зміна знака функції $S(x, y, z)$ трапилася між n -тим і $(n + 1)$ кроками, так що величини $S_n = S(x(n\Delta t), y(n\Delta t), z(n\Delta t))$ і $S_{n+1} = S(x((n + 1)\Delta t), y((n + 1)\Delta t), z((n + 1)\Delta t))$, де Δt – крок чисельного інтегрування, мають різні знаки, як показано на рис. (1.27). Далі необхідно уточнити значення точки перетину a_s . Цю задачу можна розв’язати з заданим ступенем точності, застосувавши методи інтерполяції. Послідовно зменшуючи крок інтегрування у два рази, можливо закінчити обчислення, коли різниця $|S_{n+1} - S_n|$ буде меншою наперед заданої величини, яка визначає точність розрахунків точок a_s . Принципових труднощів тут немає, однак зростаючі вимоги до точності визначення a_s зажадають додаткових обчислень, що ускладнить відповідні алгоритми обчислення й значно збільшить час необхідний для розрахунків.

Для подолання цих труднощів М. Ено був запропонований простий і економічний метод, який полягає в такому. Доповнимо систему рівнянь (1.108) ще одним співвідношенням, а саме

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S dx}{\partial x dt} + \frac{\partial S dy}{\partial y dt} + \frac{\partial S dz}{\partial z dt}.$$

Враховуючи (1.108), можемо записати

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x, y, z). \quad (1.112)$$

Введемо для зручності позначення

$$H(x, y, z) = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x, y, z),$$

$$\frac{dS}{dt} = H(x, y, z).$$

Тоді, враховуючи, що

$$\frac{dx}{dS} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dS}, \quad \frac{dy}{dS} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dS}, \quad \frac{dz}{dS} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dS}, \quad \frac{dt}{dS} = \frac{1}{H(x, y, z)},$$

можемо записати

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dS} &= \frac{f_1(x, y, z)}{H(x, y, z)}; \\
\frac{dy}{dS} &= \frac{f_2(x, y, z)}{H(x, y, z)}; \\
\frac{dz}{dS} &= \frac{f_3(x, y, z)}{H(x, y, z)}; \\
\frac{dt}{dS} &= \frac{1}{H(x, y, z)}.
\end{aligned}
\tag{1.113}$$

Візьмемо значення x, y, z, t і S , отримані на $(n + 1)$ кроці чисельного інтегрування й зробимо ще один крок за S , величина якого рівна

$$\Delta S = -S_{n+1}.$$

У результаті інтегрування системи (1.113) тільки на одному кроці $\Delta S = -S_{n+1}$ ми відразу попадемо на січну S , причому помилка визначення точки перетину строго дорівнює похибці інтегрування системи (1.113) на одному кроці й буде мінімальною. При знаходженні інших точок перетину (якщо вони існують) траєкторією Γ площини S щораз будемо інтегрувати систему (1.113) на одному кроці $\Delta S = -S_{n+1}$, який буде змінюватися для кожної нової точки перетину.

Алгоритм побудови відображення Пуанкаре по методу Ено зручно програмувати відразу як чисельний розв'язок рівнянь (1.113). При цьому функція $H(x, y, z)$ покладається рівній одиниці до тих пір, поки виконуються стандартні кроки за часом, і перевизначається відповідно до (1.112), коли виникає необхідність провести нестандартний крок по S . Так як в обох випадках використовується той самий чисельний метод, досягається бажане узгодження за точністю.

Усі проведені міркування очевидним способом поширюються на фазовий простір більшої розмірності, тільки замість січної двовимірної площини необхідно використовувати переріз $n - 1$ -вимірного фазового простору гіперповерхнею розмірності $n - 1$. Та обставина, що при використанні відображення Пуанкаре розмірність зменшується на одиницю, іноді буває дуже корисною.

Метод перерізу Пуанкаре особливо наочний у випадку $n = 3$, коли множина точок перетину лежить на двовимірній поверхні. Для $n > 4$ графічне представлення багатовимірного перерізу Пуанкаре втрачає наоч-

ність. У цих випадках аналізують дво- або тривимірні проєкції перерізів Пуанкаре.

Для періодичних розв'язків динамічної системи переріз Пуанкаре, як багатовимірний, так і його проєкції, містять скінченне число нерухомих точок, які повторюються строго через період розв'язку. У режимі дивного атрактора на січній з'явиться деяка хаотична множина точок, число яких буде зростати зі зростанням часу чисельного інтегрування. У деяких випадках ця хаотична множина може розташовуватися уздовж тонкої стрічки, близької за структурою до одновимірної кривої на січній. Цю криву приблизно можна прийняти за відображення Пуанкаре й аналізувати методом діаграм Ламерея.

Слід зазначити, що при вивченні хаотичних режимів достовірну інформацію про структуру перерізу Пуанкаре можна одержати тільки при досить великій кількості точок у перерізі Пуанкаре. Як правило, це число має порядок $O(10^4)$ – $O(10^5)$, тому для представлення таких точкових множин необхідно використовувати комп'ютерні методи обробки інформації.

1.12. Атрактор Лоренца

Чи можна прогнозувати хаотичний рух елементів будь-якої системи? Від чого залежить хаотична динаміка? Чи може, нарешті, помах крила метелика викликати торнадо? Важливі відповіді на ці та інші питання знайшов американський метеоролог Едвард Лоренц, (мимовільний) автор терміна «ефект метелика» і творець «дивного атрактора». Коротко зупинимось на одному з визначних відкриттів в теорії диференціальних рівнянь [14, 15, 64].

У 1972 році професор метеорології з Массачусетського технологічного інституту Едвард Лоренц збирався виступити на конференції, але в запалі роботи не встиг відправити тему своєї лекції. Організатор, який поспішав розіслати запрошення, вибрав заголовок за нього: «Нередбачуваність: чи може помах крила метелика в Бразилії викликати торнадо в Техасі?» Так і з'явився термін «ефект метелика», відомий сьогодні всьому світу.

Едвард Лоренц народився в 1917 році в невеликому містечку в штаті Коннектикут. Вивчати атмосферні явища він вирішив ще в дитинстві під враженням від того, з якою легкістю сонячна погода змінюється буревієм

з громом і блискавками. Шлях до виконання мрії вийшов довгим: магістратура в Гарварді, робота метеорологом в авіаційному підрозділі Армії США, захист дисертації в повоєнний період, зрештою, посада наукового співробітника і, пізніше, професора в МІТ.

У своєму виступі Лоренц виділив кілька ключових ідей:

- якщо помах крила метелика може викликати торнадо, то точно так само на це здатні всі попередні і майбутні помаху, так само як і помаху інших мільйонів метеликів, не кажучи вже про активність всієї популяції нашої планети;

- якщо помах крила метелика здатний викликати торнадо, то так само цей помах може йому запобігти.

Помах крила метелика в даному контексті має сприйматися як маленька зміна початкових умов системи, що здатна як викликати торнадо, так і змінити його траєкторію, або взагалі стати причиною його загасання. На відміну від ефекту доміно, де конкретне (зазвичай незначне) збурення призводить до конкретного (зазвичай значного) результату, причому відбувається це однозначно, наприклад, помах крила метелика може не мати жодного впливу на поведінку торнадо.

Лоренц вивчав конвекцію (теплообмін, що виникає завдяки руху молекул рідини або газу) в атмосфері Землі. Для опису подібних фізичних процесів часто користуються моделлю, яка включає в себе рівняння Нав'є–Стокса, що описує рух в'язкої ньютонівської рідини. За винятком окремих випадків, його розв'язки в загальному вигляді на даний момент невідомі. Модель містить такі складові:

- рівняння Нав'є–Стокса;
- рівняння теплопровідності, що описує розподіл температури в просторі з плином часу;
- рівняння неперервності, яке, за своєю суттю, описує принцип збереження маси.

Лоренцу вдалося побудувати спрощення цієї моделі у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z. \end{cases} \quad (1.114)$$

Тут x відповідає за інтенсивність конвекції, y відображає різницю між температурами висхідних і низхідних потоків, z характеризує відхилення вертикального температурного профілю від лінійної залежності,

$\sigma > 1$ – число Прандтля (критерій подібності теплових процесів в рідинах і газах), $\rho > 0$ – число Релея (відображає поведінку рідини під впливом градієнта температури), $\beta > 0$ – число, що описує геометрію конвективної комірки (впорядкованості у вигляді конвективних комірок у формі циліндричних валів, або правильних шестигранних структур, яка виникає при конвективних потоках).

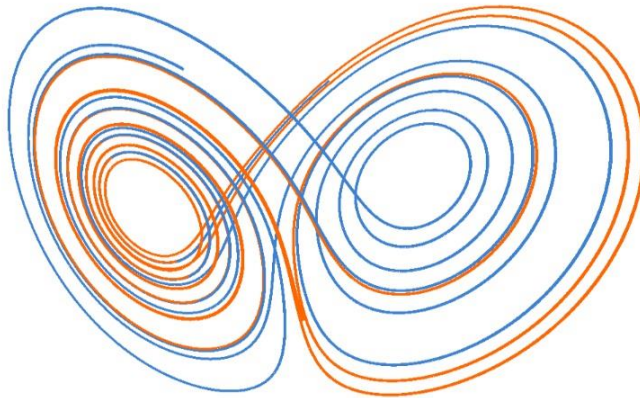


Рис. 1.28. Траєкторії системи Лоренца для точок $P_0 = (0,1,1)$, $P_1 = (0,1,1.01)$

За допомогою цієї системи рівнянь можна розрахувати, як буде вести себе плинне середовище, яке рівномірно розігрівають знизу і охолоджують зверху. З огляду на те, що це відбувається з повітряними потоками в атмосфері. Зокрема, дана система дозволяє зрозуміти, до якого результату призведе навіть невелика зміна вихідних параметрів.

Перед тим як перейти до безпосереднього аналізу отриманої системи, розглянемо деякі комбінації траєкторій. Для наочності, скористаємося тими ж значеннями параметрів, що і сам Лоренц: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ [64].

Зобразимо рух двох точок $P_0 = (0,1,1)$, $P_1 = (0,1,1.01)$, відстань між якими спочатку невелика. Досить цікавий результат! Спочатку траєкторії майже неможливо розрізнити, потім вони відхиляються зовсім ненабагато, після чого різниця стає вже значною (рис. 1.28).

Візьмемо точки $P_0 = (-25,20,-15)$, $P_1 = (-15,40,15)$ на значній відстані одна від одної (рис. 1.29). Навіть незважаючи на таку різницю початкових умов, траєкторії потрапляють на фігуру, яку з плином часу не покидають. Спостерігається дивний ефект, їх ніби щось притягує Ця фігура так і називається – дивним атрактором Лоренца (від англійського *attract* – «притягувати»).

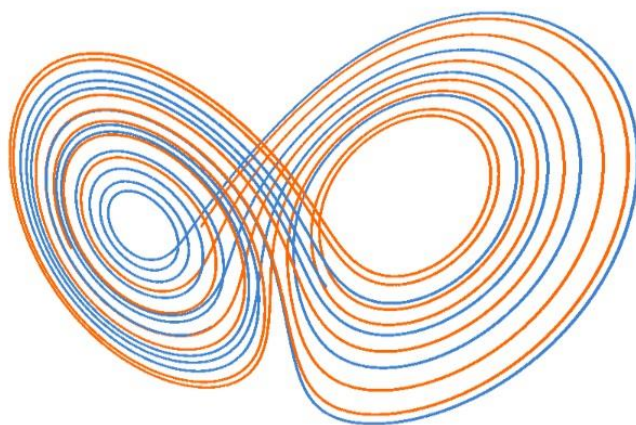


Рис. 1.29. Траєкторії системи Лоренца для точок
 $P_0 = (-25, 20, -15)$, $P_1 = (-15, 40, 15)$

Формальне означення звучить так: *атрактор* – така підмножина фазового простору, що всі траєкторії, які стартують не надто далеко від неї, прямують до неї з плином часу. Слово ж “дивний” тут виступає в такому ключі: *атрактор як множина не може бути представленим у вигляді кривої або поверхні, він має більш складну, фрактальну структуру.* Траєкторії атрактора замикаються, а малі відхилення постійно накопичуються, причому експоненціально.

Сказане вище можна проілюструвати так: *дві траєкторії, випущені з близьких точок, з часом розбігаються досить далеко.* Причому, щоб віддалити момент розбігання, наприклад, на одну секунду, потрібно зменшити відстань між початковими точками, скажімо, удвічі. А щоб на дві секунди – вчетверо. А на три – у вісім разів, і так далі. Це означає, що навіть використовуючи потужний комп’ютер, ми не можемо розрахувати траєкторію, яка проходить поблизу атрактора, з розумною точністю протягом тривалого проміжку часу. На кожному кроці обчислень неминуче вносяться помилки (через округлення чисел і похибок чисельних методів), які швидко накопичуються і призводять до того, що знайдена траєкторія сильно відрізняється від справжньої.

Таке спотворення неможливо виправити, просто збільшуючи потужність комп’ютера. Подібне явище називається “*динамічним хаосом*”.

На рис. 1.30 проілюстровано, як рухаючись фазовими траєкторіями, точки, які почали рухатись з досить близького околу, “розбігаються” по фазовій площині в деякий момент часу t_k [64].

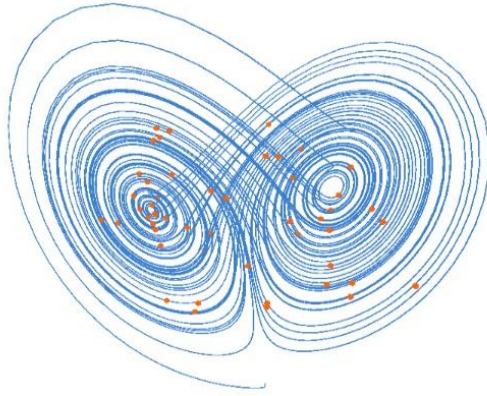


Рис. 1.30. Ілюстрація “динамічного хаосу” породженого системою Лоренца

Система Лоренца має такі властивості:

- *однорідність* – праві частини система Лоренца (1.114) не містять вільних членів;

- *симетрія* – вигляд рівнянь системи (1.114) не зміниться, якщо одночасно замінити знак змінних x та y . Це означає, що будь-яке перетворення у фазовому просторі або володіє тією ж симетрією, тобто якщо $(x(t), y(t), z(t))^T$ є розв’язком системи Лоренца, то й $(-x(t), -y(t), z(t))^T$ також є розв’язком цієї системи;

- *дисипативність* – всі траєкторії системи обмежені деякою граничною множиною в силу від’ємності дивергенції векторного поля, яке утворене правою частиною системи

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = -(\sigma + \beta + 1) < 0.$$

Іншими словами, об’єм фазового простору стискається з плином часу під дією векторного поля. Система Лоренца є дисипативною і всі траєкторії в фазовому просторі є обмеженими деякою граничною множиною [17].

Знайдемо положення рівноваги системи (1.114). Очевидно, що $E_0 = (0, 0, 0)^T$ є точкою рівноваги системи Лоренца. Знайдемо інші точки рівноваги цієї системи. Для цього прирівняємо праву частину системи Лоренца до нуля. Як результат одержуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0, \\ x(\rho - z) - y = 0, \\ xy - \beta z = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння отримуємо $y = x$. Підставляємо це співвідношення в друге рівняння. Тоді друге рівняння переписується у вигляді $x(\rho - 1 - z) = 0$. Звідси одержується два розв'язки $x = 0$ та $x = \rho - 1$. Тоді з третього рівняння отримуємо $z = 0$ та $x = \pm\sqrt{\beta z} = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}$, відповідно. Розв'язок $x = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}$ існує тільки для $\rho \geq 1$. Таким чином, при $\rho < 1$ є один стан рівноваги в початку координат, а при $\rho \geq 1$ маємо три стани рівноваги

$$\begin{aligned} E_0: x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0; \\ E_1: x = \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \quad y = \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \quad z = \rho - 1; \\ E_2: x = -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \quad y = -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \quad z = \rho - 1. \end{aligned}$$

Дослідимо на стійкість одержані точки за допомогою метода першого наближення. Система лінійного наближення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (\rho - z_0) & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Знаходимо корені характеристичного многочлена цієї системи

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -\rho + z_0 & \lambda + 1 & x_0 \\ -y_0 & -x_0 & \lambda + \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси

$$(\lambda + \sigma)((\lambda + 1)(\lambda + \beta) + x_0^2) + ((\lambda + \beta)(z_0 - \rho) + x_0 y_0) = 0. \quad (1.115)$$

Отже, в точці $E_0 = (0, 0, 0)^T$ маємо

$$(\lambda + \sigma)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)) = 0.$$

З останнього співвідношення знаходимо три корені

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\beta, \\ \lambda_2 = 2^{-1}(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}, \\ \lambda_3 = 2^{-1}(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}. \end{cases}$$

Перший корінь характеристичного рівняння завжди від'ємний. Другий та третій одночасно є від'ємними тільки при $\rho < 1$. Якщо ж $\rho > 1$, то один з них стає додатним. Відтак точка $E_0 = (0, 0, 0)^T$ при $\rho < 1$ – стійкий вузол (асимптотично стійкий) і при $\rho > 1$ – сідло. При $\rho = 0$ існує корінь рівний 0.

Розглянемо фізичну інтерпретацію одержаного результату. При малих значення параметра ρ передача тепла відбувається за допомогою теплопровідності, а рідина нерухома. При $\rho = 1$ стан $E_0 = (0, 0, 0)^T$ знаходиться на границі стійкості – теплопровідність віддає першість конвекції. При $\rho > 1$ в рідині виникають конвекційні вали (комірки Релея – Бенара), стан системи стає нестійким.

Розглянемо тепер точки E_1 та E_2 , які існують при $\rho \geq 1$. Підставляючи $x_0 = y_0 = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}$, $z_0 = \rho - 1$ в (1.115) отримаємо рівняння

$$\lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda + 2\sigma\beta(\rho - 1) = 0.$$

Дослідження останнього рівняння показує, що при ρ , яке ледве перевищує 1, всі три корені від'ємні. Відповідно, точки рівноваги E_1 та E_2 є стійкими вузлами. Із зростанням ρ з деякого моменту вони стають стійкими фокусами, при цьому один корінь – від'ємний, а два інших – комплексно спряжені з від'ємною дійсною частиною. При подальшому зростанні ρ дійсна частина змінює знак і це є моментом втрати стійкості обох точок E_1 та E_2 (в силу симетрії це відбувається одночасно). Втрата стійкості відбувається при значенні ρ , рівному

$$\rho_\infty = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}, \quad \sigma > \beta + 1.$$

При $\sigma = 10$ та $\beta = 8/3$ значення $\rho_\infty = 24,74$.

Таким чином, положення рівноваги E_1 та E_2 є одночасно стійкими або одночасно нестійкими. При цьому асимптотична стійкість матиме місце при виконанні умов

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma - \beta - 1 \leq 0, \\ \sigma - \beta - 1 > 0, \\ \rho < \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}. \end{array} \right.$$

Поспостерігаємо як зміниться динаміка системи Лоренца, якщо підтримувати значення параметрів $\sigma = 10$ та $\beta = 8/3$ постійними та збільшувати, починаючи з нуля, параметр ρ , який характеризує міру підігріву [14]. Якщо $0 < \rho < 1$, то точка $E_0 = (0, 0, 0)^T$ є стійким вузлом, єдиним станом рівноваги, що притягує до себе всі траєкторії в фазовому просторі.

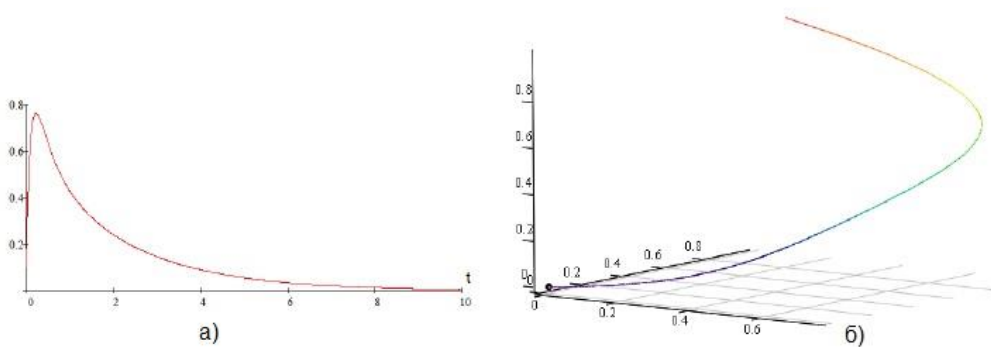


Рис. 1.31. При $\rho = 0,5$ графік функції $x(t)$ (а) і фазова траєкторія (б)

На рис. 1.31 а) показано залежність $x(t)$ при $\rho = 0,5$ і початковому стані системи $(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 1, 1)$. Початковий рух в рідині затухає, тобто відсутня конвекція і перенесення тепла відбувається завдяки теплопровідності. На рис. 1.31 б) показана відповідна фазова траєкторія.

При проходженні параметра ρ через значення $\rho = 1$ відбувається біфуркація типу вилка. При $\rho > 1$ особлива точка $E_0 = (0, 0, 0)^T$ втрачає стійкість і породжується пара стійких особливих точок E_1 та E_2 , які відповідають стаціонарній конвекції у вигляді валів з протилежним напрямком обертання. Цей результат обумовлюється властивостями симетрії потоку.

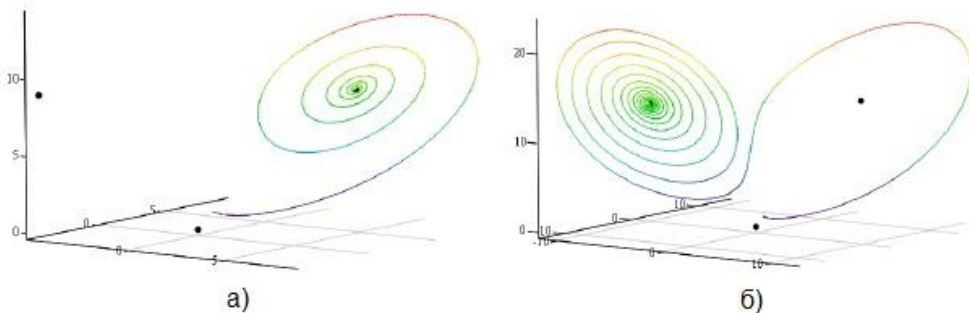


Рис. 1.32. Фазові траєкторії при $\rho = 10$ (а) та при $\rho = 15$ (б)

Таким чином, при переході ρ через одиницю точка E_0 перестає бути атрактором и атракторами стають нерухомі точки E_1 та E_2 . Ці два атрактори визначають рівномірне обертання рідини, відповідно, проти чи за годинниковою стрілкою. При цьому швидкість руху зростає зі зростанням параметра ρ . Зазначимо, що такий рух буде стійким навіть при досить великих значень ρ .

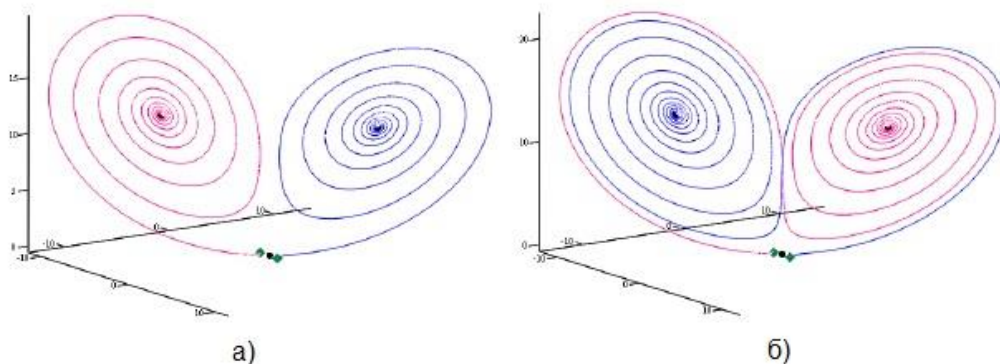


Рис. 1.33. Фазові траєкторії при $\rho = 13$ (а) та при $\rho = 14$ (б)

Наявність двох атракторів означає наявність *бістабільності*, тобто в залежності від початкових умов система проходить врешті-решт в один з двох стабільних режимів. Отже, нерухомі точки E_1 та E_2 є стійкими фокусами.

Фазові траєкторії наближаються до вказаних точок рівноваги по спіралі, що відповідає затухаючим осциляціям. Чим більший параметр ρ , тим більший початковий розмах осциляції. Однак, починаючи зі значення $\rho = 13,927$, в фазовому просторі системи Лоренца відбувається певна перебудова. Не заглиблюючись в деталі, відмічаємо, що це не відображається на властивостях стаціонарних режимів, які відповідають атракторам E_1 та E_2 . Фазові траєкторії при $\rho \in \{10, 13, 14, 15\}$ наведено на рис. 1.32, 1.33 і, відповідно, при $\rho \in \{19, 20, 24\}$ – на рис. 1.34.

Наступна перебудова відбувається при $\rho = 24,06$ (рис. 1.35). З цього моменту, водночас зі стійкими станами E_1 та E_2 , виникає притягуюча множина складної структури, яка відповідає хаотичному режиму коливань. Особливі точки E_1 та E_2 залишаються стійкими до досягнення значення $\rho_\infty = 24,74$.

Таким чином, в інтервалі ρ від 24,06 до 24,74 в системі існує три атрактора – дві нерухомі точки E_1 та E_2 і дивний атрактор. Зрештою, починаючи з $\rho_\infty = 24,74$, нерухомі точки E_1 та E_2 втрачають стійкість і

дивний аттрактор залишається єдиною притягуючою множиною. Саме цей дивний аттрактор характерного вигляду, який утворюється при $\rho > \rho_\infty$, називається *аттрактором Лоренца* [14].

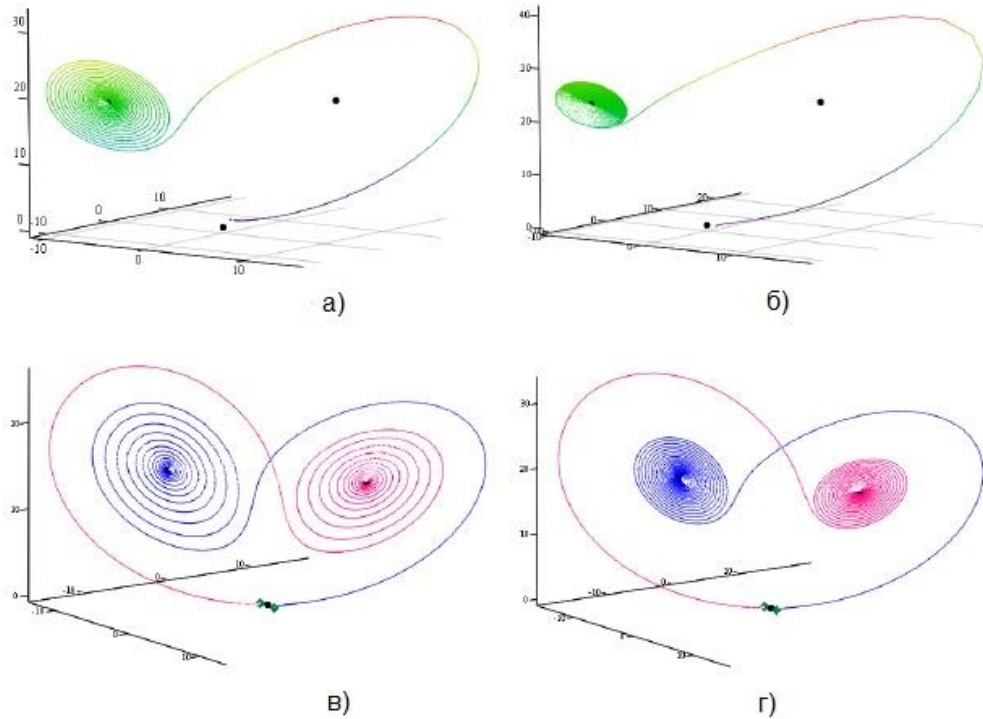


Рис. 1.34. Фазові траєкторії при $\rho = 20$ (а), $\rho = 24$ (б), $\rho = 19$ (в), $\rho = 24$ (г)

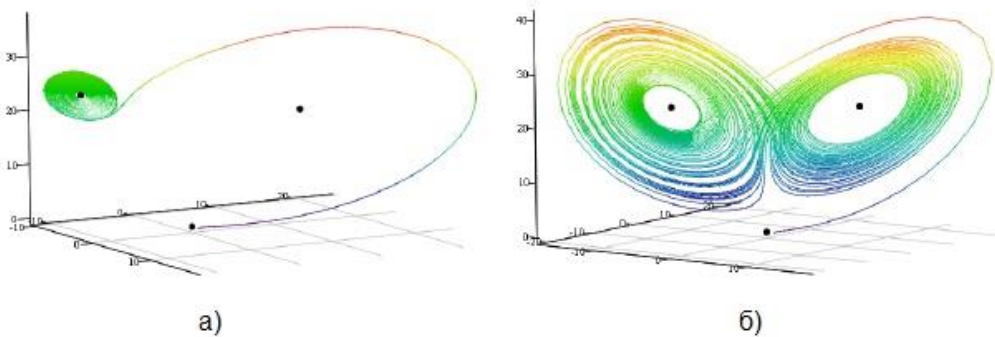


Рис. 1.35. Фазові траєкторії при $\rho = 24,05$ (а), $\rho = 24,06$ (б)

Характер поведінки системи при $\rho > \rho_\infty$ суттєво відрізняється: рух системи стає вкрай невпорядкованим. Це є наслідком того, що розв'язок, розкручуючись по спіралі в околі однієї з нерухомих точок E_1 чи E_2 протягом

довільного відрізка часу, перестрибує в окіл другої нерухокої точки і таким самим чином певний час розкручується по спіралі, після чого знову ж перестрибує назад. Цей рух і формує таку своєрідну структуру атрактора Лоренца.

Залишаючись в обмеженій області фазового простору, траєкторія окреслює певну структуру – фігуру, форма якої нагадує крила метелика. Проходячи цілком передбачувану петлю в полі одного з крил метелика, система здійснює перехід від одного крила до другого завжди несподівано та непередбачувано. При великих значення параметра траєкторія зазнає значних змін (рис. 1.37). При великих ρ система переходить в режим автоколивань, з'являється чергування хаотичної та періодичної поведінки.

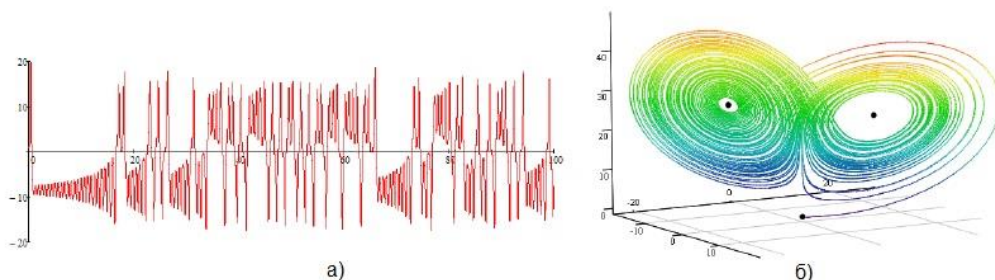


Рис. 1.36. При $\rho = 28$ графік функції $x(t)$ (а) і фазова траєкторія (б)

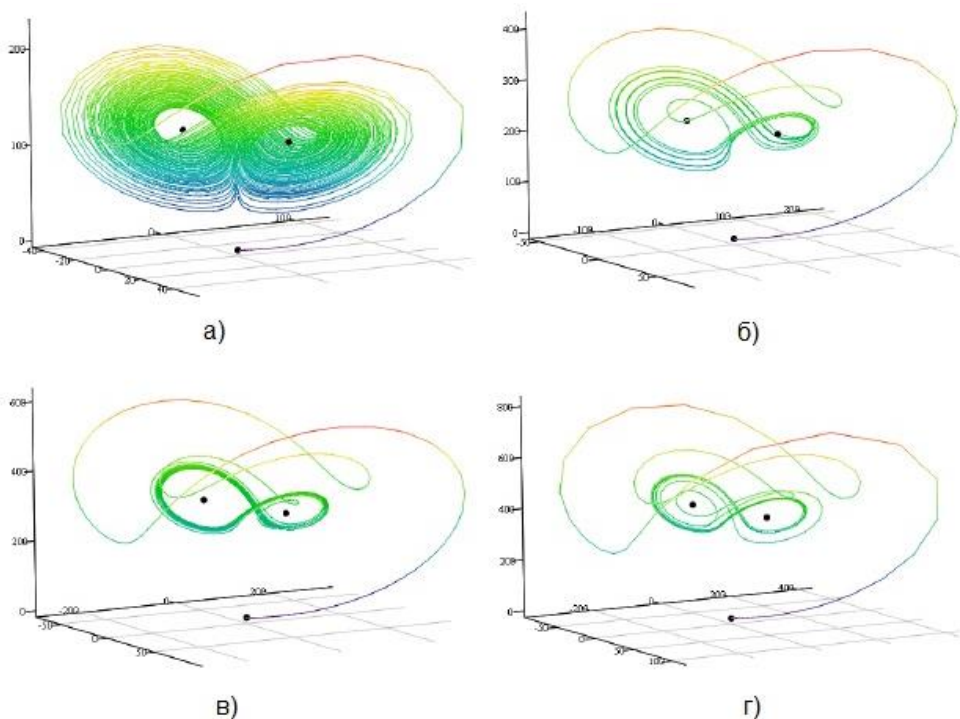


Рис. 1.37. Фазові траєкторії при $\rho = 120$ (а), $\rho = 220$ (б), $\rho = 320$ (в), $\rho = 420$ (г)

Детермінізм часто прирівнювався до передбачуваності, однак Лоренцу вдалося показати, що детермінізм здатний дати лише короткостроковий прогноз поведінки системи, тоді як в довгостроковій перспективі наслідки можуть бути непередбачувані. Саме це і означає термін «хаос». Однак не варто плутати хаос з хаотичністю – атрактор Лоренца яскравий тому приклад. Адже всі траєкторії так чи інакше обмежені і не залишають певну множину.

Таким чином, робота Лоренца призвела до вдосконалення систем, що використовуються для складання прогнозу погоди. Зокрема:

- на метеостанціях стали збирати значно більше даних;
- для комп'ютерного моделювання почали використовуватися методи, що дозволяють домогтися більшої точності;
- метеорологи, які проводять експерименти, усвідомили важливість чутливості системи до початкових умов. Вони проводять комп'ютерне моделювання на великій кількості вхідних даних. Різниця між даними ледь помітна.

1.13. Формула Каплана – Йорка

Математичним образом детермінованого хаотичного режиму в динамічній системі є дивні атрактори, які мають надзвичайно складну геометричну структуру [51]. Однією з важливих характеристик будь-якого геометричного об'єкта є його розмірність. До теперішнього часу до розгляду запропоновано різноманітні означення розмірностей для атракторів динамічних систем. Наприклад, розмірність Хаусдорфа–Безіковича, інформаційна й кореляційна розмірності, узагальнені розмірності Рен'ї тощо. Такі розмірності можуть надавати істотну інформацію про структуру атрактора, служити кількісною ознакою відмінності регулярного атрактора від дивного, а для дивних атракторів виступати як міра «дивності» атрактора.

Практично всі відомі дивні атрактори є фрактальними множинами, які мають дробову розмірність Хаусдорфа–Безіковича. Цим вони відрізняються від регулярних атракторів, відповідна розмірність яких є цілою. Безпосередній підрахунок фрактальної розмірності дивного атрактора є надзвичайно трудомісткою задачею, для розв'язування якої в загальному випадку не існує будь-яких стандартних алгоритмів. Однак порівняно просто може бути знайдена ляпуновська розмірність атрактора, яка на практиці найчастіше використовується як кількісна міра фрактальності.

Розглянемо дисипативну динамічну систему розмірності n . Поряд з вихідною динамічною системою розглянемо ансамбль її траєкторій, які відрізняються одна від одної тільки різними початковими станами. В початковий момент часу у фазовому просторі цьому ансамблю буде відповідати певна сукупність зображуючих точок. В процесі еволюції початкова множина буде змінюватися відповідно до динаміки системи, яка задається її математичною моделлю.

Припустимо, що в динамічній системі існує дивний атрактор. Спектр ляпуновських характеристичних показників такого атрактора складається з n показників $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, упорядкованих за спаданням. Причому $\lambda_1 > 0$ та існує принаймні один нульовий показник. Крім того, у силу дисипативності системи, сума всіх ляпуновських характеристичних показників від'ємна

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0. \quad (1.116)$$

Будемо послідовно обчислювати суми вигляду (1.116) для $m = 1, 2, \dots$. Спочатку ми будемо одержувати додатні, а потім від'ємні величини σ_m . Знайдемо таке m , що $\sigma_m \geq 0$, але $\sigma_{m+1} < 0$. У суму σ_m увійдуть усі додатні, усі нульові й частина від'ємних ляпуновських характеристичних показників. Якщо розглянути підпростір, утворений векторами збурень, які відповідають першим m ляпуновським показникам, то в цьому підпросторі об'єм множини зображуючих точок ансамблю систем не зменшується в процесі еволюції. Зокрема, цей об'єм зростає при $\sigma_m \geq 0$. Водночас у підпросторі, який утворений векторами збурень, що відповідають першим $m + 1$ характеристичним показникам, об'єм сукупності зображуючих точок буде зменшуватися з плином часу.

В 1979 році Каплан і Йорк запропонували гіпотезу, суть якої полягає в тому, що фрактальна розмірність атрактора \mathcal{D}_{Fr} розташована в інтервалі

$$m \leq \mathcal{D}_{Fr} < m + 1$$

і складається із цілої m і деякої дробової частини d , так що

$$\mathcal{D}_{Fr} = m + d.$$

Причому дробова частина розмірності визначається з умови, що рух на атракторі відповідає фізичним представленням про стаціонарність процесу, а саме

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m + d\lambda_{m+1} = 0.$$

Звідси одержуємо, що розмірність атрактора \mathcal{D}_{Fr} визначається за формулою

$$\mathcal{D}_{Fr} = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}. \quad (1.117)$$

Формула (1.117) називається *формулою Каплана–Йорка*.

В частинному випадку тривимірного фазового простору впорядкований спектр ляпуновських характеристичних показників дивного атрактора містить три показники $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, причому $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, а $\lambda_3 < 0$. У силу умови дисипативності: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$. Тому $\sigma_1 = \lambda_1 > 0$, $\sigma_2 = \lambda_1 + 0 > 0$, $\sigma_3 < 0$. Отже, у тривимірному випадку формула (1.115) має вигляд

$$\mathcal{D}_{Fr} = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}. \quad (1.118)$$

Формула Каплана–Йорка використовується, у першу чергу, для знаходження фрактальних розмірностей дивних атракторів, але за нею легко можуть бути обчислені розмірності й регулярних атракторів. Так, використовуючи формулу (1.86), знайдемо, що в тривимірному просторі розмірність граничного циклу дорівнює *одиниці*, а квазіперіодичного атрактора – *двом*. Для положень рівноваги формула Каплана–Йорка не застосовується. Однак у цьому випадку розмірність обчислюється за загальним означенням фрактальної розмірності і завжди дорівнює нулю.

Таким чином, у тривимірному фазовому просторі фрактальні розмірності можливих атракторів неперервної динамічної системи дорівнюють

1. для положень рівноваги: $\mathcal{D}_{Fr} = 0$;
2. для граничних циклів: $\mathcal{D}_{Fr} = 1$;
3. для квазіперіодичних атракторів: $\mathcal{D}_{Fr} = 2$;
4. для дивних атракторів: $2 < \mathcal{D}_{Fr} < 3$.

Цілість або дробовість розмірності \mathcal{D}_{Fr} є зручною ознакою для ідентифікації регулярності або дивності атрактора.

Гіпотеза Каплана–Йорка припускає, що формула (1.117) дозволяє обчислювати хаусдорфову розмірність атракторів. Однак строго довести це вдалося тільки для хаотичних атракторів двовимірних дискретних відображень і систем диференціальних рівнянь з розмірністю фазового простору $n = 3$. У загальному випадку довести гіпотезу Каплана–Йорка поки не вдається. Більшість дослідників взагалі схиляється до того, що вона

невірна для багатовимірних систем. Водночас формула (1.117) дає гарну чисельну оцінку розмірності атрактора. Тому *розмірність*, обчислену за формулою (1.117), називають *ляпуновською* і вважають ще одним різновидом фрактальної розмірності. Головна перевага ляпуновської розмірності полягає у відносній простоті її обчислень, для чого потрібний тільки спектр ляпуновських характеристичних показників. Труднощі, що виникають при підрахунку фрактальної розмірності, виходячи з означення Хаусдорфа, значно перевищують складність знаходження спектра ляпуновських характеристичних показників.

У процесі обчислення ляпуновської розмірності ми послідовно знаходимо суми σ_m . Позначимо через h максимальне значення сум σ_m . Величина h дорівнює сумі всіх додатних ляпуновських характеристичних показників атрактора. Доведено, що h відповідає так званій ентропії Колмогорова – Синає. Очевидно, що для хаотичних атракторів величина h завжди додатна, для граничних циклів і квазіперіодичних атракторів вона дорівнює нулю (тому що в останніх випадках додатні ляпуновські показники відсутні). Таким чином, додатність ентропії є ще одним критерієм хаосу. Відмітимо, що в теорії ймовірностей доводиться, що для стаціонарних випадкових процесів $h = \infty$. Тому за величиною ентропії також можна ідентифікувати, що спостерігається в динамічній системі – стаціонарний випадковий процес чи детермінований хаос.

1.14. Спектральна густина та інваріантна міра

Розглянемо динамічну систему (1.1) [51]. Припустимо, що система має атрактор у вигляді граничного циклу деякого періоду T . Граничний цикл породжений розв'язком системи

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, \quad (1.119)$$

де кожна з функцій $x_i(t)$ – періодична з періодом T . Як відомо, періодична функція $x_i(t)$ може бути записана у вигляді розкладу в ряд Фур'є

$$x_i(t) = c_{0,i} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,i} \cos(k\omega_1 t - \varphi_{k,i}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.120)$$

при цьому кожна з періодичних функцій $x_i(t)$ цілком визначається величин $c_{k,i}, \varphi_{k,i}$. Сукупність величин $c_{k,i}$ називається спектром амплітуд,

а сукупність $\varphi_{k,i}$ – спектром фаз функції $x_i(t)$. В багатьох застосуваннях достатньо знати тільки спектр амплітуд. Він застосовується настільки часто, що коли говорять просто спектр, то мають на увазі амплітудний спектр. Спектр періодичної функції просто зобразити графічно. В декартовій системі координат $O\omega c$ по осі абсцис відкладаються частоти $\omega = k\omega_1$, а по осі ординат – амплітуди $c = c_{k,i}$. Потім точки з координатами $(k\omega_1, 0)$ і $(k\omega_1, c_{k,i})$ з'єднуються відрізками прямих, які називаються спектральними лініями. У результаті кожній гармоніці розкладу в ряд Фур'є (1.120) буде відповідати цілком певна спектральна лінія. Ми одержимо *спектр, який складається з рівновіддалених спектральних ліній, причому частоти гармонік знаходяться у простих кратних співвідношеннях. Такий спектр називається дискретним гармонічним спектром.*

Відмітимо, що для всіх компонент вектор-функції (1.119) ми одержимо дискретні гармонічні спектри, спектральні лінії яких мають однакові частоти й відрізняються тільки висотою. Тому для якісного вивчення спектра досить обмежитися побудовою спектра однієї з компонент вектор-функції. Як правило, на практиці спектральні властивості багатовимірних динамічних систем вивчаються на прикладі однієї з компонент вектор-функції стану, що суттєво спрощує задачу, але водночас дозволяє досліджувати характерні особливості одержуваних спектрів.

Тепер нехай вихідна динамічна система (1.1) має квазіперіодичний атрактор. У цьому випадку розв'язок системи $x(t)$, що відповідає атрактору, буде квазіперіодичною вектор-функцією. Будемо вивчати спектральні характеристики атрактора за допомогою однієї з компонент $x(t)$, яку позначимо, опускаючи індекс, через $x(t)$. Квазіперіодична функція $x(t)$ може бути записана у вигляді

$$x(t) = x(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_p(t)), \quad (1.121)$$

де функція $x(\psi)$ має період 2π за кожним з аргументів ψ_i і між частотами ω_i не існує раціональних співвідношень. Використовуючи розклад функції (1.121) в узагальнений ряд Фур'є, можна показати, що в цьому випадку спектр зображується дискретною сукупністю спектральних ліній. Однак, на відміну від періодичного випадку, ці лінії не рівновіддалені, а розташовуються на частотах, які є лінійними комбінаціями базових частот

$$\omega(k_1, \dots, k_p) = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_p\omega_p.$$

Припустимо, що вихідна система має дивний атрактор, одна з траєкторій якого $x(t)$. Спектральні властивості будемо вивчати за допомогою однієї з компонент вектор-функції $x(t)$, яку позначимо через $x(t)$. У цьому випадку функція $x(t)$ буде неперіодичною, тому замість розкладу в ряд Фур'є необхідно користуватися інтегралом Фур'є. Нагадаємо, що для неперіодичної функції мають місце співвідношення

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.122)$$

де

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.123)$$

Формули (1.122) та (1.123) є основними формулами теорії спектрів. Зміст формули (1.122) полягає в тому, що функція $x(t)$ описується сумою нескінченно великого числа нескінченно малих коливань, які як завгодно близькі за частотою. Комплексна амплітуда C кожного окремого коливання нескінченно мала й дорівнює

$$dC = \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega. \quad (1.124)$$

Частотний інтервал між двома сусідніми коливаннями також нескінченно малий. Він дорівнює $d\omega$.

Величина $S(\omega)$ називається *комплексним спектром неперіодичної функції*, а її модуль $\Phi(\omega) = |S(\omega)|$ – *спектром*. В цьому випадку інтервали між окремими спектральними лініями необмежено скорочуються й спектр може бути представлений неперервною лінією, що огинає сімейства спектральних ліній. Такого роду спектр називається *суцільним (неперервним)*. Оскільки з формули (1.124) випливає, що

$$S(\omega) = \pi \frac{dC}{d\omega},$$

то величина $S(\omega)$ виражає не безпосередньо амплітуду, а так звану спектральну густину. Тому такий спектр називається *спектром густини коливань або Фур'є-спектром*.

Побудова Фур'є-спектрів для атракторів конкретних динамічних систем викликає деякі труднощі, тому що часто невідомий аналітичний

запис розв'язку динамічної системи, відповідного тим або іншим траєкторіям атрактора. Крім того, при побудові спектра можуть виникнути проблеми при обчисленні інтеграла Фур'є на нескінченному проміжку.

Тому діють у такий спосіб: чисельним методом знаходиться будь-яка типова траєкторія атрактора; подальша побудова спектра атрактора, незалежно від того регулярний він або дивний, проводиться за допомогою перетворення Фур'є (1.120). Причому інтегрування здійснюється на проміжку

$$S(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (1.125)$$

де t_0 – тривалість перехідного процесу (тобто час за який траєкторія, що стартує в початковий момент часу $t = 0$, виходить на атрактор), $t_1 > 0$ – достатньо великий момент часу, у який ми припиняємо інтегрування.

Природно, проінтегрувати (1.125) ми зможемо тільки чисельно, застосувавши один із наближених методів інтегрування. Якщо траєкторія належить граничному циклу, або квазіперіодичному атрактору, то можна застосувати порівняно простий метод Сімпсона. Якщо ж траєкторія належить дивному атрактору, або атрактору, який ми перевіряємо на «дивність», то доцільно застосовувати більш громіздкий але значно точніший метод Файлона.

Які ж Фур'є-спектри ми одержимо для різних типів атракторів? Якщо атрактор є граничним циклом, то спектральна густина має вигляд, якісно подібний наведеному на рис.1.38 а.

По осі абсцис відкладена частота, а по осі ординат $Sp = \ln |S(\omega)|$. Спектр буде представляти собою неперервну лінію із чіткими локальними максимумами в точках $\omega = k\omega_1$. Логарифмічне масштабування по осі ординат тут застосовується з метою зменшення розмірів графіка. При $t_1 \rightarrow +\infty$ значення максимумів можуть трохи змінюватися. Ознакою оптимальності вибору значення t_1 буде припинення зміни величин Sp з точністю до певного числа знаків після десяткової точки.

Якщо траєкторія належить інваріантному тору, то зовнішній вигляд типового Фур'є-спектра, на перший погляд, буде подібний наведеному на рис.1.38 а. Тобто також будемо мати неперервну лінію із чіткими максимумами (піками). Але по осі абсцис ці піки не будуть рівновіддаленими, а розташовуватимуться в точках, які є лінійною комбінацією раціонально непорівнюваних частот тора.

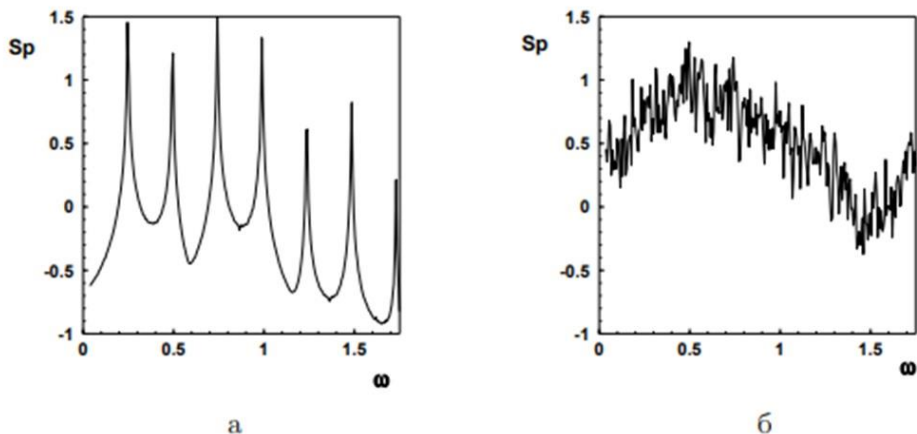


Рис. 1.38. Типові розподіли спектральної густини для граничного циклу (а) і хаотичного атрактора (б)

Зрештою, якщо траєкторія належить дивному атрактору, то має місце велике розмаїття у виглядах Фур'є-спектра. Можливий вид спектра дивного атрактора наведений на рис.1.38 б. На відміну від регулярних атракторів, які мають дискретний спектр, спектр дивного атрактора суцільний (неперервний). Таким чином, наявність в атрактора суцільного Фур'є-спектра є ще однією ознакою того, що атрактор дивний.

Коротко познайомимося з поняттям інваріантної міри атрактора. Нехай ми маємо ансамбль траєкторій динамічної системи вигляду (1.1), які відрізняються тільки початковими умовами. Припустимо, що \mathcal{D} – обмежена область фазового простору. Цій області припишемо міру $\mu(\mathcal{D})$, яка рівна відносному числу представників ансамблю, стани яких належать області \mathcal{D} . Об'єднання областей $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$, які не перетинаються, матиме міру, рівну сумі мір цих областей

$$\mu(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n) = \mu(\mathcal{D}_1) + \mu(\mathcal{D}_2) + \dots + \mu(\mathcal{D}_n).$$

У силу динаміки індивідуальних систем, які становлять ансамбль, приписана різним підмножинам фазового простору міра буде, взагалі кажучи, змінюватися із часом. Припустимо, що початковий розподіл зображуючих точок спеціально підібраний так, що міра будь-якої вимірної підмножини, розташування якої в фазовому просторі фіксоване, увесь час залишається незмінною. Відповідна міра називається *інваріантною мірою для динамічної системи*, яка є індивідуальною характеристикою ансамблю.

Якщо динаміка системи регулярна й протікає в обмеженій області фазового простору, то інваріантна міра завжди існує (теорема Крилова – Боголюбова). Більше того, інваріантних мір може бути багато. Але серед усіх інваріантних мір основний інтерес становить природна інваріантна міра, або міра Крилова – Боголюбова.

Припустимо, що початкова точка динамічної системи належить басейну притягання деякого атрактора. Для довільної області \mathcal{D} міру $\mu(\mathcal{D})$ визначимо співвідношенням

$$\mu(\mathcal{D}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(\mathcal{D}, x_0, T)}{T}, \quad (1.126)$$

де x_0 – точка старту фазової траєкторії, $\tau(\mathcal{D}, x_0, T)$ – час знаходження зображуючої точки в області \mathcal{D} при спостереженні за інтервал часу T . Якщо введена в такий спосіб міра виявляється однією й тією ж майже при будь-якому виборі початкової точки, то це й буде інваріантна міра.

Математичні доведення, які відносяться до загальних властивостей атракторів, як правило, виходять із припущення про наявність однозначно визначеної інваріантної міри. Однак до теперішнього часу строго довести існування природної інваріантної міри для більшості, отриманих у прикладних задачах, дивних атракторів не вдається. Проте чисельно побудовані інваріантні міри часто бувають дуже корисними при вивченні хаотичної поведінки динамічних систем.

Коротко зупинимося на алгоритмі побудови природної інваріантної міри атрактора:

- чисельно будуємо будь-яку траєкторію, що належить атрактору, і запам'ятовуємо масив значень її фазових координат;
- далі будуємо проєкцію фазового портрета на екрані комп'ютера, використовуючи отриманий масив фазових точок. При цьому застосовуємо техніку кодування зображення відтінками деякого заздалегідь вибраного кольору, наприклад, чорного або червоного;
- послідовно виводимо на екран фазові точки, причому при попаданні в певний піксель екрана декількох точок пропорційно їх кількості збільшуємо цифровий код яскравості даного пікселя. При досить великій кількості точок у масиві координат фазової траєкторії ми одержимо проєкцію фазового портрета, одні частини якої будуть зображені більш яскраво, ніж інші. Яскраві частини фазового портрету відповідають тим областям, у які зображуюча точка попадає частіше, а більш темні – областям, куди зображуюча точка попадає рідше.

Таким чином, практично одержимо проєкції розподілу природної інваріантної міри по фазовому портрету атрактора. Такі розподіли бувають корисними при вивченні сценаріїв переходів до хаосу.

Питання, тести для самоконтролю

1. Що розуміється під динамічною системою?
2. Що називається траєкторією динамічної системи?
3. Як визначається фазовий простір динамічної системи?
4. Що називається фазовим портретом?
5. Дайте означення положення рівноваги.
6. Дайте означення особливої точки.
7. Наведіть класифікацію особливих точок на площині.
8. Що таке граничний цикл?
9. Які типи траєкторій можливі в фазовому просторі динамічної системи?
10. Дайте означення потоку і каскаду. Як класифікуються динамічні системи?
11. На які класи розділяють рухи у дисипативних динамічних системах?
12. Які атрактори називаються регулярними?
13. Як визначити дивний атрактор (хаотичний атрактор)?
14. Дайте означення траєкторії динамічної системи, яка буде стійкою за Лагранжем.
15. Що таке ω -граничні та α -граничні точки траєкторії?
16. Дайте означення стійкості за Пуассоном.
17. В чому полягає повернення Пуанкаре? Як відбуваються повернення Пуанкаре для різних типів траєкторій?
18. Дайте означення стійкості за Ляпуновим, нестійкості та асимптотичної стійкості розв'язку системи диференціальних рівнянь.
19. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь називається незбуреним?
20. Дайте геометричну інтерпретацію стійкості за Ляпуновим, нестійкості та асимптотичної стійкості розв'язку системи диференціальних рівнянь.
21. Як визначається ляпуновський характеристичний показник?
22. Що таке спектр ляпуновських характеристичних показників?

23. Сформулюйте критерій Гурвіца.
24. Сформулюйте лему Гронуола–Белмана.
25. Сформулюйте необхідні та достатні умови стійкості розв'язків систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
26. Сформулюйте теореми про стійкість за першим наближенням.
27. В чому суть другого методу Ляпунова? Порівняйте його з першим методом Ляпунова.
28. Дайте означення функції Ляпунова.
29. Дайте означення додатно визначеної, додатно постійної та знакозмінної функцій.
30. Дайте означення повної похідної в силу системи.
31. Сформулюйте теорему Ляпунова про стійкість для автономних систем. В чому її відмінність від теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість?
32. Охарактеризуйте методи конструювання функцій Ляпунова для лінійних систем з постійними коефіцієнтами. Запишіть загальний вигляд матричного рівняння Ляпунова.
33. Охарактеризуйте методи побудови функцій Ляпунова для лінійних нестационарних систем.
34. Охарактеризуйте методи побудови функцій Ляпунова для нелінійних систем.
35. В чому відмінність побудови функцій Ляпунова для лінійних нестационарних систем та лінійних стаціонарних систем?
36. Дайте означення експоненціальної стійкості незбуреного розв'язку системи диференціальних рівнянь.
37. Сформулюйте теорему про експоненціальну стійкість незбуреного розв'язку нелінійної автономної системи.
38. Сформулюйте теорему Ляпунова про стійкість для неавтономних систем.
39. Охарактеризуйте поняття граничних множин динамічних систем.
40. Дайте означення інтегральної лійки.
41. Сформулюйте властивості інтегральної лійки.
42. Що таке переріз і відображення Пуанкаре?
43. Як ви розумієте поняття розмірності атракторів?

44. Що таке спектральна густина та інваріантна міра?
 45. Як визначається інваріантна міра атрактора?

Обов'язкові та додаткові задачі

В задачах 1.1–1.10 для заданих рівнянь зобразити траєкторії на фазовій площині. За рисунком зробити висновки про поведінку розв'язків при $t \rightarrow +\infty$.

- | | |
|--|--|
| 1.1. $\ddot{x} + 4x = 0$. | 1.2. $\ddot{x} - x = 0$. |
| 1.3. $\ddot{x} + 2x^3 = 0$. | 1.4. $\ddot{x} + 2x^3 - 2x = 0$. |
| 1.5. $\ddot{x} - \sin x = 0$. | 1.6. $\ddot{x} + 2 \cos x - 1 = 0$. |
| 1.7. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$. | 1.8. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$. |
| 1.8. $\ddot{x} + \dot{x} + 2x - x^2 = 0$. | 1.10. $\ddot{x} + \dot{x}^2 - x^2 + 1 = 0$. |

1.11.* Вивести рівняння руху маятника без опору. Для випадку, коли всі параметри, що входять в рівняння рівні 1, зобразити траєкторії на фазовій площині. Дати фізичну інтерпретацію траєкторіям різних типів.

В задачах 1.12–1.15 зобразити на фазовій площині траєкторії даних систем і дослідити особливі точки.

- | | |
|--|--|
| 1.12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$ | 1.13. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$ |
| 1.14. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x + 2y, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$ | 1.15. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$ |

1.16. Довести, що якщо один розв'язок лінійної системи стійкий, то стійкий кожний розв'язок даної системи.

Для рівнянь 1.17–1.20 та систем 1.21–1.22 знайти положення рівноваги та дослідити їх на стійкість.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1.17. $\dot{x} = -x^2$. | 1.18. $\dot{x} = \sin x - x$. |
| 1.19. $\dot{x} = x \sin^3 t$. | 1.20. $\dot{x} = -x \sin^2 t$. |
| 1.21. $\dot{x} = y, \dot{y} = -x^3$. | 1.22. $\dot{x} = y, \dot{y} = 3x^2 - 2x$. |

В задачах 1.23–1.26 в'яснити, при яких значеннях параметра a нульовий розв'язок є

- а) асимптотично стійким; б) нестійким.

$$1.23. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - x^3 - a^2x. \end{cases}$$

$$1.24. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x(1 + x^4) - ay. \end{cases}$$

$$1.25. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ay - \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

$$1.26. \begin{cases} \dot{x} = 3y^2 - ay, \\ \dot{y} = 2x + (2 - a)y. \end{cases}$$

В задачах 1.27–1.29

а) знайти всі значення параметра $a \in \mathbb{R}$, при яких всі розв'язки рівняння необмежені при $t \geq 0$ (не потрібно шукати розв'язки);

б) встановити, чи є ці розв'язки стійкими, асимптотично стійкими.

$$1.27. \ddot{x} + ax = \sin^2 t.$$

$$1.29. \ddot{x} + \dot{x} = \cos at.$$

$$1.28. \ddot{x} + ax = \cos at.$$

1.30.* Чи є стійким розв'язок системи

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = 2x - y + 6\sin^2 t,$$

що має період π ?

Для задач 1.31 – 1.33 дослідити на асимптотичну стійкість нульовий розв'язок систем, застосовуючи критерій Гурвіца.

$$1.31. y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$1.32. y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0.$$

$$1.33. y''' + y'' + y' + 2y = 0.$$

1.34. Дослідити при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким

$$y''' + ay'' + by' + 2y = 0.$$

1.35. Дослідити при яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$$

1.36. Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на асимптотичну стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$$

1.37. Проаналізувати які з функцій двох змінних є додатновизначеними, додатнопостійними, знакозмінними:

$$1. \mathcal{V}(x, y) = x^2 + y^2;$$

$$2. \mathcal{V}(x, y) = -x + y^2;$$

$$3. \mathcal{V}(x, y) = -(x - y)^2.$$

1.38. Дослідити стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + xy - x^3, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$$

Для цього підібрати функцію Ляпунова у вигляді $\mathcal{V}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

1.39. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми $\mathcal{V}(x) = x^T Bx$ для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \end{cases}$$

використовуючи матричне рівняння Ляпунова. Тут B – додатновизначена симетрична матриця розмірності 2×2 , $x = (x_1, x_2)$.

Задачі за даною тематикою представлені у [19, 35, 40, 45, 49].

РОЗДІЛ II ПРАКТИЧНА СТІЙКІСТЬ

2.1. Вступ. Основні означення

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (2.1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектору стану, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область [7, 8, 11, 36, 55]. Вважаємо, що відображення f є неперервним за змінною t і локально ліпшицевим за x . Це дозволяє нам гарантувати існування і єдиність розв'язку задачі Коші для (2.1). Крім того, вважаємо, що $f(0, t) = 0$. Ця умова говорить нам про те, що точка 0 є точкою рівноваги системи (1). Ми будемо позначати $x(t, x_0, t_0)$ розв'язок системи (2.1) з умовою Коші $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0$. За означенням, нульовий розв'язок $x(t) = 0$ системи (2.1) називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що $\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$, як тільки $\|x_0\| < \delta$ для $t \geq t_0$.

Припустимо, що для (2.1) умови стійкості не виконуються, але для $A > 0$ і $\lambda \in (0, A)$ існує інтервал $t \in [t_0, T]$, для якого $\|x(t, x_0, t_0)\| < A$ при $\|x_0\| < \lambda$ для $t \in [t_0, T]$. Тобто якщо $x_0 \in U_\lambda(0)$, то $x(t, x_0, t_0) \in U_A(0)$ для всіх $t \in [t_0, T]$.

Така якість поведінки розв'язків системи (2.1) була введена М. Г. Четаєвим і дістала назву $\{\lambda, A, t_0, T\}$ -стійкості, або практичної стійкості. Практична стійкість характеризується наявністю обмежень на початкові умови і стан системи. В означенні Четаєва множина початкових умов вибирається у формі відкритої кулі $U_\lambda(0)$, а множина обмежень на фазові координати системи – у вигляді відкритої кулі $U_A(0)$. Таке означення можна узагальнити, якщо розглядати множини початкових умов і фазових обмежень в різних геометричних формах, не лише у формі куль. Дійсно, нехай $G_0 \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ – деякі множини, які містять початок координат.

Означення 2.1 Нульовий розв'язок системи (2.1) називається $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким, якщо для довільного $x_0 \in G_0$ розв'язок системи (2.1) $x(t, x_0, t_0)$ належить множині $\Phi(t)$ для всіх $t \in [t_0, T]$.

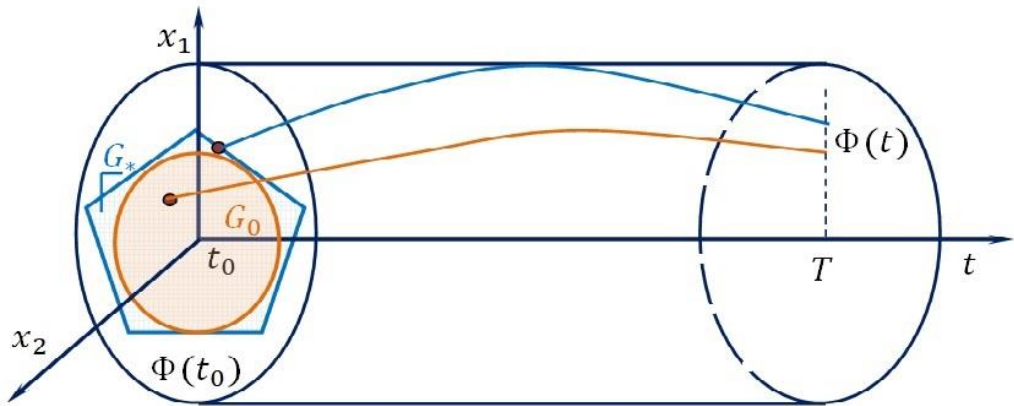


Рис. 2.1. Ілюстрація означення практичної стійкості

Виходячи з означення 2.1 ми можемо сформулювати такі постановки задач.

Задача 2.1 Нехай множини $G_0, \Phi(t)$ та інтервал $[t_0, T]$ – задані. Перевірити, чи буде нульовий розв’язок системи (2.1) $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ –стійким.

Задача 2.2 Знайти множину $G_* \subset \Phi(t_0)$, яка складається з усіх початкових умов $x_0 \in \Phi(t_0)$, для яких відповідний розв’язок $x(t, x_0, t_0)$ належить множині $\Phi(t)$ для всіх $t \in [t_0, T]$. Таку множину ми будемо називати *максимальною множиною практичної стійкості*.

