

ДИНАМИКА МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ МАШИН

Курс лекций

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Составление физической модели машины.....	4
2. Общие решения уравнений динамики жестких систем.....	24
3. Общие приемы решения уравнений динамики упругих систем.....	30
4. Динамика переходных процессов ненагруженных машин.....	32
5. Динамика переходных процессов нагруженных машин.....	33
6. Динамика нагружения машин после разгона.....	35
7. Динамические нагрузки от ударов в зазорах.....	42
8. Колебания в приводных линиях.....	44
9. Динамика установившегося движения неравновесных систем.....	46
10. Колебания опорных конструкций и элементов.....	49
11. Определение параметров виброгасителя.....	52
12. Ударное нагружение конструкций и механизмов.....	54
13. Автоколебание систем.....	58
14. Составление уравнений динамики систем с распределенными массами (волновые уравнения).....	59
15. Способы решения волновых уравнений.....	61
16. Ударное нагружение элементов машин, представляемых в виде систем с распределенными массами.....	63

ВВЕДЕНИЕ

Металлургические машины работают в тяжелых динамических режимах. Качество этих машин в немалой степени зависит от того, насколько точно произведены расчеты их основных параметров.

Практически 90% разрушения деталей машин носят усталостный характер в результате действия динамических нагрузок. Механические колебания в машинах оказывают вредное влияние не только на прочность. Они могут в значительной степени