Задача 2.3 Нехай заданий параметричний клас множин $G_0(\alpha) \subset \Phi(t_0), \alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^1$. Знайти всі значення $\alpha \in \mathcal{A}$, для яких нульовий розв’язок системи (2.1) є $\{G_0(\alpha), \Phi(t), t_0, T\}$ –стійким. Для ряду випадків така задача полягає у тому, щоб знайти α_* , яке є максимальним серед значень α , для яких має місце $\{G_0(\alpha), \Phi(t), t_0, T\}$ –стійкість нульового розв’язку системи (2.1). Тоді ми будемо називати α_* *максимальною оцінкою практичної стійкості в класі $G_0(\alpha)$* . Зокрема, якщо $G_0(\alpha) = K_\alpha(0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq \alpha\}$, то α_* називається *максимальною оцінкою практичної стійкості в класі куль*.

Задача 2.4 Нехай G_0 є заданою і відомий клас фізових обмежень $\Phi(t, \alpha) \subset \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T], \alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^1$. Задача полягає у тому, щоб визначити усі значення параметра $\alpha \in \mathcal{A}$, для яких нульовий розв’язок системи (2.1) є $\{G_0, \Phi(t, \alpha), t_0, T\}$ –стійким. Як і в постановці задачі 2.3, для ряду випадків задача 4 зводиться до знаходження найменшого $\alpha_* \in \mathcal{A}$ такого, що при $\alpha \leq \alpha_*$ нульовий розв’язок системи (2.1) є

$\{G_0, \Phi(t, \alpha), t_0, T\}$ –стійким. Тоді α_* називається *максимальною оцінкою фазових обмежень*.

Задача 2.5 Нехай задані $G_0, \Phi(t), t_0 \geq T$. Знайти найменше T , для якого нульовий розв’язок системи (2.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ –стійким. Така задача називається задачею *оцінки часу практичної стійкості*.

Зауважимо, що якість практичної стійкості, яка дається означенням 2.1, ще називається внутрішньою. Разом з внутрішньою стійкістю є зовнішня практична стійкість нульового розв’язку системи (1). Нехай $D_0 \subset \mathbb{R}^n, 0 \in D_0$ і множина D_0 містить точки, які не належать $\Phi(t_0)$.

Означення 2.2 Нульовий розв’язок системи (2.1) називається зовнішньо $\{D_0, \Phi(t), t_0, T\}$ –стійким, якщо для будь-якого $x_0 \in D_0$ знайдеться $t \in [t_0, T]$ таке, що $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$.

Виходячи з означення 2.2. зовнішньої практичної стійкості, можна запропонувати постановки задач, аналогічні до задач 2.1–2.5.

Слід зазначити, що фазові обмеження $\Phi(t), t \in [t_0, T]$ задають багатозначне відображення, тобто відображення, значення якого є множиною хоч би в одній точці області визначення [38]. Використовуючи позначення $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ як сукупності всіх непорожніх компактів в \mathbb{R}^n , відповідність між $t \in [t_0, T]$ і $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ записують як $\Phi: [t_0, T] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Графіком $\text{graph } \Phi$ багатозначного відображення Φ називається сукупність пар $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $x \in \Phi(t)$ при $t \in [t_0, T]$.

Трубкою багатозначного відображення Φ називається частина границі $\partial \text{graph } \Phi$ його графіка така, що якщо точка $z = (x, t)$ належить трубці, то в будь-якому околі точки z існують елементи множини $I = \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$, які не належать графіку $\text{graph } \Phi$. Трубка багатозначного відображення Φ позначається $\text{tube } \Phi$.

Якщо $x \in \mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, то $\rho(x, \mathcal{A}) = \min_{y \in \mathcal{A}} \|x - y\|$ позначає відстань від точки x до множини \mathcal{A} , $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min_{y \in \mathcal{A}} \rho(y, \mathcal{B})$ позначає відхилення множини \mathcal{A} від множини \mathcal{B} (напівметрику Хаусдорфа), $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \beta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\}$ – метрика Хаусдорфа між множинами \mathcal{A} і \mathcal{B} з $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Відстань Хаусдорфа задовольняє аксіомам метрики, а саме:

- i. $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 0, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$;
- ii. $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$;
- iii. $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = h(\mathcal{B}, \mathcal{A}), \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$;
- iv. $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq h(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + h(\mathcal{C}, \mathcal{B}), \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Крім того, мають місце такі властивості:

$$h(\mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{C} + \mathcal{D}) \leq h(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + h(\mathcal{B}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n);$$

$$h(\lambda\mathcal{A}, \lambda\mathcal{B}) \leq |\lambda|h(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1;$$

$$h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\varepsilon > 0, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon(\mathcal{B}), \mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon(\mathcal{A})\}, \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n).$$

Тут $\mathcal{K}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \mathcal{A} + \mathcal{K}_\varepsilon(0)$ — ε -окіл множини \mathcal{A} .

Відображення Φ називається *напівнеперервним зверху* в точці $t \in [t_0, T]$, якщо

$$\lim_{s \rightarrow t} \beta(\Phi(s), \Phi(t)) = 0, \quad s \in [t_0, T].$$

Відображення Φ називається *напівнеперервним знизу* в точці $t \in [t_0, T]$, якщо

$$\lim_{s \rightarrow t} \beta(\Phi(t), \Phi(s)) = 0, \quad s \in [t_0, T].$$

Відображення Φ називається *неперервним в точці* $t \in [t_0, T]$, якщо воно в цій точці є напівнеперервним зверху і напівнеперервним знизу. Це означає, що

$$\lim_{s \rightarrow t} h(\Phi(s), \Phi(t)) = 0, \quad s \in [t_0, T].$$

Напівнеперервне зверху (напівнеперервне знизу, неперервне) відображення Φ в кожній точці $s \in [t_0, T]$ називається таким на $[t_0, T]$.

Відображення Φ називається *квазівідкритим в точці* $t \in [t_0, T]$, якщо $\text{int } \Phi(s) \neq \emptyset$ і для довільного $x \in \text{int } \Phi(s)$ існує інтервал $I_\delta = (s - \delta, s + \delta) \cap [t_0, T]$ та окіл $K_\delta(x) \subset \Phi(s)$ такі, що $K_\delta(x) \subset \Phi(t)$, $t \in I_\delta$.

Напівнеперервне зверху багатозначне відображення Φ має замкнений графік і замкнену трубку.

Якщо багатозначне відображення Φ є напівнеперервне знизу і має опуклі значення, тобто $\Phi: [t_0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, то таке відображення є *квазівідкритим*.

Якщо багатозначне відображення Φ є напівнеперервне знизу і квазівідкритим на $[t_0, T]$, то його трубка складається лише з точок, які лежать на границі значень багатозначного відображення Φ , тобто

$$\text{tube } \Phi = \{(x, t): x \in \partial\Phi(t), t \in [t_0, T]\} = \text{graph } \partial\Phi.$$

Тут $\partial\Phi: [t_0, T] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ є багатозначним відображенням, таким, що $(\partial\Phi)(t) = \partial\Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Приклад 2.1 Розглянемо відображення $\Phi = [-1, 1]$, $t \neq 0$, $t \in [-2, 2]$, $\Phi(0) = 0$. Це відображення є напівнеперервним знизу в кожній точці $t \in \mathbb{R}^1$. В точці $t = 0$ відображення Φ втрачає напівнеперервність зверху і квазівідкритість ($\text{int } \Phi(0) = \emptyset$). Графік такого відображення — незамкнений. Трубною Φ є множина

$$\bigcup_{t \in [-2, 2], t \neq 0} \{(-1, t)\} \cup \{(1, t)\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Приклад 2.2 Розглянемо відображення

$$\Phi = [-1, 1], \quad t \in [-2, 0]; \quad \Phi(t) = [-3, 3], \quad t \in [0, 2].$$

Таке відображення є напівнеперервним зверху на $[-2, 2]$, втім не є напівнеперервним знизу і квазівідкритим в нулі.

Якщо фазові обмеження є опуклими компактами, то для їхнього представлення доцільно застосовувати опорні функції [38, 54]. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ – компакт.

Означення 2.3 Опорною функцією множини $A \subset \mathbb{R}^n$ називається функція

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} a^T \psi, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо основні властивості опорної функції. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ – компакти, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, M – матриця розмірності $n \times n$. Тоді $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ маємо

1. $c(\lambda A, \psi) = c(A, \lambda \psi)$;
2. $c(\lambda A, \psi) = \lambda c(A, \psi)$, де $\lambda > 0$ (додатня однорідність);
3. $c(A + B, \psi) = c(A, \psi) + c(B, \psi)$;
4. $c(MA, \psi) = c(A, M^T \psi)$;
5. $c(A, \psi^{(1)} + \psi^{(2)}) \leq c(A, \psi^{(1)}) + c(A, \psi^{(2)})$, де $\psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ (напівадитивність);
6. $c(A, \psi) = c(\text{co}A, \psi)$.

Тут $\text{co}A$ – опукла оболонка множини A , тобто найменша опукла множина, що містить множину A . Основна теорема, яка характеризує опорну функцію, така.

Теорема 2.1 Нехай $\mathcal{A} \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Тоді $\text{co}\mathcal{A} = \bigcap_{\psi \in S} \mathcal{H}(\psi)$, де

$$\mathcal{H}(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T \psi \leq c(\mathcal{A}, \psi)\}, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Зміст цієї теореми полягає в тому, що опорна функція повністю описує опуклу оболонку компакта як перетин півпросторів, що утворені опорними гіперплощинами.

Наслідки теореми 2.1 такі. Нехай $\mathcal{A} \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Тоді

1. точка $x \in \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $x^T \psi \leq c(\mathcal{A}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$;
2. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{A}, \psi) \leq c(\mathcal{B}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$;
3. $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{A}, \psi) = c(\mathcal{B}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$;
4. якщо $x \notin \mathcal{A}$, то знайдеться $\psi \in S$ таке, що $x^T \psi > c(\mathcal{A}, \psi)$.
5. точка $x \in \text{int } \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $x^T \psi < c(\mathcal{A}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$;
6. $x \in \partial \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $x^T \psi \leq c(\mathcal{A}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$ та знайдеться $\psi_0 \in S$, для якого $x^T \psi_0 = c(\mathcal{A}, \psi_0)$;
7. $0 \in \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{A}, \psi) \geq 0$ для довільного $\psi \in S$;
8. $0 \in \text{int } \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{A}, \psi) > 0$ для всіх $\psi \in S$.

Приклад 2.3 Нехай $A = \{a\} \subset \mathbb{R}^n$. Тоді $c(A, \psi) = a^T \psi$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.
Якщо $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$, то $c(A, \psi) = \max_{i=1,2,\dots,k} a_i^T \psi$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Опорна функція кулі $c(K_r(a), \psi) = a^T \psi + r \|\psi\|$, $\psi \in \mathbb{R}^n$. Опорна функція еліпсоїда

$$E(a, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n: (x - a)^T Q^{-1} (x - a) \leq 1\}$$

має вигляд

$$c(E(a, Q), \psi) = a^T \psi + \sqrt{\psi^T Q \psi}, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $a \in \mathbb{R}^n$ – центр еліпсоїда, Q – $n \times n$ – симетрична додатновизначена матриця.

Нехай

$$P(r_1, r_2, \dots, r_n) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T: |x_i| \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

де $r_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді

$$c(\Pi(r_1, r_2, \dots, r_n), \psi) = \sum_{i=1}^n r_i |\psi_i|, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T.$$

Ще одним способом опису опуклих компактів є функція Мінковського і обернена функція Мінковського [38, 54]. Припустимо, що \mathcal{A} – опукла множина в \mathbb{R}^n , $0 \in \text{int } \mathcal{A}$.

Означення 2.4 Функція

$$m(x, \mathcal{A}) = \inf\{t > 0: x \in t\mathcal{A}\}$$

називається функцією Мінковського множини \mathcal{A} , $x \in \mathbb{R}^n$. Функція вигляду

$$d(x, \mathcal{A}) = \sup\{t > 0: tx \in \mathcal{A}\}$$

називається оберненою функцією Мінковського множини \mathcal{A} , де $x \in \mathbb{R}^n$.

Основні властивості такі:

1. $m(x, \mathcal{A}) \geq 0$, $d(x, \mathcal{A}) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $m(\lambda x, \mathcal{A}) = \lambda m(x, \mathcal{A})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ (додатна однорідність);
3. $m(x + y, \mathcal{A}) \leq m(x, \mathcal{A}) + m(y, \mathcal{A})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ (напівадитивність);
4. нехай \mathcal{A} – обмежена, тоді $m(x, \mathcal{A}) > 0$ при $x \neq 0$, $m(0, \mathcal{A}) = 0$;
5. якщо $\mathcal{A} \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, то

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n: m(x, \mathcal{A}) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, \mathcal{A}) \geq 1\}.$$

Отже, функція Мінковського і обернена функція Мінковського повністю описують опуклий компакт, який містить у внутрішності початок координат. Функція вигляду

$$k(x, \mathcal{A}) = d\left(\frac{x}{\|x\|}, \mathcal{A}\right), \quad x \neq 0$$

називається функцією деформації множини \mathcal{A} в напрямку $x \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ – опуклий компакт, $0 \in \mathcal{A}$, то множину \mathcal{A} можна представити у вигляді

$$\mathcal{A} = \bigcup_{e \in S} L(e),$$

де $L(e) = \{x \in \mathbb{R}^n: x = ke, k \in [0, k(e, \mathcal{A})]\} = [0, k(e, \mathcal{A})]e$, $e \in S$.

Функція деформації показує, як змінюється множина \mathcal{A} щодо одиничної сфери в напрямку вектора x .

Приклад 2.4 Нехай $\mathcal{A} = K_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n$. Тоді

$$m(x, \mathcal{A}) = \frac{\|x\|}{r}, \quad d(x, \mathcal{A}) = \frac{r}{\|x\|}, \quad k(x, \mathcal{A}) = r.$$

2.2. Властивості максимальної множини практичної стійкості

Припустимо, що $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ є компактами, $0 \in \text{int } \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Розглянемо властивості максимальної множини практичної стійкості, яку ми будемо позначати G_* [7, 8, 36].

Теорема 2.2 Множина G_* є компактом.

Доведення. Обмеженість G_* випливає з того, що $G_* \subset \Phi(t_0)$ і $\Phi(t_0)$ є компактом. Покажемо замкненість G_* . Нехай $\{x_0^{(k)}\} \subset G_*$ є послідовністю такою, що $\lim_{k \rightarrow \infty} x_0^{(k)} = x_0$. За означенням максимальної множини практичної стійкості $x(t, x_0^{(k)}, t_0) \in \Phi(t)$ для всіх $t \in [t_0, T]$. За теоремою про неперервну залежність розв'язків (2.1) від початкових умов

$$x(t, x_0, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t, x_0^{(k)}, t_0),$$

де границю розуміємо в сенсі норми простору неперервних на $[t_0, T]$ функцій. Оскільки $\Phi(t)$ є компактами, то $x(t, x_0, t_0)$ належить $\Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. А це означає, що $x_0 \in G_*$. □

Слід підкреслити, що обмеження на стан системи описуються багатозначним відображенням $\Phi: [t_0, T] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, яке кожному $t \in [t_0, T]$ ставить у відповідність множину $\Phi(t)$. Від умов, яким задовольняє відображення Φ залежать властивості оптимальної множини практичної стійкості. Має місце така теорема.

Теорема 2.3 Нехай багатозначне відображення $\Phi: [t_0, T] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ є напівнеперервним зверху. Тоді якщо $x_0 \in \partial G_*$, то інтегральна крива системи (2.1), яка виходить з точки (x_0, t_0) , перетинає трубку багатозначного відображення Φ , тобто

$$\text{graph } x(\cdot, x_0, t_0) \cap \text{tube } \Phi \neq \emptyset.$$

Доведення. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то $x_0 \in G_*$ і $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$.
 За означенням границі множини знайдеться послідовність $x_0^{(k)} \notin G_*$ така,
 що $\lim_{k \rightarrow \infty} x_0^{(k)} = x_0$. Це означає, що існує $s_k \in [t_0, T]$, для якого

$$x^{(k)} = (s_k, x_0^{(k)}, t_0) \notin \Phi(s_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Оскільки $[t_0, T]$ є компактом, то з послідовності s_k ми виділяємо збіжну до деякого $s_0 \in [t_0, T]$ підпослідовність, яку ми знову позначаємо як s_k .
 Отже, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s_0$. Точка $z^{(k)} = (x^{(k)}, s^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$ не належить графіку багатозначного відображення Φ , але $z^{(k)} \in I$, де $I = \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$.
 За теоремою про неперервну залежність розв'язків (2.1) від початкових умов

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(s_k, x_0^{(k)}, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x(s_0, x_0, t_0).$$

Крім того $x(s_0, x_0, t_0) \in \Phi(s_0)$, оскільки $x_0 \in G_*$. Тому $\lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} = z^{(0)}$, де

$$z^{(0)} = (x(s_0, x_0, t_0), s_0) \in \text{graph } \Phi.$$

За означенням трубки маємо $z^{(0)} \in \text{tube } \Phi$. Отже, $x(\cdot, x_0, t_0) \cap \text{tube } \Phi \neq \emptyset$. □

Теорема 2.4 *Нехай багатозначне відображення $\Phi: [t_0, T] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ є напівнеперервним зверху, $x_0 \in G_*$ та інтегральна крива системи (2.1), яка виходить з точки (x_0, t_0) , перетинає трубку багатозначного відображення Φ , тобто*

$$x(\cdot, x_0, t_0) \cap \text{tube } \Phi \neq \emptyset.$$

Тоді $x_0 \in \partial G_*$.

Доведення. Припустимо, що умови теореми виконуються, $x_0 \in G_*$.
 Оскільки

$$\text{graph } x(\cdot, x_0, t_0) \cap \text{tube } \Phi \neq \emptyset,$$

то знайдеться $z^{(0)} = (y_0, s_0) \in tube \Phi$ таке, що $y_0 = x(s_0, x_0, t_0)$. Так як $z^{(0)} \in tube \Phi$, то існує послідовність $z^{(k)} \in I, k = 1, 2, \dots$ така, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^{(k)} = z^{(0)}$$

і $z^{(k)} \notin graph \Phi, z^{(k)} = (x^{(k)}, s_k)$. Тоді $x_0^{(k)} = x(t_0, x^{(k)}, s_k) \notin G_*$.

Це впливає з того, що $x(s_k, x_0^{(k)}, t_0) = x^{(k)} \notin \Phi(s_k), k = 1, 2, \dots$. В силу теореми про неперервну залежність розв'язків системи (2.1) від початкових умов

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_0^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_0, x^{(k)}, s_k) = x(t_0, y_0, s_0) = x_0,$$

причому $x_0 \in G_*$. Отже, $x_0 \in \partial G_*$. □

З теорем 2.3, 2.4 є такі наслідки.

Наслідок 2.1 *Нехай відображення Φ є напівнеперервним зверху, причому $x_0 \in G_*$. Точка $x_0 \in int G_*$ тоді і тільки тоді, коли*

$$graph x(\cdot, x_0, t_0) \cap tube \Phi = \emptyset,$$

тобто інтегральна крива, яка виходить з точки (x_0, t_0) , не перетинає трубку багатозначного відображення Φ .

Наслідок 2.2 *Нехай відображення Φ є напівнеперервним зверху і квазівідкритим. Для того, щоб точка $x_0 \in G_*$ належала границі множини G_* необхідно і достатньо, щоб існував момент $t_* \in [t_0, T]$ такий, що*

$$x(t_*, x_0, t_0) \in \partial \Phi(t_*).$$

Це означає, що розв'язок системи (2.1), який виходить з точки $x(t_0) = x_0$, перетинає границю фазових обмежень в точці $t = t_*$ (залишаючись при цьому у фазових обмеженнях, що визначаються відображенням Φ). Точка $x_0 \in int G_*$ тоді і тільки тоді, коли

$$x(t, x_0, t_0) \in int \Phi(t)$$

для всіх $t \in [t_0, T]$.

2.3. Необхідні і достатні умови практичної стійкості на основі функції Ляпунова

Другий метод Ляпунова є потужним засобом дослідження якісної поведінки розв'язків динамічних систем. Його ідеї також знаходять відображення в теорії практичної стійкості [7, 8, 11, 36].

Теорема 2.5 Для того, щоб нульовий розв'язок системи (2.1) був $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким, необхідно і достатньо, щоб існувала неперервна функція $V(x, t)$, для якої справджуються такі умови:

$$1) G_0 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : V(x, t_0) \leq 1\}; \quad (2.2)$$

$$2) \{x \in \mathbb{R}^n : V(x, t) \leq 1\} \subseteq \Phi(t), \quad t \in [t_0, T]; \quad (2.3)$$

3) функція $V(x, t)$ не зростає на розв'язках системи (2.1), тобто функція $V(t) = V(x(t), t)$ – незростаюча, де $x(t)$ – розв'язок (2.1), $t \in [t_0, T]$.

Доведення. Необхідність. Доведення необхідності є конструктивним. Це означає, що ми показуємо у який спосіб можна побудувати функцію $V(x, t)$, яка задовольняє умови 1) – 3) теореми. Нехай нульовий розв'язок системи (2.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким. Розглянемо максимальну множину практичної стійкості G_* . Згідно з теоремою 2.2 ця множина є компактом.

Розглянемо функцію $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, яка є неперервною і такою, що: $\alpha(x) < 1$, якщо $x \in \text{int } G_*$; $\alpha(x) = 1$, якщо $x \in \partial G_*$; $\alpha(x) > 1$, якщо $x \notin G_*$.

Така функція може бути побудована різними способами. Один із способів є таким. Розглянемо $\rho(x) = \rho(x, \partial G_*)$ функцію відстані від точки x до границі множини G_* . Тоді:

$$\alpha(x) = 1 - \rho(x), \text{ якщо } x \in G_*;$$

$$\alpha(x) = 1 + \rho(x), \text{ якщо } x \notin G_*.$$

Така функція є неперервною. Це випливає з того, що $\rho(x)$ задовольняє умові Ліпшиця, а в $x_0 \in \partial G_*$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 1.$$

Побудуємо функцію $V(x, t)$ таким способом:

$$V(x, t) = \alpha(x(t_0, x, t)).$$

Покажемо, що така функція задовольняє умовам теореми. Дійсно, якщо $x_0 \in G_0$, то $x_0 \in G_*$, так як нульовий розв'язок системи (2.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким. Тому $\alpha(x_0) \leq 1$. Отже, умова (2.2) виконується.

Функція $V(x, t)$ не зростає на розв'язках системи (2.1). Це впливає з того, що

$$V(x(t, x_0, t_0), t) = \alpha(x_0),$$

тобто є постійною на розв'язках (2.1).

Включення (2.3) обґрунтуємо від супротивного. Нехай існує $t \in [t_0, T]$ і точка $y \notin \Phi(t)$ така, що $V(y, t) \leq 1$.

Розглянемо $y_0 = x(t_0, y, t)$. Точка $y_0 \notin G_*$, оскільки

$$x(t_0, y_0, t) = y \notin \Phi(t).$$

Тому $V(y_0, t_0) = \alpha(y_0) > 1$. Однак

$$\alpha(y_0) = V(x(t, y_0, t_0), t) = V(y, t) > 1.$$

Одержали протиріччя, яке обґрунтовує співвідношення (2.3) і необхідність теореми.

Достатність. Припустимо, що виконуються умови 1)–3) теореми. Покажемо, що нульовий розв'язок системи (2.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким.

Візьмемо довільну точку $x_0 \in G_0$. Згідно (2.2) маємо $V(x_0, t_0)$ не перевищує 1. Оскільки функція $V(t) = V(x(t, x_0, t_0), t)$ не зростає, $t \in [t_0, T]$, то $V(t) \leq 1$, $t \in [t_0, T]$.

За співвідношенням (2.3) $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Отже, має місце $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійкість нульового розв'язку системи (2.1). □

За традицією, функція $V(x, t)$, для якої справджуються умови теореми 2.5, називається *функцією Ляпунова*, як функція, що застосовується для дослідження відповідної якості стійкості. Теорему 2.5 можна обґрунтувати, якщо в доведенні замість функції $\rho(x, \partial G_*)$ вибрати функцію $\rho(x, \partial G_0)$. У цьому випадку хід доведення залишається аналогічним. Якщо множина G_0 є опуклим компактом, то функцію Ляпунова можна побудувати у вигляді

$$V(x, t) = \max_{\psi \in S} \{x^T(t_0, x, t)\psi - c(G_0, \psi)\} + 1.$$

Тут $c(G_0, \psi) = \max_{x \in G_0} x^T \psi$ – опорна функція множини G_0 , $\psi \in S$, S – сфера одиничного радіусу з центром в початку координат в \mathbb{R}^n . Зокрема, якщо $G_0 = K_r(0)$, то $\alpha(x) = \|x\| + 1 - r$,

$$V(x, t) = \|x(t_0, x, t)\| + 1 - r.$$

Якщо $G_0 = E_r(Q, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T Q^{-1} x \leq r^2\}$, де Q – додатньовизначена симетрична $n \times n$ -матриця, то

$$V(x, t) = \sqrt{x^T(t_0, x, t) Q^{-1} x(t_0, x, t)} + 1 - r.$$

З теореми 2.5 слідує такий наслідок.

Наслідок 2.3 *Нехай існує неперервно диференційовна функція $V(x, t)$ така, що справджуються співвідношення (2.2), (2.3) і повна похідна функції $V(x, t)$ в силу системи (2.1)*

$$\left(\frac{dV(x, t)}{dt}\right)_{(2.1)} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x, t) f(x, t) \leq 0.$$

Тоді нульовий розв'язок системи (2.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким.

Справедливість наслідку випливає з теореми 2.5, оскільки функція $V(x, t)$ не зростає на розв'язках системи (2.1) у випадку, якщо повна похідна функції $V(x, t)$ в силу системи (2.1) не є додатною.

2.4. Властивості оптимальної множини практичної стійкості лінійної системи

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (2.4)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $A(t)$ – $n \times n$ -матриця з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$ [7, 8, 36].

Фазові обмеження задаються неперервним відображенням $\Phi: [t_0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, де $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ – сукупність непорожніх опуклих компактів з \mathbb{R}^n , $0 \in \text{int } \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Розглянемо властивості максимальної множини практичної стійкості.

Теорема 2.6 *Множина G_* є опуклим компактом, $0 \in \text{int } G_*$.*

Доведення. Нехай $X(t, t_0)$ – фундаментальна матриця системи (2.4), нормована за моментом t_0 . Тоді за формулою Коші $x(t, x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0$. Візьмемо довільні дві точки $x_0^{(1)}$ і $x_0^{(2)}$ з множини G_* , а також будь-яке $\lambda \in [0, 1]$. Тоді $x(t, x_0^{(1)}, t_0) \in \Phi(t)$, $x(t, x_0^{(2)}, t_0) \in \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Розглянемо

$$x(t, \lambda x_0^{(1)} + (1 - \lambda)x_0^{(2)}, t_0) = \lambda X(t, t_0) \cdot x_0^{(1)} + (1 - \lambda)X(t, t_0) \cdot x_0^{(2)} \in \Phi(t)$$

при $t \in [t_0, T]$, в силу опуклості $\Phi(t)$. За означенням максимальної множини практичної стійкості $\lambda x_0^{(1)} + (1 - \lambda)x_0^{(2)} \in G_*$. Точка 0 належить $\text{int } G_*$ в силу наслідків теореми 2.3, оскільки $0 \in \text{int } \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. □

Теорема 2.7 Функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m_*(x_0) = \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T X(t, t_0) \cdot x_0}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Тоді

$$G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m_*(x_0) \leq 1\},$$

$$\partial G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m_*(x_0) = 1\}, \quad \text{int } G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m_*(x_0) < 1\}.$$

Доведення. За означенням функції Мінковського

$$m_*(x_0) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x_0}{\lambda} \in G_* \right\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Отже, з включення $\frac{x_0}{\lambda} \in G_*$, $\lambda > 0$ випливає, що $X(t, t_0) \cdot \frac{x_0}{\lambda} \in \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Враховуючи теорему 2.6 і властивості опорної функції,

$$\psi^T X(t, t_0) \frac{x_0}{\lambda} \leq c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in S, \quad t \in [t_0, T], \quad (2.6)$$

де S – одинична сфера з центром в нулі. Оскільки $0 \in \text{int } \Phi(t)$, то $c(\Phi(t), \psi) > 0$ для $\psi \in S$. Тому з (2.6) маємо

$$\lambda \geq \frac{\psi^T X(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad \psi \in S, \quad t \in [t_0, T].$$

Звідси

$$\lambda \geq \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T X(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi)}.$$

Враховуючи означення функції Мінковського і останню нерівність, одержуємо (2.5). За наслідком теореми 2.3 $x_0 \in \partial G_*$ тоді і тільки тоді, коли при $\lambda = 1$ виконується (2.6) і знайдеться такий момент $s_0 \in [t_0, T]$, що $X(s_0, t_0)x_0 \in \partial\Phi(s_0)$, а тому існує вектор $\psi_0 \in S$ такий, що

$$\psi_0^T X(s_0, t_0)x_0 = c(\Phi(s_0), \psi_0).$$

Звідси одержуємо

$$m_*(x_0) = \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T X(t, t_0)x_0}{c(\Phi(t), \psi)} = 1.$$

□

Приклад 2.5 Нехай $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, де $r: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ – неперервна додатна функція. Тоді $c(\Phi(t), \psi) = r(t)$, $\psi \in S$ і

$$m_*(x_0) = \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T X(t, t_0)x_0}{r(t)}.$$

Розв'язуючи задачу

$$\max_{\psi \in S} \psi^T X(t, t_0)x_0 = \|X(t, t_0)x_0\|,$$

одержуємо

$$m_*(x_0) = \max_{t \in [t_0, T]} \frac{\|X(t, t_0)x_0\|}{r(t)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2.8 *Обернена функція Мінковського множини G_* має вигляд*

$$d_*(x_0) = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\psi^T X(t, t_0)x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

де $P(t) = \{\psi \in S: \psi^T X(t, t_0)x_0 > 0\}$. Тоді

$$G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n: d_*(x_0) \geq 1\} = \bigcup_{e \in S} L(e),$$

де $L(e) = \{x \in \mathbb{R}^n: x = ke, k \in [0, d_*(e)]\} = [0, d_*(e)]e$.

Доведення. За означенням оберненої функції Мінковського

$$d_*(x_0) = \sup\{\lambda > 0: \lambda x_0 \in G_*\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

З $\lambda x_0 \in G_*$ випливає $\lambda X(t, t_0)x_0 \in \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$ і, як наслідок,

$$\lambda \psi^T X(t, t_0)x_0 \leq c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in S, t \in [t_0, T].$$

Звідси

$$\lambda \leq \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\psi^T X(t, t_0)x_0}, \quad \psi \in P(t), t \in [t_0, T].$$

Тому

$$\lambda \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\psi^T X(t, t_0)x_0}.$$

З означення оберненої функції Мінковського та її властивостей випливає справедливість теореми. □

Приклад 2.6 Якщо $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, де $r(t) > 0$ – неперервна на $[t_0, T]$ функція, то

$$d_*(x_0) = \min_{t \in [t_0, T]} \frac{r(t)}{\|X(t, t_0)x_0\|}.$$

Нехай задана функція $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$. Надграфіком функції f називається множина

$$\text{epi } f = \{(x, y): y \geq f(x), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Якщо надграфік функції замкнений, то така функція називається замкненою. Замикання надграфіка позначається $\overline{\text{epi } f}$. Надграфік опуклої функції є опуклим. Якщо функція f не є опуклою, то можна знайти найбільшу серед опуклих функцій, що не перевищує в кожній точці функцію $f(x)$.

Опуклою оболонкою функції f називається така функція $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, що її надграфік співпадає з опуклою оболонкою надграфіка функції f , тобто

$$\text{epi } g = \text{co epi } f.$$

Тут $\text{co}(\cdot)$ позначає опуклу оболонку множини. Опукла оболонка функції має аналогічне позначення, тобто $g = \text{co } f$. Якщо $\text{epi } g = \overline{\text{co}} \text{ epi } f$, де $\overline{\text{co}}(\cdot)$ – замкнена опукла оболонка множини, то g називається опуклим замиканням функції f і позначається $\overline{\text{co}} f$.

Нехай задано опуклий компакт $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ у вигляді

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T \psi \leq F(\psi), \psi \in S\},$$

де $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – додатно-однорідна функція, тобто $F(\lambda\psi) = \lambda F(\psi)$, $\psi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geq 0$. Тоді

$$\overline{\text{co}} F(\psi) = c(\mathcal{A}, \psi).$$

Теорема 2.9 *Максимальну множину практичної стійкості G_* можна подати у вигляді*

$$G_* = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n: x^T \psi \leq F(\psi)\}, \quad (2.7)$$

де $F(\psi) = \min_{t \in [t_0, T]} c(\Phi(t), X^T(t_0, t)\psi)$, $\psi \in \mathbb{R}^n$. Опорна функція множини G_* має вигляд

$$c(G_*, \psi) = \overline{\text{co}} F(\psi) = \overline{\text{co}} \min_{t \in [t_0, T]} c(\Phi(t), X^T(t_0, t)\psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Доведення. Якщо $x_0 \in G_*$, то

$$x(t, x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0 \in \Phi(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Тоді для довільного $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi^T X(t, t_0)x_0 \leq x(\Phi(t), \xi), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.8)$$

Звідси

$$x_0^T X^T(t, t_0) \xi \leq x(\Phi(t), \xi), \quad t \in [t_0, T].$$

Оскільки фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ є невиродженою, то для довільного $\psi \in \mathbb{R}^n$ знайдеться $\xi \in \mathbb{R}^n$ таке, що $\psi = X^T(t, t_0)\xi$, $\xi = X^T(t_0, t)\psi$. Тому для довільного $\psi \in \mathbb{R}^n$

$$x_0^T \psi \leq c(\Phi(t), X^T(t_0, t)\psi), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.9)$$

Отже,

$$x_0^T \psi \leq \min_{t \in [t_0, T]} c(\Phi(t), X^T(t_0, t)\psi) = F(\psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

І навпаки, якщо справджується (2.10), то в силу неперервності відображення Φ виконується нерівність (2.9). Переходячи до змінної ξ , одержуємо (2.8), звідки випливає $x_0 \in G_*$.

Функція $F(\psi)$ – додатно–однорідна, тому

$$G_* = \cap_{\psi \in \mathbb{R}^n} \{x \in \mathbb{R}^n: x^T \psi \leq F(\psi)\} = \cap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n: x^T \psi \leq F(\psi)\}.$$

Звідси випливає, що $c(G_*, \psi) = \overline{c} F(\psi)$.

□

Наслідок 2.4 *Максимальну множину практичної стійкості можна подати у вигляді (2.7), де*

$$F(\psi) = \min_{t \in [t_0, T]} c(\Phi(t), z(t)), \frac{dz(t)}{dt} = -A^T(t) \cdot z(t), z(t_0) = \psi, \psi \in \mathbb{R}^n, \\ t \in [t_0, T].$$

Обґрунтування наслідку полягає у тому, що $X^T(t_0, t)$ є фундаментальною матрицею спряженої системи $\frac{dz}{dt} = -A^T(t) \cdot z$.

Приклад 2.7 *Якщо $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, то $F(\psi) = \min_{t \in [t_0, T]} r(t) \cdot \|z(t)\|$, де $z(t)$ – розв'язок спряженої системи, $z(t_0) = \psi$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.*

2.5. Оптимальні оцінки практичної стійкості лінійних систем

Розглянемо теореми, які обґрунтовують оцінки множини початкових умов у класах куль та еліпсоїдів для лінійних систем при опуклих фазових обмеженнях [7, 8, 11, 36].

Теорема 2.10 Нехай множина початкових умов G_0 задана у формі кулі $K_r(0)$, множини фазових обмежень є компактними і мають вигляд

$$\Phi(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{k=1,2,\dots,m} \ell_k^T(t)x \leq 1 \right\}, \quad (2.11)$$

де $\ell_k(t)$ – n -вимірні неперервні вектор-функції, $t \in [t_0, T]$, $k = 1, 2, \dots, m$. Тоді для всіх $r \leq r_*$, $r > 0$, де

$$r_* = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1,2,\dots,m} \frac{1}{\sqrt{\ell_s^T(t)Q(t)\ell_s(t)}}, \quad (2.12)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = A(t) \cdot Q(t) + Q(t) \cdot A^T(t), \quad Q(t_0) = E, \quad (2.13)$$

нульовий розв'язок системи (2.4) є $\{K_r(0), \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким.

Доведення. Обґрунтування теореми базується на необхідних і достатніх умовах практичної стійкості з використанням функції Ляпунова (теорема 2.5). Використовуючи схему побудови функції Ляпунова, застосовану при доведенні теореми 2.5, враховуючи, що в умовах теореми $x(t_0, x, t) = X(t_0, t) \cdot x$, $\alpha(x) = 1 - r + \|x\|$, виберемо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(x, t) = 1 - r + \|X(t_0, t) \cdot x\|.$$

Визначимо параметр r так, щоб $\ell_s^T(t)x \leq 1$, $s = 1, 2, \dots, m$ при $V(x, t) \leq 1$. У такий спосіб ми забезпечуємо виконання умови (2.3) теореми 2.5. Для цього розглянемо задачу

$$\max_{x: V(x,t) \leq 1} \ell_s^T(t)x = \max_{\|X(t_0,t) \cdot x\| \leq r} \ell_s^T(t)x = c(E_r(Q(t), 0), \ell_s(t)) \leq 1.$$

Тут $E_r(Q(t), 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q^{-1}(t) \cdot x \leq r^2\}$ – еліпсоїд, $Q^{-1}(t) = X^T(t_0, t) \cdot X(t_0, t)$.

Дійсно,

$$\|X(t_0, t) \cdot x\|^2 = x^T X^T(t_0, t) X(t_0, t) x = x^T Q^{-1}(t) x \leq r^2.$$

Опорна функція еліпсоїда

$$c(E_r(Q(t), 0), \ell_s(t)) = r \cdot \sqrt{\ell_s^T(t)Q(t)\ell_s(t)} \leq 1, \quad t \in [t_0, T], s = 1, 2, \dots, m.$$

З останньої нерівності одержуємо

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{\ell_s^T(t)Q(t)\ell_s(t)}}, \quad t \in [t_0, T], s = 1, 2, \dots, m.$$

Звідси

$$r \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1, 2, \dots, m} \frac{1}{\sqrt{\ell_s^T(t)Q(t)\ell_s(t)}} = r_*.$$

Матриця $Q(t) = X(t, t_0) \cdot X^T(t, t_0)$ – симетрична, додатновизначена, задовольняє матричне рівняння (2.13) і $Q(t_0) = E$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} &= \frac{dX(t, t_0)}{dt} X^T(t, t_0) + X(t, t_0) \frac{dX^T(t, t_0)}{dt} = \\ &= A(t) \cdot X(t, t_0) \cdot X^T(t, t_0) + X(t, t_0) \cdot X^T(t, t_0) \cdot A^T(t) = \\ &= A(t) \cdot Q(t) + Q(t) \cdot A^T(t). \end{aligned}$$

□

Приклад 2.8 Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Обмеження на фазові координати мають вигляд

$$\Phi(t) = \{(x_1, x_2)^T : |x_1| \leq c_1, |x_2| \leq c_2\},$$

де $t \in [0, T]$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Застосуємо теорему 2.10 до знаходження оптимальної оцінки практичної стійкості нульового розв'язку заданої системи в класі куль.

Фундаментальна матриця цієї системи має вигляд

$$X(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Тому матриця $Q(0) = X(0, 0) X^T(0, 0) = E$. Множину обмежень на фазові координати можна подати у вигляді

$$\Phi(t) = \left\{ x = (x_1, x_2)^T : \max_{k=1, 2, 3, 4} \ell_k^T(t) x \leq 1 \right\},$$

де $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\ell_1(t) &= (c_1^{-1}, 0)^T, & \ell_2(t) &= (-c_1^{-1}, 0)^T, \\ \ell_3(t) &= (c_2^{-1}, 0)^T, & \ell_4(t) &= (-c_2^{-1}, 0)^T.\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}\ell_1^T(t)Q(t)\ell_1(t) &= \ell_2^T(t)Q(t)\ell_2(t) = \frac{1}{c_1^2}, \\ \ell_3^T(t)Q(t)\ell_3(t) &= \ell_4^T(t)Q(t)\ell_4(t) = \frac{1}{c_2^2}.\end{aligned}$$

За теоремою 2.10 оптимальна оцінка множини початкових умов у класі куль

$$r_* = \min\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right).$$

Теорема 2.11 *Нехай множина початкових умов G_0 має вигляд еліпсоїда*

$$G_0 = E_r(B, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T B^{-1} x \leq r^2\}, \quad (2.14)$$

фазові обмеження задані у вигляді (2.11). Тоді для всіх $r \leq r_*$, $r > 0$ нульовий розв'язок системи (2.4) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким, де r_* обчислюється згідно (2.12), $Q(t)$ задовольняє матричне рівняння Ляпунова (2.13) за умови $Q(t_0) = B$. Тут B – $n \times n$ -симетрична додатновизначена матриця.

Доведення. Проводиться аналогічно до обґрунтування теореми 2.10. Вибираємо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(x, t) = 1 - r + \sqrt{x^T Q^{-1}(t)x}, \quad (2.15)$$

де $Q^{-1}(t) = X^T(t_0, t)B^{-1} \cdot X(t_0, t)$. Розв'язуємо задачу

$$\max_{x: V(x, t) \leq 1} \ell_s^T(t)x \leq 1$$

і одержуємо співвідношення аналогічне до (2.12).

□

Теорема 2.12 Нехай множина початкових умов є еліпсоїдом (2.14), фазові обмеження задані неперервним багатозначним відображенням $\Phi: [t_0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $0 \in \text{int } \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Тоді для всіх $r \leq r_*$, $r > 0$ нульовий розв'язок системи (2.4) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким, де

$$r_* = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\sqrt{\psi^T Q(t) \psi}}. \quad (2.16)$$

Тут $Q(t)$ є розв'язком матричного рівняння Ляпунова (2.13), $Q(t_0) = B$.

Доведення. Так як $\Phi(t)$ – опуклий компакт в \mathbb{R}^n , то

$$\Phi(t) = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n: x^T \psi \leq c(\Phi(t), \psi)\}, \quad t \in [t_0, T].$$

Оскільки $0 \in \text{int } \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$, то $c(\Phi(t), \psi) > 0$ для всіх $\psi \in S$. Тому

$$\Phi(t) = \bigcap_{\psi \in S} \left\{ x \in \mathbb{R}^n: \frac{x^T \psi}{c(\Phi(t), \psi)} \leq 1 \right\} = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n: x^T \ell(\psi, t) \leq 1\},$$

де $\ell(\psi, t) = \frac{\psi}{c(\Phi(t), \psi)}$, $\psi \in S$.

Вибираємо функцію Ляпунова у вигляді (2.15) і приходимо до задачі

$$\max_{x: V(x, t) \leq 1} x^T \ell(\psi, t) \leq 1, \quad \psi \in S, t \in [t_0, T].$$

Далі проводимо доведення аналогічно до доведення теорем 2.10, 2.11. В результаті одержуємо оцінку

$$r \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{1}{\sqrt{\ell^T(\psi, t) Q(t) \ell(\psi, t)}}. \quad (2.17)$$

Підставляючи $\ell(\psi, t) = \frac{\psi}{c(\Phi(t), \psi)}$ в нерівність (2.17), одержуємо (2.16). □

Зауваження 2.1 У випадку $G_0 = K_r(0)$ у формулюванні теореми 2.12 слід покласти умову $Q(t_0) = E$.

Приклад 2.9 Якщо в умовах теореми 2.12 фазові обмеження $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, де $r(t) > 0$ – неперервна на $[t_0, T]$ функція, то співвідношення (2.16) має вигляд

$$r_* = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{r(t)}{\sqrt{\psi^T Q(t) \psi}}$$

Оскільки за співвідношенням Релея

$$\max_{\psi \in S} \psi^T Q(t) \psi = \lambda_{\max}(Q(t)),$$

де $\lambda_{\max}(\cdot)$ – максимальне власне число матриці, то

$$r_* = \min_{t \in [t_0, T]} \frac{r(t)}{\sqrt{\lambda_{\max}(Q(t))}}$$

Співвідношення вигляду (2.12), (2.16) називаються *оптимальними оцінками практичної стійкості*.

Теорема 2.13 Припустимо, що множина початкових умов G_0 задана у формі еліпсоїда (2.14), де $r > 0$ – задане число, фазові обмеження визначені параметричним класом багатозначних функцій $\Phi(p): [t_0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, які є неперервними для кожного $p \geq 0$, при цьому $\Phi(t, p) = p \cdot \Phi(t)$, де $\Phi(t) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $0 \in \text{int } \Phi(t, p)$, $t \in [t_0, T]$, $p > 0$. Тоді для всіх $p \geq p_*$ де

$$p_* = r \cdot \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\sqrt{\psi^T Q(t) \psi}}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad (2.18)$$

нульовий розв'язок системи (2.4) є $\{G_0, \Phi(t, p), t_0, T\}$ -стійким. Тут $Q(t)$ є розв'язком матричного рівняння Ляпунова (2.13) при $Q(t_0) = B$.

Доведення. Міркування повторюють обґрунтування попередньої теореми. Вибираємо функцію Ляпунова у вигляді (2.15) і приходимо до нерівності (2.17), де

$$\ell(\psi, t) = \frac{\psi}{c(\Phi(t, p), \psi)} = \frac{\psi}{p \cdot c(\Phi(t), \psi)}.$$

Тоді

$$\frac{r \cdot \sqrt{\psi^T Q(t) \psi}}{c(\Phi(t), \psi)} \leq p, \quad \psi \in S, \quad t \in [t_0, T].$$

Звідси випливає (2.18). □

Співвідношення (2.18) дає оцінку фазових обмежень у параметричному вигляді $\Phi(t, p) = p \cdot \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$, $p > 0$.

Питання, тести для самоконтролю

1. Сформулюйте основні означення практичної стійкості динамічних систем.
2. Наведіть геометричну інтерпретацію практичної стійкості розв'язків динамічних систем.
3. Дайте означення максимальної множини практичної стійкості.
4. Сформулюйте основні властивості максимальної множини практичної стійкості.
5. Дайте означення напівметрики Хаусдорфа. Наведіть означення метрики Хаусдорфа.
6. Сформулюйте основні властивості метрики Хаусдорфа.
7. Наведіть приклади багатозначних відображень.
8. Дайте означення напівнеперевного зверху багатозначного відображення.
9. Дайте означення неперевного багатозначного відображення.
10. Що називається графіком багатозначного відображення?
11. Дайте означення квазівідкритого багатозначного відображення.
12. Що називається опорною функцією множини?
13. Наведіть співвідношення для знаходження опорних функцій кулі, еліпсоїда та гіперкуба.
14. Сформулюйте основні властивості опорної функції.
15. Дайте означення функції Мінковського та оберненої функції Мінковського.
16. Сформулюйте необхідні і достатні умови практичної стійкості на основі функції Ляпунова.
17. Охарактеризуйте властивості оптимальної множини практичної стійкості лінійної системи.

18. Сформулюйте задачу знаходження оптимальної оцінки практичної стійкості.

19. Сформулюйте теореми про оптимальну оцінку практичної стійкості для лінійних систем.

20. Сформулюйте теорему про оптимальну оцінку фазових обмежень.

Обов'язкові та додаткові задачі

Знайти опорні функції для множин задач 2.1. – 2.4.

2.1. $\mathcal{A} = [0, r]$.

2.2. $\mathcal{A} = [-r, r]$.

2.3. $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2\}$.

2.4. $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = 1\}$.

Обґрунтувати неперервність таких багатозначних відображень для задач 2.5. – 2.6.

2.5. $F(x) = [0, x], x \in [0, 1]$.

2.6. $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y \in \mathbb{R}^n: \|y\| \leq x\}, x \in [0, 1]$.

2.7. Знайти функцію Мінковського множини $C \subset \mathbb{R}^2$, $C = \{(x, y): y \geq x^2\}$.

2.8. Доведіть, що якщо множина в \mathbb{R}^n – опукла, то її замикання і внутрішність є опуклими.

2.9. Знайти опорну функцію афінної множини в \mathbb{R}^n .

2.10. Навести приклад замкненої множини на площині, опукла оболонка якої не є замкненою.

2.11.* Нехай $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Довести, що метрика Хаусдорфа

$$h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max_{\psi \in \mathcal{S}} |c(\mathcal{A}, \psi) - c(\mathcal{B}, \psi)|.$$

Тут $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ – сукупність непорожніх опуклих компактів.

2.12.* Довести, що для того щоб багатозначне відображення $F: \mathcal{D} \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ було неперервним, необхідно і достатньо, щоб його опорна функція $c(F(x), \psi)$ була неперервною за змінною $x \in \mathcal{D}$ для всіх $\psi \in \mathcal{S}$. Тут $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ деяка область.

В задачах 2.13 – 2.16 знайти відстань Хаусдорфа між множинами \mathcal{A}, \mathcal{B} , де

2.13. $\mathcal{A} = [0, 1], \mathcal{B} = [3, 5]$.

2.14. $\mathcal{A} = [0, 2], \mathcal{B} = [-2, 1]$.

2.15. $\mathcal{A} = [-1,3]$, $\mathcal{B} = [0,2]$. **2.16.** $\mathcal{A} = [0,1]$, $\mathcal{B} = [-2,4]$.

2.17. Знайти відстань Хаусдорфа між колом радіуса 1 з центром в точці 0 та площині та рівностороннім трикутником, вписаним в це коло.

2.18. Знайти відстань Хаусдорфа між еліпсоїдом

$$\mathcal{E}(0, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Q^{-1}x, x \rangle \leq 1\}$$

та початком координат. Тут Q – симетрична додатновизначена $n \times n$ -матриця.

2.19. Нехай $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$. Нормою множини \mathcal{A} називається $\sup_{x \in \mathcal{A}} \|x\|$. Довести, що якщо $\mathcal{A} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, то $\|\mathcal{A}\| = h(\mathcal{A}, \{0\})$. При цьому, якщо $\mathcal{A} \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, то $\|\mathcal{A}\| = \max_{\psi \in \mathcal{S}} |c(\mathcal{A}, \psi)|$.

2.20. Довести, що опукла оболонка компакта є компактною множиною.

2.21. Знайти оптимальну оцінку початкових умов в задачі практичної стійкості нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2, \end{cases}$$

при фазових обмеженнях $\Phi(t) = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq 4, |x_2| \leq 1\}$, $t \in [0,1]$.

2.22. Побудувати оптимальну оцінку практичної стійкості нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2, \end{cases}$$

при фазових обмеженнях $\Phi(t) = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$, $t \in [0,1]$.

2.23. Знайти функцію Мінковського оптимальної множини практичної стійкості нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 4x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2, \end{cases}$$

при фазових обмеженнях $\Phi(t) = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 3\}$, $t \in [0,2]$.

Задачі за даною тематикою представлені у [38].

РОЗДІЛ III

ХАОС У МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМАХ З ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

Маятникові системи привертають до себе увагу дослідників у різних областях математики, механіки й фізики [2, 10, 14, 24, 29, 30, 41, 42, 44, 59, 63]. Ці системи є класичним прикладом коливальних динамічних систем. У маятникових системах вперше були виявлені такі фундаментальні ефекти як параметричний резонанс, високочастотна стабілізація нестійких положень рівноваги і багато інших. Ці системи були своєрідним полігоном, на якому проходили прикладну перевірку абстрактні теоретичні результати, отримані в якісній теорії динамічних систем.

Маятникові системи прості за фізичною природою й дозволяють проводити експериментальну перевірку різних, теоретично виявлених, коливальних ефектів. Однак, у більшій мірі, інтерес до дослідження різних аспектів динамічної поведінки маятникових систем пояснюється тим, що багато ефектів і явищ, вперше виявлених в маятникових системах, згодом були встановлені й для систем більш складної фізичної природи таких як кільця, оболонки, пластини, поверхні більш складної геометричної природи, в циліндричних і сферичних порожнинах тощо. Більше того, маятникові системи стали успішно застосовуватися для математичного моделювання динаміки складних коливальних систем. При цьому в багатьох випадках суттєво спрощуються диференціальні рівняння, що описують рух, водночас при цьому залишається досить точним опис динаміки самих систем.

Останнім часом розширилася область застосування маятникових моделей для математичного опису коливальних процесів, що застосовуються при дослідженні динамічної поведінки систем найрізноманітнішої природи в біології, медицині, економіці, соціології тощо. Переважна більшість досліджень динаміки маятникових систем проводиться без врахування обмеженості потужності джерела збудження коливань. При такій ідеалізації джерела збудження передбачається, що воно має необмежену потужність. Відповідно, при математичному моделюванні таких систем зворотний вплив коливальної системи на функціонування джерела збудження коливань виключають із розгляду, вважаючи цей вплив нескінченно малим. Такий підхід й широке використання різних методів

редукції дозволяє знизити порядок динамічних систем, що застосовуються для дослідження коливань маятників. Однак, у багатьох випадках, така ідеалізація приводить до значних помилок в якісному й кількісному описі динамічних режимів маятникових систем. Так, стійкі за Ляпуновим при теоретичних розрахунках режими можуть виявитися нестійкими при проведенні натурних експериментів. Зокрема, оскільки параметри реальних систем при математичному моделюванні задаються наближено, то в результаті обчислювальних експериментів замість очікуваних періодичних режимів можуть з'являтися положення рівноваги, і навпаки, точки рівноваги можуть породжувати області притягання складної природи.

Відкриття детермінованого хаосу в динамічних системах є революцією математичного світогляду, що суттєво розширило уявлення дослідників про усталені режими коливань маятникових систем. Зокрема, очевидною є хибність ідеалізації джерел збурення й, особливо, застосування різних методів моделювання реальних процесів. Якісно різні методи моделювання приводять до заміни аналізу динаміки довільної вихідної системи дослідженням динаміки ряду підсистем, на які певним способом розщеплюється вихідна система. При цьому зменшується розмірність фазового простору підсистем, що отримують при такій редукції. Платою за таке спрощення вихідної системи може служити повна втрата інформації про реальні атрактори вихідної системи.

Фактично своєрідним редукуванням вихідної маятничкової системи є нехтування взаємодією між цією системою й джерелом збудження її коливань. При цьому несуттєво, на якій підставі, чи то на підставі необмеженості потужності джерела збудження, чи то на підставі малості коефіцієнтів взаємозв'язків між маятником і джерелом збудження, нехтування взаємозв'язками між маятником і джерелом може призвести до повної втрати інформації про реальні хаотичні режими взаємодії. Тому відкриття детермінованого хаосу дає підстави до глибшого всебічного аналізу структури реальних динамічних процесів при їх математичному моделюванні.

3.1. Фізичний маятник: рівняння руху й стійкість положень рівноваги

Поширеним прикладом маятничкової системи є плоский фізичний маятник, точка підвісу якого збуджується електродвигуном обмеженої потужності [51]. Розглянемо систему, схема якої представлена на рис. 3.1.

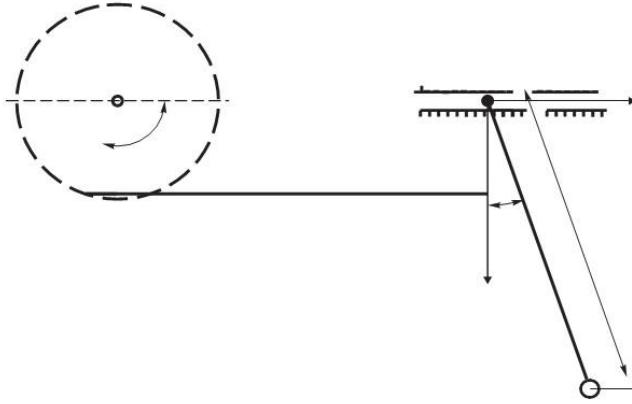


Рис. 3.1. *Схема маятникової системи*

Кривошипно–шатунний механізм через шатун b з'єднаний з підвісом фізичного маятника. Коли кривошипа переміщається на кут Θ , переміщення повзуна разом з підвісом має вигляд

$$u(t) = a[\cos \Theta + 0.25a_1(1 + \cos 2\Theta)],$$

де $a_1 = \frac{a}{b}$. Для опису коливань маятника використовуємо декартову систему координат Oxz . Тоді кінетична енергія всієї системи має вигляд

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{u} + \dot{x})^2 + \dot{z}^2], \quad (3.1)$$

а потенціальна енергія записується співвідношенням

$$V = mg(l - z), \quad (3.2)$$

де I – момент інерції ротора електродвигуна, m – маса маятника, l – довжина підвісу. Позначимо через α кут відхилення від осі z , тоді $x = l \sin \alpha$, $z = l \cos \alpha$. Припустимо, що $\frac{a}{b} \ll 1$. Розкладаючи, для малих кутів α , функції (3.1), (3.2) у ряд Тейлора, одержимо

$$T \simeq \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2 \left[\frac{a^2}{l^2}\dot{\Theta}^2 \sin^2\Theta - 2\frac{a}{l}\dot{\alpha}\dot{\Theta} \sin \Theta + \frac{a}{l}\dot{\alpha}\alpha^2\dot{\Theta} \sin\Theta + \dot{\alpha}^2 \right]; \quad (3.3)$$

$$V \simeq mgl \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} \right).$$

Далі, використовуючи розклад (3.3), отримаємо такі рівняння руху вихідної системи (рівняння Лагранжа)

$$I\ddot{\Theta} = L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) + mla[\ddot{\alpha} - \frac{1}{2}(\ddot{\alpha}\alpha^2 + 2\dot{\alpha}^2\alpha) - \frac{a}{l}(\ddot{\Theta}\sin\Theta + \dot{\Theta}^2\cos\Theta)]\sin\Theta, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha + \delta\dot{\alpha} - \frac{\omega_0^2}{6}\alpha^3 + \frac{a}{l}\frac{\alpha^2}{2}(\ddot{\Theta}\sin\Theta + \dot{\Theta}^2\cos\Theta) = \\ = \frac{a}{l}(\ddot{\Theta}\sin\Theta + \dot{\Theta}^2\cos\Theta). \end{aligned}$$

Тут $L(\dot{\Theta})$ – рушійний момент двигуна; $H(\dot{\Theta})$ – внутрішній момент сил опору обертанню ротора двигуна; $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$ – власна частота маятника; δ – коефіцієнт демфування сили опору середовища, в якому рухається маятник.

Нелінійна система рівнянь (3.4) є детермінованою й описує процес збудження коливань маятника електродвигуном. Введемо малий параметр $\varepsilon = \frac{a}{l}$, тобто припустимо, що довжина кривошипа a набагато менша за довжину підвісу l .

Крім того, припустимо, що реалізуються умови резонансної взаємодії електродвигуна й маятника, коли швидкість $\dot{\Theta}$ близька до частоти маятника ω_0

$$\dot{\Theta}(t) = \omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^{2/3}\omega_0 v. \quad (3.5)$$

Нелінійні коливання маятника будемо шукати у вигляді

$$\alpha(t) = \varepsilon^{1/3}[y_1(\tau)\cos\Theta(t) + y_2(\tau)\sin\Theta(t)],$$

де $\tau = \frac{\varepsilon^{2/3}\Theta(t)}{2}$ – повільний час.

Після проведення процедури усереднення за швидким часом $\Theta(t)$ і використання додаткового співвідношення

$$\dot{\alpha}(t) = \varepsilon^{1/3}\dot{\Theta}[-y_1(\tau)\sin\Theta(t) + y_2(\tau)\cos\Theta(t)],$$

для нових змінних $y_1(\tau)$ і $y_2(\tau)$ одержимо систему рівнянь

$$\frac{dy_1(\tau)}{dt} = -\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\dot{\Theta}(t)} \left[\frac{\eta}{2} y_1 \omega_0 \dot{\Theta} + \frac{1v}{2} \omega_0^2 y_2 + \frac{\omega_0^2}{16} (y_1^2 y_2 + y_2^2) \right] + \varepsilon^{\frac{4}{3}} \xi_1(y_1, y_2);$$

$$\frac{dy_2(\tau)}{dt} = -\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\dot{\Theta}(t)} \left[\frac{\eta}{2} y_2 \omega_0 \dot{\Theta} + \frac{1}{2} \dot{\Theta} + \frac{v}{2} \omega_0^2 y_1 + \frac{\omega_0^2}{16} (y_1^3 + y_1 y_2^2) \right] + \varepsilon^{\frac{4}{3}} \xi_2(y_1, y_2);$$

де $\eta = \delta \varepsilon^{-2/3} \omega_0^{-1}$, $\xi_{1,2}(\varepsilon, y_1, y_2)$ – функції вищого порядку малості відносно здійсненого усереднення. Нехтуючи $\xi_{1,2}(\varepsilon, y_1, y_2)$ та переходячи до похідних за повільним часом, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(\tau)}{dt} &= -\eta y_1 - v y_2 - \frac{1}{8} (y_1^2 y_2 + y_2^3); \\ \frac{dy_2(\tau)}{dt} &= -\eta y_2 + v y_1 + \frac{1}{8} (y_1^3 + y_1 y_2^2) + 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для розгляду усталених режимів взаємодії між маятником і електродвигуном в ролі $L(\dot{\Theta})$ використовуємо статичну характеристику двигуна, причому припускаємо, що $\frac{L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I} = \frac{2\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\omega} M(\dot{\Theta})$.

Для опису обертання вала двигуна введемо нову змінну $\dot{\Theta}(t) = \Omega(\tau)$, яка задовольняє згідно (3.4) усередненому за швидким часом рівнянню

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = M(\Omega) - \mu y_2, \quad (3.7)$$

де

$$\mu = \frac{m a^{\frac{2}{3}} l^{\frac{4}{3}} \omega_0}{I}. \quad (3.8)$$

Апроксимуємо статичну характеристику двигуна лінійною функцією $M(\Omega) = N_0 + E\Omega$, де N_0 і E – постійні, причому $E < 0$. Таке представлення статичної характеристики описує її спадну частину, а параметр E визначає кут нахилу цієї частини до осі абсцис. З огляду на прийняту апроксимацію та співвідношення (3.5), рівняння (3.7) перетворимо в рівняння відносно розлагодження частот $\nu(\tau)$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = F + E\nu + D y_2. \quad (3.9)$$

Тут

$$D = -\frac{2ml^2}{I}; F = \frac{2l^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{N_0}{\omega_0} + E\right). \quad (3.10)$$

Для спрощення міркувань введемо позначення $\nu = y_3, \eta = -C$. Зазначимо, що $C \leq 0$, тому що $\varepsilon > 0, \omega_0 > 0$, а $\delta \geq 0$. Таким чином, процес взаємодії коливань маятника й обертання вала двигуна описується системою трьох нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3), \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2) + 1, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= Dy_2 + Ey_3 + F. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система рівнянь (3.11) явно містить чотири керуючих параметра (C, D, E, F) , при зміні яких у ній реалізується той або інший динамічний режим. Зазначимо, що один із цих параметрів (E) – безпосередньо задається кутом нахилу характеристики двигуна, другий (C) – пропорційний опору середовища, а інші два визначаються за формулами (3.10). Як видно з цих формул, параметри D, F залежать від довжини й маси маятника, його власної частоти, коефіцієнта демпфування, лінійних розмірів кривошипно-шатунного механізму, моменту інерції ротора й також від параметрів статичної характеристики електродвигуна. Тобто фактично дані параметри є мультипараметрами динамічної системи (3.11).

Позначимо через V_f векторне поле, породжуване правою частиною системи (3.11). Тоді дивергенція цієї системи може бути визначена згідно формули

$$\operatorname{div} V_f = 2C + E. \quad (3.12)$$

Отже, дивергенція системи постійна й від'ємна, тому що $C < 0$ та $E < 0$. Власне, система (3.11) є дисипативною, внаслідок чого всі атрактори цієї системи, як регулярні так і хаотичні є підмножинами нульового фазового об'єму розташованими в обмеженій області фазового простору.

Дослідження системи (3.11) почнемо з одержання умов асимптотичної стійкості її положень рівноваги. Усі положення рівноваги системи (3.11) є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{aligned} Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3) &= 0, \\ Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2) + 1 &= 0, \\ Dy_2 + Ey_3 + F &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

У загальному випадку ці розв'язки можуть бути знайдені тільки чисельно.

Припустимо, що $y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}, y_3 = y_{30}$ – один з розв'язків системи (3.13). Тоді відповідна система рівнянь у варіаціях відносно цього розв'язку має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_1 &= \left(C - \frac{1}{4}y_{10}y_{20}\right)\tilde{y}_1 - \left(\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{10}^2\right)\tilde{y}_2 - y_{20}\tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= \left(\frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2\right)\tilde{y}_1 + \left(C + \frac{1}{4}y_{10}y_{20}\right)\tilde{y}_2 + y_{10}\tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_3 &= D\tilde{y}_2 + E\tilde{y}_3. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для зручності покладемо

$$\begin{aligned} a_{11} &= C - \frac{1}{4}y_{10}y_{20}; & a_{12} &= -\frac{3}{8}y_{20}^2 - y_{30} - \frac{1}{8}y_{10}^2; \\ a_{21} &= \frac{3}{8}y_{20}^2 + y_{30} + \frac{1}{8}y_{20}^2; & a_{22} &= C + \frac{1}{4}y_{10}y_{20}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Характеристичне рівняння системи (3.14) має вигляд

$$k_3 + A_1k_2 + A_2k + A_3 = 0,$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= -2C - E; & A_2 &= a_{11}a_{22} + 2C + E - Dy_{10} - a_{12}a_{21}; \\ A_3 &= (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})E + (a_{11}y_{10} + a_{12}y_{20})D. \end{aligned}$$

Застосовуючи критерій Гурвіца одержимо достатні умови асимптотичної стійкості положень рівноваги системи (3.11)

$$2C + E < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad (2C + E)A_2 + A_3 < 0. \quad (3.16)$$

Зазначимо, що перша з умов стійкості (3.16) завжди виконується в силу дисипативності системи (3.11) та справедливості (3.12). Отримані умови громіздки, однак вони дозволяють простежити вплив параметрів системи (3.11) на стійкість положень рівноваги. Оскільки ми маємо основною метою виявлення усталених хаотичних режимів системи (3.11), ми не зупиняємося тут на детальному вивченні стійкості положень рівноваги.

3.2. Фазові портрети типових коливальних систем

Геометричне представлення коливань як метод аналізу коливних процесів за допомогою дослідження фазових траєкторій динамічної системи був введений в теорію коливань Л. І. Мандельштамом та А. А. Андроновим і з тих пір став звичним при дослідженні різних коливних явищ. Наведемо кілька простих але типових прикладів предствалень динамічних процесів, як траєкторій, що описують рух зображуючої точки в фазовому просторі [1, 2].

Консервативний осцилятор. Розглянемо лінійний осцилятор без втрат, рівняння якого можна сформулювати на прикладі коливального LC -контур (рис. 3.2 а), припустивши амплітуду коливань досить малою. Вибравши змінною заряд q на конденсаторі, за допомогою рівнянь Кірхгофа отримаємо

$$\ddot{q} + (LC)^{-1}q = 0. \quad (3.17)$$

Домножимо (3.17) на $L\dot{q}$, одержуємо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Тобто для будь-якого моменту часу виконуються рівності

$$E = E_L + E_C = const, \quad E_L = \frac{L\dot{q}^2}{2}, \quad E_C = \frac{q^2}{2C}, \quad (3.19)$$

які відображають сталість у часі повної енергії осцилятора. *Повна енергія осцилятора є сумою магнітної E_L та електричної E_C енергій.* Рівняння (3.17) – (3.19), можна записати в більш зручний спосіб. Для цього введемо заміну змінних: $\tau = t/\sqrt{LC}$, $x = q$. Одержимо

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \dot{x}^2 + x^2 = a^2, \quad a = \text{const.} \quad (3.20)$$

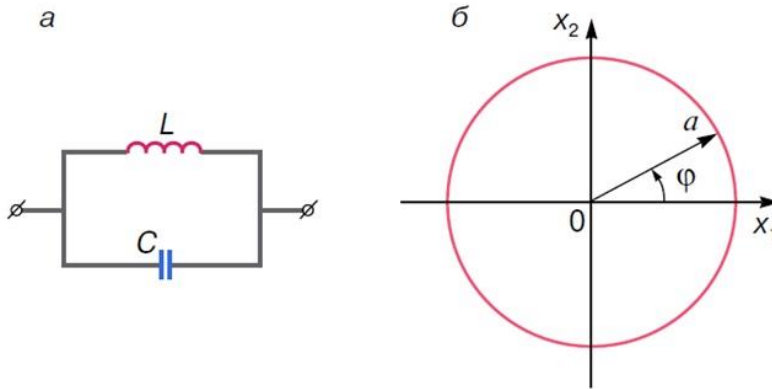


Рис. 3.2. а – коливальний контур, що моделюється рівняннями (3.23),
б – фазовий портрет коливань при заданому рівні енергії

Для фазових координат $x_1 = x$ і $x_2 = \dot{x}$ рівняння (3.20) мають вигляд

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2. \quad (3.21)$$

Фазовий портрет системи (3.21) є колом радіусу a з центром в початку координат. Точка в фазовому просторі, в якій вектор фазової швидкості перетворюється в нуль, називається особливою. В даному випадку нуль координат є *особливою точкою* типу *центр*.

Наявність інтегралу руху в даній системі засвідчує факт збереження енергії (3.19), що дає можливість описати її за допомогою рівняння 1-го порядку. Дійсно, визначивши нову змінну φ співвідношеннями

$$x_1 = a \sin \varphi, \quad x_2 = a \cos \varphi, \quad (3.22)$$

отримаємо рівняння

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{a} = 0, \quad (3.23)$$

які визначають закон руху фазової точки (рис. 3.2 б).

В часі еволюціонує одна змінна φ , відтак фазовий простір консервативного осцилятора одновимірний. Гармонійним коливанням осцилятора

відповідає рівномірний рух зображуючої точки по колу радіуса a , як це показано на рис. 3.2 б.

Якщо консервативна система нелінійна, то її фазовий портрет ускладнюється. Проілюструємо це на прикладі рівняння математичного маятника

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \quad (3.24)$$

У фазових змінних $x_1 = x$ та $x_2 = \dot{x}$ це рівняння зводиться до системи

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1. \quad (3.25)$$

Стани рівноваги математичного (нелінійного) маятника на фазовій площині розташовані вздовж осі x_1 ($x_2 = 0$) в точках $x_1 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Відповідний фазовий портрет системи представлений на рис. 3.3. Очевидно, що особливі точки $x_1 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, x_2 = 0$ є точками типу *центр*, а $x_1 = 0, \pm\pi, \pm 3\pi, \dots, x_2 = 0$ — нестійкі точки типу *сідло*.

Поблизу особливої точки типу центр фазовий портрет відповідає лінійному осцилятору. Траєкторії є замкнутими кривими, близькими до кіл, що відповідає амплітудам коливань близьким до гармонійних (*квазі-гармонійних коливань*).

Означення 3.1 *Сепаратрисою називається траєкторія Γ_0 динамічної системи в двовимірному фазовому просторі, яка прагне до сідлового стану рівноваги при $t \rightarrow +\infty$ (стійка сепаратриса), або при $t \rightarrow -\infty$ (нестійка сепаратриса).*

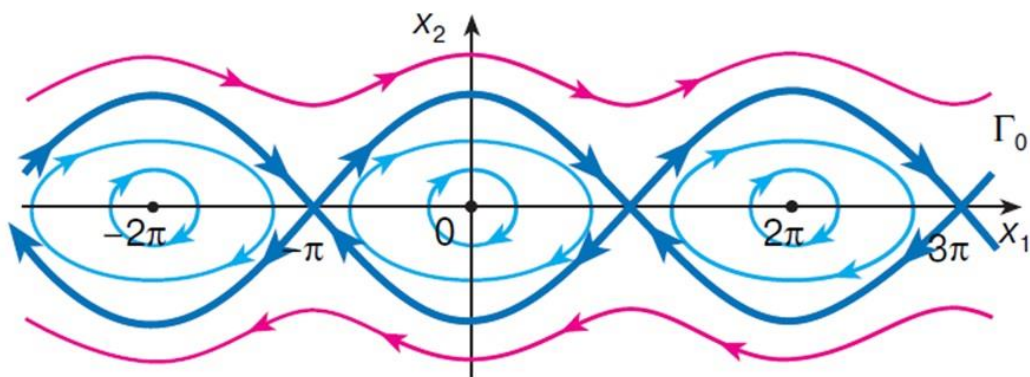


Рис. 3.3. Фазовий портрет математичного маятника (3.25)

Означення 3.2 Якщо сепаратриса прагне до сідла при $t \rightarrow \pm\infty$, то її (разом з сідлом) називають петлею сепаратрис.

Загалом у дисипативних динамічних системах з петлі сепаратрис може народжуватися граничний цикл.

У консервативних динамічних системах петлі сепаратрис можуть розділяти фазовий простір на області з різною поведінкою траєкторій. Зокрема, на фазовій площині (рис. 3.3) петлі сепаратрис відмежовують області коливальних рухів від областей обертальних рухів.

Із збільшенням енергії маятника його коливання від квазігармонійних поблизу точок типу центр еволюціонують до нелінійних періодичних коливань поблизу сепаратрис. Подальше збільшення енергії призводить до обертального руху (руху поза сепаратрисами). Найменші відхилення енергії в ту чи іншу сторону від енергії руху по сепаратрисі призводять до якісно різних типів руху: *коливального* або *обертального*.

Лінійний осцилятор із затуханням. Дисипація енергії, обумовлена наявністю втрат енергії, здійснює принциповий вплив на характер руху системи. Найбільш прості закономірності проявляються в системах з повною дисипацією енергії, коли сили тертя діють за всіма ступенями вільності, а надходження енергії ззовні відсутнє.

Розглянемо процеси в лінійному дисипативному осциляторі, коли сила тертя пропорційна швидкості зміни координати. Прикладом такої системи є коливальний контур, що містить активний опір R . Рівняння контуру має вигляд

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (3.26)$$

Рівняння (3.26) заміною змінних зводиться до безрозмірної форми

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + x = 0, \quad 2\delta = R\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}. \quad (3.27)$$

При $\delta = 0$ маємо консервативний лінійний осцилятор, який детально розглянуто вище. Введення малого тертя якісно змінює фазовий портрет системи. Для $0 < \delta < 1$ розв'язком рівняння (3.27) є

$$x = A \exp(-\delta\tau) \cos(\omega\tau + \psi), \quad \omega = (1 - \delta^2)^{1/2}, \quad (3.28)$$

де A і ψ – довільні сталі, які визначаються початковими умовами. На фазовій площині для будь-яких початкових умов мають місце спіралі, що скручуються, та по яких фазові точки асимптотично наближаються до початку координат, характеризуючи згасаючий коливальний процес.

Нуль координат є особливою точкою системи, яка в разі $\delta < 1$ є *стійким фокусом* (рис. 3.4, а).

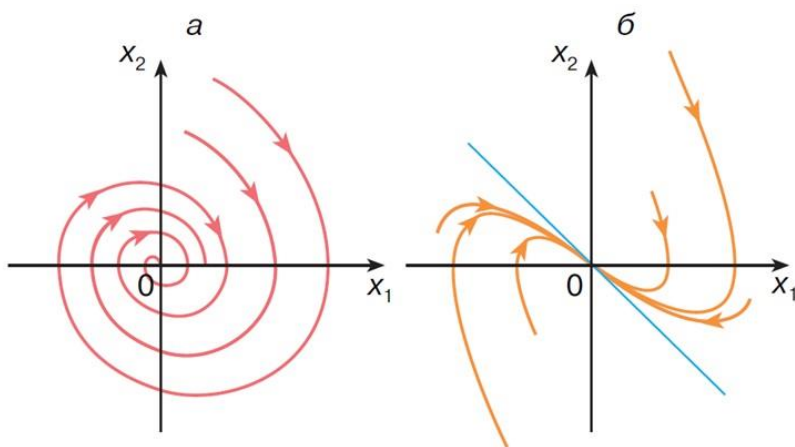


Рис. 3.4. Фазовий портрет дисипативного осцилятора (3.27) з параметром $\delta < 1$ (а) і $\delta > 1$ (б)

Якщо коефіцієнт тертя $\delta > 1$, процес в системі аперіодичний:

$$x = A_1 \exp(\lambda_1 \tau) + A_2 \exp(\lambda_2 \tau), \quad (3.29)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\delta \pm (\delta^2 - 1)^{1/2} \right]$$

і фазові траєкторії виглядають сімейством кривих, якими, як і в попередньому випадку, зображуючі точки, прагнуть до нуля (рис. 3.4 б). Особлива точка в зазначених умовах є *стійким вузлом*.

Отже, при будь-яких значеннях фізичних параметрів системи, коли $\delta > 0$, дисипативний маятник характеризується єдиним глобально стійким станом рівноваги в нулі фазових координат. Незалежно від вибору початкових умов спостерігається згасаючий, коливальний або аперіодичний рух. При $t \rightarrow \infty$ будь-яка (!) зображуюча точка прагне до початку координат в *стійкий фокус* або *вузол*.

Описана властивість є загальною для динамічних систем з повною дисипацією енергії. Стан рівноваги типу *стійкого фокусу*, або *вузла* є тут

глобально притягуючими в тому сенсі, що фазові траєкторії з будь-якої точки фазового простору асимптотично до них прагнуть. *Стационарні незгасаючі коливання в лінійних дисипативних системах виявляються неможливими.* З фізичної точки зору це зрозуміло – немає умов підтримки коливань; енергія, що витрачається на подолання сил тертя не поповнюється.

3.3. Автоколивальні системи

Можливість існування періодичного асимптотично стійкого руху, що зображується ізольованою замкненою траєкторією в фазовому просторі, до якої згодом притягуються траєкторії з певного околу незалежно від початкових умов, забезпечується тільки в нелінійних дисипативних системах [1, 2, 53, 57]. Цей тип динамічних систем є настільки важливим при дослідженні коливальних процесів, що для його виокремлення А. А. Андроном запропоновано спеціальний термін – *автоколивальні системи*. Вище ми зазначали, що математичним образом автоколивань є *граничний цикл Пуанкаре*, власне, замкнена ізольована траєкторія у фазовому просторі, що відповідає періодичному руху.

Як приклад динамічної системи з граничним циклом Пуанкаре, розглянемо класичний нелінійний осцилятор Ван дер Поля, рівняння коливань якого записується так

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = 0. \quad (3.30)$$

Параметр a , що характеризує притік енергії в систему від зовнішнього джерела, є істотним параметром осцилятора і називається *параметром збурення*. З порівняння рівнянь (3.30) і (3.27) випливає, що осцилятор Ван дер Поля описує більш складний коливальний контур, характер дисипації в якому залежить від змінної x . У фазових координатах рівняння коливань осцилятора (3.30) записується таким способом

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a(1 - bx_1^2)x_2 - x_1, \end{aligned} \quad (3.31)$$

причому

$$(1 - bx_1^2) \neq 0. \quad (3.31)$$

Аналітично рівняння (3.31) не розв'язуються і дослідження проводяться з використанням чисельних методів. В практично важливому випадку ($a > 0, b > 0$) рівняння (3.31) мають єдиний стійкий розв'язок у вигляді *граничного циклу* Γ , зображеного на рис. 3.5 а.

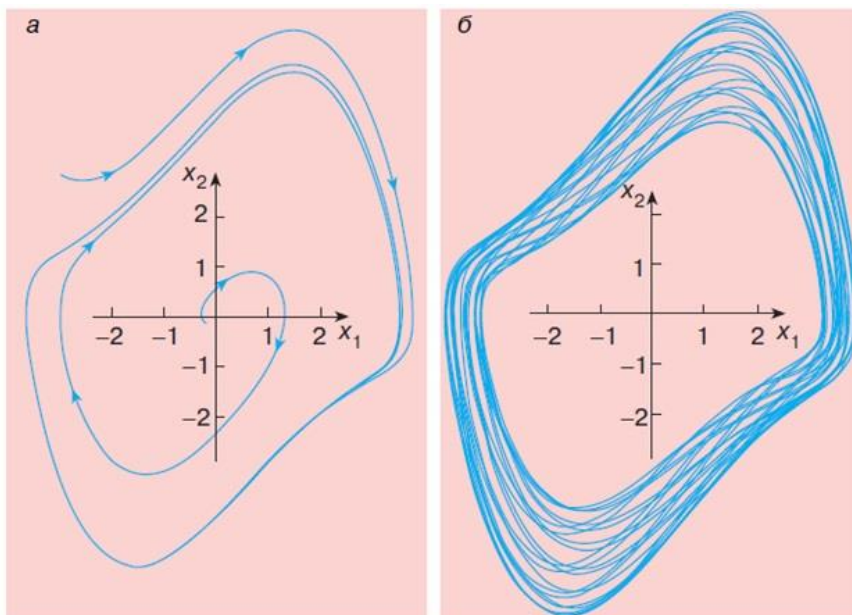


Рис. 3.5. Граничний цикл системи (3.31) для значень параметрів $a = 1, b = 0,3$ (а).

Проекція двовимірного тору на площину змінних x_1, x_2 ; числове інтегрування рівнянь (3.32) для значень параметрів $a = 1; b = 0,3; V = 1,0; \varphi_0 = 0$ (б)

Стан рівноваги в початку координат, для якого поблизу нуля можна знехтувати нелінійністю, є *нестійким фокусом*. Траєкторії з околу стану рівноваги асимптотично прагнуть до граничного циклу. Як показує аналіз, граничний цикл є стійкою ізольованою структурою, яка притягує до себе траєкторії з будь-якої точки на фазовій площині.

Таким чином, в динамічних системах з нелінійною залежністю дисипації енергії від змінної, що здійснює коливання, з'являється принципово новий тип стійкої граничної множини фазових траєкторій – *граничний цикл*. На граничному циклі за час періоду коливань зміна енергії системи характеризується тим, що постійно спостерігається компенсація енергії розсіювання, енергією, яку одержує система.

Розглянемо випадок, який виникає при періодичному збуренні системи зі стійким граничним циклом. Додамо в рівняння (3.30) джерело гармонійної дії порівняно малої амплітуди B і частоти p , яку вважаємо раціонально непов'язаною з частотою періодичних коливань автономного осцилятора

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = B \sin(p\tau - \varphi_0). \quad (3.32)$$

Періодична модуляція граничного циклу автономної системи призводить до того, що фазова траєкторія із заданою частотою p обертається навколо граничного циклу й лежить на двовимірній поверхні, що є поверхнею тора. Аналогічно до випадку граничного циклу ця поверхня є стійкою граничною множиною, до якої стягуються із часом всі траєкторії з деякого околу тора (як зсередини нього, так і з його зовнішньої області!).

На рис. 3.5 б показана проєкція на площину змінних x_1, x_2 фазової траєкторії на двовимірному торі, яка отримана чисельним інтегруванням системи (3.31).

3.4. Детермінованість та хаос в нелінійних системах

В чому суть детермінованого хаосу [4, 24, 26, 51, 52]? Спочатку необхідно внести ясність в розуміння термінів детермінованість і хаос, а потім визначити зміст терміну детермінований хаос. *Коли говорять про детермінованість, мають на увазі однозначний взаємозв'язок причини і наслідку.* Якщо задано деякий початковий стан системи при $t = t_0$, то він однозначно визначає стан системи в будь-який момент часу $t > t_0$. Наприклад, якщо тіло рухається рівноприскорено, то його швидкість визначається детермінованим законом

$$v(t) = v(t_0) + at. \quad (3.33)$$

При заданні початкової швидкості $v(t_0)$ ми однозначно визначаємо значення швидкості $v(t)$ в будь-який момент часу $t > t_0$. У загальному випадку залежність майбутнього стану $x(t)$ від початкового $x(t_0)$ можна записати у вигляді

$$x(t) = F[x(t_0)],$$

де F – детермінований закон, який здійснює строго однозначне перетворення початкового стану $x(t_0)$ в майбутній стан $x(t)$ для будь-якого $t > t_0$.

Тепер *внесемо ясність в поняття хаос*. Проведемо уявний експеримент з броунівською частинкою. Помістимо частинку в момент $t = t_0$ в розчин рідини і за допомогою мікроскопа почнемо фіксувати її стан в часі, відзначаючи координати частинки через рівні інтервали Δt . Неважко переконалися, що під дією випадкових поштовхів з боку оточуючих молекул частинка буде здійснювати нерегулярні блукання, які характеризуються заплутаною траєкторією. Повторимо експеримент кілька разів поспіль, здійснюючи в межах можливостей відтворення початкових умов експерименту. Які будуть результати? Їх головним чином два:

перший – кожен раз траєкторія руху частинки буде складною, неперіодичною;

другий – будь-яка спроба однозначного повторення експерименту призведе до негативного результату.

Кожен раз при повторенні експерименту з однаковими (в межах наших можливостей) початковими умовами ми будемо отримувати різні траєкторії руху частинки! Класичне явище руху броунівський частинки дає чіткі фізичні уявлення про хаос як про непередбачуваний, випадковий процес. *Якщо ми говоримо про хаос, ми маємо на увазі, що зміна в часі стану системи є випадковою (її не можна однозначно передбачити) і невідтворюваною (процес не можна повторити).*

Ми приходимо до переконання, що поняття детермінізм і хаос прямо протилежні за змістом. *Детермінізм* асоціюється з повною передбачуваністю і відтворюваністю, *хаос* – з повною непередбачуваністю і невідтворюваністю. Виникає закономірне питання: що розуміється під терміном детермінований хаос, де об'єднані два протилежних за змістом поняття? Відповіді на це запитання не просто, але можливо.

Нам знадобиться поняття стійкості (нестійкості) руху. Розглянемо стан спокою (рівноваги) системи. Помістимо маленьку кульку в нижню точку всередині порожнистої сфери. Злегка штовхнемо її і поспостерігаємо за рухом. Після скоєння кількох згасаючих коливань кулька знову займе положення на дні сфери. Стан рівноваги стійкий: малі збурення вихідного стану згасають в часі. Якщо ми помістимо кульку на вершину сфери (зовні), то реакція на мале збурення буде іншою: при як завгодно

малому відхиленні кульки від стану рівноваги вона скочується з вершини. Цей стан рівноваги нестійкий: малі збурення наростають в часі.

Фізичний сенс поняття «стійкість» («нестійкість») стосовно стану рівноваги зберігається відносно будь-якого іншого режиму. Режим функціонування динамічної системи називають стійким, якщо малі збурення згасають в часі, прагнучи до нуля. Якщо цього не відбувається і малі відхилення від режиму функціонування системи наростають в часі, такий режим буде нестійким.

Тепер обговоримо іншу важливу властивість складних систем – *нелінійність*. Нехай ми маємо справу з нестійким режимом. Порушивши режим малим впливом, ми спочатку будемо фіксувати наростання збурення. Чи буде воно нескінченним? В реальному житті ніколи!

Відхилення буде наростати до тих пір, поки не вступить в дію механізм нелінійного обмеження процесу наростання збурення. Що це таке? Відповімо на це запитання з фізичної та математичної точок зору. З фізичної точки зору наростання амплітуди не може відбуватися нескінченно. В силу обмеженості енергетичних ресурсів системи це наростання має припинитися або змінитися зменшенням амплітуди відхилення.

Будь-який новий режим повинен мати кінцеву амплітуду і керують цими процесами нелінійні закони. Властивості нелінійної системи безпосередньо залежать від її стану.

Наведемо приклад: нехай залежність амплітуди відхилення $f(x)$ від вихідного стану x визначається співвідношенням

$$f(x) = kx - bx^3, \quad (3.34)$$

де k і b – постійні додатні коефіцієнти. Якщо $x \ll 1$, то $bx^3 \ll kx$ і

$$f(x) \simeq kx. \quad (3.35)$$

У випадку (3.35) $f(x)$ лінійно зростає з ростом x . Якщо ж x стає порівняним з одиницею, то членом bx^3 нехтувати вже не можна. У випадку (3.34) зростання відхилення $f(x)$ завдяки члену kx вплив нелінійного компонента bx^3 буде суттєвим та визначальним для поведінки системи. При деяких значеннях x величина відхилення (3.34) знову буде близька до нуля і процес розпочнеться спочатку. Система буде автоматично себе регулювати, оскільки її властивості залежать від поточного стану.

Нестійкість і нелінійне обмеження.

Розглянемо нестійку детерміновану систему з врахуванням нелінійного обмеження наростань збурень. Для простоти розглянемо стан рівноваги, якому відповідає точка в просторі фазових координат системи. Виведемо систему з рівноваги малим відхиленням. Це збурення почне наростати в силу нестійкості. Далі наростання збурення почне сповільнюватися (вступить в силу механізм нелінійного обмеження) [4].

Чого можна очікувати в цій ситуації? В силу нелінійного обмеження відхилення зменшиться строго до нуля, система повернеться в початковий стан рівноваги. Теоретично це можливо, однак дуже малоймовірно, тому що початковий стан рівноваги нестійкий.

Більш імовірна інша ситуація: система повернеться в малий окіл вихідного стану (підійде дуже близько до стану нестійкої рівноваги) і знову (в силу нестійкості) почне від нього віддалятися. Цей процес буде тривати нескінченно в часі! Але реалізація такого процесу вимагає деяких спеціальних умов.

Припустимо, що ми маємо справу з двовимірною динамічною системою. Простір її станів – фазова площина з координатами x та y .

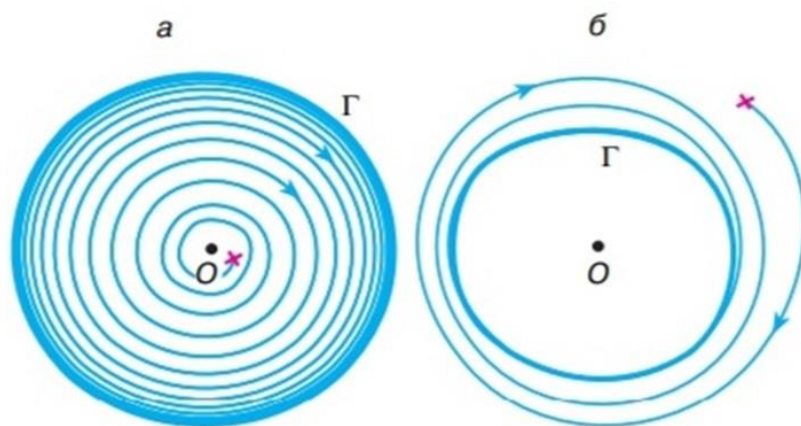


Рис. 3.6. Народження стійкого граничного циклу Γ в околі нестійкої рівноваги O . Поведінка траєкторій при малих (а) і при великих (б) відхиленнях від рівноваги

Якщо мале збурення стану рівноваги в такій системі буде наростати, а в результаті нелінійного обмеження далі зменшуватися, то можливі два варіанти: поява нових стійких станів рівноваги поблизу нестійкого, або перехід в новий режим, який відповідає періодичним коливанням.

Другий варіант ілюструє рис. 3.6. При малих амплітудах збурення (рис. 3.6 а) траєкторія по спіралі віддаляється від точки рівноваги O . При великих відхиленнях (рис. 3.6 б) траєкторія повертається. Замість нестійкого стану рівноваги з'являється новий режим – періодичні автоколивання, яким відповідає граничний цикл Γ на фазовій площині.

Нестійкість стану рівноваги в двовимірній нелінійній системі породжує режим стійких періодичних коливань. Якщо ми уявимо собі іншу ситуацію, коли відхилення від стану рівноваги спочатку наростає, а потім в силу нелінійності знову прагне до нуля, ми прийдемо до протиріччя: фазова траєкторія зобов'язана буде самоперетинатися (рис. 3.7)!

З цього випливає, що існують різні початкові умови, що призводять в результаті до однакових станів! Це неможливо в силу теореми єдиності розв'язку: при заданих початкових умовах розв'язок існує і він єдиний, іншого не дано.

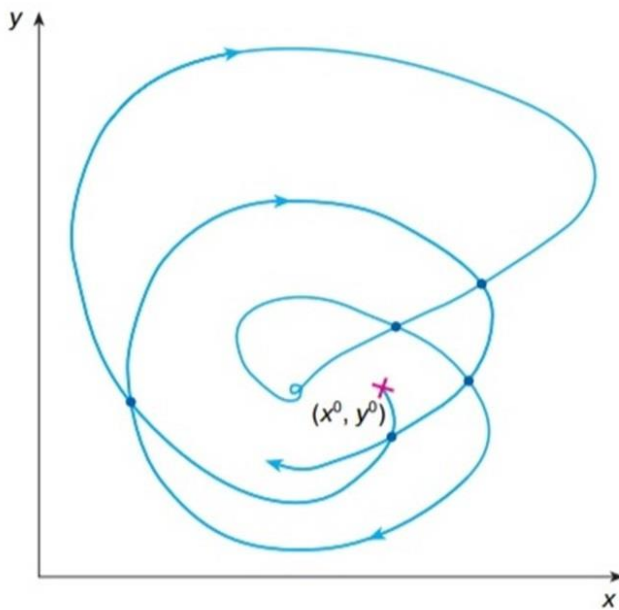


Рис. 3.7. Поведінка динамічної системи, яку неможливо реалізувати на площині в силу перетину фазових траєкторій

Детермінований хаос

Картина принципово зміниться, якщо ми розглянемо динамічну систему, стан якої характеризується трьома незалежними змінними (фазови-

ми координатами). Іншими словами, давайте повторимо наші міркування, здійснивши вихід з площини в тривимірний фазовий простір. Ніщо не забороняє нам реалізувати ситуацію рис. 3.7 в просторі трьох вимірів. Траєкторія розкручується в тривимірному просторі, віддаляючись від точки O по спіралі. Досягнувши деяких значень і зазнаючи дію механізму нелінійного обмеження, траєкторія знову повернеться в окіл вихідного стану. Далі через нестійкість процес буде повторюватися (рис. 3.8).

Можливі два варіанти:

- траєкторія через кінцевий час замкнеться, демонструючи наявність складного, але періодичного процесу;
- траєкторія буде відтворювати якийсь аперіодичний процес, якщо при $t \rightarrow \infty$ замикання не станеться.

Другий випадок і відповідає режиму детермінованого хаосу! Дійсно, працює основний принцип детермінізму: майбутнє однозначно визначено початковим станом. Однак процес еволюції системи складний, неперіодичний. Чисто зовні він нічим не відрізняється від випадкового! Але при більш детальному аналізі розкривається одна важлива відмінність цього процесу від випадкового – цей процес відтворюваний!

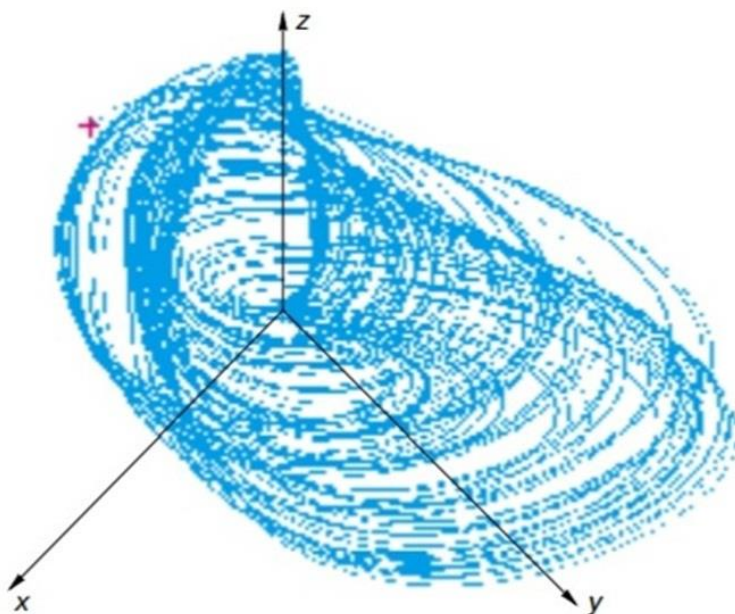


Рис. 3.8. *Можливий вигляд фазової траєкторії в тривимірній нелінійній дисипативній системі, що відповідає наявності дивного атрактора*

Дійсно, повторивши ще раз початковий стан, в силу детермінованості ми знову відтворимо ту ж саму траєкторію незалежно від ступеня її складності.

Отже, цей неперіодичний процес не є хаотичним в сенсі означення хаосу, даного нами вище? Так, це складний, схожий на випадковий, але, тим не менш, детермінований процес.

Вперше подібні властивості динамічної системи в 1963 році виявив Е. Лоренц при чисельному дослідженні динаміки тривимірної моделі теплової конвекції. Через вісім років в теоретичній роботі Д. Рюеля і Ф. Такенса притягуюча область в фазовому просторі динамічної системи, яка характеризується режимом сталих неперіодичних коливань, була названа дивним атрактором. Цей термін був відразу сприйнятий дослідниками і утвердився для означення математичного образу режиму нерегулярних коливань детермінованих динамічних систем.

Важливо й те, що описаний стан системи характеризується нестабільністю і ця обставина дозволяє нам зрозуміти ще одну принципово важливу властивість систем з детермінованим хаосом – *перемішування*.

Перемішування

Ми встановили, що в динамічних системах, розмірність фазового простору яких $N \geq 3$, теоретично можливий режим складних неперіодичних пульсацій. Цей тип руху детермінований і характеризується нестійкістю. До чого це призводить? Поговоримо про асимптотично стійкі режими руху в детермінованих дисипативних динамічних системах, в яких є втрата енергії.

Розглянемо як початковий стан не точку з певними координатами в просторі станів x^0 , а малу сферу радіусу $\varepsilon > 0$, що оточує цю точку. Будь-яка точка всередині сфери характеризує мале відхилення від x^0 . Сфера включає сукупність можливих відхилень від вихідного стану, що не перевищують за модулем ε .

Тепер простежимо за трансформацією цієї сфери в часі (вздовж траєкторії). В силу стійкості обраного нами режиму будь-яке мале відхилення в часі має згасати! Це означає, що під дією детермінованого закону еволюції кулька радіусу ε в часі буде зменшуватися і при $t \rightarrow \infty$ її радіус зменшиться до нуля! Сказане вище ілюструє рис. 3.9. Вихідний фазовий об'єм в дисипативних системах в часі зменшується.

А якщо вихідний режим нестійкий? Що буде в цьому випадку? Фазовий об'єм може збільшуватися до нескінченності, якщо нестійка система лінійна.

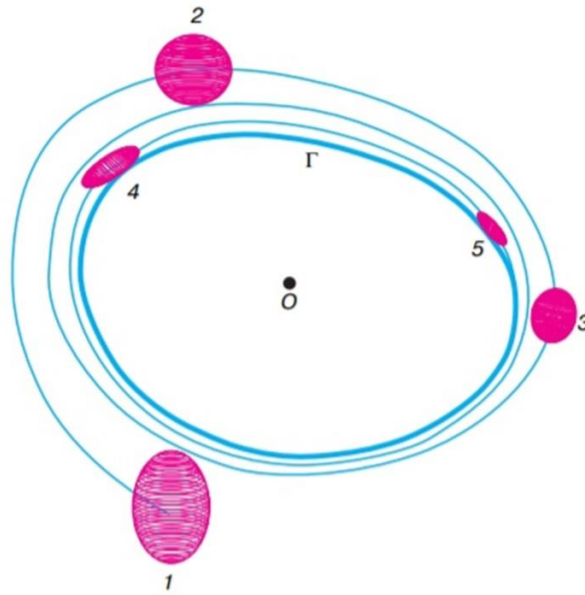


Рис. 3.9. Стискання початкої області невизначеності t в часі у випадку, коли цикл Γ є стійким граничним режимом

Але якщо система нелінійна і дисипативна, то процес еволюції початкового малого фазового обсягу буде нетривіальним. Спробуємо це зрозуміти.

Нестійкість режиму веде до зростання збурювань. Це одна обставина. Друга – дисипативні системи незалежно від виду стійкості викликають зменшення елементу фазового об'єму в часі до нуля, що зумовлено втратами енергії.

Як поєднати ці два фактори? Існує єдине розв'язання цієї дилеми: елемент фазового об'єму за певними напрямками повинен розтягуватися, а за іншими – стискатися, причому ступінь стискання в середньому обов'язково має переважати над ступенем розширення, щоб в результаті фазовий об'єм в часі зменшувався.

У нелінійних дисипативних системах це виявляється можливим. Сказане вище ілюструє рис. 3.10. В силу наявності механізму нелінійного обмеження фазова траєкторія складного режиму коливальних зосереджена в обмеженій області фазового простору (див. рис. 3.8.). При цьому будь-який малий окіл вихідного початкового стану еволюціонує так, як показано на рис. 3.10 і в підсумку переміщується по всій області, зайнятій траєкторією. Цей процес важко уявити собі наочно.

Проведемо уявний експеримент. У склянку з водою помістимо маленьку чайнку і розмішаємо воду ложкою, викликавши нестійкість. Чайнка буде при цьому рухатися по складній спіралеподібній траєкторії, яка обумовлена рухом води в склянці. При цьому в будь-який заданий момент часу ми теоретично можемо зафіксувати її координати $x(t)$ в об'ємі води.

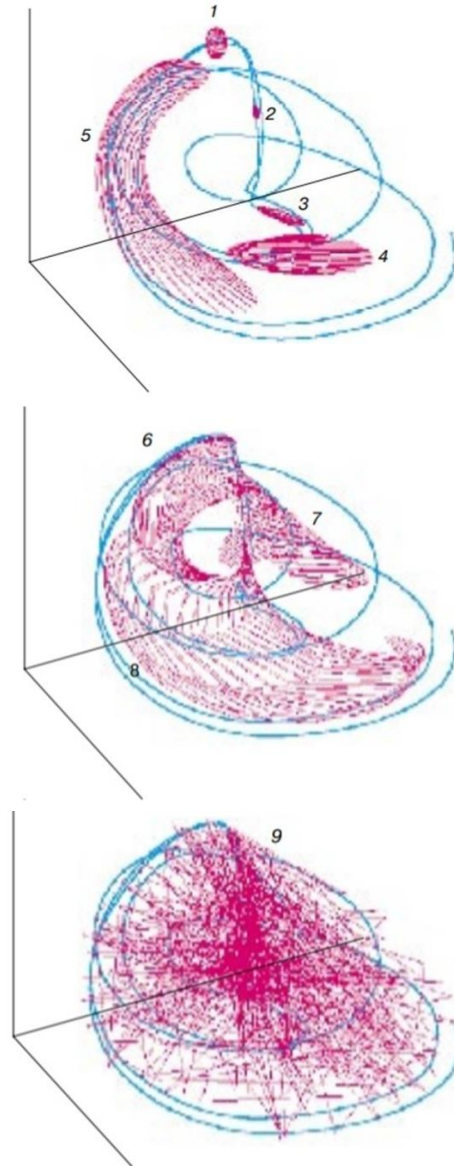


Рис. 3.10. Еволюція малого первісного фазового об'єму t в часі в системі з дивним атрактором, що ілюструє перемішування. Вихідний об'єм t стискається за одними та розтягується за іншими напрямками (2–4), вигинається (5, 6), “складається” (7, 8) і в підсумку переміщується за атрактором (9)

Тепер замість чайнки помістимо в стакан з водою дуже маленьку краплину чорнил і знову розмішаємо воду. Що при цьому відбудеться? Чорнила практично рівномірно розбіжаться по всьому об'єму води, злегка пофарбувавши її. Частинки чорнил, спочатку зосереджені в маленькому об'ємі крапельки, через час перемішування можна буде виявити в будь-якій частині об'єму води в склянці. У житті цей процес ми називаємо *перемішуванням*.

В математиці це поняття також існує і з точки зору фізичної інтерпретації виявляється близьким за змістом. Дійсно, потік води в склянці, створений рухом чайної ложки, можна інтерпретувати як дію детермінованого закону, що визначає динамічну систему. Чайнка при цьому буде рухатися по складній але детермінованій траєкторії. А крапелька чорнил, яку можна інтерпретувати як якийсь маленький об'єм в фазовому просторі навколо чайнки, перемішається в усьому об'ємі води.

Імовірнісні властивості детермінованих систем

Таким чином, в нестійких режимах в детермінованих нелінійних системах з перемішуванням ми можемо передбачити майбутній стан однозначно тільки у випадку строгого задання початкових умов. Однак якщо врахувати як завгодно малу помилку (тобто розглянути краплину чорнил замість чайнки), то детерміноване передбачення стає неможливим. Мала область первинної невизначеності розминається завдяки перемішуванню на кінцеву область у фазовому просторі. Тепер ми маємо справу з процесом, який асоціюється зі справжньою випадковістю, зі справжнім хаосом.

Основною властивістю динамічних систем, які демонструють режим детермінованого хаосу, є чутлива залежність режиму функціонування до як завгодно малих змін початкових умов. Саме ця обставина призводить до втрати детермінованої передбачуваності і необхідності вводити імовірнісні характеристики для опису динаміки таких систем. В цьому сенсі стає зрозумілим термін детермінований хаос, який характеризує народження випадкової, непередбачуваної поведінки системи, керованої детермінованими законами.

Невизначеність у заданні початкового стану – ситуація цілком реальна з точки зору фізики. Дійсно, в силу кінцевої точності реєстрації стану будь-якими приладами він визначається з кінцевою (нехай як завгодно малою) помилкою. Це означає, що *потрібно аналізувати еволюцію в часі не початкової точки, а початкової області навколо цієї точки*. В силу перемішування ми зіткнемося з процесом, детально описаним вище.

3.5. Регулярні і дивні атрактори динамічних систем

Розглянемо властивості відкритих систем, що перебувають далеко від стану рівноваги (під відкритою будемо розуміти неконсервативну систему) [4]. Такі системи нестійкі і тому повернення до початкового стану для них є необов'язковим. За наявності нестійкості змінюється роль зовнішніх впливів. За певних умов незначний вплив на відкриту систему може призвести до значних та непередбачуваних наслідків.

У відкритих системах, далеких від рівноваги, виникають ефекти узгодження, коли елементи системи корелюють, узгоджують своє поведіння. Таке кооперативне злагоджене поведіння характерне для систем різних типів: атомів та молекул, клітин та живих істот, економічних об'єктів та соціальних груп тощо.

У результаті погодженої взаємодії відбуваються процеси впорядкування, виникнення з хаосу певних структур, перетворення й ускладнення систем. Чим більше відхилення від стану рівноваги, тим сильніше охоплення кореляціями та взаємозв'язками, тим вища узгодженість процесів, що відбуваються навіть у віддалених областях і, на перший погляд, не пов'язані один з одним.

Відкриті системи, в яких спостерігається приріст ентропії, власне, є дисипативними системами. У дисипативних системах енергія впорядкованого руху переходить в енергію неупорядкованого (хаотичного) руху, тобто відбувається дисипація. Якщо закриту систему виведено зі стану рівноваги, то вона завжди намагається набути стану з максимальною ентропією. У відкритій системі втрата ентропії може врівноважуватись її зростанням в самій системі завдяки використанню власної енергії системи. Тому існує ймовірність виникнення стаціонарного стану.

Якщо ж втрата ентропії перевищує її внутрішнє зростання, то виникають і розростаються до макроскопічного рівня великомасштабні флуктуації, а за певних умов у системі починають відбуватися самоорганізаційні процеси, спрямовані на створення впорядкованих структур. Отже, у відкритих системах, що обмінюються з навколишнім середовищем потоками речовини чи енергії, однорідний стан рівноваги може втрачати стійкість і незворотно переходити у стаціонарний стан, стійкий щодо малих збурень. Такі стаціонарні стани дістали назву дисипативних структур.

Термін *«дисипативна структура»* запропонував І. Пригожин, засновник бельгійської школи синергетики, яка розвиває термодинамічний

підхід до самоорганізації. Основне поняття *синергетики Хакена* – *поняття структури як стану*, що виникає в результаті когерентного (погодженого) поведіння великої кількості частин, – бельгійська школа замінює більш спеціальним поняттям дисипативної структури.

Виникнення дисипативних структур має граничний характер. Нерівноважна термодинаміка пов'язала граничний характер із нестійкістю, демонструючи, що нова структура завжди є результатом розкриття нестійкості внаслідок флуктуацій. Отже, йдеться про *«порядок через флуктуації»*. Таким чином, дисипативні структури є результатом розвитку власних внутрішніх нестійкостей у системі. А процеси самоорганізації можливі, коли відбувається обмін енергією і масою з навколишнім середовищем, тобто підтримується стан поточної рівноваги, причому втрати на дисипацію компенсуються іззовні.

Поняття *«порядок»* тісно пов'язане з поняттям структури. Іншими словами, порядок передбачає наявність певної структури – ключового поняття для всіх наук, що вивчають ті чи інші аспекти процесів самоорганізації. Отже, структура припускає певну жорсткість об'єкта – здатність зберігати тотожність самому собі за різних зовнішніх і внутрішніх змін.

Інтуїтивно поняття структури протиставляється поняттю хаосу як стану, що цілком позбавлений будь-якої структури. Однак, як свідчать новітні дослідження, таке уявлення про хаос є настільки ж поверховим, наскільки поверховим є уявлення про фізичний вакуум у теорії поля як про порожнечу: хаос може бути різним, мати різний ступінь упорядкованості, різну структуру тощо.

Тому в синергетиці під хаосом розуміють нерегулярний рух, що описується детермінованими рівняннями. Його ще називають динамічним хаосом. Дослідження різних сценаріїв переходу до динамічного хаосу пов'язане з аналізом властивостей так званих дивних *атракторів*.

Вивчення динаміки систем, аналіз поведінки фазових траєкторій (у сенсі їх стійкості) показує, що існують випадки, коли всі розв'язки системи зосереджуються зрештою на деякій замкненій підмножині. Така підмножина називається *атрактором* (від англ. *to attract* – притягувати).

Атрактор має певну область притягання (множину початкових точок). З часом усі фазові траєкторії, що зародилися у множині початкових точок, тяжіють (намагаються збігтися) саме до цього атрактора. Рух точки в таких випадках має квазіперіодичний характер.

Для тривимірних систем прикладами найпростіших атракторів є:

- стійкі точки рівноваги;
- стійкі цикли (траєкторія тяжіє до деякої замкненої кривої);
- тори (до поверхні яких наближається траєкторія).

Нехай, наприклад, точка, рухаючись у фазовому просторі, залишає за собою слід. На рис. 3.11 зображено атрактор Лоренца, як ілюстрацію динамічного хаосу описаного відповідним клубком траєкторій у фазовому просторі.

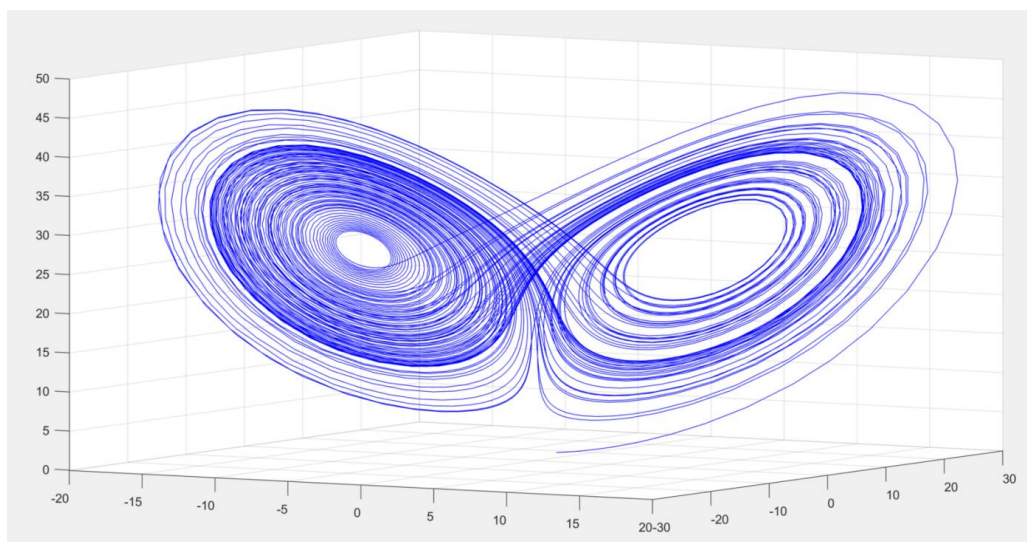


Рис. 3.11 Дивний атрактор у тривимірному фазовому просторі

Для сталих коливань, що відповідають динамічному хаосу, запропоновано назву —*дивний атрактор*”. Рух точки на таких атракторах є нестійким, хитким, будь-які дві траєкторії на них завжди розбігаються, мала зміна початкових умов приводить до різних шляхів розвитку. Іншими словами, динаміка систем із дивними атракторами є хаотичною.

Ці атрактори дістали таку назву, бо вони у фазовому просторі справді виглядають незвично, оскільки вони є ані точкою, ані періодичною траєкторією, ані поверхнею. Їх порівнюють іноді з поверхнею, що складається з нескінченної множини шарів. А головне полягає в тому, що взятий навмання розв’язок блукатиме в дивному атракторі і через значний проміжок часу пройде досить близько до будь-якої його точки. Тут наявний дуже високий ступінь чутливості до початкових умов.

Приклад 3.1 Розглянемо динамічну систему Лоренца, яка складається з трьох звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, що описують конвекцію повітря

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x + y), \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases}$$

де σ, r, b – деякі параметри. При певних значеннях параметрів траєкторія системи поводить ся настільки химерно, що здається випадковою та хаотичною.

Комп’ютерний аналіз системи Лоренца привів до принципового результату: з переходом до режиму динамічного хаосу, тобто неперіодичного руху в детермінованих системах, де майбутнє однозначно визначається минулим, горизонт прогнозування поведження системи стає обмеженим. Річ у тім, що коли ми знову візьмемо дві близькі траєкторії, то вони розбігаються. Швидкість розбігання визначається показником Ляпунова і від цієї величини залежить інтервал часу, на який можна подати прогноз. При цьому для кожної системи існує свій горизонт прогнозу.

Унікальною властивістю дивних атракторів є *масштабна самоповторюваність*. Це означає, що, збільшуючи ділянку атрактора, яка містить нескінченну кількість кривих, переконуємося: атрактор на ній подібний до великомасштабного подання його частини. Об’єкти, що мають здатність нескінченно повторювати власну структуру на мікрорівні, дістали спеціальну назву – *фрактали*. Властивість об’єктів мати в кожному як завгодно малому масштабі приблизно однаковий вигляд називають *масштабною інваріантністю*, а множини, що мають цю властивість, – *фракталами* (від англ. *fractal* – дробовий, неповний, частковий).

Фрактали – це геометричні об’єкти з так званою дробовою розмірністю. Дивний атрактор Лоренца – один із таких фракталів. Детальніше властивості даних об’єктів описано в наступних розділах.

3.6. Точки біфуркації

Динамічні системи, як правило, повільно змінюють характер свого поведіння внаслідок незначної зміни внутрішніх або зовнішніх параметрів. Однак можуть існувати такі критичні значення параметрів, при яких система зазнає якісної перебудови і, відповідно, різко змінюється якісна динаміка системи. Наприклад, втрачається її стійкість. Такі критичні значення параметрів називаються точками біфуркації [1, 5, 47, 50, 53].

В широкому сенсі під біфуркацією розуміють різноманітні якісні перебудови чи метаморфози роз'язків, траєкторій чи інших характеристик динамічних систем при зміні параметрів, від яких вони залежать. Це широке поняття, яке застосовується в різних галузях природознавства, наприклад:

- зміна числа чи типу стаціонарних точок системи;
- зміна періоду циклу динамічної системи;
- зміна якісної поведінки динамічної системи за малої зміни її параметрів.

Втрата стійкості відбувається, як правило, переходом від точки стійкості до стійкого циклу (м'яка втрата стійкості), виходом траєкторії зі стійкого стану (жорстка втрата стійкості), народженням циклів із подвоєним періодом тощо. З подальшою зміною параметрів можливе виникнення у фазовому просторі таких топологічних структур, як тор, а далі – дивних атракторів, тобто хаотичних процесів.

Поведіння всіх систем, що самоорганізуються, у точках біфуркації характеризується загальними закономірностями. Розглянемо найважливіші з них.

Точки біфуркації часто провокуються зміною керуючих параметрів, що веде систему до нового стану. Потенційних траєкторій розвитку системи багато, і тому точно спрогнозувати, до якого стану перейде система після проходження точки біфуркації, неможливо. Це пояснюється тим, що в реальних системах вплив середовища має випадковий характер.

Вибір траєкторії системи може бути також пов'язаний з життєздатністю і стійким типом поведінки системи. Відповідно до принципу стійкості, серед можливих форм розвитку системи реалізуються лише стійкі, водночас хисткі, якщо й виникають, то швидко руйнуються.

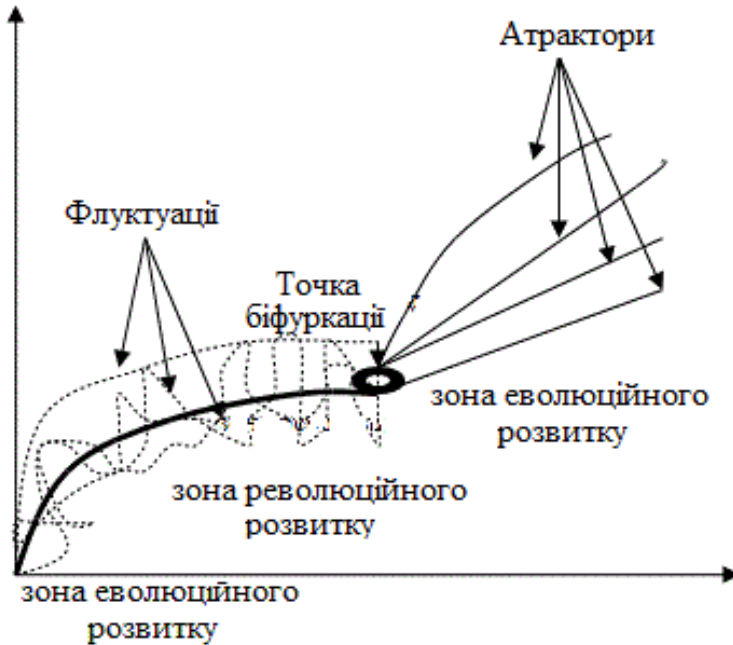


Рис. 3.12 Еволюція системи та точка біфуркації

Підвищення розмірності та складності системи спричинює збільшення кількості станів, за яких може відбуватися стрибок (катастрофа) та кількості можливих шляхів розвитку. Тобто чим різномірніші елементи системи і складніші її зв'язки, тим вона хисткіша. Чим більше система нерівноважна, тим більшу кількість можливих шляхів розвитку вона може вибирати в точці біфуркації. Два близькі стани можуть породити зовсім різні траєкторії розвитку.

Однакові траєкторії розвитку можуть реалізовуватися неодноразово. Наприклад, серед соціальних систем є суспільства, що багаторазово обирали тоталітарні сценарії розвитку.

Часова межа катастрофи визначається *принципом максимального зволікання*: система робить стрибок тільки тоді, коли в неї немає іншого вибору.

У результаті розгалуження (біфуркації) виникають граничні цикли – періодичні траєкторії у фазовому просторі, кількість яких тим більша, чим більш структурно хиткою є система.

Катастрофа (стрибокподібна зміна стану динамічної системи при неперервній зміні параметрів.) змінює організованість системи, причому не завжди в бік збільшення. Отже, у процесі руху від однієї точки біфур-

кації до іншої відбувається розвиток системи. У кожній точці біфуркації система вибирає шлях розвитку, траєкторію свого руху.

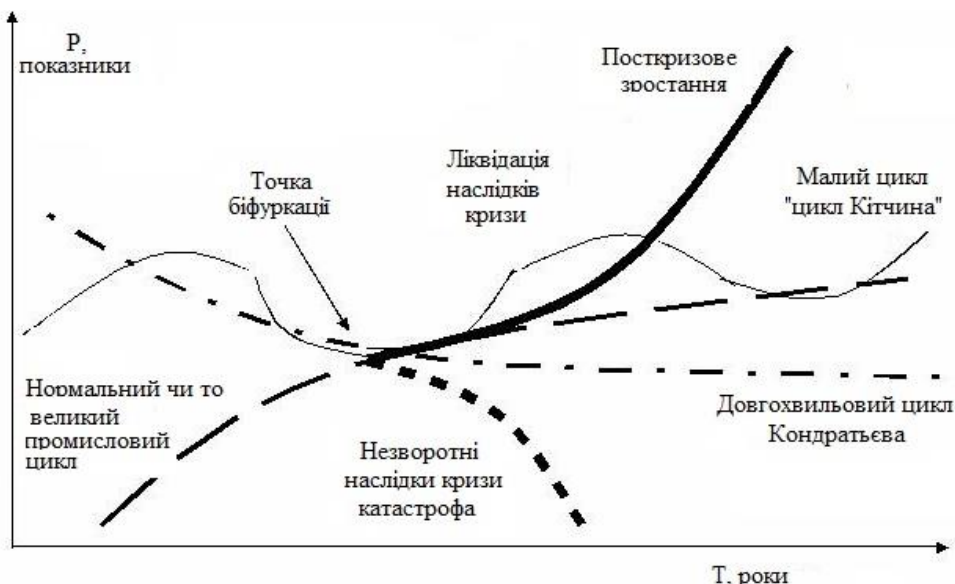


Рис. 3.13. Приклад біфуркації в економічних системах

У точці біфуркації відбувається перехід системи від області притягання одного атрактора до іншого. Як атрактор може виступати і стан рівноваги, і граничний цикл, і дивний атрактор (хаос).

Еволюційна система функціонує в області притягання одного з атракторів. В умовах катастрофи в точці біфуркації можливі три сценарії розвитку системи:

- система може стати хаотичною і зруйнуватись;
- вона може перейти до стану рівноваги;
- або стати на шлях формування нової впорядкованості.

Якщо система притягається станом рівноваги, вона стає закритою і до чергової точки біфуркації живе за законами, які властиві для закритих систем. Якщо хаос, породжений точкою біфуркації, затягнеться, стане можливим руйнування системи, внаслідок чого її компоненти рано чи пізно ввійдуть як складові до іншої системи і притягуватимуться вже її атракторами. Зрештою, якщо система йде шляхом формування впорядкованості, що визначається яким-небудь новим атрактором, то формується нова дисипативна структура – новий тип динамічного стану системи, за

допомогою якого вона пристосовується до умов навколишнього середовища, що змінилися.

Логістичне відображення (також квадратичне відображення, або відображення Фейгенбаума) – це поліноміальне відображення, яке описує, як змінюється чисельність популяції з плином часу. Його зазвичай наводять як приклад того, як в дуже простих нелінійних рівняннях може виникати складна, хаотична поведінка.

Логістичне відображення – дискретний аналог неперервного логістичного рівняння Ферхюльста; воно відображає той факт, що приріст популяції відбувається в дискретні моменти часу.

Математично логістичне відображення описується співвідношенням

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (3.36)$$

де x_n належить інтервалу $[0,1]$ і відображає чисельність популяції в n -му році; x_0 позначає початкову чисельність членів популяції (в рік номер 0); r – додатній параметр, що характеризує швидкість розмноження (зростання) популяції. Іноді співвідношення (3.36) називається відображенням Ферхюльста (або Ферхюльста–Пірла), а логістичним відображенням називається інше відображення

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2. \quad (3.37)$$

Логістичне відображення описує два ефекти:

- коли чисельність популяції мала, то швидкість процесу розмноження пропорційна чисельності популяції;
- оскільки популяція мешкає в замкненому обмеженому ареалі, то при зростанні щільності популяції швидкість розмноження падає, так як зростає конкуренція та смертність.

Необхідно зазначити, що одним з недоліків використання логістичного відображення як демографічної моделі є той факт, що при деяких початкових значеннях і величинах параметрів логістичне відображення дає негативні значення чисельності популяції (для уникнення цього недоліку досліджують дискретну модель Рікера).

При зміні значення параметра r , в системі спостерігається така поведінка:

- якщо r більше 0 і менше 1, то популяція зрештою вимре, незалежно від початкових умов;
- якщо r більше 1 і менше 2, чисельність популяції прямуватиме до стаціонарного значення $\frac{r-1}{r}$, незалежно від початкових умов;
- якщо r більше 2 і менше 3, то чисельність популяції, аналогічно до попереднього випадку, прийде до того ж стаціонарного значення $\frac{r-1}{r}$, однак спочатку буде дещо коливатися навколо нього. Швидкість збіжності лінійна всюди, крім значення $r = 3$, при якому вона вкрай мала;
- якщо r більше 3 і менше $1 + \sqrt{6}$ (приблизно 3,45), чисельність популяції буде нескінченно коливатися між двома значеннями;
- якщо r більше 3,45 і менше 3,54 (приблизно), то чисельність популяції буде нескінченно коливатися між чотирма значеннями;
- при значенні r більше 3,54, чисельність популяції буде коливатися між 8 значеннями, потім 16, 32 тощо. Довжина інтервалу зміни параметра, при якому спостерігаються коливання між однаковою кількістю значень, зменшується в міру збільшення r . Відношення між двома довжинами сусідніх інтервалів зміни параметра r прямує до *константи Фейгенбаума*. *Константа Фейгенбаума δ , відкрита в 1975 році універсальна стала, характеризує нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду при переході до детермінованого хаосу. Вона дорівнює*

$$\frac{r_{cn} - r_{cn-1}}{r_{cn+1} - r_{cn}} = \delta,$$

$$\delta \approx 4,669\ 201\ 609\ 102\ 990\ 671\ 853\ 203\ 820\ 466 \dots$$

Фейгенбаум також показав, що кожна хаотична система, яка має таку поведінку, буде біфуркувати з тією самою швидкістю (константою Фейгенбаума);

- при значенні r приблизно рівному 3,57 каскад подвоєнь закінчується і починається хаотична поведінка. Коливання більше не спостерігаються. Невеликі зміни в початкових умовах приводять до несумісних відмінностей подальшої поведінки системи в часі, що є основною характеристикою хаотичної поведінки. Такий «жаос» називається детермінованим, оскільки існує чіткий закон, за яким можна визначити значення змінної на будь-якій ітерації, починаючи від вибраного початкового значення, однак в її поведінці немає періодичності. Якщо в області стійкості й граничних циклів поведінка відображень слабо залежить від початкової точки, то в

області хаосу мала зміна початкового значення призводить до значної зміни значення на n -тій ітерації;

- для значень параметра r , що перевищують 3,57 характерна хаотична поведінка, однак існують вузькі, ізольовані “вікна” значень r , при яких система поводить себе регулярно. Зазвичай їх називають “*вікнами періодичності*”. Наприклад, починаючи зі значення $1 + \sqrt{8}$ (приблизно 3,83), існує інтервал параметрів r , при якому спостерігаються коливання між *трьома значеннями*, а для великих значень r – між 6, потім 12 і т. д. Фактично, в системі можна знайти періодичні коливання довільного періоду, що задовольняють *порядку Шарковського*;

- при $r > 4$ значення відображення залишають інтервал $[0,1]$ і є розбіжними за будь-яких початкових умов.

Власне, ця поведінка зображена на біфуркаційній діаграмі (рис 3.14). По осі абсцис відкладені значення параметра r , а по осі ординат – значення x прийняті на як завгодно великих інтервалах часу.

Структура біфуркаційної діаграми самоподібна: якщо збільшити її певну область, наприклад, при значенні $r = 3,82$ в одному з трьох відгалужень, то можна побачити, що тонка структура цієї області має вигляд перекрученої і розмитої версії всієї діаграми (рис 3.14). Таке ж саме явище характерне й для будь-якого околу нехаотичних точок. Власне, це один з яскравих прикладів глибокого зв’язку між хаотичними системами і фракталами.

Відзначимо, що для $r = 2$ точний аналітичний розв’язок (3.36) можна подати так

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x_0)^{2^n}.$$

Сценарій виникнення неперіодичного руху хаотичного атратора в результаті біфуркацій подвоєння періоду спочатку було досліджено для логістичного відображення. Пізніше було здобуто строгі результати, що дозволяють виявляти класи одновимірних відображень, для яких перехід до хаосу характеризується сценарієм Фейгенбаума, тобто певною універсальністю поведінки в нелінійних системах, яка призводить до самоподібних відтворюваних хаотичних режимів.

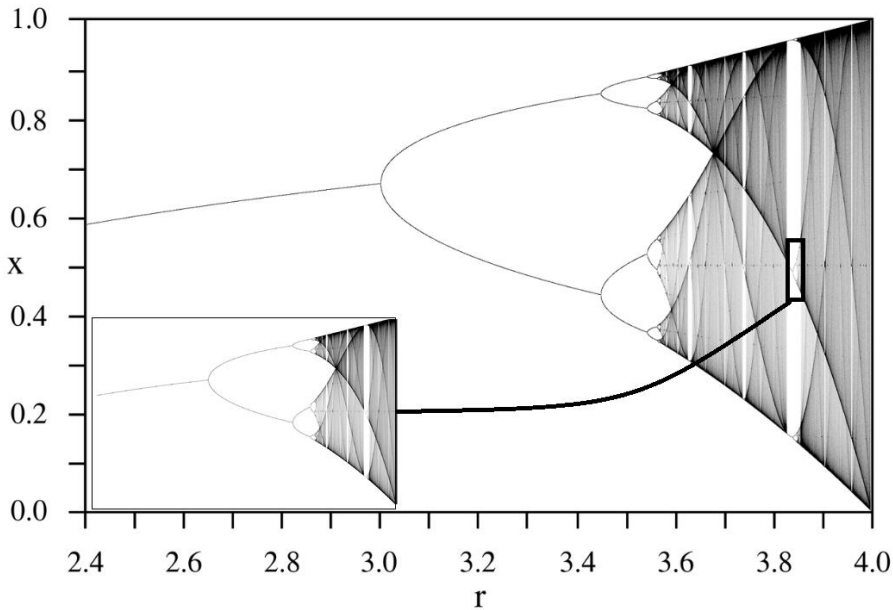


Рис. 3.14. Біфуркаційна діаграма логістичного відображення

Експериментальні дослідження та комп'ютерне моделювання багатьох нелінійних систем показали, що їм притаманна послідовність біфуркацій подвійного періоду, а значення біфуркаційних параметрів і амплітуди циклів характеризуються тими ж самими універсальними константами. При цьому досліджувані явища можуть описуватися багатовимірними відображеннями, автономними або неавтономними системами звичайних диференціальних рівнянь або рівняннями в частинних похідних. Отже, широкий клас нелінійних явищ не тільки демонструє подібну якісну поведінку, а й має універсальні кількісні характеристики.

3.7. Порядок Шарковського

Якщо стан системи характеризується однією змінною x , тобто розмірність фазового простору дорівнює одиниці, а оператор еволюції задається рекурентним співвідношенням

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (3.38)$$

де n – дискретний час, $f: J \rightarrow J$ – неперервне відображення замкненого інтервалу J дійсної числової прямої в себе, то таке співвідношення називають *одновимірним дискретним відображенням* [50].

Точку $p \in J$ називають невідродженою періодичною точкою з періодом k , якщо

$$f^{(k)}(p) = p,$$

де $f^{(k)}(p) = f \circ f \circ \dots \circ f(x)$ – k -та ітерація. І хоча вираз (3.38) на перший погляд здається надто простим, такі відображення доволі корисні під час аналізу складних систем.

Розглянемо кілька типових ситуацій, коли доводиться використовувати дискретні відображення як математичні моделі динамічних процесів. Власне, числові значення багатьох економічних змінних (ВВП, індекси цін, обсяги зовнішньої торгівлі тощо) вдається знайти, як правило, у певні дискретні моменти часу $n = 1, 2, 3, \dots$. У такому разі природно вважати змінну $x(n)$, або, як її часто позначають, x_n – дискретною.

Розглянемо, наприклад, модифіковану модель Мальтуса, яка описує динаміку чисельності популяції

$$N_{k+1} = k(N_k)N_k,$$

де $k(N_k)$ – коефіцієнт пропорційності. Якщо $k(N_k) = a - bN$, то дістанемо дискретну модель

$$N_{k+1} = aN_k - bN_k^2.$$

Ще одним прикладом дискретних відображень є відображення, що виникають у процесі розробки чисельних методів розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь. Зокрема, розв'язуючи рівняння вигляду

$$x = F(x),$$

де F – оператор стиску, будують послідовність $\{x_n\}$, яка збігається до розв'язку \tilde{x} . Це можна зробити методом простої ітерації, згідно з яким

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Нехай ми спостерігаємо перебіг деякого складного процесу $x(t)$. Позначимо його локальні максимуми через M_k . На площині $\{M_k, M_{k+1}\}$

відкладатимемо точки з координатами (M_k, M_{k+1}) , тобто перша точка буде (M_1, M_2) , друга (M_2, M_3) і т. д. Як з'ясувалося, для багатьох процесів точки (M_k, M_{k+1}) з високою точністю належать однозначним неперервним кривим $M_{k+1} = f(M_k)$. Існування такої функції f дає змогу в деяких випадках будувати прості моделі, за допомогою яких за попередніми локальними максимумами вдається знаходити наступні, прогножуючи характер та поведінку досліджуваного процесу.

Для одновимірних неперервних відображень здобуто кілька цікавих результатів. Передусім це теорема Шарковського та її частинний випадок, який дослідили американські математики Лі та Йорке. Так, згідно з результатами Лі та Йорке, якщо відображення (3.38) має цикл періоду 3, то воно має нескінченну множину циклів решти періодів і, як наслідок, нескінченну множину хаотичних траєкторій. Єдина вимога, що накладається на функцію $f(x)$, – неперервність. Це свідчить про те, що навіть прості системи можуть демонструвати хаотичну поведінку.

Цей результат є частковим випадком теореми Шарковського. Власне, досліджуючи унімодальне відображення (неперервне відображення інтервалу в себе, зокрема, квадратичне відображення), Олександр Миколайович Шарковський в 1964 році виявив, що в області «жаосу» на відповідній біфуркаційній діаграмі є так звані «вікна періодичності» – вузькі інтервали значень параметра r , в яких існують періодичні рухи; їм і відповідають переходи в порядку Шарковського. Зокрема, рухаючись в нижньому рядку проти напрямку стрілок від 1, ми проходимо каскад подвоєнь періодів Фейгенбаума.

Порядок Шарковського – впорядкування натуральних чисел, пов'язане з дослідженням періодичних точок динамічних систем на відрізьку або на числовій прямій.

Для цілих додатних чисел a та b ми будемо записувати $a \rightarrow b$ у тому випадку, якщо з того, що динамічна система на відрізьку або прямій, має точку найменшого періоду a випливає, що вона має точку найменшого періоду b .

Теорема 3.1 (Шарковського) *Якщо неперервне відображення одновимірного інтервалу в себе має цикл періоду t , то воно має також і цикли всіх періодів t' , які передують числу t у переліку всіх цілих чисел, виписаних в порядку Шарковського:*

$$\begin{aligned} & \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 13 \rightarrow \dots \\ \rightarrow & 3 \times 2 \rightarrow 5 \times 2 \rightarrow 7 \times 2 \rightarrow 9 \times 2 \rightarrow 11 \times 2 \rightarrow 13 \times 2 \rightarrow \dots \\ \rightarrow & 3 \times 2^2 \rightarrow 5 \times 2^2 \rightarrow 7 \times 2^2 \rightarrow 9 \times 2^2 \rightarrow 11 \times 2^2 \rightarrow 13 \times 2^2 \\ & \rightarrow \dots \\ \rightarrow & 2^n \rightarrow 2^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow 2^5 \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Власне, теорема Шарковського стверджує, що задається повний порядок на множині натуральних чисел, влаштований так:

- у верхньому рядку вписані в порядку зростання всі непарні числа, крім 1;
- у другому рядку — добутки непарних чисел (крім 1) на 2;
- у третьому — добутки непарних чисел на 2^2 ;
- в k -му рядку зверху — добутки непарних чисел на 2^{k-1} ;
-
- врешті, в останньому (нижньому) рядку представлені чисті степені двійки.

Зокрема, число 3 – найбільше в сенсі даного порядку, тому наявність точки періоду 3 гарантує наявність точки будь-якого натурального періоду.

Випадок періодичної точки періоду 3 – найбільш змістовний. Часто цей частинний випадок скорочено формулюють як *«період 3 спричиняє хаос»*. Саме цей результат дав початок новому науковому напрямку – комбінаторній динаміці.

Зазначимо, що в хаотичній динаміці найменше число – 3, найбільше – існує і рівне... 1. Решта чисел розташовані між ними згідно порядку Шарковського.

Варто відзначити, що, в разі наявності точки періоду 3, можна стверджувати про *«хаотичність»* системи і в інших сенсах, оскільки, її ентропія буде позитивною.

3.8. Дослідження хаотичних режимів

Перейдемо до детального дослідження усталених розв’язків системи рівнянь (3.11). Ця система є повністю детермінованою нелінійною системою диференціальних рівнянь з тривимірним фазовим простором. Тому існує теоретична можливість виникнення в системі (3.11) хаотичних

атракторів [1, 2, 4–6]. Вивчимо вплив параметрів цієї системи на виникнення, розвиток і зникнення в ній детермінованого хаосу [51].

При цьому при доведенні існування хаотичних режимів у системи (3.11) застосуємо комплексний підхід. Він ґрунтується на тому, що для підтвердження факту хаотичності (регулярності) того або іншого атратора системи ми детально вивчимо низку кількісних і якісних характеристик атратора, а не обмежимося однією, двома характеристиками.

Власне, будемо детально аналізувати такі характеристики атракторів системи (3.11) як фазові портрети, перерізи й відображення Пуанкаре, розподіли природної інваріантної міри й спектральної густини та спектри ляпуновських характеристичних показників. Оскільки дана система є нелінійною, то для побудови її розв'язків використовуватимуться чисельні методи.

Зупинимося на методології застосування різних чисельних методів та алгоритмів для побудови різноманітних характеристик системи (3.11):

- для побудови фазових портретів системи використовується метод Рунге–Кутти [27, 49] четвертого або п'ятого порядку зі змінним кроком чисельного інтегрування, причому для розрахунків довжини змінного кроку використовується коригувальна процедура Дормана–Принса. Такий метод дозволяє забезпечити досить високу точність обчислень. Зокрема, локальна похибка цього методу досягає величин порядку $O(10^{-12})$ – $O(10^{-15})$;

- для побудови перерізів і відображень Пуанкаре використовується метод Ено [5];

- розрахунки спектра ляпуновських характеристичних показників проводяться за допомогою алгоритму Бенеттіна й ін. [5];

- при побудові розподілів спектральної густини (Фур'є – спектрів) використовуються методи Сімпсона та Файлона [27];

- при одержанні розподілів природних інваріантних мір застосовується комп'ютерна техніка кодування відтінками чорного кольору.

При проведенні чисельних розрахунків припускаємо, що параметри системи рівні $C = -0,1$, $D = -0,5$, а вихідні початкові умови мають вигляд

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$$

Відзначимо, що з метою виключення впливу нетипових фазових траєкторій при розрахунках проводилася варіація вихідних початкових умов у деякому околі нуля, хоча детальна побудова басейнів притягання атракторів системи при цьому не проводилася. Параметри E, F розглядалися як біфуркаційні й були змінними при розрахунках.

Спочатку припустимо, що $E = -0,61$, а F змінюється на сегменті $-0,31 \leq F \leq 0,28$ [51]. На рис. 3.15 а)–б) представлено залежності старшого, відмінного від нуля, ляпуновського характеристичного показника системи (3.11) від значень параметра F . Як відомо, наявність у спектрі ляпуновських характеристичних показників додатного показника є основним практичним критерієм існування в системі хаотичного атратора. Як видно з рис. 3.15 а)–б), існує кілька інтервалів зміни F , у яких система (3.11) має додатний ляпуновський показник. Отже, у цих інтервалах у даної системи існують хаотичні атратори.

Розглянемо детальніше якісні зміни типів усталених режимів коливаль. При $F = 0,28$ у системі (3.11) існує граничний цикл досить простої 1–тактової структури. При $F = 0,2576$ даний цикл втрачає стійкість і в системі відбувається перша біфуркація подвоєння періоду. У результаті цієї біфуркації виникає стійкий 2–тактний граничний цикл, період якого в два рази більший періоду попереднього циклу. Потім, при $F = 0,1912$ в системі відбувається друга біфуркація подвоєння періоду, в результаті якої втрачає стійкість 2–тактний граничний цикл і виникає стійкий 4–тактний граничний цикл, чий період у два рази більший періоду попереднього циклу.

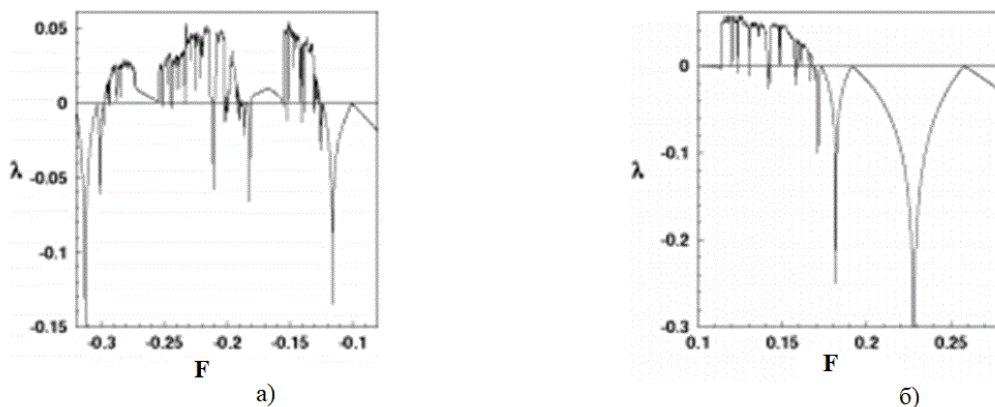


Рис. 3.15. Залежність старшого ляпуновського характеристичного показника від F (а)–(б)

Третя й четверта біфуркації подвоєння періоду відбуваються, відповідно, при $F = 0,173$ та $F = 0,1692$, у результаті чого виникають 8- та 16-тактні цикли. Цей нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду призводить до виникнення в системі хаотичного атратора при $F = 0,1674$. На рис. 3.16 показаний вихідний граничний цикл і три перші біфуркації подвоєння періоду, а на рис. 3.17 – четверта біфуркація подвоєння й хаотичний атрaktor. Отриманий хаотичний атрaktor має спіральну структуру.

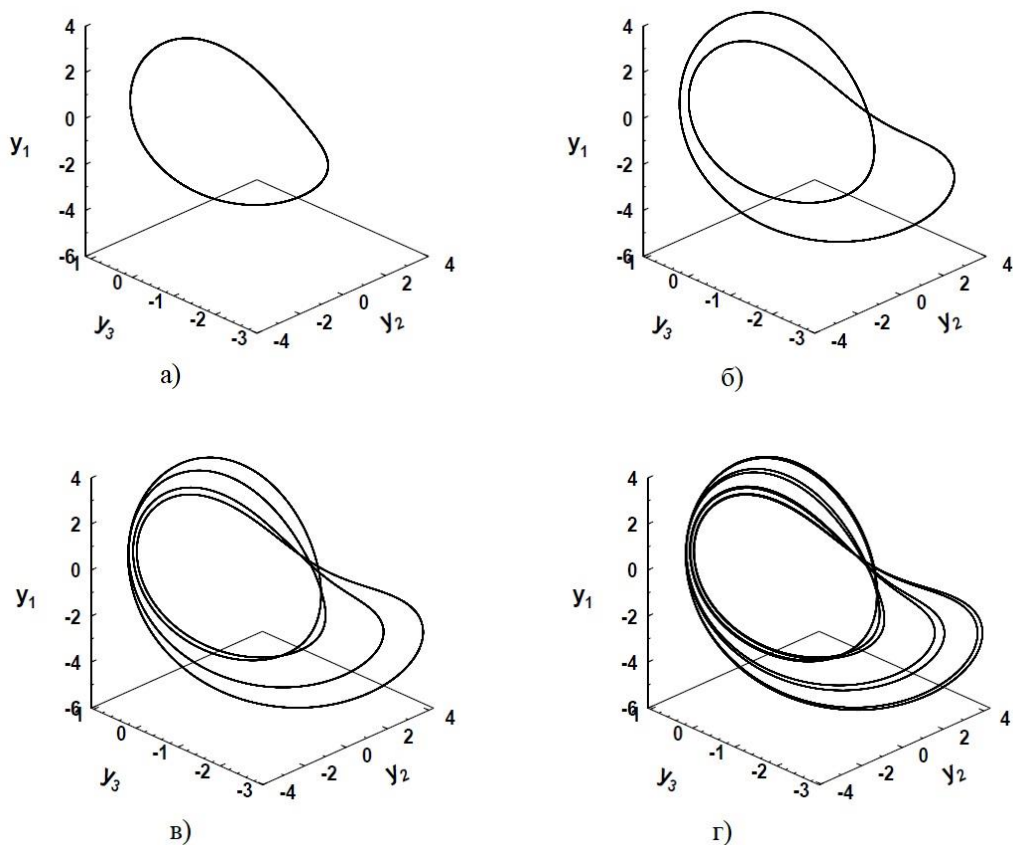


Рис. 3.16. Граничний цикл і перші три біфуркації подвоєння періоду при $F = 0,258$ (а), $F = 0,192$ (б), $F = 0,174$ (в) та $F = 0,171$ (г)

На наведених рисунках зображені подвоєння тактності граничних циклів. Зазначимо, що фазові портрети граничних циклів, відповідних більшим за порядковим номером біфуркаціям подвоєння і хаотичного атратора, зовні схожі один на одного. Однак між ними є цілий ряд

істотних відмінностей, одна з яких полягає в тому, що зображуюча точка траєкторії циклу завжди повертається в будь-який як завгодно малий окіл циклу через час строго рівний періоду циклу. Для хаотичного атрактора здатність зображуючої точки траєкторії повертатись в будь-який малий окіл атрактора завжди має місце в силу стійкості за Пуассоном, однак тривалість інтервалів часу такого повернення непередбачувана.

Моменти часу, в які відбуваються такі повернення, утворюють деяку хаотичну послідовність. У хаотичного атрактора зображуюча точка належної йому траєкторії здійснює хаотичні блукання вздовж нескінченного числа витків спіралі атрактора з непередбачуваними порушеннями порядку попадання в малий окіл того або іншого витка.

Зупинимось детальніше на аналізі перерізів Пуанкаре знайдених атракторів системи (3.11). На рис. 3.18 наведено побудовані за допомогою методу Ено перерізи Пуанкаре площиною $y_3 = 0$ перших трьох біфуркацій подвоєння граничного циклу й самого хаотичного атрактора.

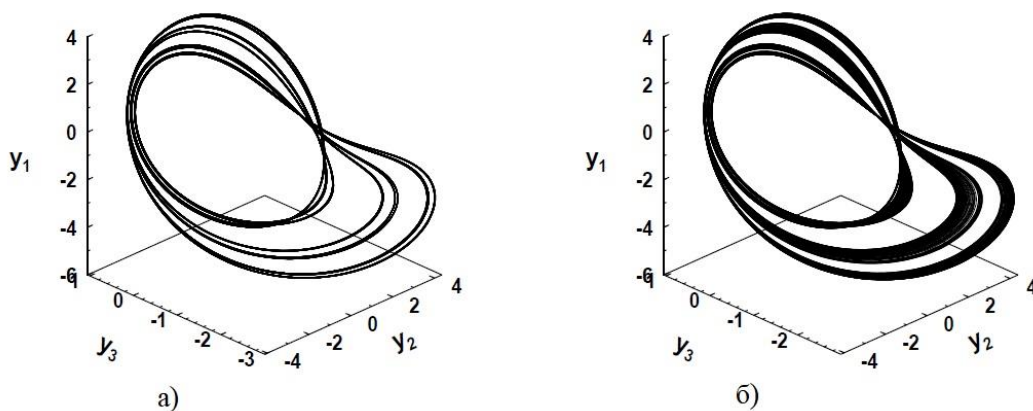


Рис. 3.17. Четверта біфуркація граничного циклу при $F = 0,169$ (а)
й хаотичний атрактор при $F = 0,1665$ (б)

Як видно з рис. 3.18, дані перерізи циклів складаються зі скінченного числа точок. Власне, з однієї точки (для 1 – тактного циклу), двох точок (для 2–тактного циклу) і чотирьох точок (для 4–тактного циклу). Ці точки повторюються через час строго рівний періоду відповідного циклу.

На відміну від регулярних атракторів, переріз Пуанкаре хаотичного атрактора (рис. 3.18. г) має більш складну структуру. Він є деякою хаотичною точковою множиною, число точок якої увесь час зростає зі зростан-

ням часу чисельного інтегрування. Ці точки, в силу теореми існування та єдиності, ніколи не збігаються одна з одною. Ця хаотична точкова множина локалізується вздовж декількох областей, близьких за формою до ліній. Такий вид перерізу Пуанкаре називають *“квазістрічковим”* [51].

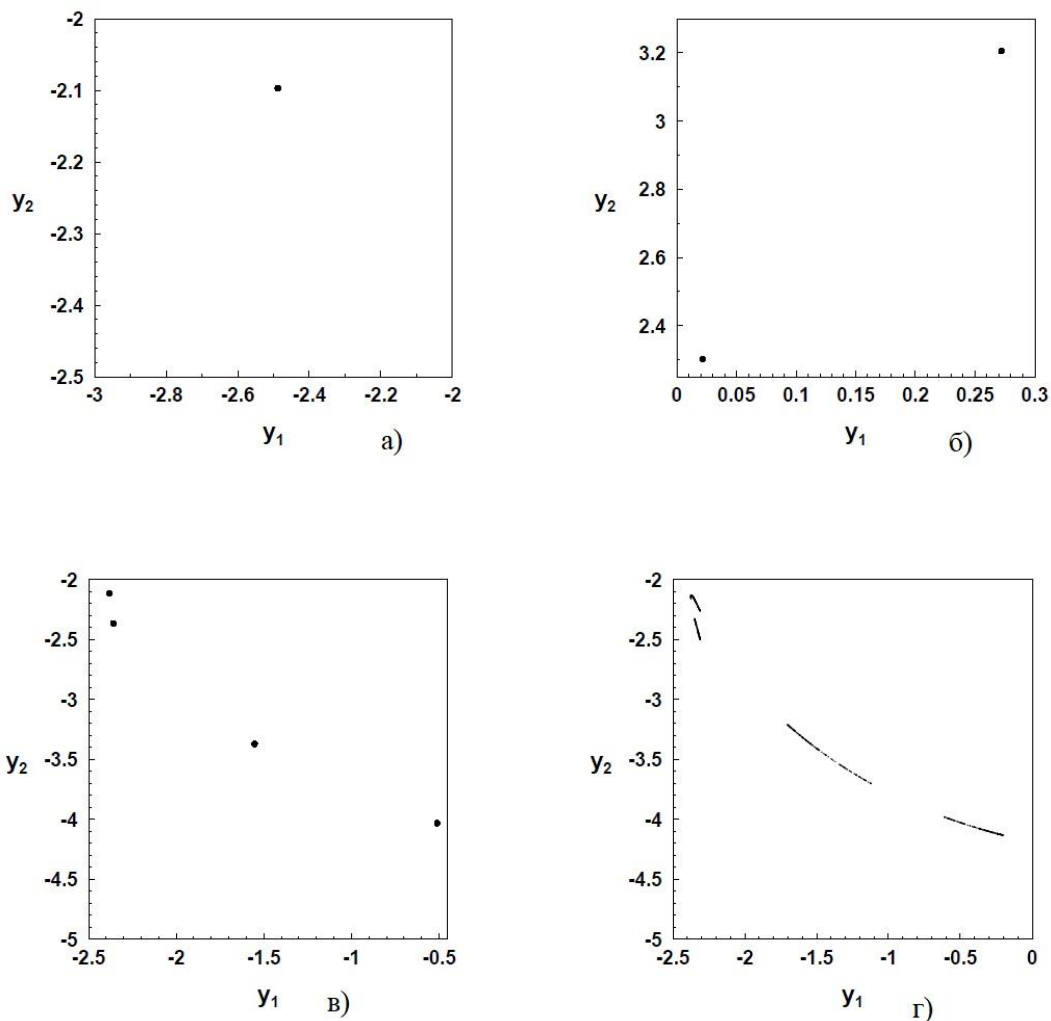


Рис. 3.18. Перерізи Пуанкаре площиною $u_3 = 0$ граничних циклів при $F = 0,258$ (а), $F = 0,192$ (б), $F = 0,171$ (в) і хаотичного атрактора при $F = 0,1665$ (г)

Відмітимо, що передбачити порядок розміщення точок вздовж *“стрічок”*, що утворюють переріз неможливо, однак наперед відомо, що розташовуватися вони можуть тільки уздовж цих стрічок. Таким чином, головна відмінність у перерізах Пуанкаре регулярних і хаотичних атрак-

торів полягає в тому, що вони *–скінченні й передбачувані*” для регулярних атракторів і *–нескінченні й непередбачувані*” для хаотичних атракторів.

Таким чином, при зменшенні параметра F перехід від регулярного режиму до хаотичного відбувається за сценарієм Фейгенбаума [51], тобто через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду граничних циклів. Доказом реалізації вищезгаданого сценарію послуговує також і рис. 3.15 б). Так, при розгляді правої частини рис. 3.15 б) добре видно точки підходу графіка до осі абсцис з від’ємної області значень λ . Ці точки підходу до осі абсцис i , відповідно, відповідають послідовним біфуркаціям подвоєння періоду. При побудові фрагменту відповідного інтервалу каскаду біфуркацій подвоєння в більшому масштабі вдається з високою точністю визначити чисельні значення точок біфуркацій і граничне значення параметра, при якому виникає хаотичний атрактор.

Для системи (3.11) притаманний ще один зі сценаріїв переходу до хаосу, а саме, через переміжність за Помо–Манневільлем. Розглянемо такий перехід до хаосу більш детально. Уважне вивчення рис. 3.15 б) дозволяє виявити ще одну цікаву закономірність у поведінці системи (3.11) в інтервалі зміни параметра $F \in (0,114, 0,167)$, в якому у неї існують хаотичні атрактори.

З цією метою на рис. 3.19 а) наведений збільшений фрагмент рис. 3.15 б). На рисунку добре видні дуже вузькі інтервали, на яких спостерігаються провали графіка залежності ляпуновського характеристичного показника в область від’ємних значень. Ці провали відповідають інтервалам зміни F , в яких хаотичний атрактор зникає, і в системі (3.11) виникає регулярний усталений режим у вигляді стійкого граничного циклу. Такі невеликі інтервали періодичних режимів в хаотичних областях зміни параметра, власне, є *вікнами періодичності*.

На рис. 3.19 б) наведений фазовий портрет такого циклу з вікна періодичності при $F = 0,1425$. Цікаво, що побудований цикл є 5–тактним. Відповідно, його переріз Пуанкаре складається з п’яти точок. Цикли з такою тактністю ще не зустрічалися при вивченні системи (3.11). При *–виході*” із цього вікна періодичності через його праву границю, тобто при збільшенні F виникає хаотичний атрактор.

На рис. 3.19 в) наведений розподіл природної інваріантної міри по фазовому портрету хаотичного атрактора, який побудований при $F = 0,14275$. Цей розподіл характеризує ймовірність знаходження зобра-

жуючої точки траєкторії хаотичного атрактора в заданій області фазового простору.

Побудований на рис. 3.19 в) розподіл інваріантної міри прояснює механізм переходу від граничного цикла до хаотичного атрактора. Коли ми наближаємося зліва до точки біфуркації, яка відбувається при $F \approx 0,1427$, до стійкого граничного циклу, зображеного на рис. 3.19 б), то починає формуватися нестійкий атрактор. У точці біфуркації стійкий режим та атрактор зливаються й зникають.

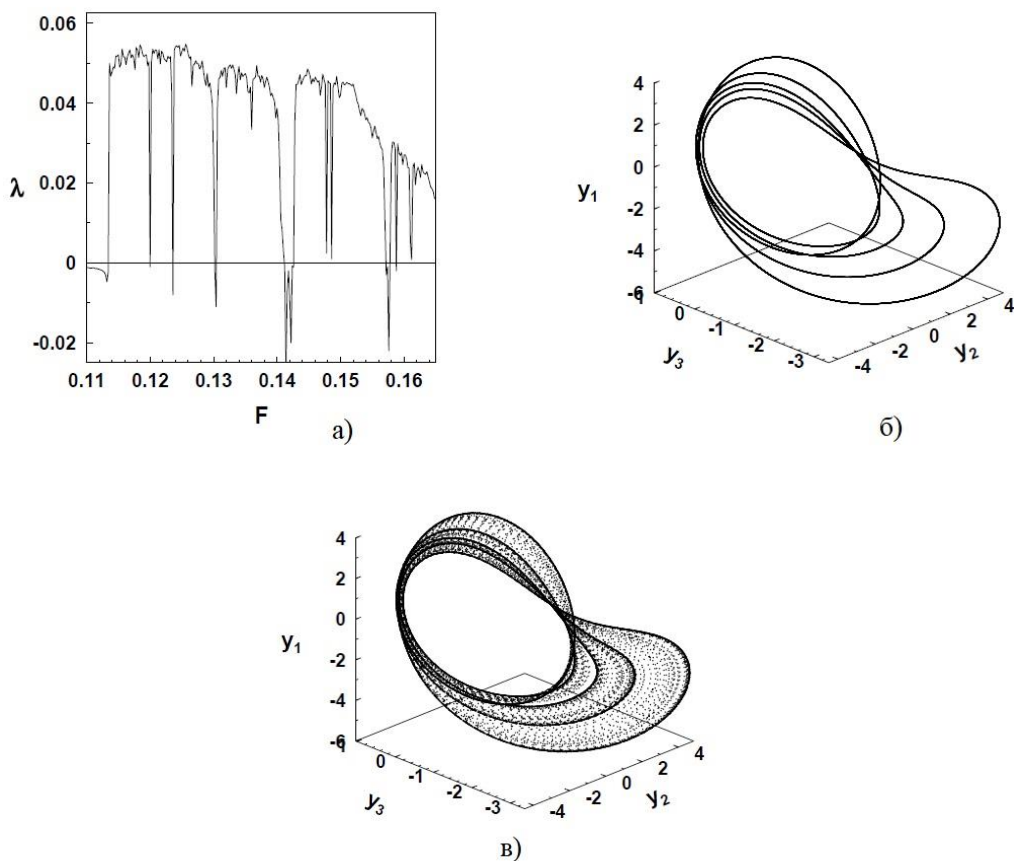


Рис. 3.19. Збільшений фрагмент залежності ляпуновського характеристичного показника (а); граничний цикл у вікні періодичності в хаосі при $F = 0,1425$ (б); розподіл природної інваріантної міри по фазовому портрету хаотичного атрактора при $F = 0,14275$ (в)

При подальшому, як завгодно малому, збільшенні F , відбувається дотична біфуркація. У системи (3.11) взагалі не залишається стійких ustalених режимів у цій частині фазового простору. Тому близькі траєкторії

починають розбігатися й залишати область, в якій перебував стійкий граничний цикл. В цій області взагалі не існує ніяких інших атракторів системи. Але, оскільки нелінійна система (3.11) є стійкою за Лагранжем та Пуассоном і не має стійких граничних множин, в околі зниклого граничного циклу відбувається процес реінжекції траєкторій, в результаті якого вони знову повертаються в область зниклого циклу.

Цей процес, нескінченно повторюючись, призводить до утворення складної, нестійкої за Ляпуновим (але стійкої за Лагранжем та за Пуассоном) граничної множини – хаотичного атрактора типу наведеного на рис. 3.19 в). Рух траєкторій даного хаотичного атрактора можна розбити на дві стадії (фази):

- *ламінарну*, якій відповідають близькі до періодичних рухи траєкторій у малому околі зниклого граничного циклу;
- *турбулентну*, якій відповідають відходи траєкторій у більш далекі області фазового простору.

Таким чином, рух траєкторій на описаному атракторі складається із двох *“переміжних”* фаз. Причому моменти часу переходу від ламінарної фази до турбулентної непередбачені. Вони утворюють хаотичну часову послідовність. Такий перехід від регулярного режиму до хаотичного Помо й Манневільль назвали *переміжністю першого типу*.

Як добре видно з рис. 3.19 в), більш темні його ділянки майже повторюють контури граничного циклу з рис. 3.19 б). Такі, більш темні, ділянки з рис. 3.19 в) відповідають ламінарним фазам руху траєкторій по атрактору. Більш світлі ділянки відповідають турбулентним сплескам траєкторій, які тут відбуваються в середині області локалізації атрактора в фазовому просторі.

Рисунок 3.19 в) свідчить й про те, що тривалість ламінарних фаз перевищує тривалість турбулентних, що загалом добре узгоджується з відомими теоретичними судженнями хаотичної динаміки.

3.9. Карта динамічних режимів

Досить повне й наочне уявлення про поведінку динамічної системи надає карта динамічних режимів – діаграма на площині, де по осях координат відкладено два параметри й показані границі областей різних дина-

мічних режимів. Оскільки в системі (3.11) число параметрів більше двох, то детальна карта динамічних режимів складається з багатьох листів [51].

Зупинимося на методиці побудови карти динамічних режимів. Площина будь-яких обраних параметрів системи розбивається, за допомогою вертикально – горизонтальної сітки, на близько віддалені одна від одної точки. У кожній сітковій точці чисельно інтегрується система рівнянь (3.11) і визначається старший ляпуновський характеристичний показник.

Основна діагностика усталеного режиму системи у деякій сітковій точці площини параметрів E , F проводиться за знаком старшого ляпуновського характеристичного показника:

- якщо старший ляпуновський показник додатний, то усталений режим системи є *хаотичним*;
- якщо відповідний показник від’ємний, то усталений режим є *положенням рівноваги*;
- якщо ж старший ляпуновський характеристичний показник у сітковій точці дорівнює нулю, то усталений режим системи може бути або *періодичним*, або *квазіперіодичним*.

Для уточнення типу усталеного режиму аналізується другий показник у спектрі ляпуновських характеристичних показників:

- якщо другий показник від’ємний, то усталений режим є *періодичним*;
- якщо цей показник нульовий, то усталений режим – *квазіперіодичний*.

Особливо ретельно необхідно аналізувати ситуації, при яких ляпуновські показники, за абсолютною величиною, співставні з похибкою методу чисельного інтегрування (це відповідає випадку, коли ми перебуваємо досить близько до границь областей динамічних режимів різних типів). В таких випадках для точної ідентифікації типу усталеного режиму додатково проводиться дослідження фазових портретів, перерізів і відображень Пуанкаре, а також Фур’є–спектрів. Після встановлення типу динамічного режиму в якій-небудь сітковій точці, пікселю екрана комп’ютера, відповідному до даної точки площини параметрів E , F , присвоюється відповідний код кольору. На екрані комп’ютера виходить деяка кольорова мозаїка, що дає наочне представлення про розташування динамічних режимів різних типів на площині параметрів системи (3.11).

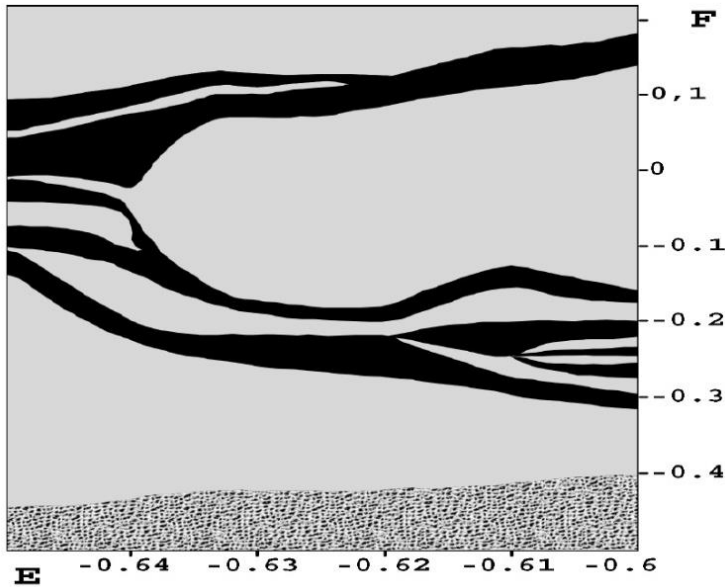


Рис. 3.20. Карта динамічних режимів

Проілюструємо один з листів даної карти, побудованої для параметрів E (крутизни статичної характеристики електродвигуна) і F , який крім параметрів статичної характеристики двигуна також залежить від довжини маятника й кривошипа. Фактично одержана двопараметрична карта динамічних режимів є мультипараметричною. Вона може бути перетворена в карти, що показують залежність динамічних режимів системи (3.11) від змін E (крутизни статичної характеристики електродвигуна) і, відповідно, a (довжини кривошипа), l (приведеної довжини маятника), ω_0 (власної частоти маятника).

При проведенні обчислень стосовно побудови карти динамічних режимів покладалося, що $C = -0,1$, $D = -0,5$. На рис. 3.20 наведено отриманий в результаті аналізу й обробки результатів чисельних розрахунків один з листів карти динамічних режимів системи «маятник-електродвигун». Сірі області карти відповідають періодичним динамічним режимам, чорні – хаотичним, а зернисті – положенням рівноваги системи.

Як видно з рис. 3.20, хаотичні режими на карті представляються у вигляді деякої «ріки», численні рукави якої «протікають» через області періодичних режимів. Положення рівноваги системи (3.11) спостерігаються в області, яка розташована ближче до нижнього краю карти.

Зупинимося ще на одній важливій характеристиці раніш досліджених хаотичних атракторів – фрактальній розмірності. Як відомо, всі хаотичні атрактори є фрактальними множинами й мають дробову розмірність Хаусдорфа–Безіковича (фрактальну розмірність). На відміну від хаотичних атракторів, розмірність Хаусдорфа–Безіковича для регулярних атракторів є цілою.

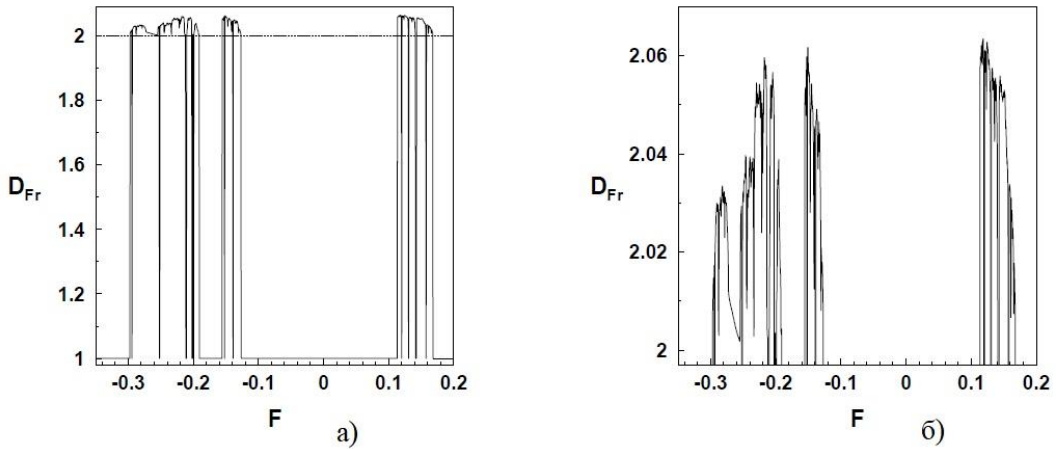


Рис. 3.21. Фрактальна розмірність атракторів

В загальному випадку багатовимірної динамічної системи дуже важко обчислити фрактальну розмірність нерегулярного атрактора. Але, оскільки ми розглядаємо динамічну систему, розмірність фазового простору якої дорівнює трьом, то для систем з такою розмірністю фазового простору фрактальна розмірність може бути знайдена за формулою Каплана–Йорка, яка у нашому випадку набуває вигляду

$$D_{Fr} = 2 + \frac{\lambda_1}{|2C + E - \lambda_1|},$$

де D_{Fr} – фрактальна розмірність а λ_1 – старший ляпуновський показник.

На рис. 3.21 а) наведена залежність фрактальної розмірності системи від значень параметра F . Відповідно, на рис. 3.21 б) наведений збільшений фрагмент рис. 3.21 а). Побудований графік також може використовуватися для ідентифікації типу усталеного режиму системи (3.11). Як видно з наведеного рисунка, в розглянутому інтервалі зміни F у системи існують два типи атракторів:

- *граничні цикли*, яким відповідають ті значення F , для яких фрактальна розмірність дорівнює 1;

- *хаотичні атрактори*, що відповідають тим значенням F , для яких фрактальна розмірність більша за 2.

Області хаосу добре визначаються з рис. 3.21 а), де для зручності ідентифікації проведена пунктирна лінія $D_{Fr} = 2$. Уважне вивчення рис. 3.21 б) показує, що хаотичні атрактори, які існують при додатних значеннях F , мають в середньому більше значення фрактальної розмірності. Крім деякого ускладнення геометричної структури атрактора, це означає й більшу швидкість розбігання близьких фазових траєкторій.

Підсумовуючи, ще раз підкреслимо, що можливість виникнення дивних атракторів у системі «маятник-електродвигун» пов'язана винятково із взаємодією між її підсистемами – «маятником» та «електродвигуном», а не з автономними властивостями цих підсистем. Застосування методів редукції призводить до того, що система диференціальних рівнянь, за допомогою якої моделюється динаміка системи «маятник-електродвигун», розщеплюється на дві підсистеми. А саме, «маятникову», яка має двовимірний фазовий простір і «двигунову» з одновимірним фазовим простором. Ці розщеплені системи досліджуються незалежно одна від одної. Очевидно, що в таких підсистемах неможливе існування хаотичних атракторів, тому що мінімальна розмірність фазового простору, при якій можливе існування детермінованого хаосу, дорівнює трьом [5, 50]. Тому застосування редукційних підходів приводить до повної втрати інформації про реально хаотичні атрактори.

3.10. Сферичний маятник

Сферичний маятник є найпростішим прикладом осцилятора з двома ступенями свободи, що має рівні частоти.

Багато явищ, характерних для сферичного маятника, проявляються в динаміці систем с розподіленими параметрами, що мають періодичну координату: кілець, циліндричних і сферичних оболонок, круглих пластин, середовищ в циліндричних і сферичних порожнинах. Тому знання властивостей коливальних процесів сферичного маятника дає розуміння коливальних ефектів у ряді вищезгаданих систем.

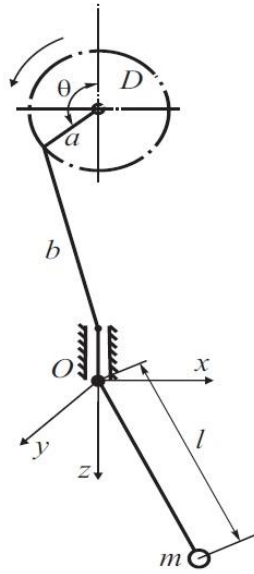


Рис. 3.22. *Схема системи*

Розглянемо систему, схема якої представлена на рис. 3.22. Кривошипношатунний механізм з'єднує ротор електродвигуна із точкою підвісу фізичного маятника, який, на відміну від описаного вище, може виконувати просторові коливання. Такий маятник називається *сферичним*.

Введемо декартову систему координат $Oxyz$ як показано на рис. 3.22. Позначимо через a, b довжину кривошипа й шатуна, відповідно. Припустимо, що $b \gg a$. Коли кривошип a повертається на кут Θ , повзун з підвісом одержує переміщення уздовж вертикальної осі нерухливої системи координат, що можна записати таким чином

$$v(t) = -a \cos \Theta .$$

У нерухливій декартовій системі координат $Oxyz$ кінетична енергія системи «маятник–електродвигун» записується у формі [51]

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{v} + \dot{z})^2], \quad (3.38)$$

а потенціальна

$$V = mg(l - z - v), \quad (3.38')$$

де x, y, z – декартові координати центру мас маятника, I – момент інерції ротора електродвигуна, m – маса маятника, l – приведена довжина маятника.

Масою повзуна й підвісу можна знехтувати. Введемо нові змінні α і β за формулами

$$x = l \sin \alpha, y = l \sin \beta.$$

Оскільки в системі координат $Oxyz$ для маятника завжди виконується співвідношення

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

то

$$z = l\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

Для малих α і β лагранжیان $T-V$ системи, яка досліджується, представимо у вигляді

$$T - V = \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2 \left[\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 2\alpha\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta})\dot{\Theta} \frac{a}{l} \sin\Theta + \dot{\Theta}^2 \frac{a^3}{l^2} \sin^2\Theta \right] - gml \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^4}{24} + \frac{\alpha^2\beta^2}{4} + \frac{a}{l} \cos\Theta \right). \quad (3.39)$$

Тому для основних змінних $\Theta(t)$, $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ рівняння Лагранжа (рівняння руху) запишуться в такій формі [51]

$$\begin{aligned} I\ddot{\Theta} &= L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) \\ &- mla \left[\ddot{\Theta} \frac{a}{l} \sin^2\Theta + \dot{\Theta}^2 \frac{a}{l} \sin\Theta \cos\Theta + \frac{g}{l} \sin\Theta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \sin\Theta - (\alpha\ddot{\alpha} + \beta\ddot{\beta}) \sin\Theta \right]; \\ \ddot{\alpha} + w_0^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha\beta^2}{2} \right) + \delta_1\dot{\alpha} + \alpha(\beta^2 + \beta\dot{\beta}) - \\ &- \frac{a}{l} \alpha (\dot{\Theta}^2 \cos\Theta + \ddot{\Theta} \sin\Theta) = 0; \\ \ddot{\beta} + w_0^2 \left(\beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\alpha^2\beta}{2} \right) + \delta_1\dot{\beta} + \beta(\alpha^2 + \alpha\dot{\alpha}) - \frac{a}{l} \beta (\dot{\Theta}^2 \cos\Theta + \ddot{\Theta} \sin\Theta) &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Тут $L(\dot{\Theta})$ – рушійний момент електродвигуна, $H(\dot{\Theta})$ – внутрішній момент сил опору обертанню ротора електродвигуна, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – власна частота маятника, δ_1 – коефіцієнт демпфування сили опору середовища, в якому рухається маятник.

Отримана система диференціальних рівнянь описує складний процес взаємодії обертання вала двигуна і просторових коливань маятника. Вона є суттєво нелінійною й не допускає точного аналітичного розв'язку.

Для спрощення системи рівнянь (3.40) введемо малий параметр $\varepsilon = \frac{a}{l}$, вважаючи $a \ll l$. Крім того, припустимо, що реалізуються умови основного параметричного резонансу, при якому швидкість обертання вала двигуна $\dot{\Theta}$ власної частоти маятника $2\omega_0$ рівна

$$\dot{\Theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon\omega_0\nu(t). \quad (3.41)$$

Для дослідження резонансних коливань маятника виконаємо в рівняннях (3.40) заміну змінних за формулами

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{3}} \left[y_1(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} \right]; \\ \beta(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[y_4(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

За допомогою даної заміни ми перейдемо у рівняннях (3.40) до нових змінних $y_1(\tau)$, $y_2(\tau)$, $y_4(\tau)$, $y_5(\tau)$ і повільного часу τ , який дорівнює

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4} \Theta(t).$$

Підставимо вирази (3.42) у рівняння (3.40) і проведемо процедуру усереднення за швидким часом $\Theta(t)$. При цьому врахуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}{2} \frac{d\Theta(t)}{dt} \left[-y_1(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} \right]; \\ \frac{d\beta(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{d\Theta(t)}{dt} \left[-y_4(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Після проведення процедури усереднення за швидким часом одержимо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_2 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_4 + 2y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_1 - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_5 + 2y_1; \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= D(y_1y_2 + y_4y_5) + Ey_3 + F; \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_5 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_1 + 2y_5; \\ \frac{dy_5}{d\tau} &= Cy_5 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_4 + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4.\end{aligned}\tag{3.44}$$

При виведенні системи рівнянь (3.44) використовувалася лінійна апроксимація статичної характеристики двигуна, а саме те, що співвідношення

$$\varepsilon \frac{\omega_0}{2} (N_0 - E\dot{\theta})\tag{3.45}$$

є лінійним наближенням виразу $\frac{L(\dot{\theta}) - H(\dot{\theta})}{I + \frac{1}{2}ma^2}$ при розкладі останнього в ряд за малим параметром ε . Тому

$$F = \left(\frac{N_0}{\omega_0} - 2E\right)\frac{l}{a}, \quad D = -\frac{2ml^2}{I + \frac{1}{2}ma^2}, \quad C = -\frac{\delta_1}{\omega_0}.$$

Крім того, у системі (3.44) введено позначення $y_3 = v$.

Отримана система диференціальних рівнянь п'ятого порядку (3.44) використовується як математична модель детермінованої коливальної динамічної системи *«сферичний маятник–електродвигун»*. Відмітимо, що більшість досліджень динаміки сферичного маятника проводилося й проводиться в припущенні, що джерело збудження коливань маятника ідеальне, тобто має необмежену потужність.

Такий підхід приводить до припущення про необмеженість потужності електродвигуна, що збуджує коливання маятника. Тобто має місце своєрідна реалізація концепції *«вічного двигуна»*. Зрозуміло, з метою подолання такого концептуального протиріччя, допускають, що потужність електродвигуна не необмежена, а настільки велика, що маятник виявляє малий вплив на обертання вала електродвигуна [51].

Покажемо до яких грубих помилок у визначенні усталених коливань маятника призводить така ідеалізація джерела збудження коливань. При ідеалізації джерела збудження система рівнянь (3.44) розщеплюється на дві підсистеми:

- *одна* підсистема складається з першого, другого, четвертого й п'ятого рівнянь системи (3.44);
- *друга* підсистема складається з одного третього рівняння системи (3.44).

Причому, оскільки впливом коливань маятника на обертання вала двигуна нехтують, то у цьому рівнянні вважають $D = 0$. Тоді третє рівняння (3.44) стає лінійним і для нього може бути знайдений загальний розв'язок (функція u_3), який потім підставляється в першу підсистему.

Надалі можна проводити дослідження розв'язків першої, –маятникової” підсистеми. Відмітимо, що при застосуванні ідеалізації джерела збудження не вдається виявити хаотичних усталених коливань маятника при вертикальному збудженні точки його підвісу.

Подальшою метою дослідження є вивчення можливих типів атракторів системи рівнянь (3.44). Так як дана система є досить складною нелінійною системою рівнянь, то для побудови її атракторів застосовується цілий комплекс чисельних методів і алгоритмів.

При проведенні чисельних розрахунків параметри системи (3.44) мають такі значення

$$C = -0,5, \quad D = -1, \quad F = 0,5. \quad (3.46)$$

Початкові умови варіюються в околі початку координат фазового простору системи рівнянь (3.44). Як біфуркаційний розглядається параметр E – кут нахилу статичної характеристики електродвигуна, що залежить від типу двигуна, який застосовується. Покажемо, що при таким чином обраних значеннях в просторі параметрів системи, знайдуться області, в яких у системи (3.44) існують хаотичні атрактори.

Дослідження ідентифікації типів атракторів системи (3.44) починаємо з розрахунків старшого ляпуновського характеристичного показника. Нагадаємо, що додатність такого показника є основним практичним критерієм хаотичної поведінки системи.

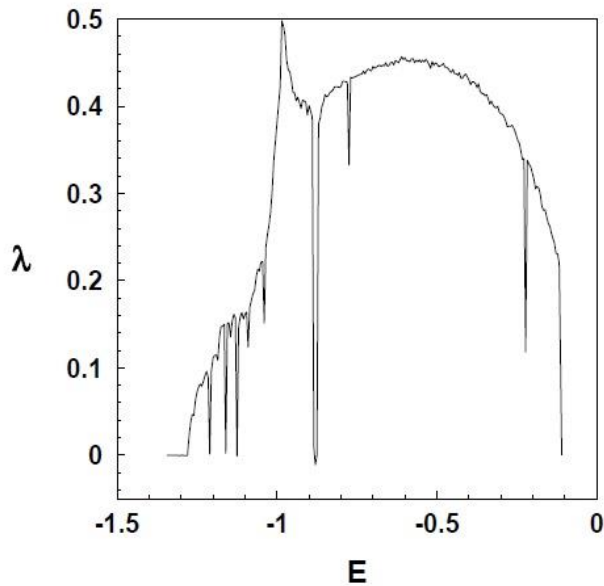


Рис. 3.23. Залежність старшого ляпуновського характеристичного показника від кута нахилу статичної характеристики

На рис. 3.23 наведена залежність старшого ляпуновського характеристичного показника λ від кута нахилу статичної характеристики E . Як видно з наведеного рисунка, практично для всіх $E \in (-1,27, -0,1)$ в системі існують хаотичні атрактори. На графіку також помітні провали значення старшого ляпуновського показника, які відповідають вузьким вікнам періодичності. Цих вікон більше в лівій частині графіка.

При значеннях $E \geq -1,75$ у системі (3.44) існує стійкий граничний цикл досить простої структури. При $E = -1,42$ такий цикл втрачає стійкість і в його околі виникає стійкий граничний цикл подвоєного періоду. Відбувається перша біфуркація подвоєння періоду циклу.

При подальшій зростанні значень E у системі триває каскад біфуркацій подвоєння. Проекції фазового портрету циклу й декількох біфуркацій подвоєння його періоду наведені на рис. 3.24 та рис. 3.25. Одна з наведених на рисунках проєкцій включає змінні y_1, y_2 , пропорційні маятниковій кутовій змінній α , і змінну y_3 , що характеризує обертання вала електродвигуна.

Друга з наведених на рисунках проєкцій включає по одній компоненті з маятникових змінних α, β та змінну y_3 . На рисунках добре помітне

подвоєння тактності граничних циклів з кожною наступною біфуркацією. Цей нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду циклу завершується народженням хаотичного атратора в критичній точці $E \approx -1,275$. Таким чином, перехід до хаосу відбувається у відповідності зі сценарієм Фейгенбаума.

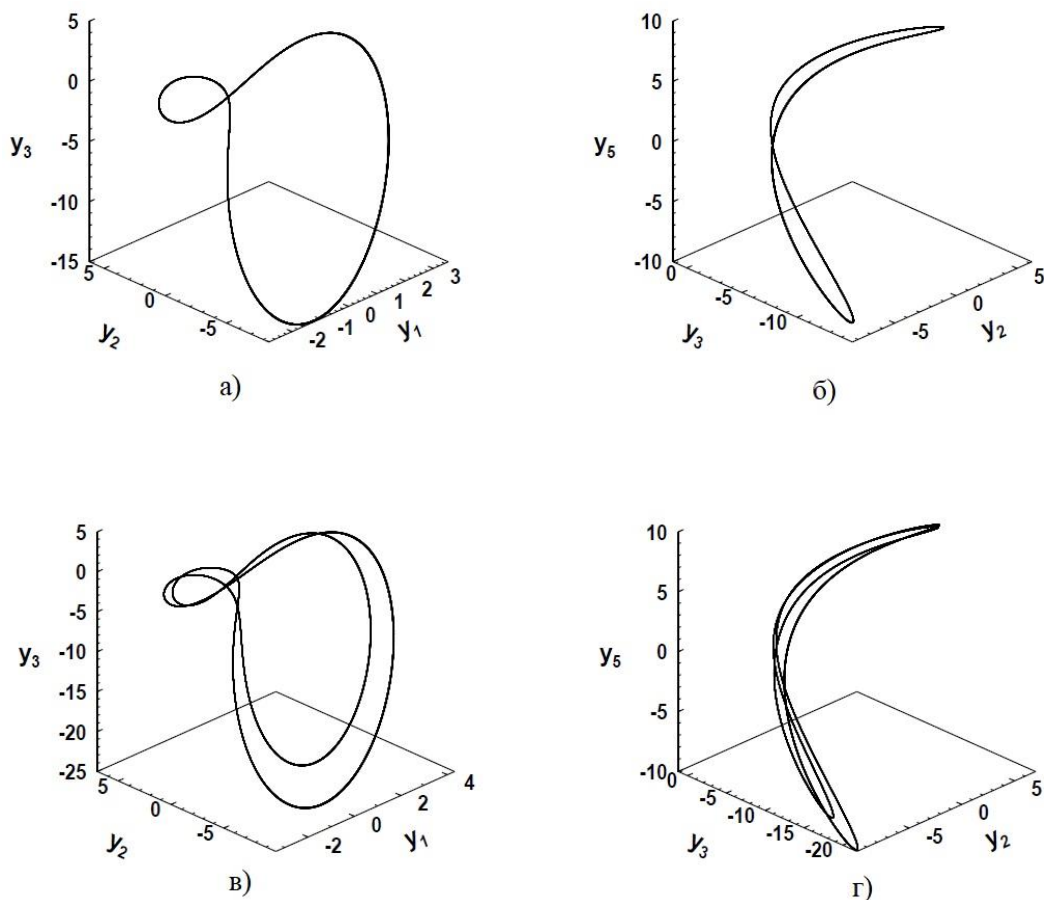
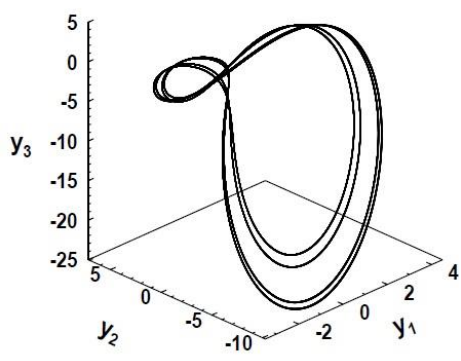
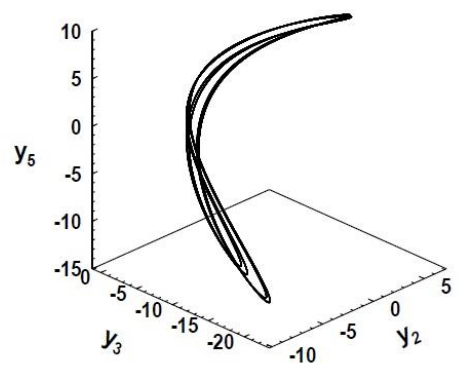


Рис. 3.24. Проекції фазового портрету граничного циклу при $E = -1,43$ (а), (б) і першої біфуркації подвоєння при $E = -1,31$ (в), (г)

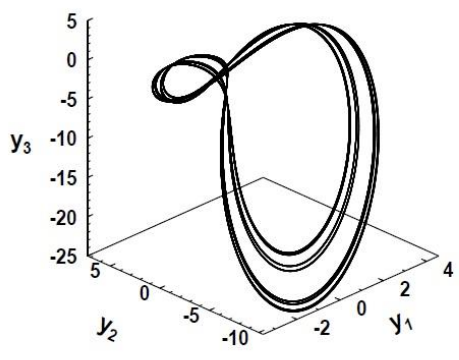
На рис. 3.26 а)–б) наведені проекції хаотичного атратора, який виник в результаті каскаду біфуркацій подвоєння. Цей атратор має спіральну структуру й нагадує хаотичні атратори, знайдені нами для плоского маятника.



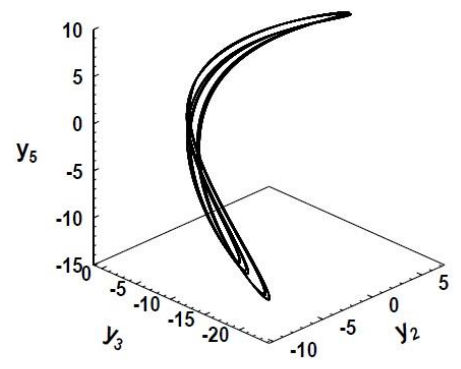
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.25. Проекції фазового портрету другої біфуркації подвоєння при $E = -1,29$ (а), (б) і третьої біфуркації подвоєння при $E = -1,28$ (в), (г)

Слід підкреслити, що такі хаотичні атрактори мають якусь, іноді досить значну, подібність фазового портрету до фазових портретів циклів великої тактності, при біфуркаціях яких народжуються такі хаотичні атрактори. Однак тут є одна принципова відмінність. Не дивлячись на як завгодно велику тактність граничних циклів, самі граничні цикли характеризуються регулярним поверненням траєкторії в будь-яку точку циклу через час, який строго рівний періоду циклу. У випадку ж хаотичного атрактора картина зовсім інша – траєкторія обов’язково нескінченне число раз повертається в кожний, як завгодно малий, окіл атрактора, але час таких повернень непередбачуваний. Моменти часу цих повернень утворюють деяку хаотичну послідовність.

На рис. 3.26 в)–г) наведені проєкції перерізу Пуанкаре площинною $y_3 = -15$ і відображення Пуанкаре за змінною y_2 . Як видно з рис. 3.26 в)–г), переріз Пуанкаре має квазістрічкову структуру. Число точок цього перерізу постійно росте зі зростанням часу чисельного інтегрування. Його точки утворюють деяку хаотичну множину точок.

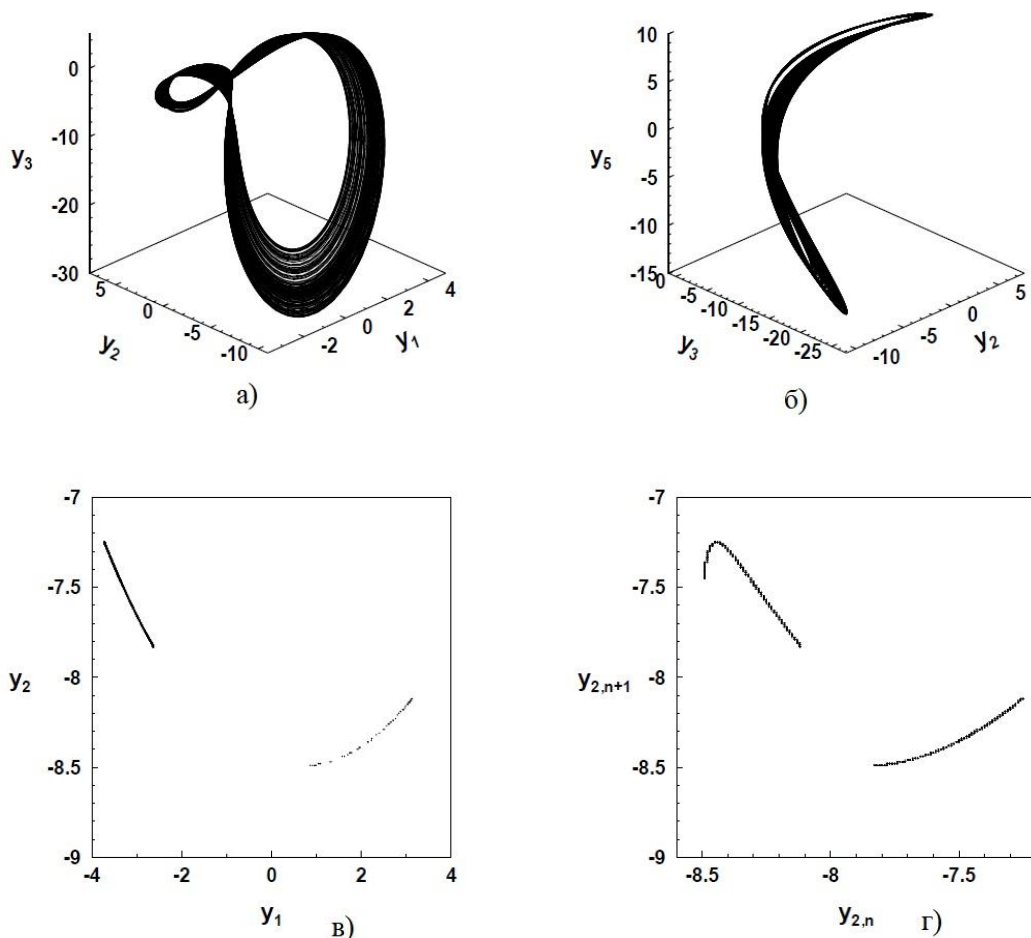


Рис. 3.26. *Проекції фазового портрету хаотичного аттрактора при $E = -1,25$ (а), (б) і його переріз (в), і відображення Пуанкаре (г)*

Відповідно, відображення Пуанкаре за формою нагадує одновимірну криву з локальним максимумом. Це може бути доказом того, що система (3.44) перебуває в хаотичному режимі. Дане одновимірне відображення може служити для наближеного вивчення динаміки системи. Природньо, що дослідження одновимірних відображень набагато прості-

ше за дослідження систем диференціальних рівнянь із розмірністю фазового простору, що рівна п'яти.

Таким чином, виявлений хаотичний аттрактор має певну якісну подібність з хаотичними аттракторами, знайденими в плоского маятника. До речі, старший ляпуновський характеристичний показник побудованого хаотичного аттрактора рівний 0,072. Така величина показника близька до величин старших ляпуновських показників хаотичних аттракторів плоского маятника.

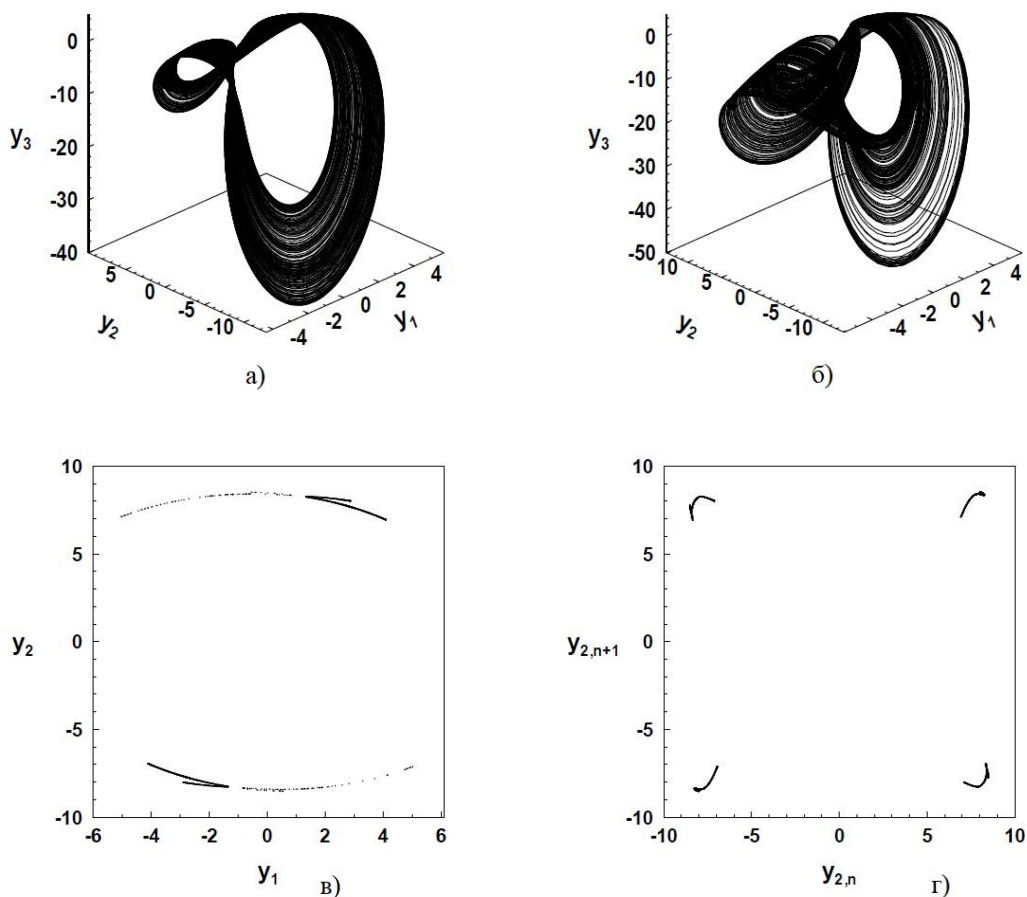


Рис. 3.27. Проекції фазового портрету хаотичного аттрактора при $E = -1,18$ (а), проєкція фазового портрету (б), переріз (в) і відображення Пуанкаре (г) хаотичного аттрактора при $E = -1,17$

Зазначимо ще одну особливість виявлених аттракторів системи, як регулярних, так і хаотичних. Вони мають симетрію фазових портретів

за змінними y_1, y_2 та y_4, y_5 , відповідно. Це пояснюється симетрією рівнянь (3.44) відносно даних змінних.

Як вже вище встановлено, усталені хаотичні режими, які виникають у системі (3.44) при $E \approx -1,275$, продовжують існувати на дуже значному інтервалі зміни E . При зростанні значення E у системі спостерігаються структурні перебудови типу “*хаос-хаос*”, тобто хаотичний аттрактор одного типу в результаті внутрішніх біфуркаційних явищ змінюється хаотичним аттрактором іншого типу.

Простежимо за зміною властивостей хаотичних аттракторів при зростанні E . При $-1,27 \leq E \leq -1,18$ спостерігається розвиток хаотичного аттрактора, що полягає в збільшенні об’єму області у фазовому просторі, у якій перебувають траєкторії аттрактора, і більш щільному заповненні цієї області траєкторіями аттрактора.

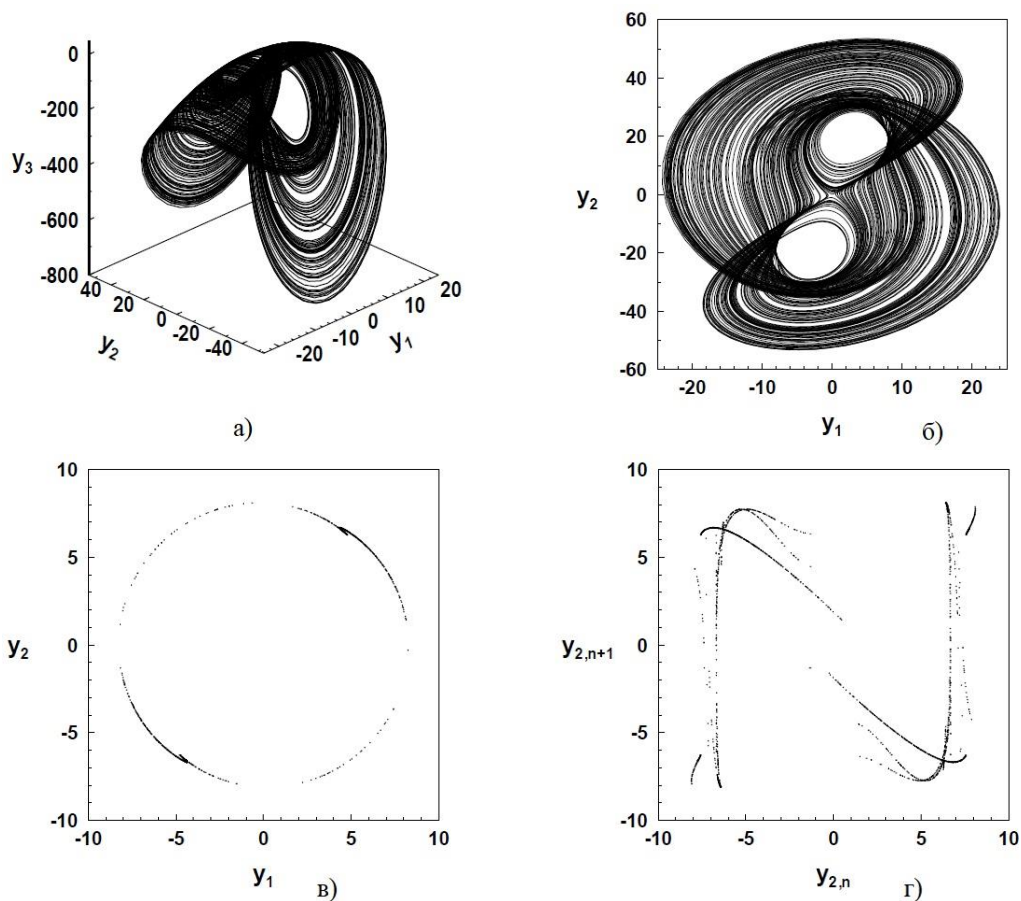


Рис. 3.28. Проекції фазового портрету і хаотичного аттрактора (а), (б), його переріз (в), і відображення Пуанкаре (г) при $E = -1,01$

При $E = -1,18$ проєкцію фазового портрету хаотичного атратора побудовано на рис. 3.27 а). Переріз і відображення Пуанкаре для цього атратора якісно ідентичні наведеним на рис. 3.26 в)–г). Відбувається деякий ріст величини старшого ляпуновського показника, який при $E = -1,18$ досягає значення 0,134.

При $E = -1,17$ кількісні зміни, що накопичуються, призводять до помітної перебудови структури хаотичного атратора. Проєкція фазового портрету такого атратора, його переріз і відображення Пуанкаре наведені на рис. 3.27 б)–г). Як видно з рисунків, що особливо помітно, при порівнянні з наведеними на рис. 3.26 в)–г), змінилися переріз і відображення Пуанкаре атратора, хоча переріз Пуанкаре продовжує мати квазістрічкову структуру.

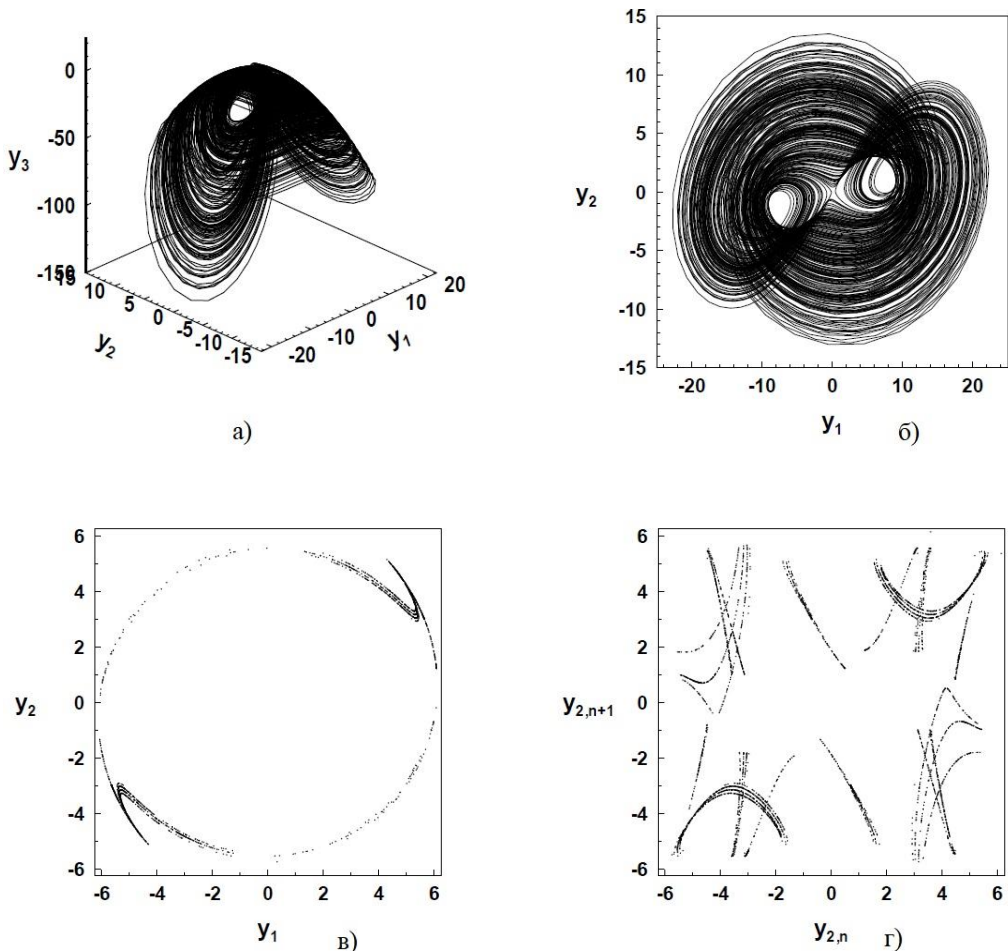


Рис. 3.29. Проєкції фазового портрету і хаотичного атратора (а), (б), його переріз (в) і відображення Пункаре (г) при $E = -0,89$

При подальшому зростанні E спостерігається помітне збільшення фазового об'єму області локалізації траєкторій атрактора, особливо за напрямом змінної y_3 . До 0,34 зростає старший ляпуновський характеристичний показник, що свідчить про значне збільшення швидкості розбігання близьких фазових траєкторій атрактора.

На рис. 3.28 наведені, відповідно, проєкції фазового портрету, перерізу й відображення Пуанкаре хаотичного атрактора при $E = -1,01$.

Своєрідний вид здобуває двовимірна проєкція фазового портрету. Виникає «двокий» атрактор, який нагадує відомого «метелика» атрактора Лоренца. Це свідчить про тісний зв'язок різних типів хаотичних атракторів з різних розділів нелінійної динаміки. Як і у всіх хаотичних атракторів, які розглядались вище, переріз Пуанкаре (рис. 3.28 в)) має квазістрічкову структуру. Але помітно ускладнилося відображення Пуанкаре (рис. 3.28 г)), яке є суперпозицією декількох ліній типу парабол.

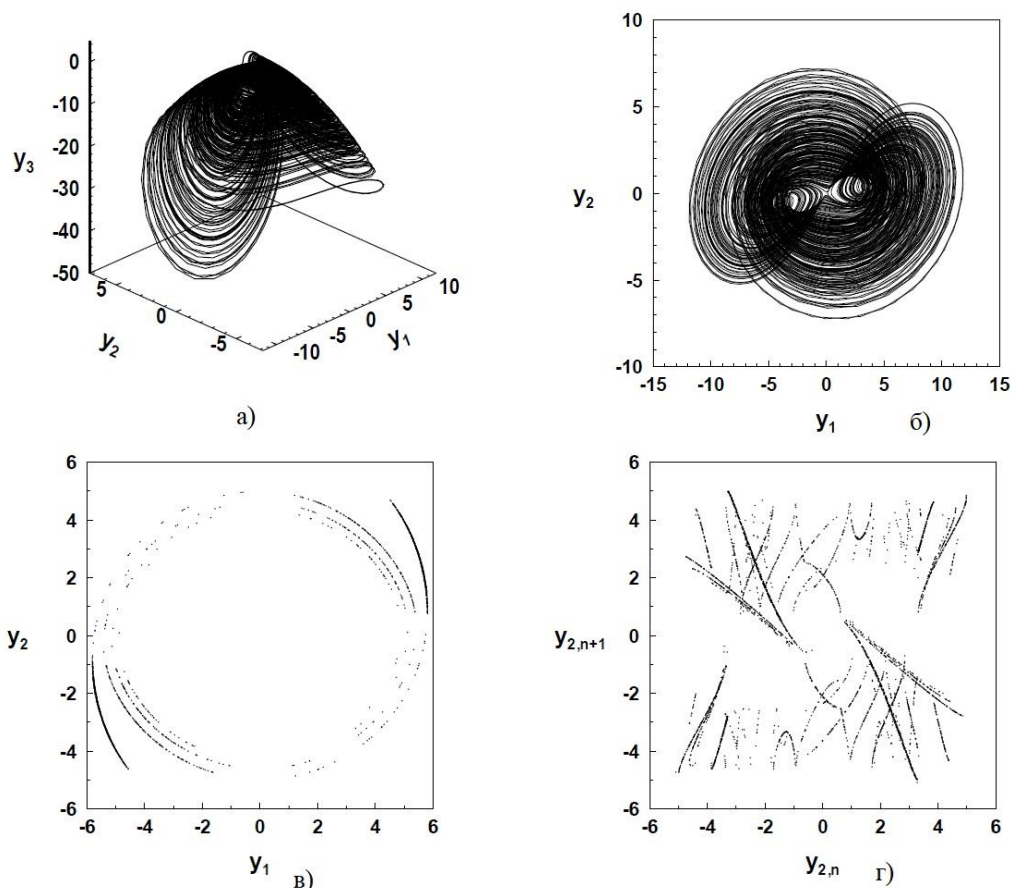


Рис. 3.30. Проєкції фазового портрету і хаотичного атрактора (а), (б), його переріз (в) і відображення Пуанкаре (г) при $E = -0,61$

Слід зазначити, що в інтервалі зміни параметра $-1,27 \leq E \leq -1,01$ області хаосу чергуються з невеликими вікнами періодичності. При проходженні параметром E точки $-1,0$ у системі відбувається жорстка біфуркація типу «хаос–хаос», у результаті якої виникає хаотичний атрактор іншого типу.

На рис. 3.29 наведені різні характеристики нового хаотичного атратора. Як видно з рисунка, відбувається поворот проєкції фазового портрету. Особливо наочно це проявляється при порівнянні двовимірних проєкцій з рис. 3.28 б) та 3.29 б). В нового атратора відбувся поворот «очей» в порівнянні з попереднім.

Змінюється й переріз Пуанкаре (рис. 3.29 в)), точки якого починають розбігатися на січній площині, втрачаючи квазістрічкову структуру. Змінюється вигляд відображення Пуанкаре (рис. 3.29 г)), яке тепер є складною суперпозицією ліній, серед яких явно проглядаються різні параболи.

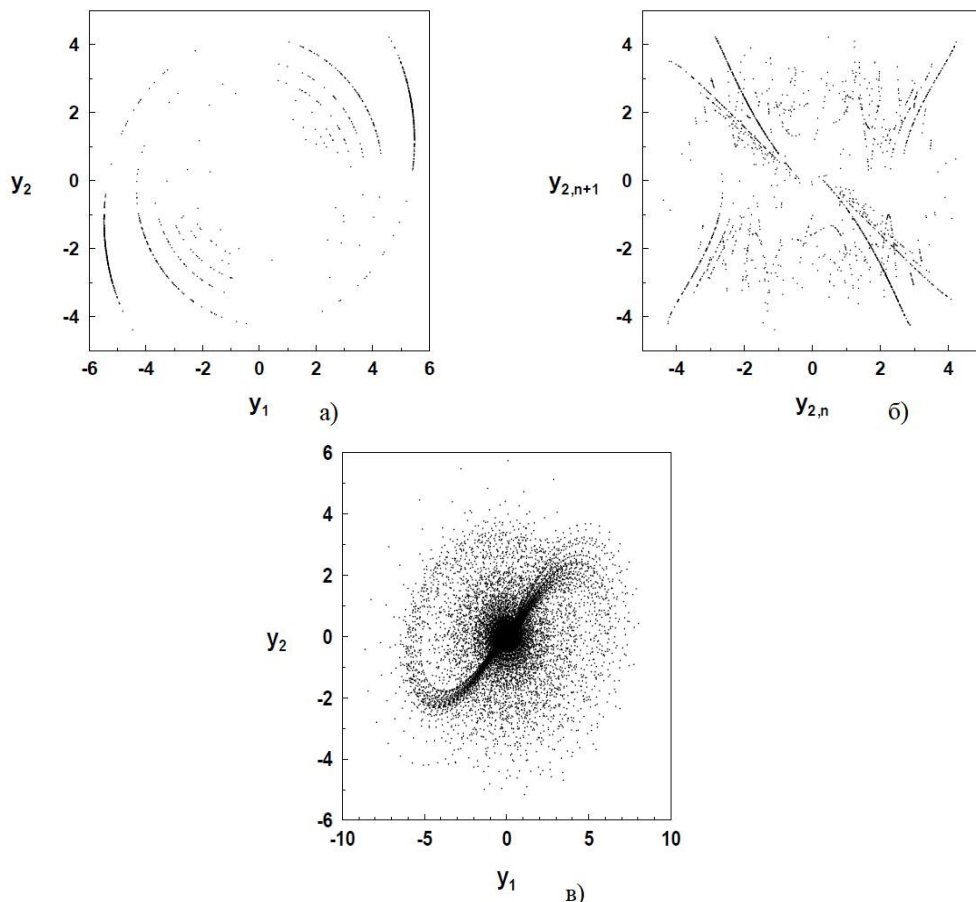


Рис. 3.31. Переріз (а), відображення Пуанкаре (б) і розподіл інваріантної міри хаотичного атратора (в) при $E = -0,12$

Такий тип хаотичного атрактора існує, за винятком вузького вікна періодичності, на всьому подальшому інтервалі досліджень зміни значень E . Однак у структурі атрактора відбуваються деякі зміни при збільшенні E .

На рис. 3.30 наведено характеристики хаотичного атрактора побудованого при $E = -0,61$ – це хаотичний атрактор має найбільший старший ляпуновський показник рівний $0,457$, що помітно перевершує аналогічні показники атракторів, виявлених нами при $E < -1$.

Як вже відзначалось, це свідчить про більшу швидкість розбігання, нестійких за Ляпуновим, близьких у початковий момент часу траєкторій атрактора. При загальній схожості фазових портретів даного атрактора й наведеного на рис. 3.29 а)–б), відзначимо зникнення “очей” на двовимірній проєкції фазового портрету.

Змінюється у порівнянні з попереднім випадком і вигляд перерізу Пуанкаре, точки якого починають хаотично групуватися уздовж декількох кривих, що віддалено нагадують концентричні кола. Ще більш ускладнюється відображення Пуанкаре, що унеможливило будь-яку одновимірну дискретну апроксимацію розглянутої задачі.

При подальшому збільшенні значень E починає помітно зменшуватися фазовий об’єм області, у якій розташовується хаотичний атрактор. Нарешті, при $E = -0,1$ відбувається руйнування хаотичного атрактора й у системі (3.44) виникає стійке положення рівноваги. На рис. 3.31 наведений переріз і відображення Пуанкаре, а також розподіл природної інваріантної міри за проєкцією фазового портрета для хаотичного атрактора, побудованого при $E = -0,12$, тобто незадовго до його зникнення. Точки перерізу Пуанкаре чітко хаотично групуються уздовж кривих, що нагадують за формою концентричні кола.

Відображення Пуанкаре практично одержує вигляд деякого точкового відображення. Цікавий вигляд має розподіл інваріантної міри для фазового портрета атрактора (рис. 3.31 в)). Густе затемнення в центрі рисунка показує, що основний час траєкторії атрактора перебувають в околі точки $(0,0)$. Ця точка є проєкцією нестійкого положення рівноваги системи (3.44).

Хаос має структуру досить типову для переміжності. Фазові траєкторії даного атрактора системи притягуються до нульового положення рівноваги, внаслідок чого вони тривалий час блукають у малому околі цього положення (ламінарна стадія, якій відповідають густо затемнені ділянки на рис. 3.31 в)). Потім, у непередбачуваний наперед момент часу,

відбувається турбулентний сплеск, що супроводжується неперіодичними розкручуваннями по витках спіралі атратора.

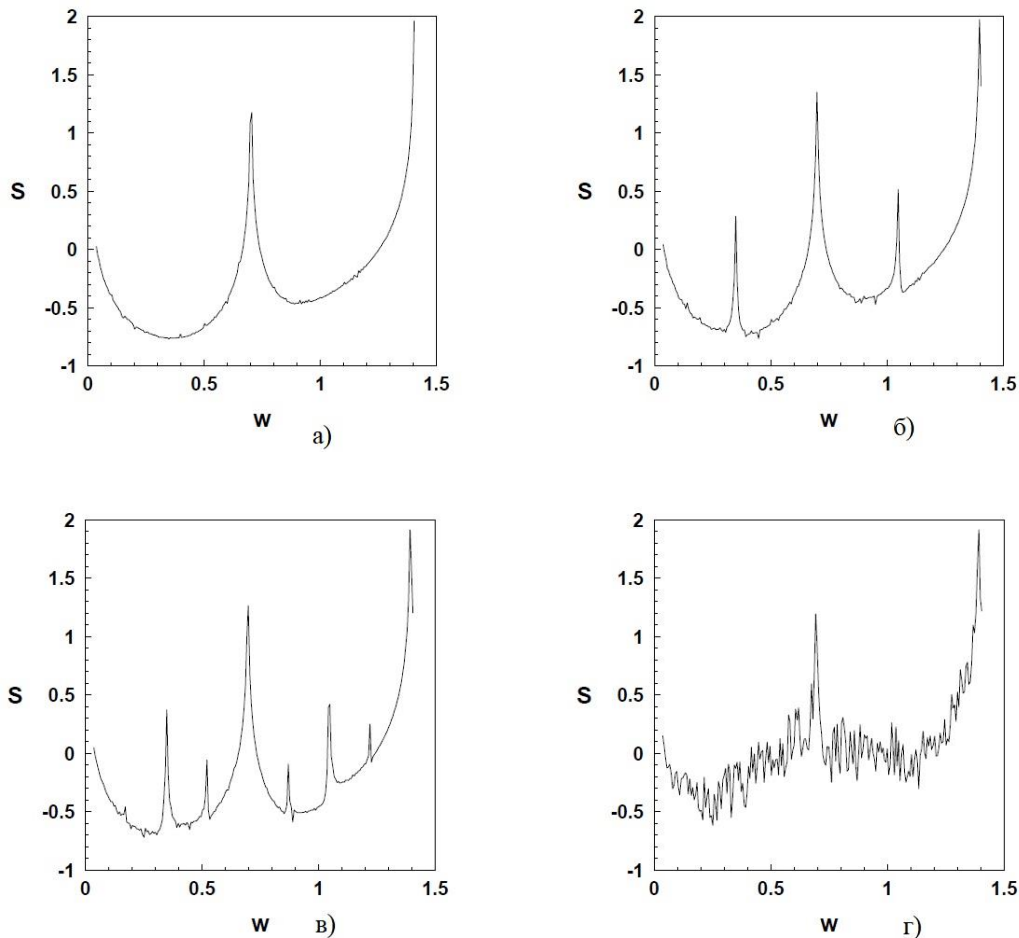


Рис. 3.32. Розподіл спектральної густини перших трьох біфуркацій подвоєння (а), (б), (в) і розподіл спектральної густини хаотичного атратора (г) при $E = -1,25$

Розглянемо характерні риси розподілу спектральних густин (Фур'є-спектрів) для різних типів атраторів системи (3.44). Зокрема, на рис. 3.32 а)–в) наведено розподіли спектральних густин для деяких біфуркацій з раніш вивченого нами каскаду біфуркацій подвоєння періодів граничних циклів системи, які мали місце для значень $E \in (-1,45, -1,275)$ (рис. 3.24 – 3.25).

Відповідно, на рис. 3.32 а) наведені Фур'є-спектри першої, на рис. 3.32 б) – другої, а на рис. 3.32 в) – третьої біфуркації каскаду. Усі

наведені спектри є дискретними з чіткими піками на основних гармоніках розкладу часових реалізацій граничних циклів у ряд Фур'є. Причому число піків цих дискретних спектрів подвоюється з кожною новою біфуркацією. На рис. 3.32 г) наведений Фур'є-спектр хаотичного атратора, який виникає в результаті цього нескінченного каскаду. Як видно з рис. 3.32 г), спектр стає неперервним, що є ще одним підтвердженням того, що система (3.44) перебуває в хаотичному режимі. Однак на рис. 3.32 г) в неперервному спектрі з чітко видні піки гармонік зниклих граничних циклів.

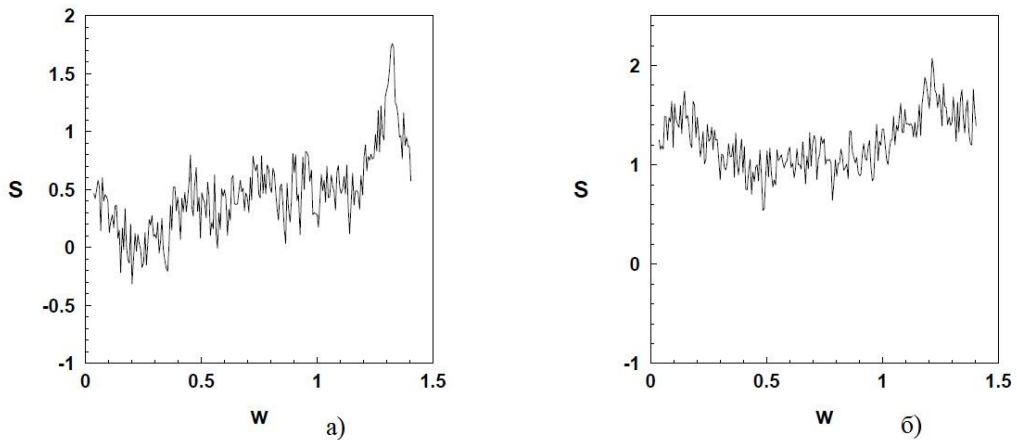


Рис. 3.33. Розподіл спектральної густини хаотичного атратора при $E = -1,17$ (а) і при $E = -1,01$ (б)

Розвиток хаосу при зростанні E , крім змін структури фазового портрету й інших характеристик хаотичних атраторів, також приводить до помітних змін їх Фур'є-спектрів. Так, на наступному рисунку наведені Фур'є-спектри хаотичних атраторів, які існують у системі при $E = -1,17$ (рис. 3.33 а)) і при $E = -1,01$ (рис. 3.33 б)). Спектр, наведений на рис. 3.33 а), відповідає значенню E , при якому спостерігається помітна зміна структури фазового портрету хаотичного атратора в порівнянні з фазовим портретом хаосу, який виник в результаті каскаду біфуркацій подвоєння. У свою чергу спектр, наведений на рис. 3.33 б) відповідає хаотичному атратору, що існує біля правого порогу жорсткої перебудови хаотичних режимів. Обидва спектри є неперервними.

Однак, у порівнянні з раніш розглянутим випадком, починає спостерігатися руйнування піків спектру (лівий рисунок), яке врешті-решт призводить до повної відсутності піків у неперервному спектрі атратора.

Нарешті, розглянемо Фур'є-спектри хаотичних атракторів, які існують у системі після жорсткої біфуркації типу «жаос-хаос», тобто при $E > -1,0$. На рис. 3.34 наведені спектри двох таких хаотичних атракторів. Причому рис. 3.34 а) відповідає значенню $E = -0,61$ (хаотичний атрактор з найбільшим старшим ляпуновським показником), а рис. 3.34 б) відповідає значенню $E = -0,12$ (атрактор біля порогу зникнення хаосу). Обидва спектри є неперервними й описують якийсь «шумовий» п'єдестал з повною відсутністю помітних піків і відсутністю завалів за всією областю частот, які розглядаються. Такі «рівномірні» Фур'є-спектри властиві усім хаотичним атракторам, що існують у системі при $E > -1,0$.

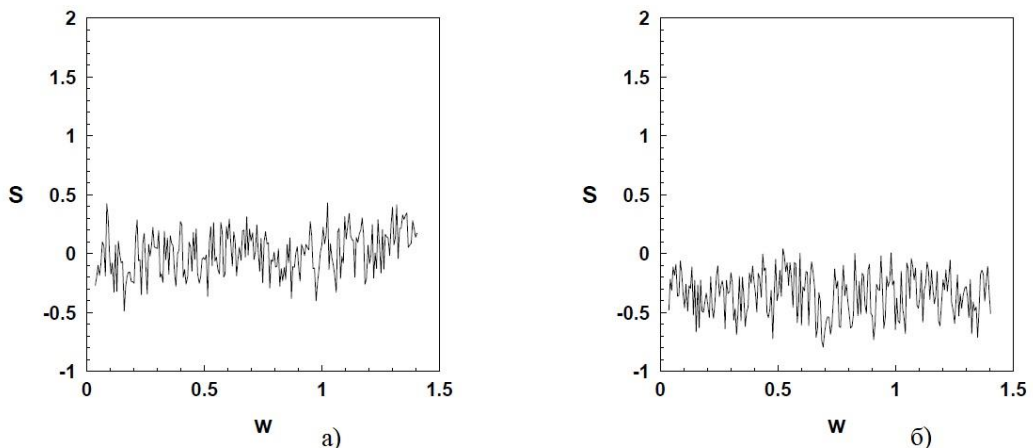


Рис. 3.34. Розподіл спектральної густини хаотичного атратора при $E = -0,61$ (а) і при $E = -0,12$ (б)

Викликає інтерес порівняння отриманих результатів з випадком ідеалізації джерела збудження коливачів. Як вже відзначалось раніше, при такому підході проводиться редукція системи рівнянь (3.44), після проведення якої досліджується нова система, що складається з першого, другого, четвертого й п'ятого рівнянь системи (3.44).

При цьому, невідома функція u_3 вважається постійним параметром. Було проведено чисельне інтегрування такої системи рівнянь при $C = -0,5$ і значеннях u_3 змінних у границях від -250 до 30 . Зазначимо, що це границі зміни амплітуд коливачів функції u_3 в усталених хаотичних режимах. При чисельних розрахунках значення u_3 змінювалося з дуже малим кроком.

В усіх випадках спостерігається вихід системи на стійке положення рівноваги, причому для $|y_3| \geq 3$ це положення рівноваги завжди має вигляд

$$y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0.$$

В даній області зміни параметрів не виявлено не тільки хаотичних атракторів, але навіть і стійких граничних циклів [51]. Це в черговий раз яскраво ілюструє до яких грубих помилок в описі динаміки системи призводить нехтування взаємодією коливальної підсистеми з джерелом збудження коливань. Передбачувані, прогнозовані прості стійкі положення рівноваги в реальності виявляються найскладнішими хаотичними атракторами.

Питання, тести для самоконтролю

1. Опишіть рівняння руху фізичного маятника.
2. Охарактеризуйте фізичний зміст параметрів відповідних рівнянь.
3. Запишіть рівняння консервативного осцилятора.
4. Охарактеризуйте точки рівноваги математичного маятника.
5. Наведіть приклади фазових портретів типових коливальних систем.
6. Наведіть приклади автоколивальних систем.
7. В чому суть поняття детермінованого хаосу в нелінійних системах?
8. В чому відмінність між регулярними і дивними атракторами динамічних систем?
9. Що таке точки біфуркації?
10. В чому полягає перемішування?
11. В чому полягає суть теореми Шарковського?
12. Опишіть відомі вам методи дослідження хаотичних режимів.
13. Що називається картою динамічних режимів?
14. В чому полягає особливість сферичного маятника?
15. Охарактеризуйте спектральну густину та біфуркації в системі сферичного маятника.

Обов'язкові та додаткові задачі

3.1. Знайти період вільних коливань маси m , підвішеної до пружини, якщо рух проходить без опору.

3.2. Тіло маси m рухається на площині x, y , притягуючись до точки $(0,0)$ з силою a^2mr , де r – відстань до цієї точки. Знайти рух тіла при початкових умовах $x(0) = d$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v$ і траєкторію цього руху.

3.3. Частинка маси m рухається по осі Ox , відштовхуючись від точки $x = 0$ з силою $3mr_0$, і притягуючись до точки $x = 1$ з силою $4mr_1$, де r_0 та r_1 – відстань до цих точок. Визначити рух частинки з початковими умовами

$$x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

3.4.* Для рівняння $\ddot{x} + 2a\dot{x} - b \operatorname{sgn} \dot{x} + x = 0$ ($0 < a < 1$, $b > 0$) побудувати траєкторії на фазовій площині та знайти точки, в яких граничний цикл перетинає вісь Ox .

Вказівка: знайти залежність між абсцисами двох послідовних перетинів траєкторії з віссю Ox .

3.5. Показати, що рівняння $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0$, де функція F – неперервна та $F(y) > 0$ при $y > 0$, $F(y) < 0$ при $y < 0$, не може мати граничних циклів на фазовій площині.

Вказівка: дослідити знак повної похідної $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$.

3.6. Нехай $f(x, y)$ та f'_x, f'_y – неперервні, $f(0,0) < 0$, а при $x^2 + y^2 > b^2$ маємо $f(x, y) > 0$. Довести, що рівняння $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0$ має періодичні розв'язки $x(t) \not\equiv 0$.

Вказівка: перейти на фазову площину і дослідити знак повної похідної $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$. Побудувати кільце, з якого не може вийти ні одна траєкторія.

Зобразити на фазовій площині траєкторії систем 3.7–3.10, записаних в полярних координатах, та дослідити системи на існування граничних циклів.

$$3.7. \quad \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

$$3.8. \quad \frac{dr}{dt} = r(r - 1)(r - 2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

$$3.9. \quad \frac{dr}{dt} = r(1 - r)^2, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

$$3.10. \frac{dr}{dt} = \sin r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

3.11. Проілюструвати відображення вигляду

$$x_{n+1} = r \cdot \sin(\pi x_n)$$

при значеннях параметра $r = 0,6$ та $r = 0,8$. Побудувати сходи Ламерея.

3.12. В інтервалі значень параметра $\lambda \in [3.83, 3.86]$ знайти «вікно» періодичності (стійкості) логістичного відображення, визначити період циклу та область його існування за параметром. Здійснити спостереження в зазначеному інтервалі значень λ за каскадом біфуркацій подвоєння знайденого циклу, визначити відповідні біфуркаційні значення параметра. Проілюструвати результати відповідними графіками.

Додаткові задачі за даною тематикою представлені у [19, 25, 35, 40, 45].

РОЗДІЛ IV

БІФУРКАЦІЇ. ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ ТА ФРАКТАЛИ

Одна з основних задач якісної теорії динамічних систем полягає у знаходженні стаціонарних розв'язків та граничних циклів, дослідження їх на стійкість, виділення областей притягання стійких стаціонарних режимів в фазовому просторі. При цьому у фазовому просторі будуються фазові портрети траєкторій системи при фіксованих значеннях параметрів.

Теорія біфуркацій забезпечує створення параметричного портрету системи, який визначає залежність від параметрів розташування біфуркаційних границь, на яких відбувається зміна числа і типу стаціонарних розв'язків, а відтак й зміна фазового портрету.

З позицій теорії біфуркацій можна виділити дві характерні групи систем. До першої віднесемо системи, для яких є характерною стаціонарна динаміка. Біфуркаційна ситуація для таких систем аномальна, а небезпечні біфуркації представляють потенційно аварійні ситуації. Для другої групи систем зміни фазових портретів в результаті біфуркацій – звичайна ситуація. Саме зміна числа можливих стаціонарних режимів робить функціонування системи ефективною в зовнішніх умовах. Разом з тим виявляється, що в таких системах можуть виникати випадки незвичайної поведінки, пов'язані з народженням області загальмованого руху в результаті небезпечних біфуркацій.

Метою подальших міркувань є ілюстрація застосування загальних закономірностей, отриманих при теоретичному дослідженні поведінки динамічних систем в околі небезпечних біфуркаційних границь до розв'язання прикладних завдань в конкретних динамічних системах [1, 2, 4, 5, 9, 46–48].

4.1. Математична модель керованого судна

Слідуючи загальному правилу максимального спрощення моделі, розглядається поведінка судна в горизонтальній площині, на тихій воді і при відсутності вітру. Додатково вважають, що швидкість судна постійна. Другий закон динаміки для поступального руху встановлює залежність прискорення від суми діючих на судно сил, а для обертального руху

навколо вертикальної осі – залежність кутового прискорення від суми діючих на судно моментів [47].

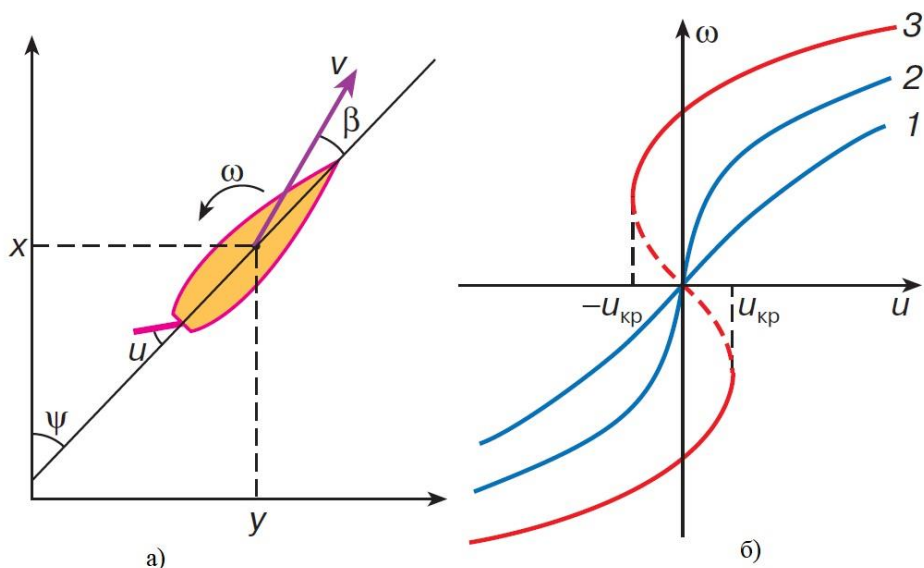


Рис. 4.1. (а) – стан судна визначається координатами і параметром керування u ; (б) – діаграма керованості стійкого (1, 2) і нестійкого (3) суден у відхиленому стані

Сили і моменти, пов'язані з інерційними властивостями судна і води, обумовлені в'язкістю води, а також впливом потоку на корпус судна і кермо. Найбільш зручними координатами стану судна є координати його центра ваги x і y , кут курсу ψ , кутова швидкість обертання навколо вертикальної осі $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ і кут дрейфу β між напрямком швидкості судна v і його поздовжньою віссю симетрії (рис. 4.1 а).

Якщо судно йде прямолінійним курсом з невідхиленням кермом ($u = 0$), то його поздовжня вісь збігається з напрямком швидкості ($\beta = 0$). В силу симетрії корпусу поперечні сили і момент відсутні і, отже, кутова швидкість $\omega = 0$. Цей стаціонарний режим буде стійким в тому випадку, якщо при виникненні незначних ω , а слідом за цим і кута β , тобто при появі несиметричного обтікання, сили і моменти, що виникають, змушують судно повертатися в початковий стан.

Аналогічні міркування можна навести і для випадку $u \neq 0$. Тут стаціонарним режимом буде рух по колу (стабільна циркуляція) з постій-

ною кутовою швидкістю ω і кутом дрейфу β . Із зростанням кута відхилення керма u радіус циркуляції зменшується. Режим стійкий, якщо при випадкових відхиленнях від ω, β момент і поперечна сила, які виникають, повертають судно до вихідного режиму циркуляції. Залежність стаціонарних станів ω від параметра керування u (положення керма) для стійкого судна наведена на рис. 4.1 б) (крива 1). Цю залежність називають *діаграмою керованості судна*. Найбільш важлива її ділянка – окіл початку координат. Нахил кривої тут характеризує реакцію судна на незначні відхилення керма при прямолінійному русі. Чим крутіша ця ділянка, тим вища керованість судна в сенсі спроможності судна не відхилитись від стаціонарного режиму руху (рис. 4.1 б), крива 2). Як видно з рисунка, в випадку стійкого судна будь-якому u відповідає єдиний стаціонарний розв'язок. На фазовій площині він відповідає особливій точці – стійкому вузлу (рис. 4.3 а)).

Підкреслимо, що діаграма керованості задає статичну характеристику системи. Визначені за її допомогою значення $\omega(u)$ досягаються в результаті завершення перехідного процесу. В звичайному ж режимі роботи кермо знаходиться у відхиленому положенні незначний проміжок часу, за який величина ω не досягає значення, яке встановилось.

Тому необхідність значного підвищення маневреності судна вимагає ще більшої зміни діаграми керованості (рис. 4.1 б), крива 3). В результаті рух судна на прямому курсі виявляється нестійким. Ділянка кривої 3 (рис. 4.1 б), що відноситься до нестійких стаціонарних режимів, зображена пунктиром. На фазовій площині вона відповідає особливій точці – сідлу (рис. 4.4 а)). Природньо, що у цьому випадку для утримання судна в околі нестійкого стаціонарного режиму необхідний відповідний вплив керуючого параметру $u(t)$.

Наведені міркування про стійкість і нестійкість судна можна проілюструвати на прикладі простої механічної системи, зображеної на рис. 4.2. Симетрична прозора ванна з крутими бічними стінками заповнена досить в'язкою рідиною і в неї поміщена куля. Випадку невідхиленого керма і стійкої особливої точки відповідає рис. 4.2 а). Тут у випадку відхилення кулі від рівноважного стану відбувається відновлення початкової ситуації. При цьому в русі до стану рівноваги виділяються два етапи: спочатку швидке скочування по боковій стінці, потім повільне переміщення вздовж дна ванни.

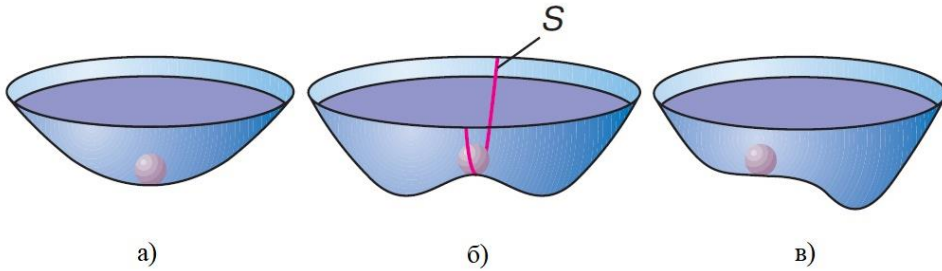


Рис. 4.2. Найпростіша механічна система, яка ілюструє стійке на курсі судно (а), нестійке при $u = 0$ (б) і нестійке при $u > u_{кр}$ (в)

Нестійкому на прямому курсі судну відповідає рис. 4.2 б), який ілюструє поведінку системи в околі сідла. При відхиленні кулі від рівноважного стану строго в поперечному напрямку вона буде прагнути повернутися у ту ж точку.

Ця особлива траєкторія S відповідає сепаратрисі сідла і є границею притягання двох стійких рівноважних станів. Тому зміщення кулі в будь-якому іншому напрямку призводить до подальшого її переміщення в один з двох можливих стійких рівноважних станів. Відхилення керма в нашій інтерпретації відповідає деформації нижньої частини ванни, що порушує симетрію між лівою і правою сторонами. Рис. 4.2 в) відповідає випадку $u > u_{кр}$. Слід зазначити існування пологої ділянки, на якій швидкість руху падає. Вона розташована між більш крутими ділянками.

Вже згадана математична модель керованого судна описується системою п'яти диференціальних рівнянь першого порядку. На першому етапі ці рівняння отримують в фізичних змінних і параметрах, що вимірюються в звичайних одиницях. Далі здійснюють перетворення до безрозмірних змінних і параметрів.

Шляхом спеціального вибору масштабів вдається істотно спростити як самі рівняння (частина коефіцієнтів стають рівними одиниці), так і змістову інтерпретацію одержуваних результатів [5]. Остаточно ці рівняння записуються

$$\dot{\omega} = a\omega + b\beta + s_1 u, \quad (4.1)$$

$$\dot{\beta} = c\omega + d\beta + h\beta|\beta| + s_2 u, \quad (4.2)$$

$$\dot{\psi} = \omega,$$

$$\dot{x} = \cos(\psi - \beta),$$

$$\dot{y} = \sin(\psi - \beta).$$

Тут точка над змінною означає диференціювання за безрозмірним часовим параметром, за одиницю якого судно проходить шлях, рівний довжині корпусу судна.

З позицій якісної теорії і теорії біфуркацій динамічних систем, для наших цілей виявляється достатнім досліджувати рівняння (4.1), (4.2), тобто фазові портрети в площині ω, β . Координати особливих точок ω, β є коренями квадратного рівняння, яке одержується після прирівнювання до нуля правих частин цих рівнянь. Саме таким чином отримують діаграму керованості.

В результаті приходимо до наступної математичної задачі. Розглядається нелінійна система (4.1), (4.2) зі змінним в процесі її керованого руху числом можливих стаціонарних режимів. При відсутності керування ($u = 0$) поряд зі нестійким стаціонарним розв'язком існує ще пара стійких розв'язків. Зі зростанням керування при $|u| = u_{кр}$ відбувається злиття нестійкого розв'язку з одним зі стійких і подальше їх зникнення (рис. 4.1 б)). Таким чином, при $|u| > u_{кр}$ в системі залишається єдиний стійкий розв'язок і, здавалося б, проблема керування вирішується елементарно.

Проте виявляється, що розумна ідея отримання високої здатності судна перебувати на стійкій стаціонарній траєкторії через нестійкість основного режиму керування при $|u| < u_{кр}$ матиме наслідки у випадках $|u| > u_{кр}$. Проявляє себе ефект біфуркаційної пам'яті. Фазові траєкторії простору станів *«гадують»* про небезпечну біфуркацію, сповільнюючи рух системи при проходженні ділянки, на якій померла особлива точка сідло-вузол.

4.2. Прояв ефекту фазової плями. Зниження керованості. Початкова некерованість

Особливості поведінки системи пов'язані з біфуркаціями зникнення або народження сідловузлової особливої точки. На рис. 4.3 ілюструється зміна характеру перехідного процесу залежно від тривалості руху у фазовій плямі. *Фазовою плямою* називають таку множину точок простору станів таких, що траєкторії системи, які проходять через ці точки, є нестійкими. Чим ближче до центру плями проходить фазова траєкторія (рис. 4.3 а)), тим пологіша відповідна ділянка перехідного процесу і довше вона долається (рис. 4.3 б)) [47].

Тому безпосереднє і просте застосування результатів якісної теорії до проблеми керованості суден полягає в цілеспрямованому перегляді фазових портретів при відхиленні керма, яке перевищує критичне значення, і побудові фазових плям.

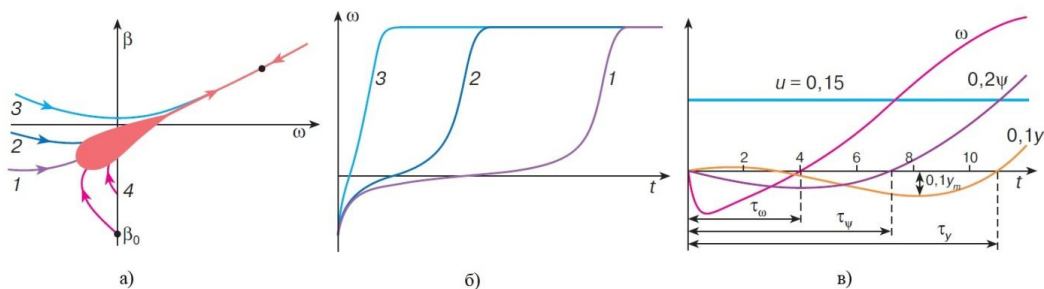


Рис. 4.3. Ефект фазової плями: (а) – область плями при $u > u_{кр}$; (б) – залежність перехідного процесу від ступеня близькості фазової траєкторії до центру плями; (в) – показники початкової некерованості при $u = 0,25u_{max}$

Виявляється, що зі збільшенням кута переключування керма розміри плями не змінюються. Однак показник загальмованості руху всередині нього зменшується. Тому найзагальніші рекомендації запобігання зниженої керованості полягають у тому, що при необхідності маневру, в складних умовах, відхилення керма має бути не просто більше критичного значення (як рекомендують підручники і довідники по судноплавству, виходячи зі статичної діаграми керованості), а перевищувати критичне значення у 2 – 4 рази!

Більш складним завданням є теоретичне прогнозування конкретної аварійної ситуації, при якій система «закидається» в фазову пляму і при цьому кутова швидкість судна має небажаний напрямок. В цьому випадку при правильному відхиленні керма судно на певний час буде обертатися в протилежну сторону. Якщо подібна ситуація виникає поза фазової плямою (траєкторія 4 на рис. 4.3 а)), то «правильне керування» швидко переведе систему в керований стан. Уповільнення реакції системи при її потрапленні в область плями (траєкторія з точки β_0) може призвести до аварії.

Описана ситуація можлива при раптовому зникненні вітру. Справа в тому, що врахування вітрового впливу додає в праві частини рівнянь (4.1), (4.2) доданки, які залежать від напрямку і швидкості вітру. Стаціонарному прямолінійному руху судна при вітрі відповідає стан

$$\omega = \omega_0 = 0, \quad \beta = \beta_0 \neq 0.$$

Тому при різкому спаді вітру вказаний стан має бути прийнято за початкові умови перехідного процесу (рис. 4.3 а)). Далі передбачається, що кермо відхилено в потрібну сторону на досить великий кут і досліджуються відповідні фазові траєкторії. Для деяких суден прояв початкової некерованості посилюється тим, що закиданню в потенційно аварійну область відповідають швидкі рухи, а виходу з неї – повільні.

Виявилося, що при деяких початкових станах судна навіть максимально можлива перекладка керма не рятує від початкової некерованості: кутова швидкість, курсовий кут і відхилення траєкторії центру ваги судна $y(t)$ від початкової прямолінійної траєкторії почнуть змінюватися в потрібну сторону лише з плином часу ($\tau_\omega, \tau_\psi, \tau_y$ відповідно). При дослідженні цього явища перехідний процес має незвичайний характер – керована координата в початковій стадії відхиляється в протилежну сторону.

З позицій безпеки судноплавства подібні ситуації є потенційно аварійними. Час початкової некерованості залежить від конструкції судна, величини початкових значень ω_0, β_0 і відхилення керма. На рис. 4.3 в) наведено типові перехідні процеси, що ілюструють прояв початкової некерованості. Звернемо увагу, що кут курсу ψ розпочне змінюватися в потрібний бік лише через 7,3 одиниці часу. При довжині корпусу 100 м пройдений судном шлях складе 730 м. Щонайменше 1 км судну потрібно пройти, щоб зникло бокове зміщення $y(t)$ в небажаному напрямку.

4.3. Стабілізація курсу судна

Ми розглянули, як існування області загальмованого руху (фазової плями) може призвести до потенційно аварійних ситуацій. Разом з тим, володіючи знаннями про розміщення області нестійкості в фазовому просторі системи, що описує динаміку судна, доцільно в певних випадках навмисно планувати проходження через неї фазової траєкторії [47].

У наступному прикладі, який стосується проблематики стабілізації нестійкості, мова йтиме про утримання нестійкого судна на прямому курсі.

Звичайний підхід до розв'язування задачі такий: інформація про характер відхилення судна від курсу надходить від спеціальних датчиків і

перетворюється відповідно до певного алгоритму. В результаті виробляється значення так званої помилки керування $z(t)$. Ця функція, а також характеристика приводу кермового пристрою і визначають кут відхилення керма $u(z)$. Процедура проектування подібних систем автоматичного керування добре відпрацьована.

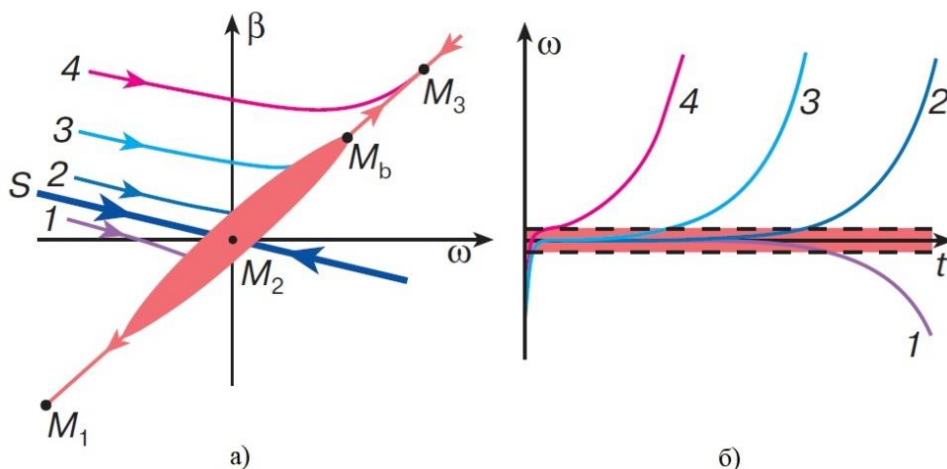


Рис. 4.4. При наближенні фазової траєкторії до сепаратиси сідла S при $u = 0$ (а) збільшується знаходження некерованого судна в околі нестійкого стану (б)

Ми підійдемо до розв'язування задачі, спираючись на специфічну для судна біфуркаційну картину. Випадок втрати стійкості в симетричній системі супроводжується, в силу симетрії, народженням пари несиметричних стійких особливих точок. У випадку судна це ліва і права самодовільні циркуляції при невідхиленому кермі. Природно, що з'являються дві області тяжіння стійких точок, розділені деякою границею S , яка співпадає з однією з сепаратрис сідла (рис. 4.4 а)).

Які ж можуть бути перехідні режими в околі границі? Нехай два вихідних стани лежать як завгодно близько один до одного, але по різні боки від границі S . Відповідно до теореми про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від початкових умов, дві фазові траєкторії, які починаються в розглянутих точках, повинні залишатися близькими протягом певного часу. Відтак, вони повинні приводити систему в окіл сідла.

Нагадаємо, що в малому околі особливих точок фазова швидкість системи V задовольняє рівності

$$V^2 = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2$$

і може бути як завгодно малою. Тому чим ближче до сідла проходить траєкторія, тим більше загальмованим стає рух. Область загальмованого руху (фазова пляма) в околі сідла знаходиться абсолютно аналогічно випадку біфуркації сідло-вузол [47].

Обирається фазова траєкторія, що починається в малому околі сідла M_2 і закінчується в вузлі M_3 (рис. 4.4 а)). Очевидно, що в кінцевій точці ділянки фазової траєкторії M_2M_3 фазова швидкість $V_3 = 0$. Отже, на цій ділянці повинна бути точка (нехай M_b), фазова швидкість в якій V_b максимальна. Точка M_b розташована на границі плями, а сама границя фазової плями визначається як геометричне місце точок з такою ж швидкістю (рис. 4.4 а)).

Залежність характеру перехідного процесу некерованого судна ($u = 0$) від близькості фазової траєкторії до сепаратриси зображена на рис. 4.4 б). Червоним кольором виділена вузька смуга, яка відповідає допустимому відхиленню.

Тепер ми можемо сформулювати алгоритм ефективної стабілізації судна на курсі:

включати кермове керування слід зазвичай, коли координати, що характеризують відхилення від курсу, виходять за допустимі межі;

переводити ж кермо в нейтральне положення потрібно в момент, після якого стан судна лежить на сепаратрисі.

Природно, що при цьому необхідно розробити алгоритм визначення положення сепаратриси. Описаний підхід до створення алгоритму керування судном дозволяє істотно знизити частоту переключень керма при поліпшенні показників якості керування.

Якщо використовувати наочний аналог нестійкого судна (рис. 4.2 б), в)), то утримування кульки в центрі ванни зводиться до керування відповідно лівою чи правою сторонами дна. Ефективність стабілізації зросте, якщо під час перекочування кульки з одної сторони в іншу скидати керування (рис. 4.2 б)) в момент, коли кулька виявиться на границі S .

Розглянемо ще один приклад стабілізації – вимушені коливання нелінійного осцилятора, які описуються рівнянням Дюффінга

$$\ddot{x} + 0,2\dot{x} + 2x^3 = F \cos(1,2\tau). \quad (4.3)$$

Якщо амплітуда періодичного впливу $F \ll 3,4$, то симетричні вимушені коливання стійкі. При $F = 3,4$ вони стають нестійкими, породжуючи пару стійких, але несиметричних коливальних режимів. Як і у випадку судна, можна розробити спеціальний алгоритм керування, додавши в праву частину системи (4.3) спеціальний доданок $\mu(\tau)$. Призначення алгоритму – знаходження в тривимірному фазовому просторі поверхні, яка розділяє області притягання несиметричних режимів. Керуючі впливи $\mu(\tau)$ слід обнуляти саме на цій поверхні.

При відсутності імпульсів керування відбуваються стійкі несиметричні коливання одного з двох можливих типів в залежності від початкових умов (рис. 4.5 а), б)). На рис. 4.5 в) керуючі імпульси прямокутної форми $\mu(\tau)$ затемнені.

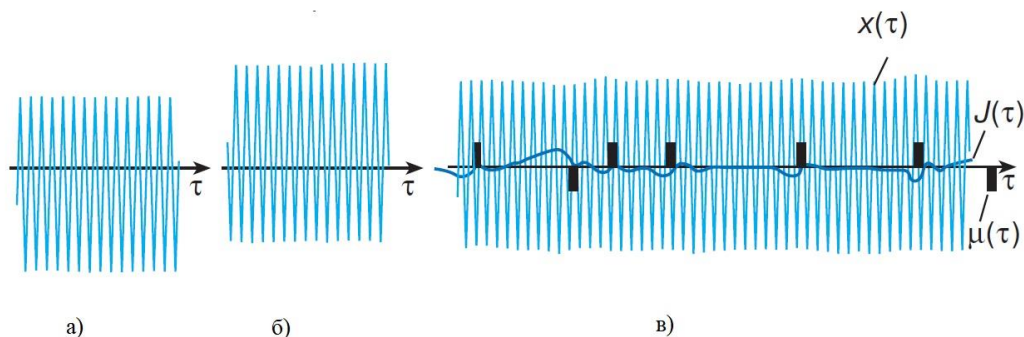


Рис. 4.5. Вимушені коливання осцилятора Дуффінга: (а), (б) – стійкі несиметричні коливання; (в) – режим стабілізації нестійких симетричних коливаний

Коливання в проміжках між цими імпульсами відповідають некерованим ділянкам руху, які досить близькі до нестійких симетричних коливань. Тривалість некерованих ділянок виявляється більшою за тривалість керованих ділянок приблизно на порядок. На рисунку також наведена функція $J(\tau)$, яка характеризує ступінь несиметричності коливань.

4.4. Біфукації динамічних систем

Якщо уважно придивитися до оточуючої нас природи, то можна зробити цікаве спостереження. Життя на планеті Земля можливе лише завдяки тепловому випромінюванню Сонця, яке є джерелом енергії. Влітку північна півкуля отримує світлової енергії більше, ніж взимку. І картина літньої природи при цьому помітно відрізняється від зимової. Розглянемо, як приклад, обсяг води в озері. Кількісною мірою сонячної енергії є температура води. Влітку вода в озері тепла і можна купатися. З настанням осені температура води поступово зменшується. Купатися вже не хочеться, проте вода і при більш низькій плюсовій температурі залишається водою! Глибокою осінню верхній шар води в озері остигає до нульової температури і раптом перетворюється на лід! Далі і при -20°C лід залишається льодом. Що ж сталося? При проходженні температури через нуль вода різко змінила свої властивості: вона з рідкого стану перейшла в твердий. І не плавно, а стрибком. Якщо розглядати температуру води як деякий параметр системи, то добре відомо, що зі зміною цього параметра вода різко змінює свої властивості при переході через 0°C та через 100°C , коли вода перетворюється на пару. Є й інші особливі значення температури води [5].

Низка фізичних задач при їх математичному моделюванні описуються диференціальними рівняннями чи їх системами, залежними від одного або декількох параметрів. Розглянемо як приклад рівняння коливань звичайного маятника або (що з математичної точки зору повністю ідентично) паралельного RLC -контур, яке має вигляд

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0.$$

Рівняння містить два параметри: α – параметр затухання, що характеризує тертя, ω_0 – параметр, що визначає частоту коливань.

Якщо втрати енергії відсутні (параметр затухання $\alpha = 0$), то розв'язком рівняння є незатухаючі гармонійні коливання. При малому терті $0 < \alpha < 1$ рух системи є коливальним з амплітудою, яка зменшується в часі за експоненціальним законом. Нарешті, при досить великому терті ($\alpha > 1$) рух маятника є аперіодичним, згасаючим в часі. Навіть в цьому простому прикладі виділяються два особливих значення параметра $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$, відхилення від яких якісно змінюють властивості системи.

Зміна параметру в рівнянні може викликати втрату стійкості одного стану (або режиму функціонування) системи і перехід її в інший, відмінний від першого, стан.

Це явище називається біфуркацією, а значення параметру, при якому воно відбувається – точкою біфуркації.

Стан системи нижче точки біфуркації і вище неї при зміні параметру все ж змінюється. Так, вода при температурі $+3^{\circ}\text{C}$ і $+22^{\circ}\text{C}$ – це різні стани. Але при цьому вода залишається водою!

В математиці і фізиці існує поняття грубості або структурної стійкості. Суть цього поняття полягає в тому, що при малій зміні параметра груба система хоч і змінює в деталях режим функціонування, але не принципово. З цієї точки зору для грубих систем перехід через точку біфуркації означає зміну одного структурно стійкого режиму на інший. При цьому в точці біфуркації система не є грубою: мала зміна параметра в ту чи іншу сторону призводить до різких змін стану.

Повернемося до прикладу зі стійкістю стаціонарних станів в системі

$$\dot{x} = a - bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (4.4)$$

Застосуємо перший метод Ляпунова, здійснивши лінеаризацію (4.4) в околі стаціонарного розв'язку $x_0 = \sqrt{b/a}$. Одержимо лінеаризоване рівняння

$$\dot{y} = -(2bx_0) = \lambda y, \quad (4.5)$$

де $y = x - x_0$. Стійкість стаціонарного розв'язку $x_0 = \sqrt{b/a}$ визначається знаком похідної правої частини рівняння (4.4) у стаціонарній точці, тобто знаком величини $\lambda = -2\sqrt{ab}$.

При додатних значеннях параметрів a і b ця похідна завжди відмінна від нуля. А що буде відбуватися, якщо ми будемо зменшувати значення параметра a ? Як видно з (4.5), при $a = 0$ (незалежно від величини $b > 0$) величина λ перетворюється в нуль, збурення у наростає і не згасає. Більше того, при $a = 0$ в системі (4.4) стаціонарний розв'язок єдиний і рівний $x = 0$. Далі, якщо $a < 0$, то стаціонарних станів немає зовсім. Дійсно, в цьому випадку в точках

$$x_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{|a|}{b}} \quad (4.6)$$

права частина системи (4.4) рівна 0 (i – уявна одиниця).

Наведемо тепер результати аналізу цієї біфуркації, яка відома як біфуркація “дворазова рівновага”. Розглянемо рівняння (4.4). Нехай $x_0(a) = \sqrt{b/a}$ є грубий стан рівноваги, тобто $\lambda(a) = -2\sqrt{ab} \neq 0$. Це означає, що при малій варіації параметра a стан $x_0(a)$ продовжує існувати як стійкий або нестійкий стаціонарний стан.

При деякому значенні параметра $a = a^*$ власне число $\lambda(a^*)$ в стаціонарному стані може перетворитись в нуль

$$\lambda(a) = 0, \quad a = a^*. \quad (4.7)$$

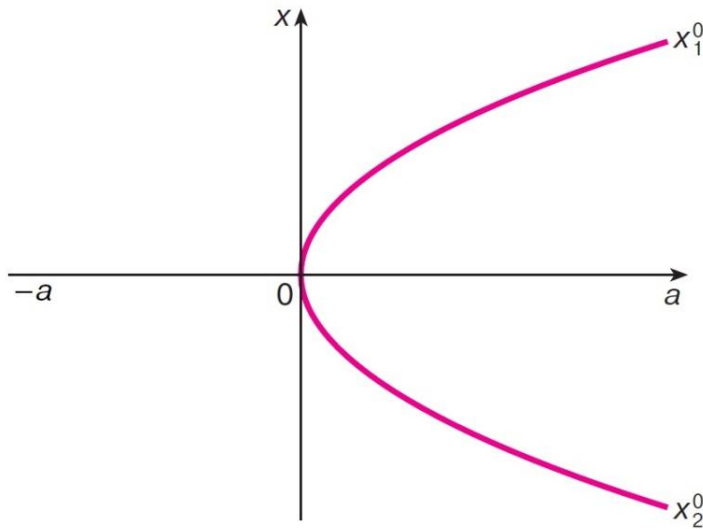


Рис. 4.6. Біфуркація “дворазова рівновага”. При $a > 0$ в системі (4.4) два стаціонарних стани $x_0 = \sqrt{b/a}$ і $x_0 = -\sqrt{b/a}$, при $a = 0$ існує єдиний стаціонарний стан і при $a < 0$ стаціонарні стани зникають (випадок (4.6))

Для реалізації біфуркації “дворазова рівновага” необхідно, щоб друга похідна правої частини $F(x) = a - bx^2$ рівня (4.4) була відмінна від нуля

$$\frac{d^2F(x_0)}{dx^2} \neq 0. \quad (4.8)$$

Для виконання умов (4.7) і (4.8) в загальному випадку необхідно, щоб вихідне рівняння (4.4) в правій частині включало щонайменше квадратичний нелінійний доданок. Якщо умови (4.7) і (4.8) виконані, то x_0 є двократним коренем вихідного рівняння (4.4).

Значення параметра a^* , при якому виконується умова (4.7), є точкою біфуркації. До точки біфуркації $a < a^*$ ми маємо два стаціонарні стани. У точці біфуркації $a = a^*$ вони зливаються в один, далі при $a > a^*$ цих станів в системі не існує. Результати графічно представлено на рис. 4.6.

Не зважаючи на багаторічну історію існування і розвитку класичної теорії стійкості і біфуркацій, в певний момент дана теорія стала об'єктом загальної уваги. Причиною тому послугували популярно викладені версії робіт французького математика Рене Тома щодо так званої *теорії катастроф*.

Теорія катастроф на початку 70-х років минулого століття стала модною, зрозумілою (як тоді здавалося) для нефакхівців та універсальністю своїх претензій нагадувала псевдонаукові теорії минулих часів. Теорія катастроф Р. Тома фахівцями не була сприйнята як нове відкриття, хоча деякі результати цієї теорії заслуговують самої глибокої поваги. Але принципового наукового відкриття дана теорія не містить. В роботах Тома мова йшла все про ті ж біфуркації, але при цьому вибирався один з типів біфуркацій, а саме так звані *жорсткі біфуркації*. Для пояснення розглянемо два простих приклади.

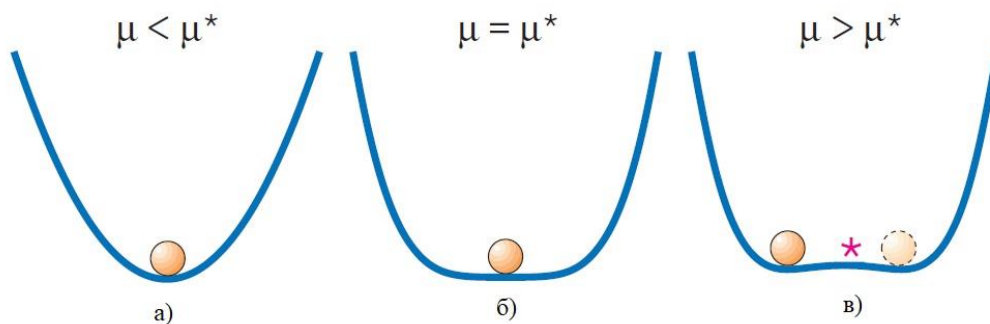


Рис. 4.7. Приклад “м’якої” біфуркації. Стаціонарний стан (а) втрачає стійкість (б), поблизу нього з’являються два нових стійких стаціонарних стани (в)

У першому випадку (рис. 4.7) в результаті біфуркації вихідний стаціонарний стан втрачає стійкість і народжуються два нових стійких

стаціонарних стани. При цьому з'являються три стаціонарних стани (рис. 4.7 в)), два з яких стійкі та один нестійкий. Нестійкий стаціонарний стан розташований в безпосередній близькості від вихідного стану, що втратив стійкість (позначено зірочкою на рис. 4.7 в)). Біфуркації такого типу називають *м'якими*. При цьому мають на увазі, що заново народжений режим функціонування системи ніби з'являється з режиму, який втратив стійкість і співіснує поруч з ним.

Інший приклад біфуркації якісно поданий на рис. 4.8. При $\mu < \mu^*$ (рис. 4.8 а)) кулька знаходиться в стійкому стаціонарному стані. При цьому існує ще один, нестійкий стан (позначено зірочкою на рис. 4.8 а)).

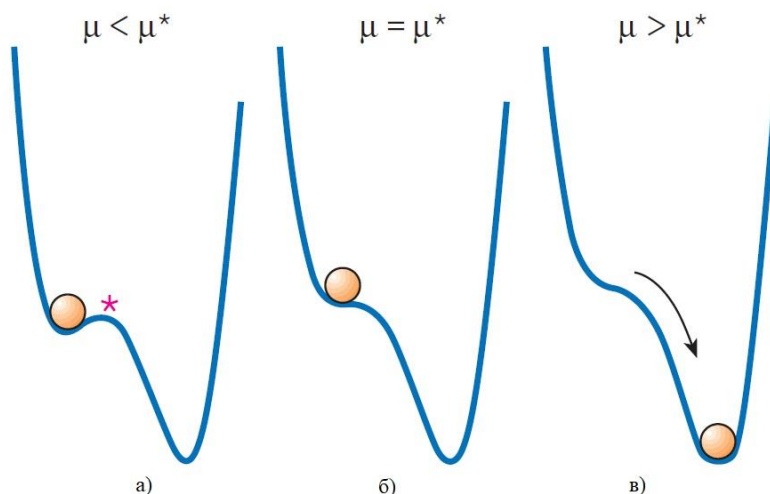


Рис. 4.8. Жорстка втрата стійкості стаціонарним станом, катастрофа. Якісна ілюстрація біфуркації “дворазова рівновага” (рис. 4.6)

У точці біфуркації $\mu = \mu^*$ стійкий і нестійкий стани зливаються в один (рис. 4.8 б)). Далі вони зникають і система обирає новий режим (наприклад, як це показано на рис. 4.8 в)), який істотно відрізняється від попереднього і не знаходиться в безпосередній близькості від вихідного режиму. Такий тип біфуркацій називають *жорстким*, і саме жорсткі біфуркації стали предметом аналізу в теорії катастроф. Приклад біфуркації “дворазова рівновага” в системі (4.4) є типовим прикладом жорсткої біфуркації.

4.5. Приклади фрактальних множин

Геометрія Евкліда – дивовижна теорія! Це прекрасний і надзвичайно корисний математичний інструмент для моделювання навколишнього світу. Проте, не дивлячись на її велич і красу, не кожен форму можна досліджувати за допомогою цієї теорії. Подивіться на архітектуру звичайного дерева, або людського мозку, або рельєфу на поверхні Місяця. У природі нерідко зустрічаються форми, при дослідженні яких моделі евклідової теорії не є ефективними. Однак така категорія геометричних об'єктів як фрактали справді готова забезпечити найбільш адекватний аналіз для цих форм [12, 14, 17, 25, 28, 43, 56, 60, 63].

Перший фрактал, який ми досліджуємо, відомий як *множина Кантора*. Ми використовуємо літеру \mathcal{K} для позначення множини Кантора і будуємо її ось яким чином. Для початку беремо одиничний відрізок $[0,1]$. Далі видаляємо з $[0,1]$ відкритий інтервал, що охоплює його середню третину $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Маємо два відрізки: $\mathcal{K}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Повторюємо процес: видаляємо середні третини у кожному з інтервалів $[0, \frac{1}{3}]$ і $[\frac{2}{3}, 1]$ та отримуємо

$$\mathcal{K}_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Цей принцип застосовується безліч разів.



Рис. 4.9. Канторова множина

На кожному етапі ми видаляємо відкриту середню третину на всіх відрізках з попереднього етапу. Скільки ми вирізали? Довжина відрізка дорівнює 1. На першому кроці ми видалили третину його довжини. На другому кроці ми видалили третину довжини залишку. Узагальнюючи, на кроці k загальна довжина 2^k замкнених інтервалів дорівнює $(\frac{2}{3})^k$, і прагне до нуля при $k \rightarrow \infty$. Виникає питання: чи залишилося щось після того, як ми виконали всі дії? Відповідь – досить багато! Наприклад, числа 0 і 1, а

також $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots$ (кінці інтервалів, що відкидаються) знаходяться в \mathcal{K} . Більше того, можна показати, що \mathcal{K} має потужність континууму, тобто, грубо кажучи, має такий самий запас точок, як і весь відрізок $[0,1]$.

Опишемо основні топологічні властивості множини Кантора \mathcal{K} . Очевидно, що множина Кантора обмежена, оскільки всі її елементи лежать всередині одиничного інтервалу $[0,1]$. Далі, множина Кантора замкнена, тобто містить всі свої граничні точки. Це безпосередньо випливає з формули

$$\mathcal{K} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_k,$$

де \mathcal{K}_k – описані вище замкнені множини, які є скінченним об'єднанням замкнених інтервалів.

Таким чином, множина Кантора є компактною множиною. Зауважимо, що компактність є надважливою властивістю при аналізі фрактальних множин.

Серед інших цікавих властивостей канторової множини відмітимо абсолютну незв'язність. Ця властивість означає, що для будь-яких точок p і q з \mathcal{K} існує точка між p і q , яка не належить \mathcal{K} .

Множина Кантора \mathcal{K} слугує гарним (хоч і не надто привабливим з точки зору ілюстрації) прикладом фракталу. Що ж таке *фрактал*? Ми опишемо дві важливі властивості фракталів: *самоподібність та дробову розмірність*.

По-перше, фрактали під мікроскопом мають такий самий вигляд, як і неозброєним оком. Під цим ми маємо на увазі, що якщо ми збільшимо масштаб на ділянці фрактального зображення, то те, що ми побачимо, буде дуже схоже на саму множину. Як приклад, ми можемо розглянути всю множину Кантора \mathcal{K} і крихітний шматочок, що лежить між $\frac{2}{81}$ та $\frac{3}{81}$. Виявиться, що ця частинка є просто $\frac{1}{81}$ – ою вихідної множини \mathcal{K} . Не залежно від того, наскільки маленькою буде частинка множини \mathcal{K} – вона матиме такий самий вигляд, як і \mathcal{K} .

По-друге, фрактали мають дробову розмірність. Дещо пізніше ми дамо точне означення, а зараз лише дамо інтуїтивне уявлення. Почнемо з точки. Точка – це, очевидно, об'єкт нульової розмірності. Вона не має довжини. Інтервал або крива у просторі – приклади одновимірних об'єктів; вони мають довжину, але не мають площі. Внутрішність

квадрата або границя круга на площині – приклади двовимірних об’єктів, що мають площу, але не мають об’єму. Що в цьому контексті можна сказати про множину Кантора? Вона не має довжини, тому є сенс говорити, що її розмірність не перевищує 1. З іншого боку множина Кантора містить достатньо багато точок для того, щоб засумніватись, що її розмірність 0. Пізніше ми покажемо, що її розмірність дробова та дорівнює $\ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309$.

Множина Кантора будується шляхом застосування нескінченної кількості разів процедури “вирізання середини” для відрізка на прямій. Опишемо приклади застосування цієї процедури для множин на площині \mathbb{R}^2 . Щоб побудувати трикутник Серпінського, візьмемо трикутник на площині. Введемо поняття *середнього трикутника*, тобто трикутника, що одержується з’єднанням середин його трьох сторін. Отриманий трикутник буде охоплювати $\frac{1}{4}$ від площі оригіналу. Тепер видаляємо внутрішню частину середнього трикутника. Залишається три копії вихідного трикутника, що дотикаються своїми вершинами один до одного. Вирізаємо в кожному з них внутрішність середніх трикутників. Повторюючи цю процедуру *безліч* разів, ми отримуємо фрактал, який називається *трикутником (серветкою) Серпінського*.

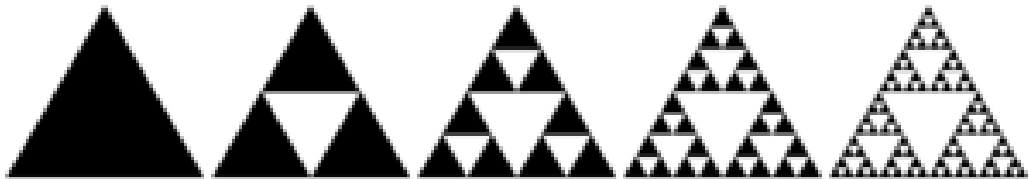


Рис. 4.10. Побудова трикутника Серпінського

Трикутник Серпінського має ту саму властивість самоподібності, що і множина Кантора. Крім того, кожен крок описаної процедури усуває $\frac{1}{4}$ площі, отже, після k -го кроку залишається $\left(\frac{3}{4}\right)^k$ від розміру площі оригіналу. Таким чином, можна сказати, що трикутник Серпінського має нульову площу. Але при цьому він здається однозначним масивнішим, ніж одновимірною кривою, тому можна припустити, що його розмірність знаходиться між 1 і 2. Дійсно, пізніше ми покажемо, що його розмірність дорівнює $\ln 3 / \ln 2 \approx 1,585$.

Ще одним прикладом застосування процедури «вирізання середини» для множин на площині є *сніжинка Коха*. Розглядаємо рівносторонній трикутник (без внутрішньої частини). Ми виділяємо середні третини на кожній зі сторін, але замість видалення вигинаємо ці відрізки так, щоб отримати додаткові дві сторони на кожній стороні трикутника. Далі ми повторюємо цю ж операцію для кожної з 12 сторін одержаної фігури. Повторюючи цю процедуру безліч разів ми отримаємо фрактал, який називається *сніжинкою Коха*.

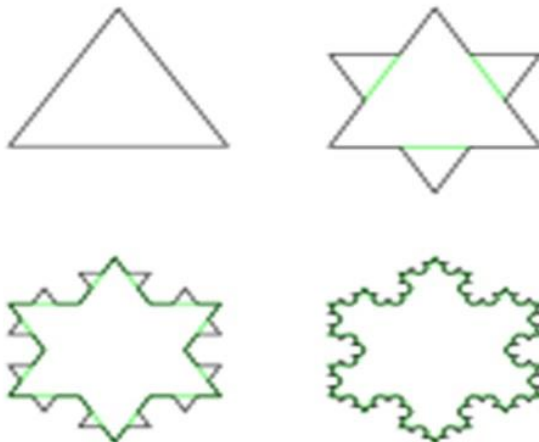


Рис. 4.11. Побудова сніжинки Коха

Сніжинка Коха має властивість самоподібності. Крім того, довжина отриманої кривої на кожному кроці збільшується в $\frac{4}{3}$. Таким чином, одержана фігура має нескінченну довжину, але нульову площу.

4.6. Нерухомі точки відображень стиску

Один з методів побудови та аналізу фракталів ґрунтується на властивостях нерухомих точок певного класу відображень [25, 63]. Нехай $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, де \mathbb{R}^n – n -вимірний евклідів простір, в якому відстань між точками визначається рівністю

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y)^T (x - y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Означення 4.1 Точка $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ називається *нерухомою точкою відображення* $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, якщо виконується рівність

$$f(\tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Означення 4.2. Відображення $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається відображенням стиску, якщо існує таке число s , де $0 < s < 1$, що для будь-яких векторів x та y справджується нерівність

$$d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y).$$

При цьому число s називається коефіцієнтом стиску.

Теорема 4.1 Нехай $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ є відображенням стиску. Тоді f має єдину нерухому точку $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Крім того, для будь-якого $a \in \mathbb{R}^n$ справджується $f^{(k)}(a) \rightarrow \tilde{x}$ коли $k \rightarrow \infty$, де $f^{(k)}$ – k -та ітерація відображення f , тобто

$$f^{(k)}(x) = f(f^{(k-1)}(x)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad f^{(0)}(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

З огляду на застосування до фрактальних множин нас цікавитиме, при яких умовах афінне відображення

$$f(x) = Ax + b$$

буде володіти властивостями стиску. Тут A – матриця розмірності $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$. В одновимірному випадку, тобто при $n = 1$, афінне відображення має вигляд $f(x) = ax + b$. Для того, щоб таке відображення було відображенням стиску, слід вимагати виконання нерівності $|a| < 1$. В багатовимірному випадку маємо

$$\|(Ax - b) - (Ay - b)\| \leq s \|x - y\|.$$

Звідси $\|A(x - y)\| \leq s \|x - y\|$. Отже, коефіцієнт стиску повинен задовольняти умову

$$\frac{\|A(x - y)\|}{\|x - y\|} \leq s.$$

Таким чином, нас цікавить максимальне значення $\|Az\|$ для одиничного вектора z . Це число називається *спектральною нормою* A і позначається $\|A\|$, тобто

$$\|A\| = \max_{\|z\|=1} \|Az\|.$$

Отже, афінне відображення $f(x) = Ax + b$ є відображенням стиску, якщо виконується нерівність

$$0 < \|A\| < 1.$$

При цьому коефіцієнтом стиску є число $s = \|A\|$.

Наприклад, афінне відображення з матрицею $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & -0,4 \end{pmatrix}$ є відображенням стиску з коефіцієнтом стиску $s = \|A\| = 0,6414$.

Важливою властивістю теореми про нерухому точку для відображень стиску є те, що вона справджується в довільних повних метричних просторах. Нагадаємо, що метричний простір – це сукупність елементів χ довільної природи, для яких задано функцію відстані (метрику) d , що має такі властивості (аксіоми метрики):

- i. для будь-яких $x, y \in \chi$, $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$;
- ii. для довільних $x, y \in \chi$ рівність $d(x, y) = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
- iii. для будь-яких $x, y, z \in \chi$ справджується $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (нерівність трикутника).

Евклідова відстань між точками на прямій, на площині, або в просторі задовольняє ці три властивості.

Означення 4.3 Відображення $f: \chi \rightarrow \chi$ є відображенням стиску, якщо існує число s , де $0 < s < 1$, таке, що для будь-яких точок $x, y \in \chi$ матимемо

$$d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y).$$

Означення 4.4 Метричний простір (χ, d) називається повним, якщо кожна послідовність Коші в ньому збігається до елемента з цього ж простору.

Властивістю повноти володіють далеко не всі метричні простори, проте стандартний n -вимірний евклідів простір \mathbb{R}^n , а також простір $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ всіх непорожніх компактних підмножин в \mathbb{R}^n є прикладами повних метричних просторів.

Теорема 4.2 Нехай ми маємо повний метричний простір (χ, d) та $f: \chi \rightarrow \chi$ є відображенням стиску. Тоді f має єдину нерухому точку $\tilde{x} \in \chi$, причому для будь-якого $a \in \chi$ матимемо $f^{(k)}(a) \rightarrow \tilde{x}$ коли $k \rightarrow \infty$.

Для аналізу фракталів ключовим є метричний простір непорожніх компактів в \mathbb{R}^n . Нагадаємо, що в \mathbb{R}^n компактна множина є замкненою і обмеженою.

Як і в попередніх розділах, позначимо через $comp(\mathbb{R}^n)$ набір усіх непорожніх компактних множин у \mathbb{R}^n . Таким чином $\mathcal{A} \in comp(\mathbb{R}^n)$ є замкненою і обмеженою підмножиною з \mathbb{R}^n . Наприклад, одиничне коло $S = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ є елементом з простору $comp(\mathbb{R}^2)$.

Означення відстані для $comp(\mathbb{R}^n)$ потребує додаткового обґрунтування. Нам відома евклідова відстань між точками x і y , яка позначена $d(x, y)$. Тепер розглянемо поняття відстані $h(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ між непорожніми компактними множинами $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in comp(\mathbb{R}^n)$.

Спочатку означимо відстань між точкою та компактною множиною

$$\rho(x, \mathcal{A}) = \min\{d(x, y): y \in \mathcal{A}\}.$$

Далі введемо асиметричну відстань між компактними множинами (напівметрику Хаусдорфа)

$$\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\rho(x, \mathcal{B}): x \in \mathcal{A}\}.$$

Функція β не є, на жаль, метрикою, оскільки $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \beta(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. Наприклад, якщо \mathcal{A} і \mathcal{B} є двома різними елементами з простору $comp(\mathbb{R}^n)$, причому $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, то $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, але $\beta(\mathcal{B}, \mathcal{A}) > 0$. Проте можна показати, що β задовольняє нерівність трикутника: $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \beta(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq \beta(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, де $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in comp(\mathbb{R}^n)$. Це підказує нам остаточну форму для встановлення відстані між ком пактами

$$h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max[\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \beta(\mathcal{B}, \mathcal{A})], \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in comp(\mathbb{R}^n).$$

Для введеної таким чином функції будуть виконуватись всі аксіоми метрики. Метрика h носить назву метрики Хаусдорфа на $comp(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4.3 ($comp(\mathbb{R}^n), h$) є повним метричним простором.

Тому в ньому справджується теорема про нерухому точку відображення стиску.

Теорема 4.4 Якщо $f: \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ є відображенням стиску, тоді f має єдину нерухому точку $\bar{X} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, тобто

$$\bar{X} = f(\bar{X})$$

і для будь-якого $\mathcal{A} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ виконується $f^{(k)}(\mathcal{A}) \rightarrow \bar{X}$ при $k \rightarrow \infty$.

Важливо розуміти, що нерухома «точка» відображення f не є точкою в звичайному сенсі – це може бути складна компактна множина. Саме так ми будемо конструювати фрактали: побудуємо відображення стиску на $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, а потім знайдемо їх нерухомі —точкї.

Існує природний спосіб перетворення функції, визначеної на \mathbb{R}^n , до функції, визначеної на $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Нехай $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – неперервна функція. Якщо \mathcal{A} – непорожній компакт в \mathbb{R}^n (тобто $\mathcal{A} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$), то визначимо

$$f(\mathcal{A}) = \{f(a): a \in \mathcal{A}\}.$$

Іншими словами, $f(\mathcal{A})$ – образ множини \mathcal{A} при відображенні f . Наприклад, якщо $f(x) = x^2$ і $\mathcal{A} = [-1,3]$, тоді $f(\mathcal{A}) = [0,9]$.

Розглянемо ще один приклад. Нехай $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ визначається через функцію $f(x) = Ax$, де $A \in 2 \times 2$ -матриця, яка має обернену. Нехай S – одиничне коло, яке є елементом з $\text{comp}(\mathbb{R}^2)$. Тоді $f(S)$ є еліпсом.

Інший приклад. Нехай \mathcal{A} – одноелементна множина $\{a\}$, яка є компактною множиною. Тоді, за означенням, $f(\{a\})$ є одноелементною множиною $\{f(a)\}$.

Важливим результатом з топології, який ми використаємо, є той факт, що якщо f – неперервне відображення і \mathcal{A} є компактною множиною, то $f(\mathcal{A})$ також є компактом. Таким чином, від неперервної функції $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ми завжди можемо перейти до відображення $f: \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Ключовим результатом для подальшого дослідження є той факт, що відображення стиску $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ відносно евклідової метрики залишається відображенням стиску як відображення $f: \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ відносно метрики Хаусдорфа.

Теорема 4.5 Якщо $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ є відображенням стиску з коефіцієнтом $s \in (0,1)$, то $f: \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ також є відображенням стиску з коефіцієнтом s .

Коротко опишемо кроки доведення. Ми знаємо, що $d(f(a), f(b)) \leq sd(a, b)$ для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тоді послідовно обґрунтовуємо:

крок 1: $\rho(f(a), f(B)) \leq s\rho(a, B)$ для будь-якої точки $a \in \mathbb{R}^n$ і для будь-якої множини $B \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$;

крок 2: $\beta(f(\mathcal{A}), f(B)) \leq s\beta(\mathcal{A}, B)$ для будь-яких множин $\mathcal{A}, B \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$;

крок 3: $h(f(\mathcal{A}), f(B)) \leq sh(\mathcal{A}, B)$ для будь-яких множин $\mathcal{A}, B \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Таким чином, ми показали, що якщо $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ є відображенням стиску, то $f: \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ також є відображенням стиску. Отже, за теоремою про відображення стиску, f має нерухому "точку" в просторі $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Що це за множина? Ми знаємо, що f , як відображення з \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n має нерухому точку $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, тобто $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Отже, $f(\{\tilde{x}\}) = \{f(\tilde{x})\} = \{\tilde{x}\}$. Звідси слідує, що одноелементна множина $\{\tilde{x}\}$ і є нерухомою "точкою" f в просторі $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$. В силу єдиності ніяких інших нерухомих точок відображення $f: \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ не існує.

Але ми говорили, що будемо створювати фрактали як нерухомі точки певних відображень стиску. Множина, що складається з однієї точки, не здається вражаючим фракталом.

При побудові фракталів ключовим моментом є можливість конструювання відображень з $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ в $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ за допомогою операції об'єднання. Тобто фрактали є нерухомими точками об'єднань відображень.

4.7. Фрактали як нерухомі точки

Припустимо, що задані відображення $f: \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ та $g: \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ [63]. Ми визначаємо нову функцію на $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, беручи об'єднання функцій f і g , яке ми позначимо через $f \cup g$. Означення є таким: для $\mathcal{A} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$

$$(f \cup g)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) \cup g(\mathcal{A}).$$

Розглянемо приклад. Нехай $f(x) = x^2$ і $g(x) = 2x + 5$. Тоді

$$f([-1,1]) = [0,1], g([-1,1]) = [3,7].$$

Отже, $(f \cup g)([-1,1]) = [0,1] \cup [3,7]$.

Наведемо ще один приклад. Нехай

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ та } g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

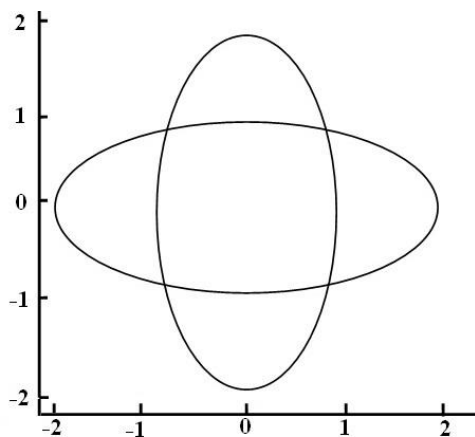


Рис. 4.12. Множина $(f \cup g)(S)$

Обчислимо $(f \cup g)(S)$, де S – одиничне коло. Бачимо, що f розтягує S вздовж осі x з коефіцієнтом 2. Тобто множина S розтягується в горизонтальний еліпс, тоді як g розтягує S вздовж осі y з коефіцієнтом 2, перетворюючи множину S у вертикальний еліпс. Власне, множина

$$(f \cup g)(S) = f(S) \cup g(S)$$

зображена на рис. 4.12.

Тепер природно виникає питання: якщо f і g – стискаючі відображення, то чи буде відображенням стиску також відображення $f \cup g$? Відповідь на це запитання дає така теорема.

Теорема 4.6 Якщо $f: \text{cotr}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{cotr}(\mathbb{R}^n)$ та $g: \text{cotr}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{cotr}(\mathbb{R}^n)$ – відображення стиску з коефіцієнтами $s \in (0,1)$ і $t \in (0,1)$ відповідно, то відображення $F: \text{cotr}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{cotr}(\mathbb{R}^n)$, визначене як $F = f \cup g$, також є відображенням стиску з коефіцієнтом $\max\{s, t\}$.

Коротко опишемо хід доведення. Спочатку встановлюється, що для будь-яких множин $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ виконується нерівність

$$h(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \leq \max\{h(\mathcal{A}, \mathcal{C}), h(\mathcal{B}, \mathcal{D})\}.$$

Тоді для $F = f \cup g$ та для непорожніх компактних множин \mathcal{A} і \mathcal{B} маємо

$$\begin{aligned} h(F(\mathcal{A}), F(\mathcal{B})) &= h(f(\mathcal{A}) \cup g(\mathcal{A}), f(\mathcal{B}) \cup g(\mathcal{B})) \leq \\ &\leq \max\{h(f(\mathcal{A}), f(\mathcal{B})), h(g(\mathcal{A}), g(\mathcal{B}))\} \leq \\ &\leq \max\{sh(\mathcal{A}, \mathcal{B}), th(\mathcal{A}, \mathcal{B})\} = \max\{s, t\}h(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Таким чином, F є відображенням стиску з коефіцієнтом $\max\{s, t\} \in (0, 1)$.

Подивимося, як ідея об'єднання функцій породжує фрактали. Наша перша мета – одержати множину Кантора. Нехай

$$f(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{та} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Обидві функції f і g є афінними функціями з коефіцієнтом $\frac{1}{3}$ при x . Отже, відображення $f: \text{comp}(\mathbb{R}^1) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^1)$ та $g: \text{comp}(\mathbb{R}^1) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^1)$ є відображеннями стиску з коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Тоді відображення $F = f \cup g: \text{comp}(\mathbb{R}^1) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^1)$ також є відображенням стиску з коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Тому існує множина $\mathcal{K} \in \text{comp}(\mathbb{R}^1)$ така, що $F(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Знайдемо цю множину. Спочатку зауважимо, що

$$F([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

тобто маємо перший крок, що виникає при побудові множини Кантора. Далі

$$\begin{aligned} f\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) &= \left[0, \frac{1}{9}\right], & g\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) &= \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \\ f\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) &= \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], & g\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) &= \left[\frac{8}{9}, 1\right]. \end{aligned}$$

Отже,

$$F^{(2)}([0,1]) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Маємо другий крок конструювання множини Кантора. Продовжуючи цей процес, ми можемо сподіватись, що він в границі дасть *множину Кантора*. Дійсно, нехай \mathcal{K} – це множина Кантора. Знайдемо $F(\mathcal{K})$. Маємо, що $f(\mathcal{K})$ стискає \mathcal{K} з коефіцієнтом $\frac{1}{3}$, тому $f(\mathcal{K})$ – це частина \mathcal{K} , яка лежить між 0 і $\frac{1}{3}$. Аналогічно, $g(\mathcal{K})$ стискає \mathcal{K} з коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Таким чином, $g(\mathcal{K})$ є частиною \mathcal{K} між $\frac{2}{3}$ і 1 . Разом $f(\mathcal{K}) \cup g(\mathcal{K})$ співпадає з \mathcal{K} . Іншими словами, $F(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Отже, множина Кантора є нерухомою точкою F .

Крім того, за теоремою про відображення стиску маємо, що якщо ми починаємо конструювати множину Кантора з будь-якої непорожньої компактної множини $\mathcal{A} \in \text{comp}(\mathbb{R}^1)$, то одержуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(F^{(k)}(\mathcal{A}), \mathcal{K}) = 0,$$

тобто $F^{(k)}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}$ в метриці Хаусдорфа, коли $k \rightarrow \infty$.

Зазначимо, що вибір f і g ґрунтується на вигляді множини Кантора \mathcal{K} . Дійсно, аналізуючи процедуру формування множини \mathcal{K} , ми бачимо, що вона утворюється за допомогою відрізків, довжина яких на кожному наступному кроці втричі менша ніж на попередньому. Цим самим реалізується *властивість самоподібності фракталів*.

Застосуємо аналогічний підхід для одержання трикутника Серпінського. Візьмемо рівнобедрений трикутник Q з вершинами у точках $(0,0)$, $(1,0)$ і $(\frac{1}{2}, 1)$. Знайдемо середини кожної зі сторін трикутника і з'єднаємо їх. Цим поділом початковий трикутник розбито на чотири нових рівносторонніх трикутники. На наступному кроці розглядатимемо сукупність трьох трикутників, що містять вершини вихідного трикутника та видалятимемо внутрішню частину середнього трикутника. Після першого кроку ми отримаємо три трикутники A, B, C , які містяться в початковому трикутнику Q .

Нам потрібно знайти три відображення стиску f_1, f_2, f_3 такі, що

$$f_1(Q) = A, \quad f_2(Q) = B, \quad f_3(Q) = C.$$

Зауважимо, що основні кроки, які нам потрібні – це масштабування та перенос. Розглянемо трикутник A . Якщо ми зменшимо координати x та y всіх точок трикутника Q з коефіцієнтом 2 , то отримаємо A . Тому покладемо

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

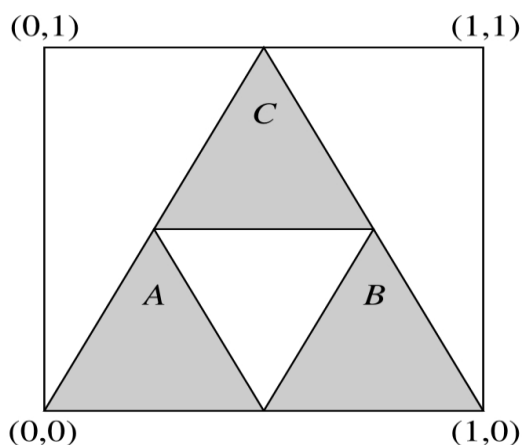


Рис. 4.12. Перший крок побудови трикутника Серпінського

Далі побудуємо трикутник B . Зазначимо, що трикутник B зміщений на відстань $\frac{1}{2}$ вправо відносно трикутника A . Отже,

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Трикутник C утворюється з трикутника A послідовним його переміщенням на $\frac{1}{4}$ вправо і на $\frac{1}{2}$ вверх. Тому

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що f_1, f_2 і f_3 є відображеннями стиску з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$. Таким чином, $F = f_1 \cup f_2 \cup f_3$ також є відображенням стиску з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$. За теоремою 4.4 відображення $F: \text{comp}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^2)$ має єдину нерухому точку $\mathcal{T} \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$. За побудовою

$$f_1(\mathcal{T}) = A \cap \mathcal{T}, \quad f_2(\mathcal{T}) = B \cap \mathcal{T} \quad \text{та} \quad f_3(\mathcal{T}) = C \cap \mathcal{T}.$$

Тому

$$F(\mathcal{T}) = f_1(\mathcal{T}) \cup f_2(\mathcal{T}) \cup f_3(\mathcal{T}) = (A \cap \mathcal{T}) \cup (B \cap \mathcal{T}) \cup (C \cap \mathcal{T}) = \mathcal{T}.$$

Множина \mathcal{T} є трикутником Серпінського і є нерухомою точкою відображення F .

В силу теореми 4.4 про нерухому точку, якщо за початкову множину виберемо будь-яку непорожню компактну множину $\mathcal{X} \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$ і будемо знаходити ітерації $F^{(2)}(\mathcal{X}), F^{(3)}(\mathcal{X}), F^{(4)}(\mathcal{X}), \dots$, то одержимо, що в метриці Хаусдорфа

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(F^{(k)}(\mathcal{X}), \mathcal{T}) = 0.$$

Тобто $F^{(k)}(\mathcal{X})$ зі збільшенням k все більше буде подібним до трикутника Серпінського \mathcal{T} .

Певна модифікація описаної вище процедури побудови нерухомої точки відображення можлива і для сніжинки Коха. Можна показати, що сніжинка Коха є нерухомою точкою відображення

$$F = f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4: \text{comp}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^2),$$

де

$$f_1(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix},$$

$$f_4(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, виходячи з ідеї самоподібності, ми приходимо до такого алгоритму побудови фрактальної множини:

- i. вибираємо сукупність f_1, f_2, \dots, f_k афінних відображень стиску з \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n (отже, і на $\text{отр}(\mathbb{R}^n)$);
- ii. породжуємо відображення $F = f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_k$;
- iii. нерухома точка відображення F (яка існує, єдина, є непорожньою компактною множиною в \mathbb{R}^n) дає нам фрактальну множину.

4.8. Фрактальна розмірність множин. Фрактал

Одним з фундаментальних математичних понять є поняття розмірності простору і множини [12, 25, 43, 63]. В класичному аналізі поняття розмірності множини пов'язане зі знаходженням кількості лінійно незалежних векторів, які задають базис афінної оболонки множини. Таке розуміння розмірності є базовим. Воно передбачає, що розмірність є невід'ємним цілим числом.

Аналіз мір найпростіших фігур таких як відрізок, куб, куля показує, що міра цих фігур пов'язана з розмірністю простору, в якому розглядається ця фігура. Наприклад, відрізок на прямій \mathbb{R}^1 довжини a має міру a . Квадрат зі стороною a на площині \mathbb{R}^2 має міру a^2 . Куб зі стороною a в просторі \mathbb{R}^3 має міру a^3 . Таким способом, виникає ідея знаходження відповідності між розмірністю множини та її мірою. Саме теорія міри дозволяє розповсюдити поняття розмірності множини на випадок, коли розмірність множини може визначатись нецілим невід'ємним числом. У такий спосіб природним продовженням досліджень класичної теорії міри є її застосування до визначення розмірностей фрактальних множин.

Помітимо, що в просторі \mathbb{R}^d об'єм кулі радіусу $\varepsilon > 0$ пропорційний ε^d . Покриємо множину $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^d$ мінімальною кількістю куль радіусу $\varepsilon > 0$ і позначимо цю кількість $N(\varepsilon, d)$. Тоді величина

$$V(\varepsilon, d) = N(\varepsilon, d)\varepsilon^d$$

є оцінкою міри множини \mathcal{A} і при $\varepsilon \rightarrow 0$ наближається до величини, що пропорційна мірі множини \mathcal{A} . Зазначимо, що якщо збільшити розмірність простору d і вибрати $d_0 > d$, то при $\varepsilon \rightarrow +0$ величина

$$V(\varepsilon, d_0) = N(\varepsilon, d_0)\varepsilon^{d_0} \rightarrow 0.$$

Якщо ж вибрати розмірність $d_0 < d$, то завдяки кількості куль $N(\varepsilon, d_0)$, які покривають множину, оцінка міри $V(\varepsilon, d_0)$ стає необмеженою. Ця закономірність є ознакою вибору розмірності d множини \mathcal{A} .

Виявляється, що знайдена таким способом величина d може бути нецілим числом. Так, множина Кантора, трикутник Серпінського, сніжинка Коха мають нецілу розмірність, якщо її визначати за таким методом. Тоді як розмірності кулі, куба, еліпсоїда збігаються з класичними.

Розглянемо означення фрактальної розмірності множини, приклади її знаходження, а також наведемо приклад застосування фрактальної розмірності до аналізу атракторів диференціальних рівнянь.

4.8.1. Поняття фрактальної розмірності множин

Нехай \mathcal{A} – замкнена обмежена множина точок в \mathbb{R}^n [12, 43]. Позначимо через $U_\varepsilon(x_0)$ відкритий ε -окіл точки x_0 . Кажуть, що околи $U_\varepsilon(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$, покривають множину \mathcal{A} , якщо їх об'єднання містить множину \mathcal{A} , тобто

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^M U_\varepsilon(x_i). \quad (4.9)$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Позначимо $N(\varepsilon)$ – найменше значення M , при якому виконується (4.9), тобто $N(\varepsilon)$ є найменшим числом околів, якими можна покрити множину \mathcal{A} при заданому ε .

Означення 4.5 ε -фрактальною d -мірою множини \mathcal{A} називається число

$$\mu(\mathcal{A}, d, \varepsilon) = \varepsilon^d N(\varepsilon). \quad (4.10)$$

Наприклад, якщо $\mathcal{A}_1 = [0, 1]$ є одиничним відрізком, то $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$, де $\left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$ – найбільше ціле число, менше чи рівне $\frac{1}{2\varepsilon}$. Оскільки M – цілі додатні числа, то такий мінімум $N(\varepsilon)$ існує.

Означення 4.6 Фрактальною d -мірою множини \mathcal{A} називається число

$$\mu_F(\mathcal{A}, d) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(\mathcal{A}, d, \varepsilon) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d N(\varepsilon). \quad (4.11)$$

В конкретних прикладах

$$\mu_F(\mathcal{A}, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d N(\varepsilon). \quad (4.12)$$

Так, якщо $\mathcal{A}_1 = [0, 1]$, то при $d = 1$ маємо

$$\mu_F(\mathcal{A}_1, 1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^1 N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \left(\left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

Водночас, для $d > 1$

$$\mu_F(\mathcal{A}_1, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \left(\left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \right) = 0,$$

для $0 \leq d < 1$

$$\mu_F(\mathcal{A}_1, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \left(\left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \right) = +\infty.$$

В загальному випадку для замкненої обмеженої множини \mathcal{A} , якщо $\mu_F(\mathcal{A}, d') < +\infty$, то $\mu_F(\mathcal{A}, d) = 0$ для будь-якого $d > d'$. Якщо ж $\mu_F(\mathcal{A}, d') > 0$, то для будь-яких $d < d'$ виконано $\mu_F(\mathcal{A}, d) = +\infty$.

Отже, знайдеться таке число $d_0 \in [0, +\infty]$, що $\mu_F(\mathcal{A}, d) = 0$ при $d > d_0$ та $\mu_F(\mathcal{A}, d) = +\infty$ при $d < d_0$, в той час як $\mu_F(\mathcal{A}, d_0)$ може бути будь-яким числом півосі $[0, +\infty)$. Отже, існує

$$d_0 = \inf \{d \geq 0: \mu_F(\mathcal{A}, d) = 0\}. \quad (4.13)$$

Означення 4.7 Число d_0 , що задовольняє (4.13), називається фрактальною розмірністю множини \mathcal{A} і позначається $d_F(\mathcal{A})$.

Фрактальна розмірність множини \mathcal{A} називається також розмірністю Хаусдорфа або розмірністю Хаусдорфа–Безіковича цієї множини.

Розглянемо приклад одноточкової множини $\mathcal{A} = \{a\}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ множини \mathcal{A} можна покрити однією кулею радіусу ε . У цьому випадку $N(\varepsilon) = 1$ і $\mu(\mathcal{A}, d, \varepsilon) = \varepsilon^d$. Тоді фрактальна міра

$$\mu_F(\mathcal{A}, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d = 0, \quad d \geq 0.$$

Отже, $\inf \{d \geq 0: \mu_F(\mathcal{A}, d) = 0\} = 0$. Це означає, що фрактальна розмірність одноточкової множини рівна 0. Аналогічно можна показати, що фрактальна розмірність множини, яка складається зі скінченної кількості точок, рівна 0.

Якщо $\mathcal{A}_1 = [0, 1]$, то $\mu_F(\mathcal{A}_1, d) = 0$ при $d > 1$, $\mu_F(\mathcal{A}_1, d) = +\infty$ при $d < 1$ та $\mu_F(\mathcal{A}_1, d) = \frac{1}{2}$ при $d = 1$. Відповідно, фрактальна розмірність $d_F(\mathcal{A}_1) = 1$.

Нехай для $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, \mathcal{A})$ виконані нерівності

$$0 < C_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \leq N(\varepsilon) \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d, \quad (4.13^*)$$

де сталі C_1 та C не залежать від ε . Тоді для фрактальної міри $\mu_F(\mathcal{A}, d)$ виконуються нерівності

$$0 < C_1 \leq \mu_F(\mathcal{A}, d) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d N(\varepsilon) \leq C < +\infty.$$

Звідси з означення 4.7 та з (4.13) випливає, що

$$d = d_F(\mathcal{A}). \quad (4.14)$$

Таким чином, якщо виконано (4.13*), то показник d в (4.13*) збігається з фрактальною розмірністю $d_F(\mathcal{A})$.

Відзначимо також, що якщо має місце (4.13*), то можна дати явну формулу для фрактальної розмірності $d_F(\mathcal{A})$. Дійсно, прологарифмувавши нерівність (4.13*), маємо

$$\ln C_1 + d \ln \frac{1}{\varepsilon} \leq \ln N(\varepsilon) \leq \ln C + d \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Звідси

$$\frac{\ln C_1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} + d \leq \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln C}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} + d.$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0+$ у цих нерівностях, отримуємо

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Приклад 4.1 Знайдемо фрактальну розмірність множини

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{0\}.$$

Розглянемо покриття точок $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}$ околами $U_{\varepsilon_p} \left(\frac{1}{k} \right), k = 1, 2, \dots, p$, де

$$\varepsilon_p = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{9} \frac{1}{p(p-1)},$$

$$U_{\varepsilon_p} \left(\frac{1}{k} \right) = \left\{ \frac{1}{k} - \varepsilon_p < x < \frac{1}{k} + \varepsilon_p \right\}.$$

Ці околи не перетинаються. Тому згідно з (4.10) при $d = \frac{1}{2}$

$$\mu \left(\mathcal{A}, \frac{1}{2}, \varepsilon_p \right) \geq p \cdot \varepsilon_p^{1/2} = p \cdot \frac{1}{3 p^{1/2} (1-p)^{1/2}}.$$

Звідси випливає, що фрактальна міра

$$\mu_F \left(\mathcal{A}, \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{3} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{p^{1/2} (1-p)^{1/2}} = \frac{1}{3}. \quad (4.15)$$

Відтак $\mu_F \left(\mathcal{A}, \frac{1}{2} \right) > 0$. Крім того, ми можемо покрити всю множину

$$\mathcal{A} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{p} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p+2}, \dots \right\} \cup \{0\}$$

системою околів $U_{\varepsilon_p} \left(\frac{1}{k} \right), k = 1, 2, \dots, p$, а точки множини \mathcal{A} , які лежать на відрізку $\left[0, \frac{1}{p+1} \right]$ – околами $U_{\varepsilon_p} (x_i)$, де $i = 1, \dots, \left[\frac{1}{2\varepsilon_p(p+1)} \right] + 1, x_i \in \left[0, \frac{1}{p+1} \right]$, $\varepsilon_p = \frac{1}{9 p(p-1)}$. Відповідно, число ε_p -околів, якими ми покрили всю множину \mathcal{A} , рівне

$$p + \left\lfloor \frac{9p(p-1)}{2(p+1)} \right\rfloor + 1 = M_p \leq Cp,$$

де C не залежить від p . Аналогічно до (4.15) отримуємо

$$N(\varepsilon_p) \cdot \varepsilon_p^{1/2} \leq Cp \varepsilon_p^{1/2} = Cp \frac{1}{3 p^{1/2} (1-p)^{1/2}},$$

$$\mu_F \left(\mathcal{A}, \frac{1}{2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} N(\varepsilon_p) \cdot \varepsilon_p^{1/2} \leq \frac{C}{3} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{p^{1/2} (1-p)^{1/2}} = \frac{C}{3}. \quad (4.16)$$

З оцінок (4.15), (4.16) та (4.13*), (4.14) слідує, що

$$d_F(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 4.2 Канторова множина та її фрактальна розмірність.

Розглянемо канторову множину \mathcal{K} . Нагадаємо, що канторова множина є підмножиною відрізка $[0, 1] = \Delta_0$ і конструюється за допомогою такого алгоритму:

- на *першому кроці* видаляємо із відрізка $[0, 1] = \Delta_0$ інтервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Залишаються два відрізки $\mathcal{K}_1^1 = \Delta_1^1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\mathcal{K}_1^2 = \Delta_1^2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

- на *другому кроці* з кожного з відрізків $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ та $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ видаляємо його середню третину, тобто інтервали $\left[\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right]$ та $\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\right]$

Залишаються 2^2 відрізки $\mathcal{K}_2^1 = \Delta_2^1 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right]$, $\mathcal{K}_2^2 = \Delta_2^2 = \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right]$, $\mathcal{K}_2^3 = \Delta_2^3 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\right]$, $\mathcal{K}_2^4 = \Delta_2^4 = \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}, 1\right]$ тощо.

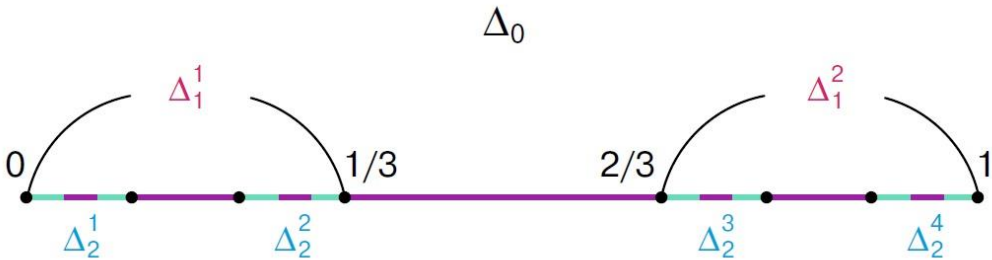


Рис. 4.13. Побудова канторової множини

Так, на кожному кроці ми видаляємо середню третину відрізків, що одержані на попередньому кроці (рис. 4.13). Канторова множина є перетином всіх одержаних таким чином відрізків, тобто

$$\mathcal{K} = \Delta_0 \cap \{\Delta_1^1 \cup \Delta_1^2\} \cap \{\Delta_2^1 \cup \Delta_2^2 \cup \Delta_2^3 \cup \Delta_2^4\} \cap \dots$$

За побудовою множина \mathcal{K} складається з точок x відрізка $[0, 1]$, які мають вигляд

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i}, \text{ де } \alpha_i = 0 \text{ чи } \alpha_i = 2.$$

Теорема 4.7 *Фрактальна розмірність $d_F(\mathcal{K})$ канторової множини \mathcal{K} рівна*

$$d_F(\mathcal{K}) = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Доведення. Скористаємось властивістю самоподібності канторової множини \mathcal{K} : частина множини \mathcal{K} , яка розташована на відрізку $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, подібна всій множині \mathcal{K} . Точніше, та частина, яку позначимо \mathcal{K}_1^1 , отримується з \mathcal{K} за допомогою множення на $\frac{1}{3}$ всіх точок множини \mathcal{K} . Аналогічно частина \mathcal{K}_1^2 канторової множини \mathcal{K} розташована на відрізку $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, подібна всій множині і отримується зі всієї множини \mathcal{K} стисненням в три рази.

Якщо $N(\varepsilon, \mathcal{K})$ – найменше число ε – околів, які покривають \mathcal{K} , а $N\left(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{K}_1^1\right)$ та $N\left(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{K}_1^2\right)$ є найменшим числом $\frac{\varepsilon}{3}$ – околів, що покривають відповідно \mathcal{K}_1^1 та \mathcal{K}_1^2 , то з властивості самободібності маємо

$$N\left(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{K}_1^1\right) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{K}_1^2\right) = N(\varepsilon, \mathcal{K}).$$

Звідси випливає, що

$$N\left(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{K}\right) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{K}_1^1\right) + N\left(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{K}_1^2\right) = 2N(\varepsilon, \mathcal{K}) \text{ при } \varepsilon \leq \frac{1}{2}. \quad (4.17)$$

Для спрощення подальших міркувань припустимо

$$N(\varepsilon, \mathcal{K}) \sim C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d, \quad (4.18)$$

де \sim означає, що відношення величин зліва та справа прагне при $\varepsilon \rightarrow 0 +$ до 1. З (4.17) та (4.18) маємо

$$2C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \sim 2N(\varepsilon, \mathcal{K}) = N\left(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{K}\right) \sim C \left(\frac{1}{\varepsilon/3}\right)^d.$$

Звідси $\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^d \sim 2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$. Отже, $\frac{3^d}{2} = 1$ і $d = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

□

Фрактальною множиною або фракталом називається множина, фрактальна розмірність якої є дробовим числом. Більш загально, фракталом називають таку множину, фрактальна розмірність якої не співпадає з її топологічною розмірністю.

4.8.2. Приклади знаходження фрактальної розмірності множин на площині

Нехай \mathcal{A} – замкнена обмежена множина на площині \mathbb{R}^2 . Припустимо, що для $N(\varepsilon)$ має місце оцінка (4.13*). Тоді фрактальна розмірність визначається за формулою (4.14) [12].

Приклад 4.3 Фрактальна розмірність квадрата.

Нехай $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Найменше число ε –околів $U_\varepsilon(x_i), i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, які покривають квадрат \mathcal{A} , допускає оцінку

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \leq N(\varepsilon) \leq C \frac{1}{\pi\varepsilon^2}. \quad (4.19)$$

Ця оцінка випливає з того, що площа квадрата рівна 1, а площа ε –околу рівна $\pi\varepsilon^2$. З (4.13*), (4.14), та (4.19) слідує, що

$$d = d(\mathcal{A}) = 2.$$

Приклад 4.4 *Фрактальна розмірність серветки Серпінського.*

Розглянемо рівносторонній трикутник Δ (а саме його сторони з частиною площини, яка ними обмежена). Нагадаємо алгоритм конструювання трикутника Серпінського:

▪ на *першому кроці* видалимо з вихідного трикутника Δ внутрішню частину трикутника, вершини якого є серединами вихідного трикутника. Ми отримаємо три трикутники $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3$ (рис 4.14);

▪ на *другому кроці*, аналогічно до попереднього кроку, видаляємо з кожного з трикутників $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3$ внутрішні частини трикутників, вершинами яких є середини сторін цих трикутників (рис 4.14).

Цей процес продовжуємо до нескінченності. Перетин отриманих на кожному кроці трикутників називається серветкою Серпінського \mathcal{T}

$$\mathcal{T} = \Delta \cap \{\Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 \cup \Delta_1^3\} \cap \{\Delta_2^1 \cup \Delta_2^2 \cup \Delta_2^3\} \cap \{\Delta_3^1 \cup \Delta_3^2 \cup \Delta_3^3\} \cap \{\Delta_4^1 \cup \Delta_4^2 \cup \Delta_4^3\} \cap \{\Delta_5^1 \cup \Delta_5^2 \cup \Delta_5^3\} \cap \{\Delta_6^1 \cup \Delta_6^2 \cup \Delta_6^3\} \cap \{\Delta_7^1 \cup \Delta_7^2 \cup \Delta_7^3\} \cap \dots$$

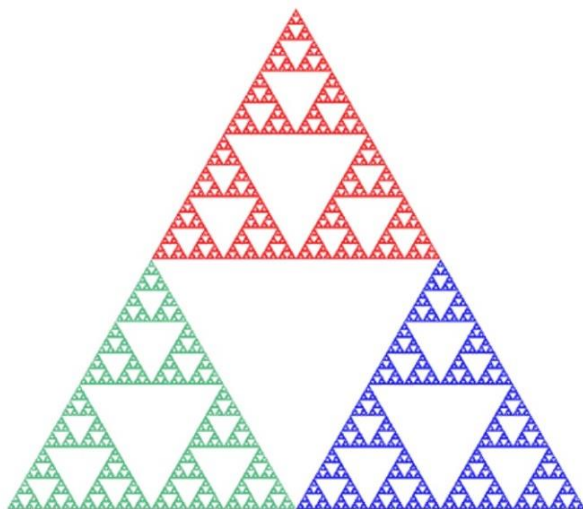


Рис. 4.14. *Серветка Серпінського*

Теорема 4.8 *Фрактальна розмірність $d_F(\mathcal{T})$ серветки Серпінського \mathcal{T}*

$$d_F(\mathcal{T}) = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \quad (4.20)$$

Доведення. Серветка Серпінського, як і канторова множина, володіє властивістю самоподібності. Це означає, що трикутники, які отримані на кожному кроці конструювання серветки Серпінського \mathcal{T} , подібні до вихідного трикутника Δ . При цьому коефіцієнт подібності між трикутниками на сусідніх кроках дорівнює $1/2$. Тому, позначаючи через $N(\varepsilon) = N(\varepsilon, \mathcal{T})$ найменше число ε -околів, які покривають серветку Серпінського, маємо

$$N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{T} \cap \Delta_1^1\right) = N(\varepsilon, \mathcal{T}) = N(\varepsilon).$$

Тоді

$$\begin{aligned} N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &= N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{T}\right) \leq & (4.21) \\ &\leq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{T} \cap \Delta_1^1\right) + N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{T} \cap \Delta_1^2\right) + N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{T} \cap \Delta_1^3\right) = 3N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Крім того, можна встановити таку оцінку знизу

$$N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \geq 3(N(\varepsilon) - 4). \quad (4.21^*)$$

Припустимо, для спрощення подальшого доведення (аналогічно до випадку знаходження фрактальної розмірності канторової множини), що

$$N(\varepsilon) \sim C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d.$$

Тоді з (4.21) отримуємо

$$C \left(\frac{1}{\varepsilon/2}\right)^d \sim N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 3N(\varepsilon) \sim 3C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d.$$

Звідси

$$2^d \leq 3 \quad \text{і} \quad d \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Аналогічно з (4.21*) отримуємо

$$d \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

З отриманих оцінок для d випливає (4.20). Зазначимо, що фрактальна розмірність серветки Серпінського більша 1, але менша 2. □

4.8.3. Фрактал, як компакт дробової фрактальної розмірності

Розглянемо ще один підхід до знаходження фрактальної розмірності множин [63]. Зауважимо, що існують геометричні об'єкти, розмірність яких зрозуміла інтуїтивно. До прикладу, скінченна множина точок – нуль-вимірний об'єкт, пряма є одновимірним об'єктом, внутрішність еліпса чи кола – двовимірні об'єкти, внутрішність куба і кулі – тривимірні об'єкти. Власне, інтуїтивно зрозуміло також, що трикутник Серпінського “товстіший” за пряму, але “тонший” ніж круг. У цьому пункті ми надамо цьому інтуїтивно зрозумілому, але нечіткому, твердженню математичну строгість, використовуючи поняття фрактальної розмірності з іншого ракурсу.

Центральна ідея в обчисленні розмірності компактної (тобто замкненої і обмеженої) множини Q є покриття Q замкненими кулями заданого достатньо малого радіусу. Визначимо $N(Q, r)$ як мінімальну кількість куль радіусу r , необхідних для покриття Q .

Розглянемо приклад. Нехай Q – відрізок $[-1,1]$. Нагадаємо, що відрізок є одновимірною множиною. Якщо радіус кулі $r = 1$, тоді очевидно, що кількість куль, які покривають Q , рівна 1. Якщо радіус кулі $r = \frac{1}{2}$, то кількість куль, які покривають Q , рівна 2, тобто $[-1,1] = [-1,0] \cup [0,1]$. При $r = \frac{1}{4}$ кількість куль, які покривають Q , рівна 4. Отже, бачимо, що $rN(Q, r) = 1$, $r = \frac{1}{m}$, $m = 1, 2, \dots$. Звідси

$$N(Q, r) = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Якщо $r > 0$ не є раціональним числом вигляду $r = \frac{1}{m}$, $m = 1, 2, \dots$, то $N(Q, r) = \left[\frac{1}{r} \right] + 1$, де $\left[\frac{1}{r} \right]$ – найбільше ціле число, яке менше або рівне $\frac{1}{r}$. Цей факт записується таким способом

$$N(Q, r) \propto r^{-1}.$$

Розглянемо ще один приклад. Нехай Q є деякою кривою (рис. 4.16). На рисунку показано, що криву ми можемо покрити двома кулями радіусу

1, тобто $N(Q, 1) = 2$. Далі для покриття Q кулями радіусу $\frac{1}{2}$ необхідно 5 куль, тому $N(Q, \frac{1}{2}) = 5$. В той самий спосіб одержуємо $N(Q, \frac{1}{4}) = 10$, $N(Q, \frac{1}{8}) = 20$. Коли ми вдвічі зменшуємо радіус куль, потрібне нам число куль, які покривають множину, збільшується приблизно вдвічі. Тобто при досить малому значенні радіусу, куля радіусу r охоплює приблизно $2r$ довжини кривої. Цей факт записується так

$$N(Q, r) \propto r^{-1}.$$

Чим менший радіус куль, тим більше куль потрібно для побудови покриття і тим точнішою є оцінка.

Розглянемо ще один приклад. Нехай Q – квадрат зі стороною 1 на площині. Куля радіусу r охоплює площу πr^2 . Оскільки площа квадрата Q дорівнює 1 і площа покриття, яка рівна $\pi r^2 N(Q, r)$, більша площі квадрата, то виконується нерівність $\pi r^2 N(Q, r) \geq 1$, при цьому $r^2 N(Q, r) \leq 1$. Звідси випливає, що

$$\frac{1}{\pi} r^{-2} \leq N(Q, r) \leq r^{-2}.$$

Тобто, використовуючи введене позначення, одержуємо

$$N(Q, r) \propto r^{-2}.$$

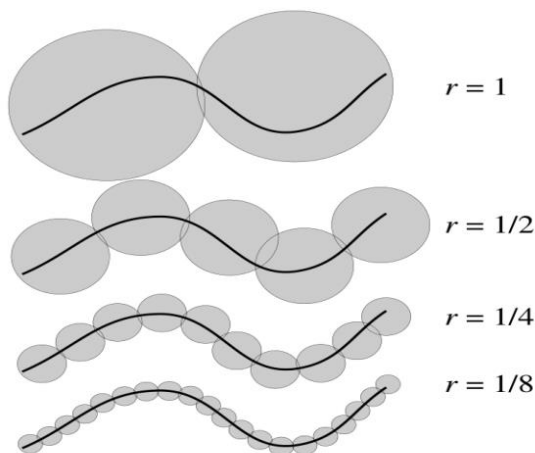


Рис. 4.16. Обчислення розмірності кривої

Нехай Q – скінченна множина точок. Тоді для достатньо малих r число $N(Q, r)$ є константою і дорівнює кількості точок Q . Запишемо це так $N(Q, r) \propto 1$ і, формально записуючи 1 як r^{-0} , маємо $N(Q, r) \propto r^{-0}$.

Перейдемо до \mathbb{R}^3 . Нехай Q – одиничний куб. Оскільки об'єм кулі дорівнює $\frac{4}{3}\pi r^3$, то $\frac{1}{r^3} \geq N(Q, r) \geq \frac{3}{4\pi r^3}$, отже

$$N(Q, r) \propto r^{-3}.$$

Таким способом, для об'єкта Q відомої розмірності d ми маємо

$$N(Q, r) \propto r^{-d}.$$

Тепер зробимо знак \propto дещо конкретнішим: якщо для функцій f і g ми пишемо $f(r) \propto g(r)$, то ми маємо на увазі, що

$$f(r) = g(r) \cdot \omega(r), \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln \omega(r)}{\ln g(r)} = 0.$$

Прологарифмуємо рівність, тоді

$$\ln f(r) = \ln g(r) + \ln \omega(r).$$

Розділивши обидві сторони рівняння на $\ln g(r)$, отримаємо

$$\frac{\ln f(r)}{\ln g(r)} = 1 + \frac{\ln \omega(r)}{\ln g(r)}.$$

Таким чином, ми формалізуємо позначення $f(r) \propto g(r)$ так

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(r)}{\ln g(r)} = 1.$$

Розглянемо приклад. Вище ми показали, що якщо Q є квадратом на площині зі стороною 1, то

$$N(Q, r) \propto r^{-2}.$$

Отже

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-2}} = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-1}} = 2.$$

Узагальнимо наведені приклади: якщо

$$N(Q, r) \propto r^{-d},$$

то

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-1}} = d.$$

Відтак, приходимо до означення фрактальної розмірності компактної множини Q .

Означення 4.8 Фрактальна розмірність компакту Q визначається співвідношення

$$d_F(Q) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-1}}.$$

З самої назви об'єкту в даному означенні слідує, що *фрактал є компактом з дробовою фрактальною розмірністю*. Зауважимо, що в пункті 4.9.1 ми одержали співвідношення для фрактальної розмірності, аналогічне до означення 4.8, базуючись на формулі (4.13*).

Використовуючи означення 4.8, знайдемо фрактальну розмірність трикутника Серпінського T . Для знаходження фрактальної розмірності необхідно обчислити мінімальне число куль, що покриває компакт Q . Крім того, покриття можна здійснювати не лише кулями, а й квадратами. Позначимо через $N_0(Q, r)$ мінімальну кількість квадратів (з їх внутрішніми частинами) зі стороною r , що покривають компакт Q . Тоді можна показати, що

$$N(Q, r) \leq N_0(Q, r) \leq 4N(Q, r).$$

В останній нерівності беремо логарифми від всіх частин і ділимо на $\ln r^{-1}$. Отримуємо

$$\frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-1}} \leq \frac{\ln N_0(Q, r)}{\ln r^{-1}} \leq \frac{\ln 4 + \ln N(Q, r)}{\ln r^{-1}}.$$

Звідси випливає, що

$$d_F(Q) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-1}} = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\ln N_0(Q, r)}{\ln r^{-1}}.$$

Але навіть обчислення $N_0(Q, r)$ може стати нетривіальною задачею, якщо число r не відповідає геометрії, притаманній саме фігурі Q . Наприклад, якщо $r = \frac{1}{2}$, неважко помітити, що нам потрібно рівно три квадрати для покриття трикутника Серпінського \mathcal{T} . Так само, $N_0\left(\mathcal{T}, \frac{1}{4}\right) = 9$. Однак, значення $N_0\left(\mathcal{T}, \frac{1}{5}\right)$ далеко не очевидне. Як правило, дуже важко знайти формулу $N_0(Q, r)$, яка справджується для всіх r . Це підводить нас до такого спрощення міркувань: якщо розмірність Q встановлена, то ми знаємо, що існує границя

$$\ln N_0(Q, r) / \ln r^{-1} \rightarrow d_F(Q) \text{ при } r \rightarrow 0+.$$

Тоді вибираємо послідовність чисел $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$, яка прямує до нуля, і тоді послідовність

$$\frac{\ln N_0(Q, r_1)}{\ln r_1^{-1}}, \quad \frac{\ln N_0(Q, r_2)}{\ln r_2^{-1}}, \quad \frac{\ln N_0(Q, r_3)}{\ln r_3^{-1}}, \dots$$

збігається до $d_F(Q)$.

Подивимося, як це працює з трикутником Серпінського \mathcal{T} . Маємо

$$N_0\left(\mathcal{T}, \frac{1}{2}\right) = 3, \quad N_0\left(\mathcal{T}, \frac{1}{4}\right) = 9, \quad N_0\left(\mathcal{T}, \frac{1}{8}\right) = 27, \quad N_0\left(\mathcal{T}, \frac{1}{2^k}\right) = 3^k.$$

Таким чином

$$d_F(\mathcal{T}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(\mathcal{T}, r)}{\ln r^{-1}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(\mathcal{T}, 2^{-k})}{\ln 2^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^k}{\ln 2^k} =$$

$$= \frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3 \approx 1,585.$$

Використаємо цей підхід для обчислення фрактальної розмірності множини Кантора \mathcal{K} . Зрозуміло, що $N_0\left(\mathcal{K}, \frac{1}{3}\right) = 2$, $N_0\left(\mathcal{K}, \frac{1}{9}\right) = 4$. Продовжуючи таким чином, ми маємо $N_0\left(\mathcal{K}, \frac{1}{3^k}\right) = 2^k$. Отже,

$$d_F(\mathcal{K}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(\mathcal{K}, r)}{\ln r^{-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\mathcal{K}, 3^{-k})}{\ln 3^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 2}{k \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2 \approx 0,6309.$$

Наприкінці зауважимо, що фрактальна розмірність може бути обчислена для достатньо широкого класу компактів, які є нерухомими точками відображення $F = f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_k$, де f_1, f_2, \dots, f_k – афінні відображення стиску, визначені на $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ [63].

4.8.4. Самоподібність множин

Відображення $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається *перетворенням подібності*, якщо при цьому відображенні всі відстані між точками заповнюються з одним і тим самим коефіцієнтом $r > 0$ [12, 25, 43]. Це означає, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(x) - f(y)\| = r\|x - y\|.$$

Число $r > 0$ називається *коефіцієнтом подібності*. Говорять, що *множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ подібна до множини $\mathcal{A}_0 \subset \mathbb{R}^n$* з коефіцієнтом подібності $r > 0$, якщо існує перетворення подібності f з коефіцієнтом подібності $r > 0$ таке, що $\mathcal{A}_0 = f(\mathcal{A})$.

Наприклад, множина $[0, 2]$ подібна до множини $[0, 4]$ з коефіцієнтом $r = 2$, при цьому перетворення подібності має вигляд $f(x) = 2x$.

Перетворення $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ є перетворенням подібності тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді

$$f(x) = rUx + b,$$

де $r > 0$ – коефіцієнт подібності, U – ортогональна матриця розмірності $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ —вектор [25, 43].

Означення 4.9 Компакт $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ називається абсолютно самоподібною множиною, якщо її можна подати як об'єднання скінченної кількості множин

$$\mathcal{A}_i \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

які попарно не перетинаються і такі, що множина \mathcal{A} є подібною до множини \mathcal{A}_i з коефіцієнтом подібності $r > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Отже, для абсолютно самоподібних множин виконується

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_k = f_1(\mathcal{A}) \cup f_2(\mathcal{A}) \cup \dots \cup f_k(\mathcal{A}),$$

де $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – перетворення подібності такі, що $\mathcal{A}_i = f_i(\mathcal{A})$, $i = 1, 2, \dots, k$. При цьому $f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}) = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$.

Множина Кантора \mathcal{K} є абсолютно самоподібною, так як

$$\mathcal{K} = f_1(\mathcal{K}) \cup f_2(\mathcal{K}),$$

де $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. При цьому $f_1(\mathcal{K}) \cap f_2(\mathcal{K}) = \emptyset$, оскільки $f_1(\mathcal{K}) \subset [0, \frac{1}{3}]$, $f_2(\mathcal{K}) \subset [\frac{2}{3}, 1]$. Втім, трикутник Серпінського не є абсолютно самоподібною множиною. Як ми бачили в пункті 4.8, трикутник Серпінського можна подати, як об'єднання подібних множин, але ці множини перетинаються на множині нульової міри.

Нехай $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ – множина перетворень подібності з коефіцієнтами подібності $r_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ називається інваріантною множиною, або аттрактором системи перетворень F , якщо

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^k f_i(\mathcal{A}).$$

З теореми 4.6 випливає таке твердження.

Теорема 4.9 Нехай $r_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тоді існує єдина компактна множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, яка є інваріантною множиною системи перетворень F .

Так, множина Кантора є атрактором системи перетворень $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Означення 4.10 Компакт $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ називається самоподібним, якщо його можна подати у вигляді

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^k f_i(\mathcal{A}),$$

де $f_i \in F$, при цьому множина \mathcal{A} має додатню фрактальну міру, яка відповідає фрактальній розмірності множини \mathcal{A} і відповідна фрактальна міра перетину

$$f_i(\mathcal{A}) \cap f_j(\mathcal{A}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j$$

рівна нулеві.

В сенсі означення 4.10 класичні фрактали (множина Кантора, трикутник Серпінського та інші) є самоподібними.

Система функцій F задовольняє умові відкритої множини, якщо існує непорожня відкрита множина $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ така, що

$$\bigcup_{i=1}^k f_i(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}, \quad f_i(\mathcal{V}) \cap f_j(\mathcal{V}) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Якщо компакт $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ можна подати, як об'єднання скінченної кількості множин $\mathcal{A}_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, k$ таких, що $\mathcal{A}_i = f_i(\mathcal{A})$, $f_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, k$, при цьому, якщо для системи функцій F виконується умова відкритої множини, то компакт \mathcal{A} є самоподібним в сенсі означення 4.10.

Для множини Кантора умова відкритої множини виконується, так як ми можемо взяти $\mathcal{V} = (0, 1)$. Для трикутника Серпінського множина \mathcal{V} – внутрішність вихідного трикутника.

Визначимо число $s \geq 0$ як розв'язок рівняння

$$r_1^s + r_2^s + \dots + r_k^s = 1, \quad (4.22)$$

де $r_j \in (0, 1)$ – коефіцієнти подібності системи функцій F , $j = 1, 2, \dots, k$.

Лема 4.1 Рівняння (4.22) має єдиний невід'ємний розв'язок. При цьому $s = 0$ тоді і тільки тоді, коли $k = 1$.

Доведення. Функція $g(t) = r_1^t + r_2^t + \dots + r_k^t$ при $t > 0$ є неперечною, $g(0) = k \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$. Так як похідна $g'(t)$ функції g є від'ємною, то $g(t)$ є строго спадною функцією і тому існує єдина точка $t = s$, яка є розв'язком рівняння (4.22). □

Єдиний розв'язок рівняння (4.22) називається *розмірністю подібності атрактора* \mathcal{A} системи функцій F . Зауважимо, що розмірність подібності не завжди співпадає з фрактальною розмірністю.

Теорема 4.10 Якщо для системи функцій F має місце умова відкритої множини, то розмірність подібності атрактора цієї системи функцій співпадає з її фрактальною розмірністю.

Приклад 4.5 Розглянемо систему функцій $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Множина Кантора є атрактором цієї системи функцій, при цьому $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$. Тоді рівняння (4.22) має вигляд $2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$. Звідси розмірність подібності множини Кантора $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ і вона співпадає з її фрактальною розмірністю.

4.8.5. Фрактальна розмірність атракторів диференціальних рівнянь

Проілюструємо на прикладах, що розуміється під атрактором диференціального рівняння, знайдемо фрактальну розмірність атракторів конкретних диференціальних рівнянь, або ж наведемо оцінку цієї розмірності [12].

Приклад 4.6 Нехай дана система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{-2t}, \quad C_1 = C_2 = \text{const.} \tag{4.24}$$

Якщо задані початкові умови $x_1(0)$ та $x_2(0)$, то розв'язок системи (4.24) задається формулами

$$x_1(t) = e^{-t}x_1(0), \quad x_2(t) = e^{-2t}x_2(0).$$

Оскільки будь-яка траєкторія при $t \rightarrow +\infty$ прагне до точки $(0, 0)$, то ця точка є атрактором \mathcal{A} системи (4.23). Фрактальна розмірність атрактора \mathcal{A} дорівнює $d_F(\mathcal{A}) = 0$.

Приклад 4.7 *Атрактор, який є граничним циклом.*

Нехай задано систему диференціальних рівнянь, яка в полярних координатах (ρ, φ) на площині \mathbb{R}^2 має вигляд

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \rho(1 - \rho^2), \quad (4.25)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = 1. \quad (4.26)$$

З рівняння (4.26) випливає

$$\varphi(t) = t + C_1. \quad (4.27)$$

Коло радіусу 1, яке задається рівністю

$$\rho(t) = 1 \quad (4.28)$$

є розв'язком рівняння (4.25). Це перевіряється підстановкою (4.28) в (4.25).

Таким чином, (4.27), (4.28) є розв'язком системи (4.25), (4.26), при цьому періодичним, з періодом 2π . Дійсно, полярна координата φ має таку властивість: точки з полярними координатами $(1, \varphi)$ та $(1, \varphi + 2\pi)$ зображують одну й ту ж точку на колі $\rho = 1$.

Тепер зазначимо, що якщо $(\rho(t), \varphi(t))$ – розв'язок системи (4.25), (4.26) та $0 < \rho(t) < 1$, то з рівняння (4.25) слідує, що

$$\dot{\rho}(t) = \rho(t) \left(1 - (\rho(t))^2\right) > 0,$$

тобто функція $\rho(t)$ зростає, наближаючись до значення $\rho = 1$, а траєкторія

$$(\rho(t), \varphi(t)) = (\rho(t), t + C_1)$$

здійснює спіралеподібний рух у внутрішній частині кола $\rho = 1$ (рис. 4.15).

Якщо ж розв'язок

$$(\rho_1(t), \varphi(t)) = (\rho_1(t), t + C_1)$$

в деякий момент часу t має $\rho_1(t) > 1$, то згідно з (4.25) одержуємо

$$\dot{\rho}_1(t) = \rho_1(t) (1 - (\rho_1(t))^2) < 0$$

та $\rho_1(t)$ спадає із ростом t . В цьому випадку крива $(\rho_1(t), t + C_1)$ спіралеподібно наближається при $t \rightarrow +\infty$ до кола $\rho = 1$ з зовнішньої сторони.

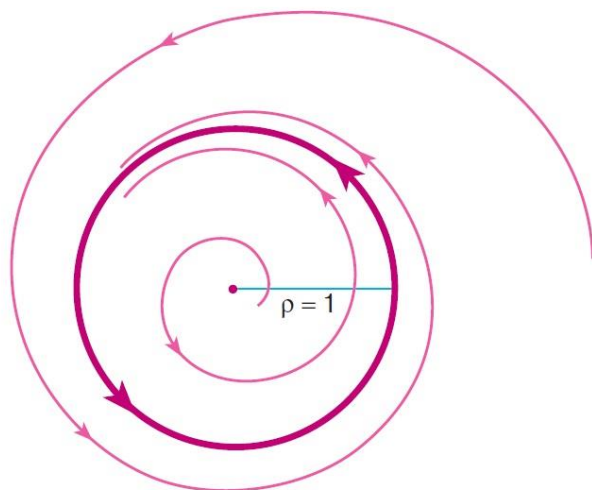


Рис. 4.15. Граничний цикл на площині

Таким чином, розв'язки $(\rho(t), \varphi(t))$ системи, які знаходяться зовні та всередині кола і саме коло мають вигляд, зображений на рис. 4.15.

Ми показали, що всі траєкторії системи рівнянь (крім початку координат $\rho = 0$, що є стаціонарною точкою рівняння (4.25)) притягуються при $t \rightarrow +\infty$ до кола $\mathcal{A} = S$ радіусу 1 з центром в точці 0. Тому це коло називається *граничним циклом* системи (4.25), (4.26). Такий граничний (притягуючий) цикл називають *атрактором системи* (4.25), (4.26). Фрактальна розмірність цього атрактора рівна 2: $d_F(\mathcal{A}) = 2$.

Приклад 4.8 Система рівнянь Лоренца та оцінка фрактальної розмірності її атрактора.

При дослідженні апроксимації системи, яка описує конвекцію рідини, що підігрівається знизу, виникає система звичайних диференціальних рівнянь Лоренца

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{4.29}$$

де σ, r, b – деякі додатні параметри (див. п.1.12). Можна показати, що будь-який розв’язок $u(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ системи (4.29) при $t \geq 0$ обмежений в тривимірному просторі. Точніше, має місце оцінка

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{-2pt} \|u(0)\|^2 + C(1 - e^{-2pt}),\tag{4.30}$$

де $\|u\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2$, $p = \min(1, \sigma)$, C – деяка стала, яка виражається через p, b та σ .

З (4.30) слідує, що при обмежених початкових умовах $\|u(0)\| \leq M$ розв’язок $u(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ системи (4.29), який виходить з точки $u(0) = (x(0), y(0), z(0))^T$, обмежений при всіх $t \geq 0$

$$\|u(t)\|^2 \leq R(M) = M^2 + C, \quad t \geq 0.\tag{4.31}$$

Згідно з теорією атракторів диференціальних рівнянь, з (4.30) та (4.31) випливає, що система рівнянь Лоренца (4.29) має атрактор \mathcal{A} . Точніше, існує така замкнена обмежена множина \mathcal{A} в \mathbb{R}^3 , яка притягує будь-які сімейства траєкторій системи (4.29). Це означає, що при

$$\|u(0)\|^2 = \|x(0)\|^2 + \|y(0)\|^2 + \|z(0)\|^2 \leq M_1,$$

де M_1 – будь-яка фіксована константа, відповідне таким початковим $u(0)$ сімейство траєкторій $u(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ при $t \rightarrow +\infty$ рівномірно прямує до множини \mathcal{A} , яку називають атрактором. Відомо, що, наприклад, при значеннях $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ фрактальна розмірність атрактора Лоренца

$$d_F(\mathcal{A}) \leq 2,538 \dots$$

Зауважимо, що у прикладах 4.6 та 4.7 атрactorами були точка та коло. Для знаходження їх розмірності не вимагається введення поняття фрактальної розмірності. Але, як демонструє приклад 4.8, *вже в тривимірному просторі \mathbb{R}^3 поведінка траєкторій системи Лоренца (на перший погляд досить простої) насправді досить складна. Фрактальна розмірність атрactorа Лоренца є більшою 2, але меншою 3 – розмірності самого фазового простору.*

Дана ситуація ілюструє складну поведінку систем, в яких спостерігаються явища турбулентних потоків в атмосфері, в течії рідин тощо.

Питання, тести для самоконтролю

1. Опишіть математичну модель керованого судна.
2. Охарактеризуйте прояв ефекту фазової плями в моделі керованого судна.
3. Що таке «м'які» та «жорсткі» біфуркації динамічних систем?
4. В чому полягає процедура побудови множини Кантора?
5. В чому полягає процедура побудови трикутника Серпінського?
6. В чому полягає процедура побудови сніжинки Коха?
7. Наведіть означення нерухомої точки відображення.
8. Дайте означення відображення стиску.
9. Сформулюйте теорему про відображення стиску.
10. Сформулюйте теорему про відображення стиску в просторі компактів.
11. В чому суть методу побудови фракталів, як нерухомих точок афінних відображень? Проілюструйте цей метод для випадку множини Кантора та трикутника Серпінського.
12. Сформулюйте означення фрактальної розмірності множини.
13. В чому полягає суть знаходження фрактальних розмірностей канторової множини та серветки Серпінського.
14. Наведіть приклади знаходження фрактальних розмірностей атрactorів диференціальних рівнянь.
15. Опишіть підхід до побудови фрактальної розмірності системи Лоренца.

Обов'язкові та додаткові задачі

4.1. Знайдіть фрактальну розмірність губки Менгера.

4.2. Знайдіть фрактальну розмірність килима Серпінського.

4.3. Нехай $\{\mathcal{A}_k\} \subset \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ – послідовність компактів, $\mathcal{A}_k \supset \mathcal{A}_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, $\mathcal{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$. Довести, що $\mathcal{A} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ і в метриці Хаусдорфа

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}.$$

4.4. Нехай \mathcal{K} – множина Кантора, $\mathcal{K}_0 = [0, 1]$, $\mathcal{K}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $\mathcal{K}_2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}, 1\right] \dots$. Знайти відстань Хаусдорфа $h(\mathcal{K}, \mathcal{K}_0)$, $h(\mathcal{K}, \mathcal{K}_1)$, $h(\mathcal{K}, \mathcal{K}_2) \dots$.

4.5. Знайти фрактальну розмірність множини $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| = 1\}$.

4.6. Показати, що фрактальна міра множини $\mathcal{A} = [0, 1]$ дорівнює нулю при $d > 1$.

В задачах 4.7 – 4.11 покладатимемо, що в \mathbb{R}^2 задано одиничний квадрат \mathcal{K} з вершинами в точках $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$. Позначимо через F систему перетворень

$$f_i(x) = r(x - a^{(i)}) + a^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

де $r \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}^2$.

4.7. Побудувати геометричне представлення перших трьох членів послідовності \mathcal{K}_j , $j = 1, 2, 3$, де $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}$, $\mathcal{K}_{j+1} = f(\mathcal{K}_j)$, $j = 1, 2, 3$,

$$f = f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4, \quad a^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ a^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.8. Розробити алгоритм знаходження атрактора системи функцій F .

4.9. Знайти фрактальну розмірність атрактора, який відповідає системі функцій F .

4.10. Знайти розмірність подібності атрактора системи функцій F . Порівняти її з фрактальною розмірністю.

4.11. Перевірити для системи функцій F виконання умов відкритої множини. Обґрунтувати самоподібність атрактора системи функцій F .

4.12. Розробіть алгоритм та побудуйте зображення килима Серпінського.

4.13. Розробіть алгоритм та побудуйте зображення кривої Коха.

4.14. Розробіть алгоритм та побудуйте зображення п'ятикутника Дарера.

Додаткові задачі за даною тематикою представлені у [25, 56].

РОЗДІЛ V

КОМПЛЕКСНА ДИНАМІКА І ФРАКТАЛИ

Об'єкти, які тепер називаються фракталами, досліджувались задовго до того, як їм було дано таку назву. В етноматематиці², наприклад, в роботах Рона Еглаша *–African Fractals: Modern Computing and Indigenous Design*”, задокументовано поширені фрактальні геометричні фігури в мистецтві тубільців. У 1525 році німецький митець Альбрехт Дюрер опублікував свою працю *–Artist's Guide*” (*–Носібник художника*”), один із розділів якої має назву *–Черепичні шаблони, утворені пентагонами*”. Пентагон Дюрера багато в чому є схожим на килим Серпінського, але замість квадратів використовуються п'ятикутники [25, 61, 62].

Ідею *–рекурсивної самоподібності*” висунув Лейбніц. У 1872 році Карл Верштрасс знайшов приклад функції з неінтуїтивною особливістю. Така функція є неперервною, але не має похідної в жодній точці. Графік такої функції тепер називався б фракталом.

У 1904 році Хельге Фон Кох розробив геометричне означення неперервної, недиференційованої в жодній точці функції, яку тепер називають сніжинкою Коха. Ідею самоподібних кривих, котрі складаються із частин, схожих на ціле, було далі розвинено Полем П'єром Леві, який у роботі *–Криві та поверхні на площині та у просторі*”, виданій 1938 року, описав нову фрактальну криву, відому тепер як крива Леві. Георг Кантор навів приклади підмножин дійсних чисел із незвичними властивостями. Такі множини отримали назву множини Кантора, які також є фракталами.

Ітераційні функції на комплексній площині досліджувались в кінці XIX та на початку XX століття Анрі Пуанкаре, Феліксом Кляйном, П'єром Фату та Гастоном Жюліа. Проте, за відсутності інструментарію нахталт сучасної комп'ютерної графіки, у них забракло засобів відобразити красу багатьох із відкритих ними об'єктів. У 1975 році Мандельброт використав слово *фрактал* як назву для об'єктів, *фрактальна розмірність яких є більшою за топологічну розмірність*.

² *Етноматематика* – розділ математики, який вивчає математику як явище людської культури.

5.1. Множина Жюліа

Ймовірно, не можна навести приклад такого комп'ютерного експерименту, почуття подиву і захоплення від якого перевершувало б враження, яке викликає графічна побудова множин Жюліа та множин Мандельброта на площині [25]. В розділі висвітлено дослідження динаміки ітерацій фрактальних атракторів і хаосу. Для глибшого розуміння предмету наводимо окремі означення з теорії функцій комплексної змінної.

Означення 5.1 *Комплексним числом називається число вигляду $z = a + ib$, де a, b — дійсні числа, $i^2 = -1$. Число i називається комплексною одиницею.*

Множину всіх комплексних чисел будемо позначати через \mathbb{C} . Число a називається *дійсною частиною*, а число b — *уявною частиною комплексного числа z* . Будемо позначати це як

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad \text{та} \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

Комплексному числу z ставиться у відповідність точка $(a, b)^T$ на площині. Модуль комплексного числа $z = a + ib$, що позначається $|z|$, визначається як евклідова довжина вектора $(a, b)^T$, тобто

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Кут між додатним напрямком осі абсцис і вектором, який відповідає комплексному числу, називається аргументом комплексного числа.

Будемо говорити, що послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ прямує до комплексного числа z_0 , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N > 0$ таке, що для всіх $n > N$ справджується $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Будемо це прозначати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0.$$

Коли ми говоримо, що послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ прямує до нескінченності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

то під цим розуміємо, що для будь-якого $M > 0$ існує $N > 0$ таке, що для всіх $n > N$ справджується $|z_n| > M$, тобто всі точки лежать поза колом

радіусу M для досить великих значень n . При цьому не потрібно, щоб z_n прагнуло до ∞ вздовж прямої або деякої кривої.

Нехай задане відображення $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Означення неперервності і похідної таких функцій дається традиційним способом. Функція $f(z)$, диференційована в кожній точці області $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, називається *диференційованою* в цій області. Диференційована в області функція називається також *аналітичною*, або *голоморфною*, або *регулярною* в цій області. Многочлени є прикладом аналітичних функцій.

В теорії функцій комплексної змінної величина ∞ допустима і задовольняє, крім інших співвідношень, рівняння

$$\frac{z}{\infty} = 0$$

при будь-якому $z \in \mathbb{C}$. Окіл нескінченно віддаленої точки визначається у вигляді

$$\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}: |z| > r\}$$

при деякому $r > 0$. Аналіз функції комплексної змінної $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ зводиться до аналізу функції $F(z) = f(z^{-1})$ в околі точки $z = 0$.

Нехай задана неперервна функція $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Тоді

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}: z = g(t), \quad t \in [a, b]\}$$

називається *неперервною кривою*. Функція g є *параметричним представленням кривої* Γ . Якщо $g(a) = g(b)$, то крива Γ називається *замкненою*.

Точка $z \in \Gamma$ називається *кратною*, якщо цій точці відповідає два або більше значень параметра $t \in [a, b]$, при чому хоча б одне з них відмінне від a і від b . Тобто знайдуться $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$, $t_1 \neq a$, $t_1 \neq b$ такі, що $z = g(t_1) = g(t_2)$. Крива, яка не має кратних точок, називається *простою* або *жордановою*. Замкнена жорданова крива Γ ділить площину \mathbb{C} на дві різні області, спільною границею яких є крива Γ . При цьому одна з областей *обмежена*, а друга – *необмежена*. Обмежена область називається *внутрішністю* Γ , а необмежена – *зовнішністю* Γ .

Наприклад, функція $g(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ є неперервною і при $t \in [0, 2\pi]$ дана функція задає криву, яка є одиничним колом

$$S = \{z: |z| = 1\} = \{z: z = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]\}.$$

Одиничне коло є замкненою простою кривою. Внутрішністю S є область $\{z: |z| < 1\}$, а її зовнішністю – область $\{z: |z| > 1\}$.

Областю в $\overline{\mathbb{C}}$ називається однозв'язна відкрита множина. Якщо $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область і $h: G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – неперервне відображення, то $D = h(G)$ – область в $\overline{\mathbb{C}}$. При цьому обернене до h відображення є неперервним в області D . Якщо відображення h є неперервним на замиканні області G і $\Gamma = \partial G$, то $h(\Gamma) = \partial D$, тобто відображення h відображає границю області G на границю області D .

Розглянемо відображення $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Відображення f задає дискретну систему за правилом

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді $z_n = f^{(n)}(z_0)$, де $f^{(n)}(z) = f(f^{(n-1)}(z))$, $n = 1, 2, \dots$, $f^{(0)}(z) = z$. Послідовність $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ називається *орбітою*, яка відповідає початковій точці $z_0 \in \mathbb{C}$. Якщо для орбіти $\{z_n\}$ знайдеться $t > 0$, для якого $z_{n+t} = z_n$, $n = 0, 1, \dots$, то орбіта називається *періодичною*.

Найпростішими орбітами є стаціонарні орбіти, тобто орбіти, для яких справджується умова $z_n = c$, де $c \in \mathbb{C}$. Тоді c має задовольняти рівності $c = f(c)$, тобто c є нерухомою точкою відображення f .

Нерухома точка c відображення f називається *притягуючою*, якщо орбіти z_n всіх точок з деякого околу $U(c)$ точки c збігаються до точки c , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$, $z_0 \in U(c)$.

Нерухома точка c відображення f називається *відштовхуючою*, якщо орбіти всіх достатньо близьких до неї точок віддаляються від неї. Це означає, що знайдеться окіл $U(c)$ точки c такий, що $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = \infty$, $z_0 \in U(c)$.

Нехай відображення f є аналітичним і точка c є нерухомою точкою відображення f . Якщо $|f'(c)| < 1$, то c – притягуюча точка. Якщо $|f'(c)| > 1$, то нерухома точка c є відштовхуючою. І у випадку $|f'(c)| = 1$

нерухома точка c відображення f може бути як притягуючою, так і відштовхуючою.

Розглянемо приклад. Нехай $f(z) = z^2 - 4z + 6$. Відображення f має дві нерухомі точки $z_1 = 2$, $z_2 = 3$. Похідна $f'(z) = 2z - 4$. Точка $z_1 = 2$ є притягуючою, так як $f'(z_1) = 0$ і $|f'(z_1)| < 1$. Точка $z_2 = 3$ є відштовхуючою, оскільки $|f'(z_2)| = 2$.

Нехай

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

є поліномом степеня $n \geq 2$, коефіцієнти якого $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – комплексні числа. Позначимо $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ розширену комплексну площину,

$$\mathcal{A}_\infty(f) = \{z \in \bar{\mathbb{C}}: f^{(n)}(z) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty\}$$

область притягання нескінченності в силу $f^{(n)}(z)$,

$$f^{(n)}(z) = f(f^{(n-1)}(z)), \quad n = 1, 2, \dots, \quad f^{(0)}(z) = z.$$

Означення 5.2 *Доповнення до області притягання $\mathcal{A}_\infty(f)$ нескінченності в силу $f^{(n)}(z)$ називається заповненою множиною Жюліа $J_0(f)$ функції f , тобто*

$$J_0(f) = \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}_\infty(f).$$

Означення 5.3 *Множиною Жюліа $J(f)$ функції f називається спільна границя множин $\mathcal{A}_\infty(f)$ та $J_0(f)$, тобто*

$$J(f) = \partial \mathcal{A}_\infty(f) = \partial J_0(f).$$

Таким чином, заповнена множина Жюліа функції f складається з точок z , які не прямують до нескінченності при ітеруванні $f(z)$, а множина Жюліа є границею такої множини. Разом з тим множина Жюліа є границею басейна притягання нескінченності. Множину Жюліа названо в честь французького математика Гастона Жюліа (1893–1978), який одно-

часно з П'єром Фату (1878–1929) в 1917–1919 роках написав основоположні статті щодо ітерування функції комплексної змінної [25].

Означення 5.4 Множиною Фату $F(f)$ функції f називається доповнення множини Жюліа цієї функції, тобто $F(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus J(f)$.

Слід зазначити, що на $J(f)$ динаміка $f^{(n)}(z)$ хаотична (у певному сенсі нестійка відносно малих збурень початкового положення), а на $F(f)$ – регулярна. Множина Фату – це множина тих точок, орбіти яких в силу $f^{(n)}(z)$ стійкі за Ляпуновим.

Розглянемо приклад. Нехай $f(z) = z^2$. Знайдемо для цього випадку множину Жюліа, заповнену множини Жюліа і множину Фату. Оскільки $f^{(n)}z = z^{2^n}$, то $f^{(n)}(z) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ тоді і тільки тоді, коли $|z| > 1$. Отже, басейн притягання безмежності

$$\mathcal{A}_\infty(f) = \{z: |z| > 1\}.$$

Границею цієї множини є множина Жюліа. Тобто множина Жюліа є одиничним колом

$$J(f) = \partial \mathcal{A}_\infty(f) = \{z: |z| = 1\}.$$

За означенням 5.2 заповнена множина Жюліа функції f дорівнює

$$J_0(f) = \{z: |z| < 1\}.$$

Таким чином, за означенням 5.4 множиною Фату є

$$F(f) = \{z: |z| \neq 1\}.$$

В цьому прикладі множина Жюліа не є фракталом, хоча в загальному випадку множина Жюліа – фрактал. Проте функція $f(z) = z^2$ – хаотична на своїй множині Жюліа (на одиничному колі).

Наведемо властивості множин Жюліа і Фату:

- як випливає з означень 5.2, 5.3, множина Жюліа завжди замкнена, а множина Фату – відкрита;
- множина Жюліа для поліноміального відображення f степеня, більшого 1, завжди непорожня. Відносно множини Фату аналогічне твердження невірне: існують приклади, в яких множина Жюліа є розширеною комплексною площиною $\overline{\mathbb{C}}$;

- множина Жюліа є замиканням об'єднання всіх відштовхуючих періодичних орбіт відображень $f^{(n)}(z)$;
- множини Фату та Жюліа інваріантні відносно f , тобто

$$f^{-1}(J(f)) = f(J(f)) = J(f),$$

$$f^{-1}(F(f)) = f(F(f)) = F(f);$$

▪ множина Жюліа $J(F)$ є границею (повного) басейну притягання будь-якої притягуючої або суперпритягуючої орбіти $f^{(n)}(z)$ (означення суперпритягуючої орбіти наведено нижче). Крім того, взявши поліноміальне відображення з трьома різними притягуючими нерухомими точками, отримуємо приклад трьох відкритих (незв'язних) множин на площині зі спільною границею;

▪ якщо відкрита множина \mathcal{U} перетинає множину Жюліа, то, починаючи з деякого досить великого n , образ $f^{(n)}(\mathcal{U} \cap J) = f^{(n)}(\mathcal{U}) \cap J$ збігається з усією множиною Жюліа J . Іншими словами, ітерації розтягують як завгодно маленький окіл в множині Жюліа на всю множину Жюліа;

▪ оскільки має місце явище розтягування, то множина Жюліа має фрактальну структуру в тому сенсі, що її *маленькі частини схожі на великі*;

▪ для всіх точок z сфери Рімана, крім, можливо, двох, множина граничних точок послідовності повних прообразів $f^{(-n)}(z)$ є множиною Жюліа. Ця властивість застосовується в алгоритмах побудови множини Жюліа;

▪ теорема Саллівана стверджує, що будь-яка компонента зв'язності множини Фату передперіодична. Це означає, що якщо U – компонента зв'язності множини Фату, тоді знайдуться $n \geq 0, m > 0$, для яких $f^{(n+m)}(U) = f^{(n)}(U)$. В свою чергу, теорема про класифікацію періодичних компонент множини Фату стверджує, що періодичні компоненти бувають одного з чотирьох типів: *басейн притягання притягуючої або суперпритягуючої нерухомої або періодичної точки, пелюстка Фату параболічної точки, диск Зигеля і кільце Ермана*.

Можна написати алгоритм конструювання *заповненої* множини Жюліа. Заповнені множини більш наочні і саме тому найчастіше реалізуються програмно. Власне, алгоритм найкращим чином працює у ви-

падках множин Жюліа, які містять притягуючу періодичну орбіту. В першу чергу ми будемо вивчати множини Жюліа квадратичних функцій

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

де c – константа в \mathbb{C} . Зазвичай для побудови множини Жюліа вибираємо для ітераційного процесу певне початкове значення z_0 та кількість кроків N , де N – наперед задане досить велике число. Отримавши масив значень $\{f^{(n)}(z_0)\}$, $n \leq N$, постає питання про його візуалізацію. Для цього вибираємо систему кольорів, які ставимо у відповідність певним областям комплексної площини. Від вибору системи областей та системи кольорів, їх контрастності, повністю залежить вдалість одержаного відображення структури множини Жюліа. Ми зображаємо точки траєкторії кольором, який відповідає області комплексної площини, в залежності від того в яку саме область попаде точка на певному кроці ітераційної еволюції відображення f_c . Ще одним важливим аспектом є вибір точки z_0 та залежність результатів обчислень від цього вибору.

Вибір квадратичної функції $f_c(z) = z^2 + c$ не є обмеженим, оскільки дослідження довільного квадратичного полінома

$$f(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_2 \neq 0$$

може бути зведене до цього випадку за допомогою заміни.

Множина Жюліа симетрична відносно горизонтальної осі. При конструюванні алгоритму цю обставину можна використати для зменшення обсягу обчислень. Тобто обчислюємо множину Жюліа у верхній півплощині, а потім відображаємо її на нижню півплощину.

Вибираючи значення початкової точки z_0 , слід брати до уваги таку теорему.

Теорема 5.1 *Припустимо, що $|c| < 2$. Нехай $z \in \mathbb{C}$ і $z_n = f_c^{(n)}(z)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Якщо існує таке n_0 , що $|z_{n_0}| \geq 2$, то має місце*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

тобто орбіта $\{f_c^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ прямує до нескінченності і z не належить заповненій множині Жюліа $J(f_c)$.

Доведення. Без втрати загальності можна припустити, що $|z| \geq 2$.
Отримуємо

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z| \left(|z| - \frac{|c|}{|z|} \right).$$

Нехай $\delta \in (0,1)$ задовольняє умові $|c| = 2 - 2\delta$. Досліджуючи похідну дійснозначної функції $\phi(x) = x - |c|/x$ на інтервалі $[2, \infty)$, бачимо, що $\phi(x) \geq \phi(2)$. Внаслідок цього

$$|z| \left(|z| - \frac{|c|}{|z|} \right) \geq |z| \left(2 - \frac{|c|}{2} \right) = |z|(1 + \delta).$$

Таким чином, $|f(z)| \geq (1 + \delta)|z|$ і

$$|f_c^{(2)}(z)| \geq (1 + \delta)|f_c(z)| \geq (1 + \delta)^2|z|.$$

Для n -ої ітерації отримаємо

$$|z_n| = |f_c^{(n)}(z)| \geq (1 + \delta)^n|z|.$$

Звідси випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. □

З теореми випливає, що якщо $|c| < 2$ та для деякої точки z_k , $k \leq N$, $|z_k| \geq 2$, то можна припинити обчислення орбіти. Орбіти таких точок гарантовано прагнуть до нескінченності.

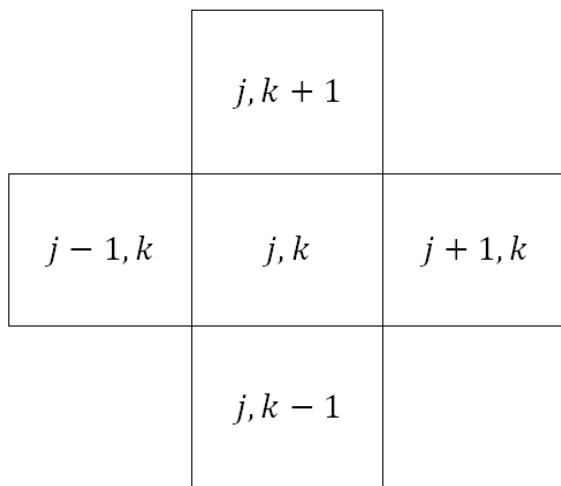


Рис. 5.1. Схема знаходження елементів множини Жюліа

На рис. 5.1 показано схему візуалізації множини Жюліа. Якщо піксель з координатами (j, k) має хоча б один сусідній піксель $(j, k - 1)$, $(j, k + 1)$, $(j - 1, k)$, $(j + 1, k)$, траєкторія в силу відображення f з якого прагне до ∞ , то точка з координатами (j, k) є елементом множини Жюліа.

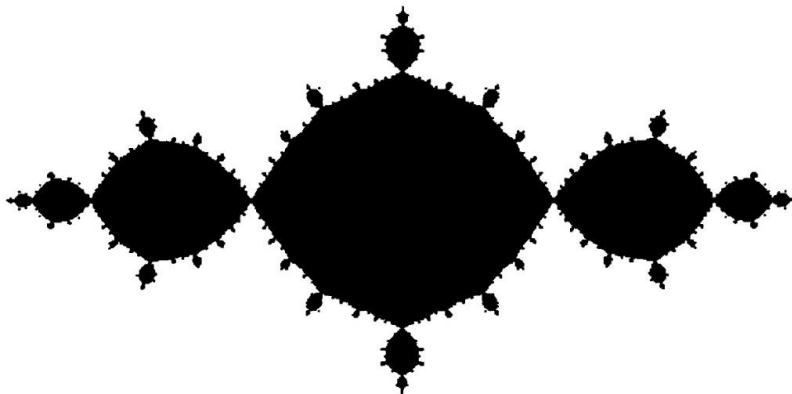


Рис. 5.2. Заповнена множина Жюліа для $z^2 - 1$

Реалізуючи ітераційний процес для відображення $f(z) = z^2 - 1$ та заповнюючи множину Жюліа, отримаємо її зображення, наведене на рис. 5.2.

Провівши аналогічні обчислення для $f(z) = z^2 - 0,20 + 0,75i$, отримаємо заповнену множну Жюліа (рис. 5.3).

Зазначимо, що вибір параметра c суттєво впливає на вигляд заповненої множини Жюліа. Зокрема, при $c = -0,1194 + 0,6289i$ матимемо множину, зображену на рис. 5.4.

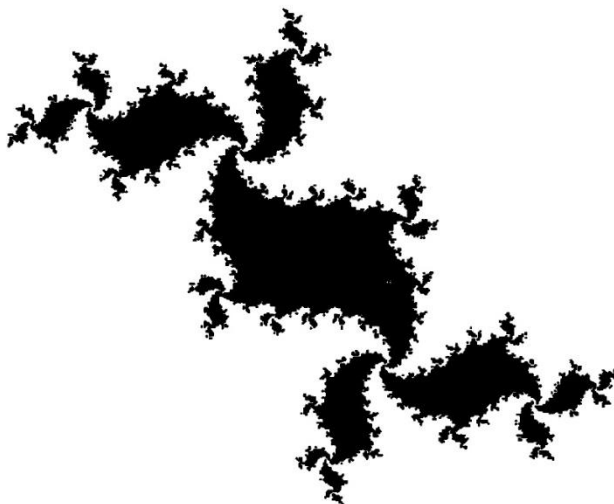


Рис. 5.3. Заповнена множина Жюліа для $z^2 - 0,20 + 0,75i$

При $c = 0,25 + 0,52i$ та $c = 0,7382 - 0,0827i$ заповнені множини Жюліа матимуть вигляд, наведений на рис. 5.5. та 5.6 відповідно.

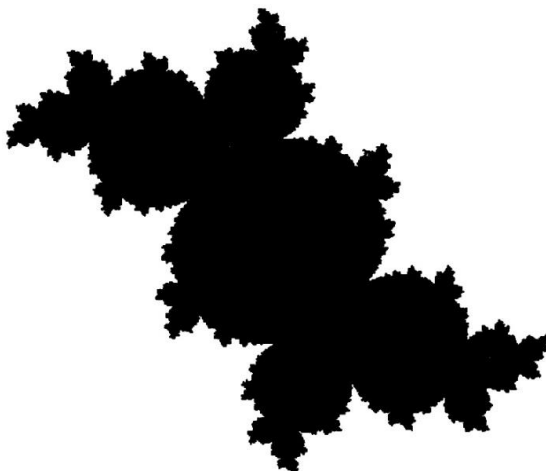


Рис. 5.4. Заповнена множина Жюліа для $z^2 - 0,1194 + 0,6289i$

Цікавий факт: математики довели, що довільна замкнена фігура на площині може бути як завгодно близько наближена множиною Жюліа для деякого многочлена. Серед іншого, ілюструючи власну техніку, дослідники побудували наближення силуету kota. За словами екпериментаторів, цей приклад показує, що динаміка поліноміальних динамічних систем дозволяє одержати різноманітні образи.

Виявляється, що *множина Жюліа є зв'язною тоді і тільки тоді, коли критична точка $z = 0$ (або, що те ж саме, її образ $z = c$) не прямує у нескінченність.*

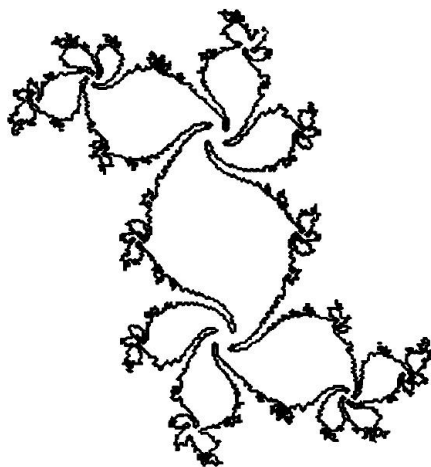


Рис. 5.5. Заповнена множина Жюліа для $z^2 + 0,25 + 0,52i$

У випадку, якщо ітерації точки 0 прямують до нескінченності, множина Жюліа є *гомеоморфною канторовій множині* і має *міру нуль*. В цьому випадку множина Жюліа збігається із заповненою множиною Жюліа і її називають *пилем Фату* (не зважаючи на той факт, що назва збиває з пантелику, це саме множина Жюліа – множина хаотичної динаміки!).

На рис. 5.7 наведено приклад множини Жюліа, яка є цілком незв'язною. Тому її важко зобразити. На рисунку чим яскравіша точка, тим ближче вона до множини Жюліа і тим більше ітерацій потрібно, щоб відійти від нуля.

Множина параметрів c , при яких множина Жюліа квадратичної динаміки зв'язна, називається *множиною Мандельброта*. Вона також має фрактальну структуру.

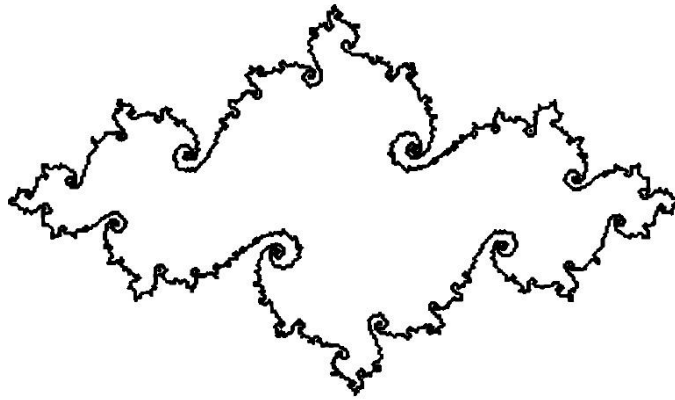


Рис. 5.6. Заповнена множина Жюліа для $z^2 + 0,7382 - 0,0827i$

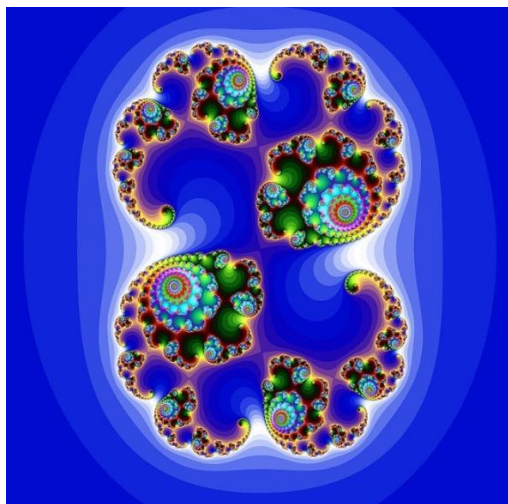


Рис. 5.7. Множина Жюліа, яка складається з незв'язних точок

5.2. Орбіти у множинах Жюліа

Розглянемо ще один підхід до конструювання множин Жюліа. Дана теорія важлива для розуміння множин Мандельброта [25]. Нехай $f(z)$ – поліном, z – точка множини Жюліа $J(f)$, при цьому z – періодична точка періоду p (але необов'язково найменшого періоду p), тобто $f^{(p)}(z) = f(z)$.

Існують декілька можливих типів поведінки, які залежать від величини похідної $(f^{(p)}(z))' = \lambda$. Будемо говорити, що періодична точка z :

гіперпритягуюча, якщо $\lambda = 0$;

притягуюча, якщо $|\lambda| < 1$;

нейтральна, якщо $|\lambda| = 1$;

відштовхуюча, якщо $|\lambda| > 1$.

Якщо ω є притягуючою чи гіперпритягуючою нерухомою точкою, то область (басейн) притягання для ω визначається так

$$\mathcal{A}_\omega(f) = \{z \in \mathbb{C}: f^{(n)}(z) \rightarrow \omega, n \rightarrow \infty\}.$$

Дослідження поведінки функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ здійснюють заміною z на $\frac{1}{z}$. Якщо при цьому потрібно аналізувати точку притягання $\omega = \infty$, то ми зводимо цю задачу до дослідження того, чи є точка 0 притягуючою точкою відображення

$$F(z) = \frac{1}{f(z^{-1})}.$$

Наприклад, якщо $f(z) = z^2 + c$, то

$$F(z) = \frac{1}{f(z^{-1})} = \frac{z^2}{1 + cz^2}, \quad F'(z) = \frac{2z}{(1 + cz^2)^2}$$

і $F'(0) = 0$ при $z = 0$. З цього випливає, що нескінченно віддалена точка ∞ є гіперпритягуючою нерухомою точкою для $f(z) = z^2 + c$.

Наступна теорема є основним результатом про співвідношення множин Жюліа з орбітами $f(z)$ при прямих і зворотних ітераціях [25].

Теорема 5.2 *Нехай $f(z)$ – поліном степеня $n \geq 2$. Тоді такі твердження є еквівалентними:*

1. $J(f)$ є множиною Жюліа;
2. $J(f)$ є границею області притягання всіх притягуючих нерухомих точок f , включаючи ∞ ;

3. кожна відштовхуюча періодична точка належить $J(f)$ і $J(f)$ є замиканням множини всіх відштовхуючих періодичних точок f ;

4. якщо $\omega \in J(f)$, то $J(f)$ є замиканням множини $\bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{(n)})^{-1}(\omega)$, де $(f^{(n)})^{-1}(\omega) = \{z \in \mathbb{C} : f^{(n)}(z) = \omega\}$.

Більш того, за винятком щонайбільше однієї точки ω на площині \mathbb{C} , множина Жюліа $J(f)$ задовольняє рівності

$$J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{(f^{(k)})^{-1}(\omega)\}, \quad (5.1)$$

де границя розуміється в сенсі метрики Хаусдорфа.

Другий пункт теореми узагальнює означення, дане для множини Жюліа

$$J(f) = \partial\{z \in \overline{\mathbb{C}} : f^{(n)}(z) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty\},$$

оскільки ∞ є притягуючою нерухомою точкою у випадку полінома, як було показано вище в частинному випадку $f_c(z) = z^2 + c$.

Третя властивість теореми стосується щільності відштовхуючих періодичних точок й часто наводиться як означення множини Жюліа. На відміну від другої властивості, вона може бути застосована не тільки до поліномів. Зауважимо також, що це означення автоматично задовольняє одну з вимог, які накладаються стосовно хаотичної динамічної системи, а саме, умову щільності періодичних точок.

Четвертий пункт теореми і формула (5.1) використовуються для обчислення множини Жюліа і її графічного представлення.

Продовжимо дослідження відображення $f(z) = z^2$, розпочате в попередньому пункті. Функція $f(z)$ має три нерухомі точки: $z = 0$, $z = 1$ і $z = \infty$. Дві точки, 0 та ∞ , є гіперпритягуючими, а точка $z = 1$ – відштовхуючою. Областями притягання для $z = 0$ та $z = \infty$ є множини

$$\mathcal{A}_0(f) = \{z : |z| < 1\}, \quad \mathcal{A}_\infty(f) = \{z : |z| > 1\}$$

відповідно. За пунктом 2 теореми 5.2 маємо

$$J(z^2) = \partial\mathcal{A}_0(f) = \partial\mathcal{A}_\infty(f) = \{z : |z| = 1\}.$$

Періодичні точки порядку $p = 1, 2, 3, \dots$ задовольняють рівняння

$$z^{2p} = z.$$

Якщо $z \neq 0$, то $z^{2p-1} = 1$, а отже $f(z) = z^2$ має 2^{p-1} періодичну точку. Всі вони лежать на одиничному колі і розподілені на ньому рівномірно. Всі ці ненульові періодичні точки є відштовхуючими, оскільки $|(f^{(p)})'(z)| > 1$, а їхня сукупність утворює щільну підмножину одиничного кола. Таким чином, для $f(z) = z^2$ пункт 3 теореми 5.2 дає той самий результат, що й пункт 2 теореми 5.2.

5.3. Множина Мандельброта

Вище ми пересвідчилися в тому, що множини Жюліа функції $z^2 + c$ є достаньо розмаїтими [25]. Дійсно, для кожного нового значення c ми отримуємо свій вигляд множини Жюліа. Хоча, насправді, існують лише два типи множин Жюліа. Кожна множина Жюліа функції

$$f_c(z) = z^2 + c$$

або зв'язана, або цілком незв'язана. Звичайно, при цьому їхній вигляд суттєво різниться, навіть для множин одного і того ж типу.

Найпростішими зв'язними множинами Жюліа є прості замкнені криві, які є фракталами. Зокрема їх отримують для випадку $0 < |c| < 1/4$.

Існують також зв'язні множини Жюліа, які не є простими замкненими кривими, як, наприклад, у випадку $c = -1$ (рис. 5.2). З іншого боку, всі цілком незв'язні множини Жюліа володіють тією властивістю, що вони є множинами типу «*жантиорового пилу*».

Множину Мандельброта слід розглядати як індикативний випадок множин Жюліа функції $z^2 + c$ (рис. 5.8). При цьому множина Мандельброта складається з усіх значень параметра c , для яких множина Жюліа $J(f_c)$ функції $f_c(z) = z^2 + c$ є зв'язною. Якщо точка c не належить множині Мандельброта, тоді множина Жюліа $J(f_c)$ є цілком незв'язаною.

Означення 5.5 Множина Мандельброта \mathcal{M} для полінома $f_c(z) = z^2 + c$ визначається як множина всіх $c \in \mathbb{C}$, для яких орбіта точки 0 обмежена, тобто

$$\mathcal{M} = \left\{ c \in \mathbb{C} : \{f_c^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ обмежена} \right\}.$$

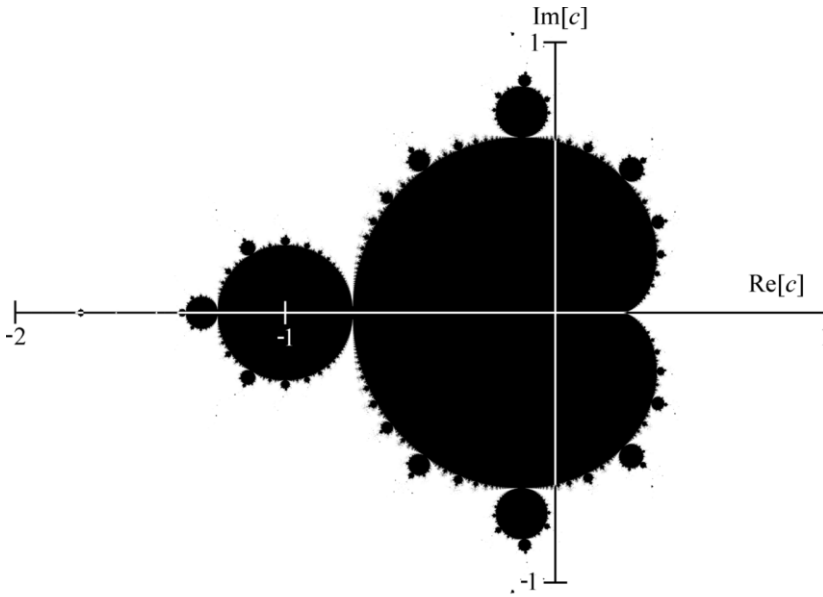


Рис. 5.8. Множина Мандельброта для $z^2 + c$

Рівносильне означення записується так

$$\mathcal{M} = \{ c \in \mathbb{C}: f_c^{(n)}(0) \not\rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \}.$$

Рівносильність цих означень випливає з того, що

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + c}{z} = \infty,$$

а, отже, існує таке $R > 0$, що з $|z| > R$ слідує $|f_c(z)| > 2|z|$. Якщо для деякого n_0 має місце нерівність $|f_c^{(n_0)}(0)| > R$, то для всіх $n > n_0$ одержуємо

$$|f_c^{(n)}(0)| > 2^{n-n_0} R,$$

тобто $f_c^{(n)}(0) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$.

Вибір точки 0 за початкову в означенні 5.5 стає зрозумілим з доведення основної теореми. Це пов'язано з тією обставиною, що точка 0 – єдина критична точка f_c , тобто єдина точка, в якій похідна перетворюється в нуль.

Означення 5.5 множини Мандельброта \mathcal{M} є конструктивним, тобто воно може бути прямо використаним при створенні алгоритму для знаходження точок множини Мандельброта. Має місце теорема.

Теорема 5.3 *Якщо $|c| > 2$ і $|z| \geq |c|$, то орбіта z прагне до ∞ . Зокрема, з цього випливає, що точка c не належить \mathcal{M} .*

Доведення. Покладемо $|c| = 2 + \delta$, де $\delta > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| \geq |z^2| - |z| = \\ &= |z|(|z| - 1) \geq |z|(|c| - 1) \geq |z|(1 + \delta). \end{aligned}$$

Зокрема $|f_c(z)| > |z|$. Звідси випливає

$$|f_c^{(2)}(z)| \geq |f_c(z)|(1 + \delta) \geq |z|(1 + \delta)^2, \dots, |f_c^{(n)}(z)| \geq |z|(1 + \delta)^n.$$

Відтак $f_c^{(n)}(z) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Цим доведено перше твердження теореми. Щодо другого твердження. Так як $f_c(0) = c$, $|c| > 2$, то $|f_c^{(n)}(0)| \geq |c|^n > 2^n$ і орбіта точки $z = 0$ прямує до нескінченності. Звідси випливає, що орбіта нуля прагне до нескінченності, тобто точка c не належить множині Мандельброта \mathcal{M} . □

Вперше множину Мандельброта було описано в 1905 році П'єром Фату (фр. Pierre Fatou), французьким математиком, який працював в області аналітичної динаміки комплексних чисел. Фату вивчав рекурсивні процеси для функцій вигляду

$$z \rightarrow z^2 + c.$$

Почавши з точки z_0 на комплексній площині, можна отримати нові точки, послідовно застосовуючи до них функцію $z^2 + c$. Така послідовність точок називається *орбітою* z_0 при перетворенні $z \rightarrow z^2 + c$.

Фату знайшов, що орбіта $z_0 = 0$ при цьому перетворенні демонструє досить складну і цікаву поведінку. До того ж існує безліч таких перетворень – своє перетворення для кожного значення c . В ті часи комп'ютерів ще не було і Фату, звичайно, не міг побудувати орбіти всіх точок площини, йому доводилося все робити вручну. Ґрунтуючись на своїх розрахунках, він довів, що *орбіта точки, що лежить на відстані більше 2 від початку координат, завжди йде в нескінченність*.

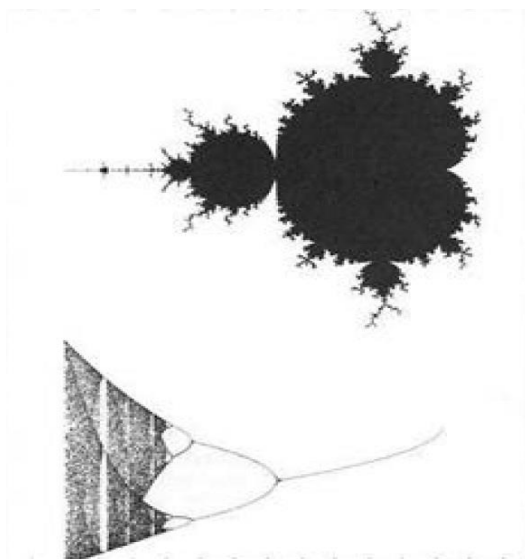


Рис. 5.9. Зв'язок між множиною Мандельброта і біфуркаційною діаграмою переходу до хаосу через нескінченну послідовність подвоєння періоду

Фату ніколи не бачив зображень, які ми зараз знаємо як зображення множини Мандельброта, тому що необхідну кількість обчислень неможливо провести вручну. Професор Бенуа Мандельброт був першим, хто в 1975 році використав для цього комп'ютер.

Мандельброт вперше застосував термін *фрактал* для позначення описаного вище математичного феномену. Множина Мандельброта – один з яскравих математичних об'єктів, названий на честь свого дослідника [28].

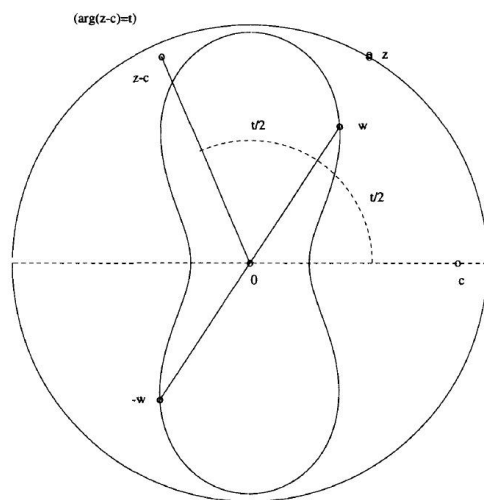


Рис. 5.10. $f_c^{-1}(\Gamma)$ для c всередині Γ

Об'єднуючи результати теорем 5.1 та 5.3, отримуємо, що множина Мандельброта \mathcal{M} будується для $|c| \leq 2$. Причому, якщо $|c| < 2$ і орбіта досягає стану, коли $|z| > 2$, то орбіта прагне до нескінченності і відповідне значення c не належить \mathcal{M} . Точка $c = -2$ є єдиною точкою кола $|c| = 2$, яка належить множині Мандельброта [25].

Для доведення основної теореми про множину Мандельброта скористаємося такою лемою.

Лемма 5.1 *Нехай Γ – гладка, проста, замкнена крива на площині і $f_c(z) = z^2 + c$. Позначимо через Γ_{-1} прообраз Γ*

$$\Gamma_{-1} = f_c^{-1}(\Gamma) = \{w: z = f_c(w) \in \Gamma\}.$$

Тоді для Γ_{-1} стверджується таке:

1. якщо точка c знаходиться у внутрішності Γ , то Γ_{-1} також є гладкою, простою, замкненою кривою. Внутрішність Γ_{-1} взаємно однозначно відповідає внутрішності Γ (рис. 5.10);

2. якщо точка c лежить на кривій Γ , то в цьому випадку Γ_{-1} має вигляд гладкої вісімки. Кожна з внутрішніх областей Γ_{-1} (пелюстки вісімки) взаємно однозначно відповідає внутрішній області Γ (рис. 5.11).

Доведення. Ідея доведення проста з певними технічними деталями. Проведемо доведення для випадку, коли Γ — коло.

1. Нехай c міститься у внутрішності Γ , як показано на рис. 5.10.

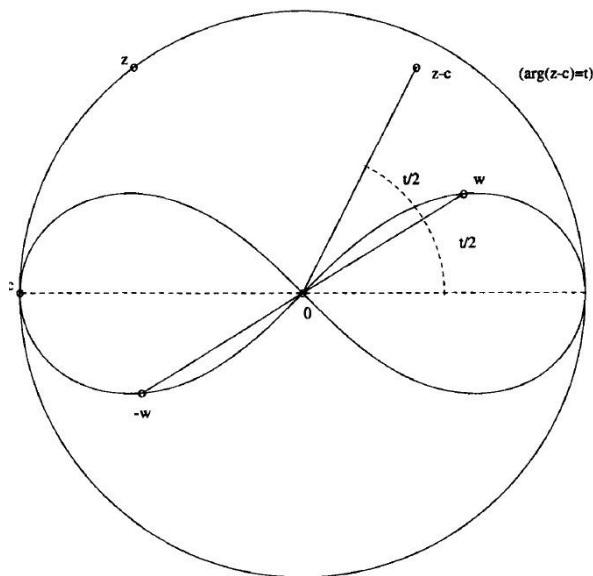


Рис. 5.11. $f_c^{-1}(\Gamma)$ для c на Γ

Розглянемо будь-яку точку $z \in \Gamma$. Позначимо через t аргумент комплексного числа $z - c$, тобто $z - c = |z - c| \exp(it)$. Квадратні корені з $z - c$ рівні

$$+w = \sqrt{|z - c|} \exp\left(\frac{it}{2}\right), \quad -w = -\sqrt{|z - c|} \exp\left(\frac{it}{2}\right).$$

Коли точка z рухається по Γ , точки $+w$ та $-w$ переміщуються по верхній і нижній половині Γ_{-1} відповідно. Промені, спрямовані з 0 в $+w$ та $-w$, заповнюють область всередині Γ_{-1} і відповідність між внутрішністями Γ та Γ_{-1} є взаємнооднозначною.

2. Якщо точка c належить контуру Γ , як зображено на рис. 5.11, то коли z рухається по Γ , точка $+w$ рухається по замкненій петлі – границі однієї з пелюсток вісімки. Промені, спрямовані з 0 в $+w$, заповнюють область всередині цієї пелюстки і відповідність між внутрішністю Γ і цією пелюсткою є взаємнооднозначною. Друга пелюстка, що не перетинається з першою, за виключенням точки 0 , прорисовується точкою $-w$ і її внутрішність також знаходиться у взаємнооднозначній відповідності із внутрішністю Γ .

□

Теорема 5.4 *Нехай \mathcal{M} – множина Мандельброта.*

1. Для кожної точки $c \in \mathcal{M}$ відповідна їй множина Жюліа $J(f_c)$ зв'язна.

2. Для кожної точки $c \notin \mathcal{M}$ відповідна їй множина Жюліа $J(f_c)$ цілком незв'язна і є канторвою множиною.

Доведення.

1. Припустимо, що послідовність $\{f_c^{(n)}(0)\}$ обмежена. В першу чергу, покажемо, що заповнена множина Жюліа $K(f_c)$ є перетином вкладеної послідовності замкнених областей, тобто множин, які є об'єднаннями простих замкнених кривих і областей, обмежених ними.

Нехай Γ_0 – коло досить великого радіусу, що містить всі точки $f_c^{(n)}(0)$, причому точки $f_c^{-1}(\Gamma_0)$ лежать всередині Γ_0 , а точки поза Γ_0 при ітеруванні прагнуть до ∞ . Точка c знаходиться всередині Γ_0 , оскільки $c = f_c(0)$. Нехай

$$\Gamma_{-1} = f_c^{-1}(\Gamma_0).$$

За лемою 5.1. f_c відображає внутрішню область Γ_{-1} у внутрішню область Γ_0 . Зокрема, оскільки $f_c(c) = f_c^{(2)}(0)$ знаходиться всередині Γ_0 , то c лежить всередині Γ_{-1} , рівно як і всередині Γ_0 .

Продовжимо ітерацію цього процесу. Нехай

$$\Gamma_{-(n+1)} = f_c^{-1}(\Gamma_{-n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

На кожному кроці точка c потрапляє всередину Γ_{-n} , оскільки $f_c^{(n+1)}(0)$ знаходиться всередині Γ_0 , а це означає, що $f_c^{(n)}(0)$ знаходиться всередині Γ_{-1} і так далі до тих пір, поки остаточно $f_c(0)$ не потрапить у внутрішню область, обмежену Γ_{-n} . Це дозволяє застосовувати лему 5.1 на кожному кроці, що й забезпечує можливість ітерування (рис. 5.12).

Покладемо $\mathcal{K}_{-n} = \Gamma_{-n}\mathcal{U}$ (внутрішність Γ_{-n}) та $\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_{-n}$. За побудовою, кожна точка поза \mathcal{K}_{-n} при ітеруванні прагне до ∞ . З цього випливає, що область притягання $\mathcal{A}(\infty)$ визначається так

$$\mathcal{A}(\infty) = \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$$

Таким чином, заповнена множина Жюліа $\mathcal{K}(f_c)$ є множина \mathcal{K} . Множина Жюліа $J(f_c)$ є границею $\mathcal{A}(\infty)$, і відповідно, границею \mathcal{K} .

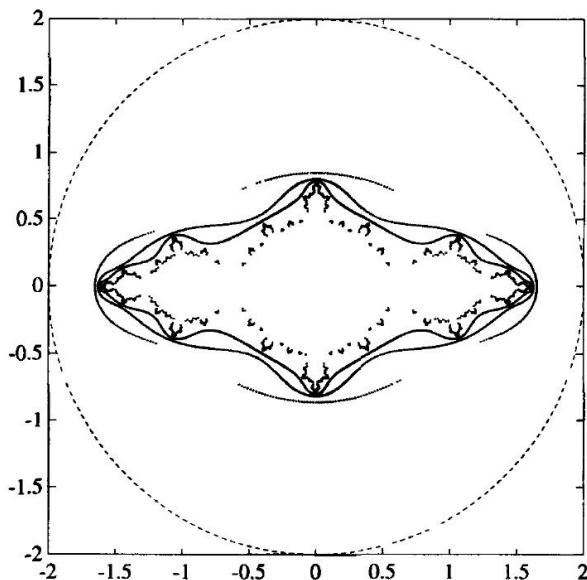


Рис. 5.12. Стиснення на зв'язній множині Жюліа

Зв'язність $\mathcal{K}(f_c)$ впливає з топологічних міркувань. Розглянемо вкладену послідовність компактних, зв'язних множин, чії доповнення зв'язні. Їх перетин має ті ж три властивості. Більш того, границя цього перетину зв'язана. Оскільки послідовність множин \mathcal{K}_{-n} володіє вищенаведеними властивостями, то множини $\mathcal{K}(f_c)$ та $J(f_c)$ зв'язані.

2. Припустимо, що послідовність $\{f_c^{(n)}(0)\}$ необмежена. Ми знаємо, що в цьому випадку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{(n)}(0) = \infty.$$

Нехай Γ_0 – коло досить великого радіусу, причому:

а) $\Gamma_{-1} = f_c^{-1}(\Gamma_0)$ лежить всередині Γ_0 ;

б) всі точки поза Γ_0 ітеруються до ∞ ;

с) існує n_0 таке, що:

$$f_c^{(n_0-1)}(c) = f_c^{(n_0)}(0) \in \Gamma_0;$$

$f_c^{(n_0)}(c)$ лежить всередині Γ_0 при $n < n_0$;

$f_c^{(n_0)}(c)$ лежить поза Γ_0 при $n > n_0$.

Почнемо з того ж, що і при доведенні першої частини теореми 5.4, припустивши, що

$$\Gamma_{-(n+1)} = f_c^{-1}(\Gamma_{-n}).$$

Ця процедура виконується до тих пір, поки ми не досягаємо $n = n_0$ і не зіштовхуємося з точкою c на кривій $\Gamma_{-(n_0-1)}$, а не всередині $\Gamma_{-(n_0-1)}$.

В цьому місці ми використовуємо другу частину леми 5.1, де говориться, що Γ_{-n_0} має вигляд вісімки, а множина Жюліа $J(f_c)$ міститься в об'єднанні двох внутрішніх областей. Оскільки кожна з цих областей відображається на повну внутрішність $\Gamma_{-(n_0-1)}$, то кожна з них повинна містити непорожню підмножину $J(f_c)$. В результаті ми приходимо до висновку, що множина $J(f_c)$ має бути незв'язною.

Після проходження n_0 , множини Γ_{-n} є об'єднанням вісімок. Кожна вісімка породжує ще дві вісімки на наступному кроці. На кожному кроці $J(f_c)$ оточена вісімками для цього кроку (рис. 5.13). Внаслідок отримуємо, що $J(f_c)$ має нескінченно багато компонент. Більше того, вірно й те, що кожна з цих компонент є насправді одна єдина точка, що й робить $J(f_c)$ цілком незв'язною.

Для доведення цього необхідно провести ще додатковий аналіз. Найпростіше це робиться в разі достатньо великого c .

Доведення для $c > (5 + 2\sqrt{6})/4 \approx 2,475$ можна знайти в [61], а для $c > 22/9 \approx 2,444$ — в [25]. Крім того, в цьому випадку $J(f_c)$ є ще і досконалою множиною, тобто вона замкнена й не має ізольованих точок. Таким чином, множина $J(f_c)$ володіє всіма необхідними властивостями, щоб вважати її *пиллом Кантора*, а саме, вона компактна, цілком незв'язна і досконала (коли $c \notin \mathcal{M}$). \square

В означенні множини Мандельброта важливу роль відіграє орбіта $\{f_c^{(n)}(0)\}$.

Означення 5.6 Точка $z = 0$ — єдине значення z , для якого $f'_c(z) = 0$ і тому орбіта точки 0 називається критичною орбітою.

Ми окремо виділяємо цю орбіту, оскільки вона є *єдиною*, для якої вісімки з'являються регулярно, як це впливає з доведення другої частини теореми 5.3.

Розклад в ряд Тейлора функції $f_c(z) = z^2 + c$ в околі точки z_0 має вигляд

$$f_c(z) = f_c(z_0) + f'_c(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''_c(z_0)(z - z_0)^2.$$

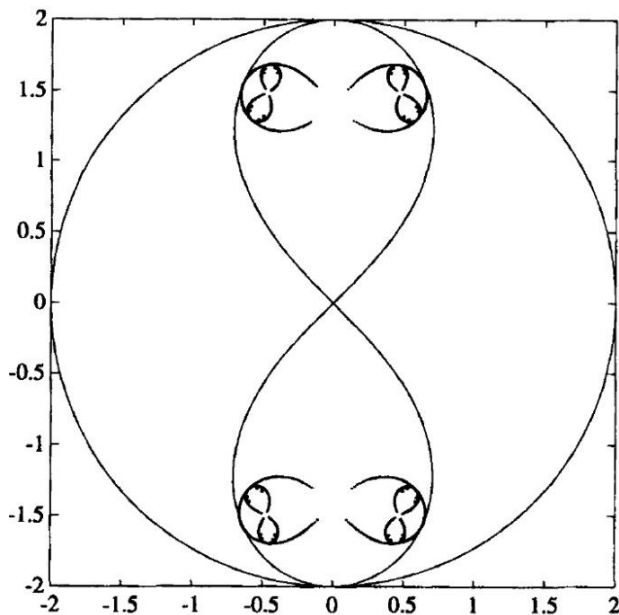


Рис. 5.13. Стиснення на цілком незв'язній множині Жюліа

Якщо $f'_c(z_0) = 0$, то $f_c(z)$ є дволистим відображенням в малому околі z_0 (за винятком самої точки z_0). Цей факт пояснює поведінку, описану в другій частині леми 5.1, а саме, що $f_c^{-1}(\Gamma)$ має вигляд вісімки, якщо $c \in \Gamma$. Якщо ж $f'_c(z_0) \neq 0$, то $f_c(z)$ є взаємно однозначним відображенням в малому околі z_0 й ми не отримуємо ніяких вісімок.

Домінуючою фігурою в множині Мандельброта є велика кардіоїда. Середина цієї кардіоїди відповідає точкам c , для яких множина Жюліа функції $f_c(z)$ має притягуючу нерухому точку. Якщо z є нерухомою точкою, то

$$f_c(z) = z^2 + c = z.$$

З того, що z є притягуючою, маємо $\left| \frac{d}{dz} f_c(z) \right| = |2z| < 1$. Границя таких точок задовольняє

$$|2z| = 1 \text{ або } z = \frac{1}{2} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

З рівняння $z^2 + c = z$ випливає

$$c = \frac{1}{2} e^{i\theta} - \frac{1}{4} e^{2i\theta}. \quad (5.2)$$

Рівняння (5.2) описує велику кардіоїду, де θ змінюється в межах $[0, 2\pi]$. Таким чином, *границею притягуючих нерухомих точок є кардіоїда і притягуючі нерухомі точки лежать всередині неї.*

Зауважимо, що по осі x кардіоїда розташовується від $-3/4$ до $1/4$, що відповідає тій частині орбітної діаграми (рис. 3.14), де існує тільки одна гілка.

Якщо z притягується періодичною точкою періоду 2, то вона є нерухомою точкою $f_c^{(2)}(z)$ і тому

$$(z^2 + c)^2 + c = z.$$

Це рівняння розв'язується розкладанням на множники

$$(z^2 + c)^2 + c - z = (z^2 + z + 1 + c)(z^2 + c - z).$$

Розв'язки рівняння

$$z^2 + c - z = 0$$

є нерухомими точками $f_c(z)$. Нехай z_1 та z_2 – розв'язки рівняння

$$z^2 + z + 1 + c = 0. \quad (5.3)$$

Оскільки вони є точками періоду 2 для $f_c(z)$, то $z_1^2 + c = z_2$ та $z_2^2 + c = z_1$. З цього випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} f_c^{(2)}(z_1) &= 4z_1(z_1^2 + c) = 4z_1z_2, \\ \frac{d}{dz} f_c^{(2)}(z_2) &= 4z_1z_2. \end{aligned}$$

Добуток z_1z_2 двох розв'язків рівняння (5.3) дорівнює вільному члену цього рівняння, тому отримуємо

$$z_1z_2 = 1 + c.$$

Умова для похідної в притягуючій періодичній точці

$$\left| \frac{d}{dz} f_c^{(2)}(z) \right| < 1,$$

дає $|4(1 + c)| < 1$. Таким чином, значення c , для яких існують періодичні притягаючі точки періоду 2 в множині Жюліа, лежать всередині кола

$$|c + 1| = 1/4.$$

Зазначимо, що по осі x цей круг розташований від $-5/4$ до $-3/4$, що відповідає тій частині орбітної діаграми, де вона має дві гілки.

На рис. 5.14 зображені деякі ділянки (іноді їх називають *обрамленням*) множини Мандельброта, які відповідають існуванню притягаючих періодичних точок різних періодів.

Орбітна діаграма (рис. 3.14, рис. 5.9) говорить про те, що відбувається на дійсній осі множини Мандельброта. Кожна біфуркація відповідає новому обрамленню, яке перетинає вісь x , і період в цьому випадку відповідає числу гілок орбітної діаграми.

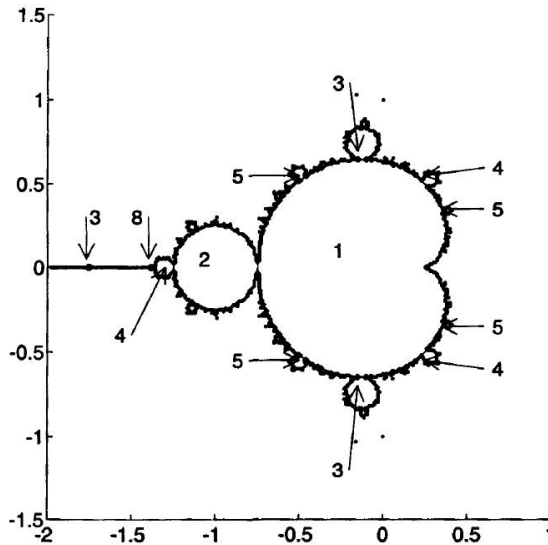


Рис. 5.14. Періоди обрамлень

Встановити зв'язок періодів з обрамленнями для періодів, більших ніж 2, аналітичними методами важко, якщо взагалі можливо. Задача експериментального визначення періодів для притягуючих періодичних точок спрощується за допомогою результату, описаному в [25].

Власне, якщо z_0 є притягуючою періодичною точкою для полінома, то існує критичне значення, яке лежить в області притягання z_0 . У випадку $f_c(z) = z^2 + c$ цим критичним значенням є точка 0.

Для даного обрамлення ми зазвичай можемо визначити періоди, хоча іноді це і не зовсім просто. Для цього починаємо з ретельної побудови зображення множини Мандельброта і знаходимо апроксимацію центру (значення c) певного обрамлення. Потім обчислюємо певну ділянку орбіти $\{f_c^{(n)}(0)\}$ і намагаємося визначити за її асимптотичною поведінкою значення періоду. Для значень c , близьких до границі, аналіз обчислень стає складним.

Строго математично, зображення множин Мандельброта і Жюліа повинні бути чорно-білими. Точка або потрапляє всередину множини, або ні. Незважаючи на це, за допомогою комп'ютера ми можемо побудувати і кольорові зображення (рис. 5.15). Найпоширенішим способом є розфарбовування точок зовні множини в колір, що відповідає кількості ітерацій, за які точка прямує до «нескінченності» або, з точки зору алгоритму, на певній відстані від нуля.

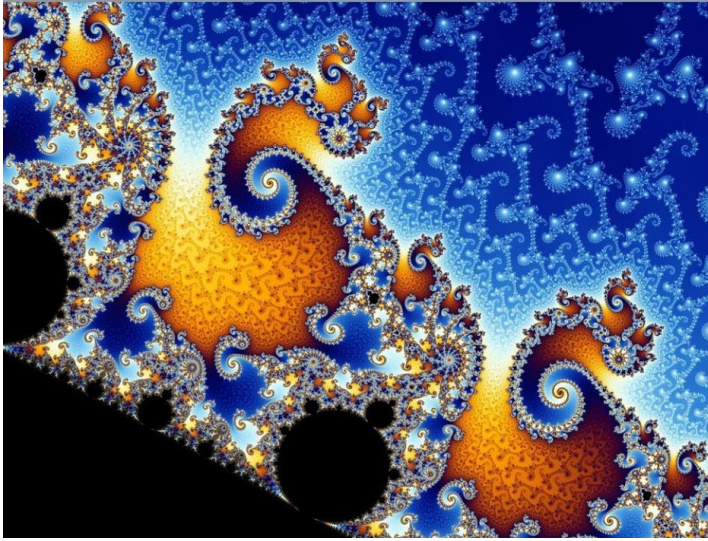


Рис. 5.15. Фрагмент границі множини Мандельброта в кольорі

Порядок визначення, чи потрапляє точка z_0 всередину множини (яку традиційно зафарбовують чорним кольором) чи ні (зафарбовується кольором, що залежить від швидкості руху до нескінченності) такий: на кожній ітерації для

$$z_n = x_n + iy_n$$

обчислюється значення модуля

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2},$$

яке потім порівнюється з «*границею нескінченності*» (зазвичай береться значення, що дорівнює 2). Якщо $|z_n|^2 \leq 4$ при будь-якому числі ітерацій (на практиці – при всіх обчислених ітераціях), то колір точки чорний, в іншому випадку він залежить від останнього значення n , при якому $|z_n|^2 \leq 4$.

Значення n фактично означає швидкість руху z_n в нескінченність і може бути індексом в таблиці кольорів або використовуватися як параметр в більш складному алгоритмі.

Даний алгоритм визначає, що якщо точка віддаляється більше ніж на 2 від початку координат, то вона лежить зовні множини Мандельброта. Для того, щоб визначити, що точка лежить всередині множини, є багато способів. Найпростіше рішення – обмежити кількість ітерацій якимось

максимумом. Якщо точка не вийшла за вказану межу, можна вважати, що вона знаходиться всередині множини.

Точкам біля границі множини потрібно більше ітерацій для прямування в нескінченність. Тому такі області прорисовуються помітно довше. Чим далі від границі області, тим вища швидкість прямування в нескінченність. Для таких точок потрібно менше ітерацій.

Одним із способів зменшення обсягу обчислень при побудові множини Мандельброта є перевірка, чи потрапляє точка в область *головної кардіоїди*. Формула кардіоїди в полярних координатах має такий вигляд

$$\rho_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta.$$

Таким чином, для точки (x, y) необхідно обчислити

$$\rho = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2}, \quad \theta = \text{atan2}\left(y, x - \frac{1}{4}\right), \quad \rho_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta.$$

Тут atan2 – арктангенс двох аргументів. Якщо $\rho \leq \rho_c$, то точка (x, y) потрапляє всередину множини і зафарбовується чорним кольором, а ітеративні обчислення можна пропустити.

На практиці оптимізацію обсягу обчислень дає *трасування* границі: якщо є деяка замкнена крива, яка не перетинає вісь абсцис, кожна точка якої йде за границю (*bail-out*) за однакове число ітерацій або, навпаки, належить множині Мандельброта, то будь-яка точка всередині цієї кривої буде володіти цією ж властивістю, і, отже, вся область всередині границі зафарбовується однаковим кольором. Пошук красивих зображень множини Мандельброта є мистецтвом (рис 5.16).

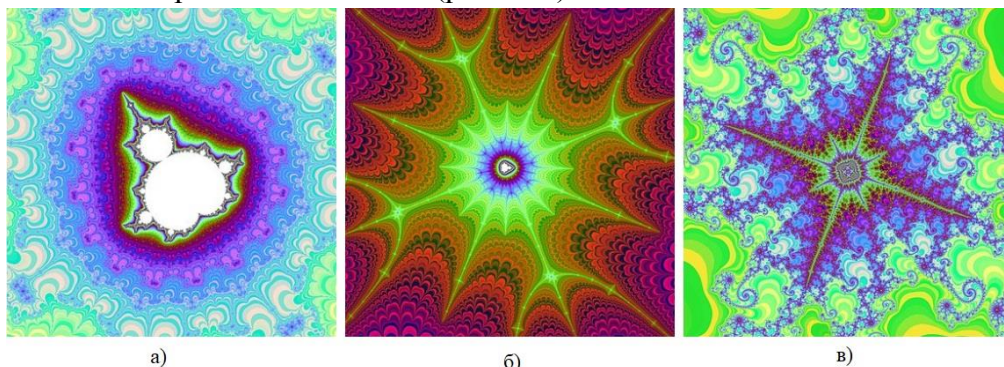


Рис. 5.16. Приклади множини Мандельброта за координатами центру

5.4. Хаос і множина Жюліа

Квадратична функція $f_c(z) = z^2 + c$ проявляє хаотичну поведінку на своїй множині Жюліа $J(f_c)$. Зауважимо, що відображення z^2 хаотичне на одиничному колі S , яке, як було вище зазначено, є множиною Жюліа для z^2 . Фактично ми досліджуємо приклад хаотичної поведінки $f_c(z)$ на $J(f_c)$ [25].

Хаотична поведінка вперше була отримана при $c = -2$ фон Нейманом та Уламом при обчисленні на одній з перших ЕОМ в 1947 році. Одним з прикладів такої поведінки є хаотична поведінка дійсної функції $x^2 + c$ на відрізку $[-2, 2]$. Як випливає з наведеної нижче леми, множиною Жюліа комплексної функції $z^2 - 2$ також є відрізок $[-2, 2]$ і функція $z^2 - 2$ – хаотична на $J(f_c)$ при $c = -2$.

Лема 5.2. Відрізок $[-2, 2]$ є множиною Жюліа функції $z^2 - 2$.

Доведення. Відомо, що якщо $f_c(x) = x^2 - 2$, то графік $f_c^{(n)}(x)$ перетинає пряму $y = x$ на відрізку $[-2, 2]$ точно 2^n раз і точки перетину різні. Таким чином, $f_c^{(n)}(x)$ має $2n$ різних періодичних точок на $[-2, 2]$.

Комплексний поліном $f_c^{(n)}(z) - z$ степеня 2^n має 2^n нулів в \mathbb{C} . Таким чином, ми знайшли всі періодичні точки і вони лежать на відрізку $[-2, 2]$. Більш того, вони утворюють щільну підмножину відрізка $[-2, 2]$ (їхнім замиканням є $[-2, 2]$). Нахили функцій $f_c^{(n)}(x)$ в точках перетину з прямою $y = x$ більші 1 за абсолютною величиною. Відтак, ці періодичні точки відштовхуючі. За пунктом 3 теореми 5.2, множина $J(f_c)$ при $c = -2$ є замиканням відштовхуючих періодичних точок, тобто є відрізком $[-2, 2]$. \square

Нагадаємо відомий факт, що для дійсних x та дійсних c , при $c < c^*$ для певного значення $c^* < -2$, функція $x^2 + c$ хаотична на деякій множині притягіння Λ . Власне, Λ є множиною точок x_n , для яких ітеровані величини $x_{n-1}^2 + c$ залишаються обмеженими при $n \rightarrow \infty$.

Розглянемо відображення $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Відображення f називається *хаотичним*, якщо:

1. для f має місце суттєва залежність від початкових умов;
2. f – транзитивне відображення;
3. періодичні точки відображення f скрізь щільні в $\overline{\mathbb{C}}$.

Нехай $x \in \mathbb{C}$ і \mathcal{U} — окіл точки x . Будемо говорити, що відображення f суттєво залежить від початкових умов, якщо для деякого $\delta > 0$ існує $n > 0$ і $y \in \mathcal{U}$ такі, що $|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| > \delta$. Відображення f назива-

ється *транзитивним*, якщо для довільних відкритих множин \mathcal{U} та \mathcal{V} існує $n \geq 0$ таке, що

$$f^{(n)}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset.$$

Транзитивність рівносильна існуванню скрізь щільної орбіти в \mathbb{C} . Властивість *щільності періодичних точок* означає, що в будь-якому околі довільної точки $z \in \mathbb{C}$ існує принаймні одна періодична точка.

Основна теорема про хаотичну поведінку на множинах Жюліа безпосередньо випливає з теореми 5.2.

Теорема 5.5 *Квадратична функція $f_c(z) = z^2 + c$ хаотична на своїй множині Жюліа $J(f_c)$ при всіх $c \in \mathbb{C}$.*

Доведення. Доведення ґрунтується на встановленні умов періодичності і транзитивності. Умова періодичності полягає в тому, що періодичні точки щільні в $J(f_c)$. Це випливає з пункту 3 теореми 5.2. Умова транзитивності полягає в тому, що для будь-якої пари відкритих множин \mathcal{U} та \mathcal{V} , які перетинаються з $J(f_c)$, існує $n \geq 0$ таке, що

$$f_c^{(n)}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset.$$

Виконання цієї умови випливає з пункту 4 теореми 5.2. Нехай \mathcal{U} та \mathcal{V} – відкриті множини, що перетинаються з $J(f_c)$ і нехай

$$v \in \mathcal{V} \cap J(f_c).$$

За пунктом 4 теореми 5.2 множина $J(f_c)$ є замиканням множини

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (f_c^{(n)})^{-1}(v).$$

Зокрема це об'єднання перетинається з \mathcal{U} і тому для деякого $n \geq 1$ виконується

$$(f_c^{(n)})^{-1}(v) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset.$$

Виберемо будь-яку точку u в цьому перетині. Тоді $f_c^{(n)}(u) = v$ і, отже,

$$f_c^{(n)}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset. \quad \square$$

5.5. Проблема Келі

У 1879 році сер Артур Келі поставив задачу ітерування комплексних функцій, яка пізніше стимулювала дослідження Гастона Жюліа з проблематики теорії множин, названих тепер його ім'ям. Свою знамениту працю з цієї тематики Жюліа опублікував в 1918 році. Проблема Келі полягає в дослідженні збіжності класичного алгоритму Ньютона знаходження кубічних коренів, але за умови, що дійсні числа замінюються на комплексні [62].

Метод Ньютона для знаходження дійсного кореня $f(x)$ є ітераційною процедурою [27]. Суть її полягає в тому, що на першому кроці вибирається початкове наближення x_0 . Далі, застосовуючи рекурентне співвідношення, обчислюємо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Передбачається, що функція f неперервна разом похідними f' , f'' в околі точки $x = c$, $f(c) = 0$. Якщо x_0 знаходиться досить близько до c і $f'(x) \neq 0$, то ітераційна процедура збігається до нуля функції.

Для $f(x) = x^3 - 1$ метод Ньютона має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^2}.$$

Келі запропонував досліджувати поведінку цього ітераційного методу на комплексній площині. Тобто

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}, \quad (5.4)$$

де z_n – комплексні числа. В комплексній площині коренями рівняння $z^3 = 1$ є комплексні числа

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Областю притягання для кореня ω_j є множина

$$\mathcal{A}(\omega_j) = \left\{ z_0 \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \omega_j \right\}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Келі поставив задачу опису областей $\mathcal{A}(\omega_1)$, $\mathcal{A}(\omega_2)$ та $\mathcal{A}(\omega_3)$.

Співвідношення (5.4) є результатом ітерування функції

$$g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}. \quad (5.5)$$

Нулі $f(z)$ є нерухомими точками $g(z)$. Оскільки $g'(z) = 0$, то вони гіперпритягуючі. В разі, коли $f(z)$ є поліномом, функція Ньютона $g(z)$ є раціональною функцією від z . Наприклад, якщо $f(z) = z^3 - 1$, то

$$g(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2}.$$

Нагадаємо, що множина Жюліа $J(g)$ для полінома $g(z)$ є границею множин точок, які при ітеруванні прагнуть до ∞ . Множина Жюліа для раціональної функції від z визначається інакше, ніж для поліномів. Один із способів є підхід, коли множиною Жюліа вважають замикання множини відштовхуючих точок.

Як ми вже бачили в теоремі 5.2, ці означення збігаються у випадку поліномів. Але у випадку раціональних функцій вони різняться. Як і у випадку дійсних ітерацій, якщо початкова точка z_0 знаходиться досить близько до кореня ω_j , то ньютонівські ітерації збігаються до цього кореня. Таким чином, кожна область $\mathcal{A}(\omega_j)$ містить окіл ω_j . Але яку частину комплексної площини займає $\mathcal{A}(\omega_j)$ і яка її геометрія? Відповідь на це запитання вкрай нетривіальна.

Перед дослідженням проблеми Келі для кубічних коренів розглянемо відповідну задачу для квадратних коренів. В цьому випадку $f(z) = z^2 - 1$ і ньютонівські ітерації мають вигляд

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n}.$$

Якщо z_0 лежить в правій півплощині, то $z_n \rightarrow +1$ при $n \rightarrow \infty$, а якщо z_0 лежить в лівій півплощині, то $z_n \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$. Таким чином, за винятком початкових точок z_0 , які рівновіддалені від двох коренів, z_n збігається до найближчого до z_0 кореня. Якщо z_0 лежить на уявній осі, то в цьому випадку ітерації не збігаються.

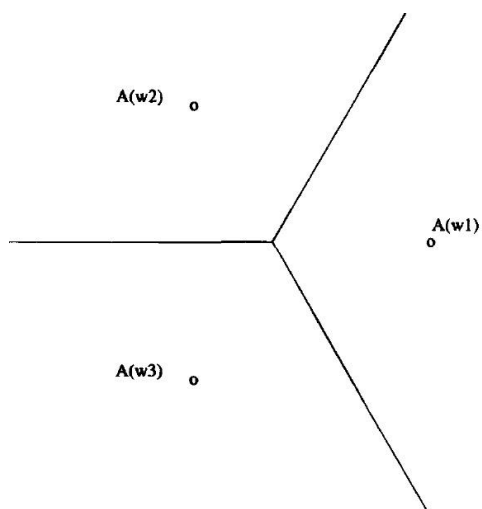


Рис. 5.17. Гіпотеза про розв'язк задачі Келі

За аналогією з випадком функції $z^2 - 1$, можна припустити, що в разі $z^3 - 1$ ітеровані значення z_n , обчислені за формулою (5.4), збігаються до кубічного кореня, найближчого до z_0 , якщо такий корінь існує.

Таким чином, відповідь на запитання Келі імовірно проілюстровано на рис. 5.17. Як не дивно, це припущення виявляється невірним. Функція

$$g(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2}$$

є функцією Ньютона для $z^3 - 1$. Має місце теорема [25].

Теорема 5.6 Множина Жюліа функції Ньютона $g(z)$ для функції $f(z) = z^3 - 1$ має вигляд:

$$J(g) = \partial\mathcal{A}(1) = \partial\mathcal{A}\left(-1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \partial\mathcal{A}\left(-1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (5.6)$$

Тобто $J(g)$ є границею кожної з областей притягання для трьох притягуючих нерухомих точок $1, -1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Теорема 5.6 говорить про те, що відповідь на проблему Келі відрізняється від того, що зображено на рис. 5.17. Крім початку координат, точки на границі будь-якої області притягання мають малі околи, які перетинаються рівно з двома областями. Але вираз (5.6) говорить про те, що в довільному околі кожної граничної точки будь-якої з цих областей

повинні знаходитися точки, які належать всім трьом областям, тобто гіпотеза зображена на рис. 5.17 є невірною. Зображення трьох басейнів притягання для $g(z)$ було одержано за допомогою комп'ютерних технологій. Границя басейнів притягання складається з сильно переплетених самоподібних фрактальних структур (рис. 5.18).

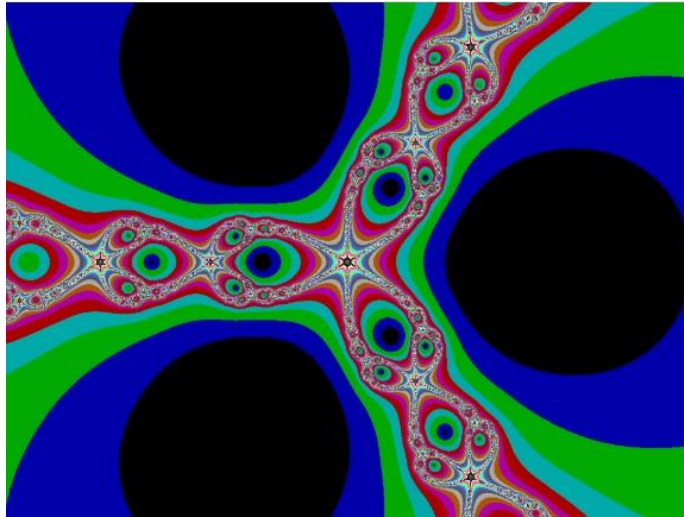


Рис. 5.18. Границя басейнів притягання

Сучасні комп'ютерні технології дозволяють отримати яскраву візуалізацію басейнів притягання. Для цього потрібно розв'язати задачу розфарбовування площини трьома фарбами таким способом, щоб на границі кожної кольорової області існували точки двох інших кольорів, які були б розташовані досить близько.

5.6. Теорія ренормалізації та фрактали Пуанкаре

В доповнення до вищевикладеного, детальніше розглянемо біфуркації подвоєння періоду [25, 61]. Необхідність такого розгляду ґрунтується на тому, що:

- атрактор Фейгенбаума поклав початок новому напрямку в динаміці малих розмірностей, який називають *теорією ренормалізації*;
- процедура ренормалізації, або універсального масштабування (*universal scaling*), виникла у фізиці (в теорії перенормування) і при обробці сигналів. Вона дозволяє з'ясувати коли і за яких умов теорія має властивість універсальності, тобто коли самоподібність (основна власти-

вість фракталів) і біфуркації подвоєння періоду, що з'являються нескінченними каскадами в простих сімействах відображень (наприклад, в квадратичному сімействі), мають нетривіальний перетин.

5.6.1. Теорія ренормалізації

Перехід від циклічної поведінки до хаотичної називається сценарієм Фейгенбаума. Як вже говорилося вище, сценарій Фейгенбаума виникає у логістичному відображенні

$$x_{n+1} = cx_n(1 - x_n),$$

де $x \in [0, 1]$, $c \in [0, 4]$, яке, власне, є квадратичним сімейством. Це пов'язано з тим, що стійка нерухома точка втрачає стійкість і породжує стійку орбіту періоду два, яка в свою чергу втрачає стійкість і породжує стійку орбіту періоду чотири і т. д. Існування таких каскадів в простому аналітичному сімействі обгрунтував Якобсон. Фейгенбаум в роботі 1978 р. за допомогою чисельних методів (на мікрокалькуляторі!) незалежно визначив асимптотичну швидкість збіжності біфуркаційних значень для квадратичного сімейства і виявив (спільно з П. Цвітановичем) явище подібності зі зміною масштабу, пов'язане з цим процесом.

Власне, математична теорія ренормалізації зі своєю проблематикою і строгими доведеннями оформилася після публікації статей А. Дуаді, Дж. Хаббарда і Д. Суллівана в середині 80-х років ХХ століття, коли ідеї голоморфної динаміки, теорії Тейхмюллера і гіперболічної геометрії проникли в цю область [25].

Ренормалізація є пошуком локальної поліноміальної моделі динаміки. Розглянемо цю ситуацію докладніше в контексті квадратичних поліномів. Нехай

$$f(z) = z^2 + c,$$

де $z \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ належить множині Мандельброта, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Кажуть, що ітерації $f^{(n)}$ можна *ренормалізувати*, якщо існують околиці \mathcal{U} та \mathcal{V} , що містять початок координат, причому $\bar{\mathcal{U}}$ є компактною підмножиною \mathcal{V} , такі, що:

- а) $f^{(n)}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ є многочленом другого степеня;
- б) $f^{(k)}(0) \in \mathcal{U}$ для всіх $k > 0$.

Це означає, що, хоча відображення $f^{(n)}$ є поліномом степеня 2^n , але у потрібному околиці критичної точки $z = 0$ воно поводить як поліном

другого степеня. Відображення $f^{(n)}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ називається *подібним до квадратичного*.

Фундаментальна теорема Дуаді і Хаббарда (1985 р.) стверджує, що відображення, подібне квадратичному, топологічно спряжене з квадратичним поліномом $g(z) = z^2 + c'$; умова (b) означає, що c' належить множині Мандельброта \mathcal{M} і при відповідних нормалізаціях єдине.

Концепція ренормалізації говорить про самоподібність множини Мандельброта і біфуркаційної діаграми (рис. 5.14) для дійсних квадратичних поліномів. Наприклад, при збільшенні білої смуги в околі $c = -1,75487 \dots$ (так званого вікна періоду 3) біфуркаційної діаграми, ми спостерігаємо рівно три малі копії повної біфуркаційної діаграми. Це пояснюється тим, що $f^{(3)}$ ренормалізується для всіх значень c в цьому вікні. Як тільки c перетинає це вікно, відповідне квадратичне відображення $f_c^{(3)}: \mathcal{U}_c \rightarrow \mathcal{V}_c$ відтворює повне сімейство біфуркацій квадратичного полінома. В множині Мандельброта також можна спостерігати малу гомеоморфну копію \mathcal{M} в обрамленні при c , яке набуває значення в цьому вікні на дійсній осі.

Описане вище наочно пояснює назву статті Лі та Йорка –*Період три означає хаос*” [50] і пов’язує універсальність Фейгенбаума з періодичністю Шарковського. Каскади з подвоєнням періоду виявляються і в інших дійсних динамічних системах (наприклад, в експоненціальному сімействі, вперше дослідженому М. В. Якобсоном). Власне, в роботах Фейгенбаума, Колле і Тресса було запропоновано пояснення *універсального закону масштабування* в однопараметричних родинах унімодалних відображень в термінах існування гіперболічної нерухомої точки F оператора ренормалізації \mathcal{R} з одновимірним нестійким многовидом.

Наступний важливий крок був зроблений в роботі Йоккоза на початку 90-х років ХХ століття. Ця робота встановила комбінаторну жорсткість всіх квадратичних відображень, які *–допускають принаймні скінченну ренормалізацію*”. Доведення ґрунтується на потужному технічному прийомі, який носить назву *головоломка-мозаїка (puzzle)*.

Квадратичному поліному f властива *нескінченна ренормалізація*, якщо $f^{(n)}$ властива ренормалізація для нескінченно багатьох $n > 1$.

Основним прикладом нескінченної ренормалізації відображення слугує поліном Фейгенбаума

$$f(x) = x^2 - 1,401155 \dots$$

В цьому випадку відображення $f^{(2)}$ є подібним до квадратичного. З цього випливає, що $f^{(2^n)}$ властива ренормалізація при будь-якому $n > 1$. Атрактор \mathcal{A}_c цього відображення, який складається з граничних точок $f^{(n)}(0)$ при $n \rightarrow \infty$, називають *атрактором Фейгенбаума*. Атрактор Фейгенбаума має універсальну властивість масштабування, яку фізики асоціюють з фазовими переходами, що досліджуються вже не перше десятиліття. Теорема Йоккоза формулюється так [25].

Теорема 5.7. *Нехай*

$$f(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathcal{M},$$

де \mathcal{M} – множина Мандельброта. Тоді можливі два варіанти:

- а) f має властивість нескінченної ренормалізації;
- б) множина Жюліа $J(f)$ не допускає інваріантного поля напрямків (no invariant line field), а множина Мандельброта \mathcal{M} локально зв'язна в точці c .

Доведення теореми наведено в [61].

Розглянемо дійснозначно-аналітичне унімодальне відображення відрізка в себе $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^1$.

Означення 5.7 *Неперервне відображення відрізка в себе називається унімодальним, якщо всередині відрізка є точка екстремуму c_0 і по обидві сторони від неї відображення є строго монотонним.*

Д. Зінгер показав, що у відображень f відрізка в себе, які задовольняють умову від'ємності похідної Шварца $Sf < 0$, кожна стійка періодична траєкторія притягує або траєкторію одного з кінців відрізка, або траєкторію деякої критичної точки c , тобто такої точки, в якій $f'(c) = 0$ [25].

Означення 5.8 *Похідною Шварца функції $f \in C^{(3)}(\mathcal{J})$ називається*

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2.$$

Відображення f є подібним квадратичному, якщо $f(\partial\mathcal{J}) \subset \partial\mathcal{J}$ та f має єдину критичну точку $c_0 \in \text{int}(\mathcal{J})$. Основним прикладом є

$$f(x) = x^2 + c, \\ x \in [-a, a], f(a) = a.$$

Якщо ітерація $f^{(p)}|L$ є квадратичноподібною для деякого інтервалу L та $c \in L \subset J$, то в цьому випадку ми можемо визначити *ренормалізацію* f в такий спосіб

$$\mathcal{R}(f) = f^{(p)}|L.$$

Тут $f^{(p)}|L$ є звуженням $f^{(p)}$ на L . Порядок інтервалів $L, f(L), \dots, f^{(p)}(L) = L \subset J$ визначає перестановку $\sigma(f)$ довжиною p . Як зазначалось вище, відображенню f властива нескінченна ренормалізація, якщо послідовність $\mathcal{R}^{(n)}(f)$ визначена для всіх $n > 0$. *Комбінаторика* відображення f в цьому випадку відображається сукупністю перестановок

$$\tau(f) = \langle \sigma(\mathcal{R}^{(n)}(f)) \rangle.$$

Означення 5.10 Кажуть, що f має обмежену комбінаторику, якщо має місце тільки скінченне число перестановок і періодичну комбінаторикою, якщо

$$\tau(\mathcal{R}^{(q)}(f)) = \tau(f) \text{ для деякого } q > 1.$$

Теорема 5.8. Нехай $f: J \rightarrow J$ властива нескінченна ренормалізація і відображення володіє комбінаторикою періоду q . Тоді $\mathcal{R}^{(qn)}(f) \rightarrow F$ експоненціально при $n \rightarrow \infty$, де F — єдина нерухома точка оператора ренормалізації $\mathcal{R}^{(q)}$, що володіє такою ж комбінаторикою, що і f .

Наприклад, поліном Фейгенбаума

$$f(x) = x^2 - 1,401155 \dots,$$

який отримується в кінці каскаду подвоєнь періоду в квадратичному сімействі, має сукупність перестановок

$$\tau(f) = \langle (12), (12), (12), \dots \rangle,$$

де 12 є номером ітерації, при якій має місце подвоєння періоду. При ренормалізації $\mathcal{R}^{(n)}(f)$ збігається експоненціально до розв'язку функціонального рівняння Цвітановича-Фейгенбаума (рівняння подвоєння)

$$F \circ F(x) = \alpha^{-1} F(\alpha x).$$

Константа Фейгенбаума $d = 4,669201609 \dots$ є єдиним власним значенням в розкладі \mathcal{R} на F .

Для того щоб визначити швидкість збіжності більш повно, розширимо $f: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ до аналітичного відображення в околі $\mathcal{J} \subset \mathbb{C}$ і покладемо, що $F: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$ – максимальне аналітичне продовження нерухомої точки ренормалізації. Тоді ми виявляємо, що існує $\mathcal{A} > 1$ таке, що для будь-якого компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{W}$ справджується таке

$$\sup_{z \in \mathcal{K}} |\mathcal{R}^{(n)}(f)(z) - F(z)| = O(\mathcal{A}^{-n}), \quad n \rightarrow \infty,$$

де оператор $\mathcal{R}^{(n)}(f)$ відповідним чином перенормований.

Тепер припустимо, що f має обмежену комбінаторику. При ітерації f всі точки з \mathcal{J} , за винятком скінченного числа, притягуються до *посткритичної множини Кантора*

$$\mathcal{P}(f) = \overline{\bigcup_{n>0, f^n(c)=0} f^n(c)} \subset \mathcal{J}.$$

Теорема 5.9 *Нехай f та g – відображення, яким властива нескінченна ренормалізація з однією і тією ж обмеженою комбінаторикою. Тоді $f|_{\mathcal{P}(f)}$ та $g|_{\mathcal{P}(g)}$ спряжені з гладкістю $C^{1+\alpha}$.*

Таким чином, кількісні характеристики атрактора $\mathcal{P}(f)$ (такі, наприклад, як його розмірність Хаусдорфа) визначаються його комбінаторикою $\tau(f)$. Сулліван встановив збіжність $\mathcal{R}^{(qn)}(f) \rightarrow F, n \rightarrow \infty$. Ще один підхід до теорії ренормалізації, заснований на таких поняттях як *незгучність* і *везі*, викладено в роботі МакМюллена [61], в якій наводяться оператори ренормалізації для гіперболічних многовидів, критичних відображень кола і для диска Зигеля із золотим перетином.

5.6.2. Фрактали Пуанкаре

Розглянемо розділ фрактальної геометрії, який має справу з динамічними системами спеціального вигляду, а саме з раціональними відображеннями [25]. Кожне таке відображення може бути записано як частку

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}$$

двох взаємно простих поліномів P та Q степеня $n, m \geq 2$, коефіцієнти яких $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$, та $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ – комплексні числа. Степень відображення f може визначитись як максимальний степінь $d = \max(m, n)$.

Основною задачею в динаміці раціональних відображень є вивчення поведінки ітерацій

$$f^{(n)}(z) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ разів}}(z).$$

Будь-яке раціональне відображення степеня $d > 1$ (власне, саме такі відображення розглядали Фату і Жюлія) володіє властивостями розтягання і стискання.

Для сферичної метрики, нормалізованої так, щоб загальна площа дорівнювала одиниці, має місце

$$\int_{\mathbb{C}} \|(f^{(n)}(z))'\|^2 dz = d^n \rightarrow \infty,$$

так що похідна від $f^{(n)}(z)$ при $n \rightarrow \infty$ одержуємо в середньому велике значення. З іншого боку, f має $2d - 2$ критичні точки c , в яких $f'(c) = 0$. В околі c поведінка f подібна відображенню $z \mapsto z^n$ в околі нуля при деякому $n > 1$, тобто f – стискаюче поблизу c відображення. Ці дві обставини й характеризують складність динаміки раціональних відображень.

Щоб описати ці властивості f , використовується множина Жюлія – область хаотичної динаміки і *посткритична* множина $\mathcal{P}(f)$, яка містить атрактори f . Множина Жюлія може бути визначена як замикання множини *відштовхуючих періодичних точок* f . Точка z є *періодичною*, якщо $f^{(p)}(z) = z$. При цьому періодична точка є:

- відштовхуючою, якщо $|(f^{(p)})'(z)| > 1$;
- нейтральною, якщо $|(f^{(p)})'(z)| = 1$;
- притягуючою, якщо $|(f^{(p)})'(z)| < 1$.

Означення 5.11 *Пряма орбіта (тобто траєкторія точки z при ітераціях в прямому напрямку) $O^+(z)$ періодичної точки називається циклом,*

оскільки $f|_{O^+(z)}$ є циклічною перестановкою (тобто такою перестановкою елементів множини J , яка переставляє елементи деякої підмножини S множини J циклічно, зберігаючи на місці решту елементів J).

Множина Жюліа, крім того, є найменшою замкненою підмножиною сфери такою, що її норма

$$|J(f)| = \sup_{z \in J(f)} |z| > 2$$

та $f^{-1}(J) = J$. Її доповнення $F(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ є множиною Фату і найбільшою відкритою множиною такою, що ітерації $\langle f^{(n)}|_{F(f)} \rangle$ утворюють нормальне сімейство [25]. Посткритична множина $\mathcal{P}(f)$ є замиканням прямих орбіт критичних точок f . Посткритична множина відіграє вирішальну роль стосовно атрактора f , про що свідчить така теорема.

Теорема 5.10 *Кожний притягуючий цикл \mathcal{A} притягує критичну точку c .*

Таким чином, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(f)$ і число притягуючих циклів обмежене числом критичних точок, яке, в свою чергу, не перевищує $2d - 2$. Ця теорема має як практичне, так і теоретичне значення. Наприклад, якщо $f(z) = z^2 + c$ має притягуючий цикл періоду 100, то цей цикл можна представити у вигляді $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0)$. Кілька мільйонів ітерацій дадуть достатню точність (порівняйте цей обсяг обчислень з перспективою обчислення $1,27 \times 10^{30}$ коренів рівняння $f^{(100)}(z) = z$).

Раціональні відображення в розширеній комплексній площині активно досліджуються в багатьох роботах. Аналогічно, як і у випадку ренормалізації, сучасна теорія фрактальної геометрії оформилась після публікації Денніса Суллівана, в якій було встановлено відповідність між гіперболічними раціональними відображеннями і клейновими групами.

Відображення f є гіперболічним, якщо виконуються умови такої теореми.

Теорема 5.11 *Наведені нижче умови еквівалентні:*

1) усі критичні точки f при ітераціях прагнуть до притягуючих циклів;

2) відображення f є розтягуючим на своїй множині Жюліа. Це означає, що на сфері існує конформна метрика ρ така, що $|f'(z)|_\rho > 1$ для всіх $z \in J(f)$;

3) посткритична множина та множина Жюліа мають порожній перетин $\mathcal{P}(f) \cap J(f) = \emptyset$.

Що стосується фракталів Пуанкаре (які є предметом нашого інтересу), то вони є *напівгіперболічними*, тобто порушується умова 3) теореми 5.11 й вони відповідають фуксовим групам.

До 1998 року фрактали Пуанкаре не зустрічалися в математичній літературі як самостійні об'єкти. Фрактали Пуанкаре стали об'єктом активних наукових досліджень в рамках так званої **NILF**-гіпотези (*No Invariant Linear Field*).

Гіпотеза (NILF). *Раціональне відображення f не допускає існування інваріантного лінійного поля на своїй множині Жюліа, за винятком того випадку, коли f накривається інтегральним ендоморфізмом тора.*

Дана гіпотеза була необхідна для доведення теореми Мане–Сада–Суллівана [25].

Теорема 5.12 *З гіпотези NILF випливає гіперболічна щільність раціональних відображень.*

Привабливість NILF-гіпотези полягає в тому, що вона зміщує акцент дослідження сімейства *всіх* раціональних відображень на ергодичну теорію *єдиного* раціонального відображення. Слід зауважити, що ця гіпотеза нічого не говорить про напівгіперболічні раціональні відображення і, як наслідок, про фрактали Пуанкаре.

Означення 5.12 *Інваріантне лінійне поле для f , визначене на вимірній множині $\mathcal{E} \subset \overline{\mathbb{C}}$, є одновимірним дійснозначним підпростором L_z в дотичному просторі $T_z\overline{\mathbb{C}}$ для всіх $z \in \mathcal{E}$ таких, що:*

- 1) \mathcal{E} має додатню площу;
- 2) $f^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$;
- 3) нахил L_z змінюється співвимірно щодо z ;
- 4) похідна f' відображає L_z в $L_{f(z)}$ для всіх z , які належать \mathcal{E} .

Нагадаємо, що лінійне поле (або поле лінійних елементів) – це локальний неорієнтовний варіант векторного поля, яке ніде не перетворюється в нуль.

Якщо $\mathcal{E} \subset J(f)$, то говорять, що відображення f допускає інваріантне лінійне поле на його множині Жюліа. Таким чином, множина Жюліа має додатню міру для того, щоб бути носієм інваріантного лінійного поля.

МакМюллен дав означення *геометрично скінченного* раціонального відображення.

Означення 5.13 *Раціональне відображення f є геометрично скінченим, якщо $\mathcal{P}(f) \cap J(f)$ – обмежена множина, або, що рівносильно, якщо кожна критична точка в множині Жюліа є передперіодичною.*

Ця умова виключає з розгляду диски Зигеля і кільця Ермана, але допускає параболічні цикли. Якщо f геометрично скінченне, то $J(f) = \overline{\mathbb{C}}$ або розмірність Хаусдорфа множини Жюлія менша 2. Відтак, з цього випливає, що фрактали Пуанкаре можна означити таким способом.

Означення 5.14 *Фрактали Пуанкаре*

▪ *в широкому сенсі* можуть бути означені як множини Пуанкаре–Жюлія, що одержуються в результаті ітерування геометрично скінченних f ;

▪ *у вузькому сенсі* – є множинами Пуанкаре–Жюлія, що одержуються в результаті ітерування раціональної функції Пуанкаре

$$f(g_2, g_3)(z) = \frac{z^4 + \frac{1}{2}g_2z^2 + 2g_3z + \frac{1}{16}g_2^2}{4z^3 - g_2z - g_3}.$$

Ця функція може бути отримана з теореми додавання для \wp -функції Вейерштрасса. Саме ітерації цієї функції при $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ вперше розглядалися Латте.

На рис. 5.19 наведено фрактал Пуанкаре–Жюлія, отриманий ітерацією за z функції f , при зазначених значеннях параметрів g_2 , g_3 (приклад Латте). На рис. 5.20, 5.21 та 5.22 наведені зображення фракталів Пуанкаре для значень параметрів: $g_2 = 1$, $g_3 = 0$ (лемніскатний випадок), $g_2 = -1$, $g_3 = 0$ (квазілемніскатний випадок) і $g_2 = 0$, $g_3 = -1$ (квазі-евіангармонічний випадок).

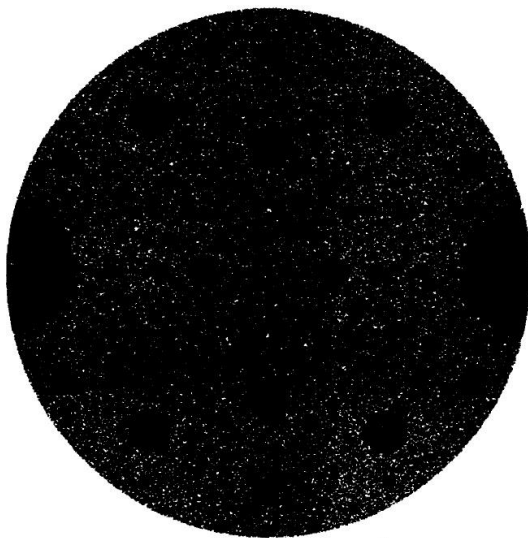


Рис. 5.19. *Приклад Латте при $g_2 = 4$, $g_3 = 0$*

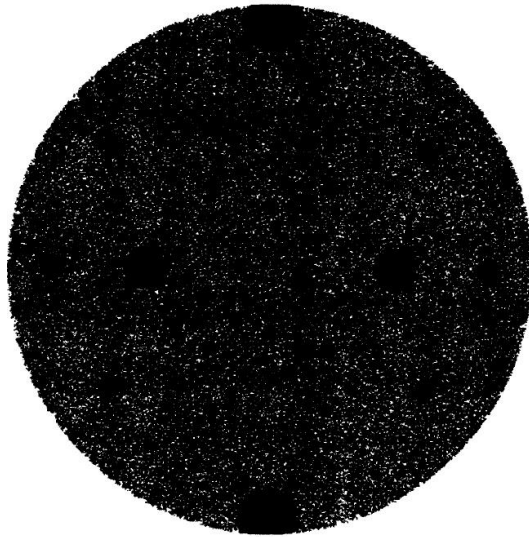


Рис. 5.20. Лемніскатний випадок: $g_2 = 1, g_3 = 0$

Хоча приклад Латте був відомий вже давно і часто наводився в формулюванні NILF-гіпотези, дослідження функції Пуанкаре в сучасному розумінні фрактальної геометрії почалося з досліджень Ермана.

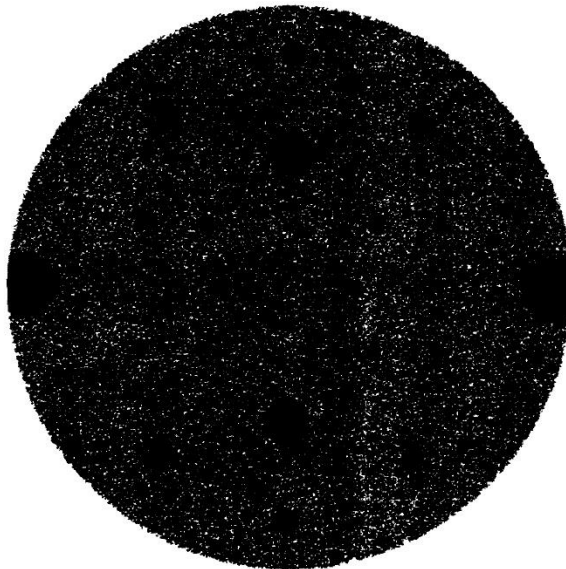


Рис. 5.21. Квазілемніскатний випадок: $g_2 = -1, g_3 = 0$

Функція Пуанкаре геометрично скінченна (напівгіперболічна), тобто:
а) перетин множини Жюліа з посткритичною множиною непорожній;

- б) множина Жюліа рівна всій сфері Рімана;
 в) розмірність Хаусдорфа множини Жюліа менша 2.

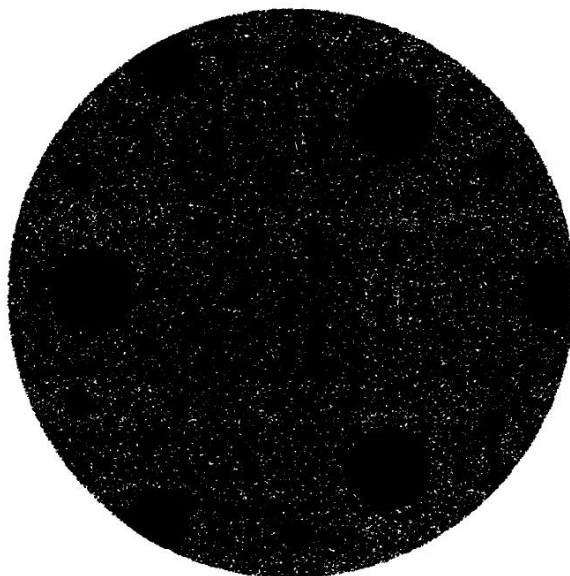


Рис. 5.22. Квазіевіангармонічний випадок: $g_2 = 0$, $g_3 = -1$

Фрактали Пуанкаре–Мандельброта отримуються в результаті ітерування функції Пуанкаре за параметрами g_2 , g_3 при постійному значенні z . На рис. 5.23 зображений фрактал Пуанкаре–Мандельброта при $z = 1$.

Характерною властивістю фракталів Пуанкаре є те, що множина критичних точок c містить 6 точок, з яких три відштовхуючі і три – притягуючі, причому за будь-якої ітерації вони змінюють свій характер на протилежний.

Дослідження фракталів Пуанкаре заслуговує на увагу принаймні з огляду на дві ключові обставини:

- функція Пуанкаре описує двопараметричне аналітичне сімейство і, отже, дозволяє досліджувати *2-універсальність* на відміну від 1-універсальності Фейгенбаума. Сценарій подвоєння періодів \wp -функції Вейерштрасса дозволяє поставити питання про знаходження оператора ренормалізації в цьому випадку, а також в більш широкому контексті для скінченно-геометричних раціональних відображень;

- ітерації функції Пуанкаре описують динаміку інволютивних псевдоаносівських дифеоморфізмів поверхонь Клейна–Пуанкаре.

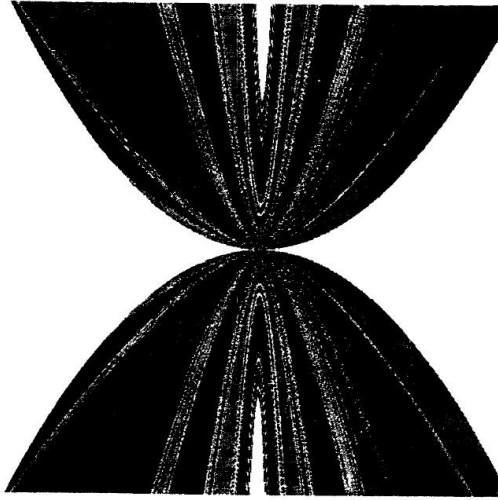


Рис. 5.23. Фрактал Пуанкаре–Мандельброта: $z = 1$

Некласичні поверхні Клейна – це поверхні з краєм і зі зміною орієнтації. Тому цікаво зв’язати топологічний опис поверхонь Клейна-Пуанкаре з властивостями симетрії функції Пуанкаре [25].

Дослідження властивостей симетрії функції Пуанкаре було започатковано в [61]. На рис. 5.24 наведено початковий етап побудови односторонньої поверхні, який ґрунтується на принципі симетрії Шварца. Цей рисунок дуже нагадує рисунки Мауріца Корнеліуса Ешера, але насправді є компактним (точніше компактифікованим) многовидом невід’ємної кривизни, що відповідає поверхні Клейна-Пуанкаре [25].

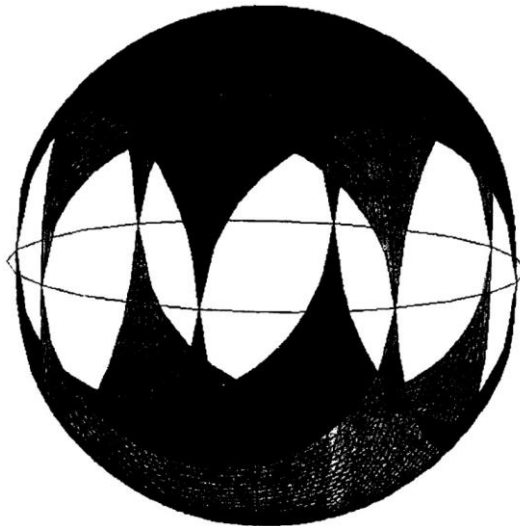


Рис. 5.24. “Рисунок Ешера”

Питання, тести для самоконтролю

1. В чому полягає суть комплексної динаміки?
2. Дайте означення орбіти, яка відповідає відображенню.
3. Сформулюйте означення множини Жюліа.
4. Наведіть основні властивості множини Жюліа.
5. Дайте означення заповненої множини Жюліа.
6. Сформулюйте означення множини Фату.
7. Наведіть приклади заповнених множин Жюліа.
8. Охарактеризуйте типи орбіт у множинах Жюліа.
9. Опишіть суть алгоритму побудови множини Жюліа.
10. Сформулюйте теорему про співвідношення множини Жюліа з орбітами відповідного відображення.
11. Дайте означення множини Мандельброта.
12. В чому полягає зв'язок між множиною Мандельброта і біфуркаційною діаграмою?
13. Який зв'язок між множиною Жюліа та множиною Мандельброта?
14. Яку роль відіграє критична орбіта множини Мандельброта?
15. Охарактеризуйте практичне застосування множини Мандельброта.
16. В чому суть проблеми Келі?
17. Охарактеризуйте підхід ренормалізації.
18. Сформулюйте основні властивості ренормалізації.
19. Дайте означення фракталів Пуанкаре.
20. Що таке фрактал Пуанкаре–Мандельброта?

Обов'язкові та додаткові задачі

5.1. Переконайтесь, що якщо f має орбіту періоду $n \geq 3$, то вона має орбіту періоду 1, тобто вона має нерухому точку.

5.2.* Переконайтесь, що якщо f має орбіту періоду 2^n , то вона має орбіту періоду 2^k для $n > k$.

В задачах 5.3–5.5 позначимо $Q(x) = 4x(1 - x)$ при $0 \leq x \leq 1$,

$$Q(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - x), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

5.3.* Покажіть, що відображення Q і T топологічно спряжені на $[0,1]$ за допомогою $H(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2} x$. (Відображення $f, g: X \rightarrow X$ називається *топологічно спряженим*, якщо існує гомеоморфізм $h: X \rightarrow X$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Насамперед покажіть, що H є гомеоморфізмом $[0,1]$ на $[0,1]$).

5.4. Знайдіть орбіту $Q(x)$ періоду 3, показавши, що $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$ є 3-циклом для $T(x)$.

5.5. Знайдіть орбіти $Q(x)$ періодів 4 та 5.

5.7. Для полінома $f(z) = z^2 - 1 + 0.213i$ реалізуйте алгоритм знаходження орбіти для 100 ітерацій при $z_0 = 0,3 + 0,2i$ та $z_0 = 0,31 + 0,2i$.

Реалізуйте алгоритм конструювання множини Жюліа для функцій

5.8. $f(z) = z^2 - 0,8 + 0,156i$.

5.9. $f(z) = z^2 + 0,285 + 0,01i$.

5.10. $f(z) = z^2 - 0,0085 + 0,71i$.

5.11. Розробіть алгоритм конструювання множини Мандельброта.

5.12. Розробіть алгоритм та побудуйте зображення кривої "ґотель Гільберта".

5.13. Побудуйте зображення кардіоїди, використовуючи рівняння

$$c = \frac{1}{2} e^{i\theta} - \frac{1}{4} e^{2i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

5.14. Отримайте зображення множини Мандельброта для $f(z) = z^3 + c$, покажіть, що якщо $|c| > 2$, то орбіта прагне до ∞ .

5.15. Побудуйте графічне зображення області притяжіння $\mathcal{A}(1)$ для $f(z) = z^4 - 1$.

5.16. Побудуйте графічне зображення області притяжіння $\mathcal{A}(1)$ для $f(z) = z^3 - z$.

Додаткові задачі за даною тематикою представлені у [25, 60, 62].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 487 с.
2. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
3. Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. – Москва–Ижевск.: ИКИ, 2003. – 530 с.
4. Анищенко В. С. Детерминированный хаос // Соросовский Образовательный Журнал. – 1996. – № 6. – С. 70–76.
5. Анищенко В. С. Устойчивость, бифуркации, катастрофы // СОЖ. – 2000. – № 6. – С. 105–109.
6. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
7. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К.: Київський університет, 2000. – 197 с.
8. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
9. Бельский И. М. Введение в аналитическую механику. – М.: Высш. школа, 1964. – 324 с.
10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.
11. Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
12. Вишик М. И. Фрактальная размерность множеств // СОЖ. – 1998. – № 1. – С. 122–127.
13. Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Прикладні задачі теорії стійкості. – К.: ВПЦ „Київський університет”, 2014. – 142 с.

14. Гринченко В. Т. Мацыпура В. Т. Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: ЛКИ, 2010. – 280 с.
15. Данилов Ю. В. Лекции по нелинейной динамике. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.
16. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – СПб.: Лань, 2008. – 480 с.
17. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. – М.: Наука, 1991. – 235 с.
18. Згуровский М. З., Мельник В. С. Нелинейный анализ в управлении бесконечномерными системами. – К.: Наукова думка, 1999. – 630 с.
19. Капустян О. В., Касьянов П. О., Позур С. В., Сукретна А. В., Фещенко І. С. Задачі підвищеної складності з курсу “Диференціальні рівняння” – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2011. – 79 с.
20. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. – М.: Факториал, 1999. – 760 с.
21. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
22. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 256 с.
23. Кубенко В. Д., Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. и др. Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость. – К.: Наук. думка, 1992. – 184 с.
24. Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2008. – 280 с.
25. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
26. Кузнецов С. П. Динамический хаос. – Москва: Физматлит, 2006. – 356 с.
27. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробагатько А. А. Методы вычислений. – К.: Вища школа, 1977. – 406 с.
28. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
29. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

30. Неймарк Ю. И. Простые математические модели и их роль в постижении мира // Соросовский Образовательный Журнал, 1997. № 3. – С. 139–143.
31. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1947. – 450 с.
32. Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды ММО 19, 1968. – С. 179–210.
33. Парасюк І. О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. – 88 с.
34. Перестюк М. О., Капустян О. В., Фекета П. В., Касімова Н. В. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ Київський університет, 2015. – 138 с.
35. Перестюк М. О., Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: "ТВиМС", 2004. – 225 с.
36. Пічкур В. В. Дослідження задач практичної стійкості диференціальних включень. – К.: Київський університет, 2005. – 141 с.
37. Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 355 с.
38. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.
39. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
40. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах. – К.: Либідь, 2003. – 450 с.
41. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 290 с.
42. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
43. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 209 с.
44. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: КомКнига, 2007. – 240 с.
45. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.
46. Фейгин М. И. Вынужденные колебание систем с разрывными нелинейностями. – М.: Наука, 1994. – 288 с.

47. Фейгин М. И. Особенности поведения динамических систем в окрестности опасных бифуркационных границ // СОЖ. – 1999. – № 7. – С. 122–127.
48. Фейгин М. И. Динамические системы, функционирующие в сопровождении опасных бифуркационных границ // СОЖ. – 1999. – № 10. – С. 122–127.
49. Хайпер Е., Нерсетт С. П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
50. Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Спивак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерных отображений. – К.: Наукова думка, 1989. – 216 с.
51. Швець О. Ю. Детермінований хаос. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 93 с.
52. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир, 1988. – 248 с.
53. Barbu V. Differential Equations. – Springer, Switzerland, 2016. – 230 p.
54. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. – Springer, 2017. – 620 p.
55. Chetaev N. G. On certain questions related to the problem of the stability of unsteady motion. – J. Appl. Math. Mech., 24 (1960). – p. 6–19.
56. Gerald Edgar. Measure, Topology and Fractal Geometry. – Springer, 1990. – 292 p.
57. Hale J. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. – American Mathematical Society, Providence, R.I., 1988. – 198 p.
58. Kapustyan O. V., Melnik V. S., Valero J., Yasinsky V. V. Global attractors of multivalued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. – К.: Наукова думка, 2008. – 215 p.
59. Khalil H. K. Nonlinear systems. – NJ.: Prentice Hall, 2002. – 766 p.
60. Kenneth Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – John Wiley & Sons, New York, 1990. – 398 p.
61. McMullen C. T. Complex dynamics and renormalisation. – Princeton: Princeton University Press, 1994. – 135 p.
62. Peter H. O., Richter P. H. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. – Springer-Verlag, Berlin, 1986. – 188 p.
63. Scheinerman, Edward R. Invitation to Dynamical Systems. – Baltimore: The Johns Hopkins University, 2000. – 289 p.
64. https://nplus1.ru/material/2019/09/06/chaosreigns?fbclid=IwAR2oWf0mAYSbWE8wI33Xk1rEIx1b6zCS4iU_yHsd5gAfcIqDFxu5PUo11h0
URL: <https://nplus1.ru> (дата звернення: 06.09.2019).

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

\forall	–	для кожного, для всіх (квантор загальності);
\exists	–	існує (квантор існування);
\emptyset	–	порожня множина;
$a \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$	–	a належить множині \mathcal{A} яка є підмножиною множини \mathcal{B} ;
$\overline{\mathcal{A}}$	–	замикання множини \mathcal{A} ;
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	–	об'єднання та переріз множин \mathcal{A} та \mathcal{B} ;
$\partial \mathcal{A}, \text{int } \mathcal{A}$	–	границя і внутрішність множини $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$;
$\text{comp}(\mathbb{R}^n)$	–	сукупність всіх непорожніх компактів в \mathbb{R}^n ;
$\text{conv}(\mathbb{R}^n)$	–	сукупність всіх непорожніх опуклих компактів в \mathbb{R}^n ;
$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	–	прямий добуток множин \mathcal{A} та \mathcal{B} ;
$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	–	f відображає множину \mathcal{A} в множину \mathcal{B} ;
\mathbb{R}	–	множина (поле) цілих чисел, дійсна вісь;
\mathbb{C}	–	множина (поле) комплексних чисел, комплексна площина;
\mathbb{Z}	–	множина цілих чисел;
\mathbb{N}	–	множина натуральних чисел;
\mathbb{R}^n	–	n – вимірний евклідовий простір зі скалярним добутком $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, x_i, y_i – компоненти векторів $x, y \in \mathbb{R}^n$ відповідно, $i = 1, 2, \dots, n$;
\mathbb{C}^n	–	комплексний n - вимірний векторний простір;
T	–	знак транспонування;
$\ x\ = \sqrt{\langle x, x \rangle}$	–	евклідова норма в \mathbb{R}^n ;
$K_r(a)$	–	замкнена куля радіусу $r \geq 0$ з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$, $K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \ x\ \leq 1\}$;
$= a + rK_1(0)$	–	
$U_r(a)$	–	відкрита куля радіусу $r \geq 0$ з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$, $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \ x\ < 1\}$;
$= a + rU_1(0)$	–	
$S = \{x \in \mathbb{R}^n: \ x\ = 1\}$	–	сфера з центром в точці 0 одиничного радіусу;
E	–	одинична матриця;
$\ A\ $	–	евклідова норма матриці A ,

	$\ A\ = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$, $\text{tr}(\cdot)$ — слід матриці ;
\dot{x}	— похідна за "часом" t ;
$f'(x)$	— похідна відображення f ;
$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$	— матриця Якобі відображення $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$;
$J(f_c)$	— множина Жюліа;
$C([a, b], \mathbb{R}^n)$	— простір неперервних функцій з $[a, b]$ в \mathbb{R}^n ;
$C^1(a, b)$	— простір неперервно диференційованих функцій на відрізьку $[a, b]$;
$\text{grad } \varphi$	— градієнт функції φ ;
$x \rightarrow 0^+$	— x прямує до 0, $x > 0$.

Для нотаток

Для нотаток

Навчальне видання

**Пічкур Володимир Володимирович,
Капустян Олексій Володимирович,
Собчук Валентин Володимирович**

ТЕОРІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Комп'ютерна верстка *І. С. Савицької*

Підписано до друку 28.02.2020 р. Формат 70×100¹/₁₆.

Обсяг 28,06 ум. друк. арк., 27,13 обл.-вид. арк.

Наклад 300 пр. Зам. 30. Видавець і виготовлювач – Вежа-Друк

(м. Луцьк, вул. Шопена, 12, тел. (0332) 29-90-65).

Свідоцтво Держ. комітету телебачення та радіомовлення України

ДК № 4607 від 30.08.2013 р.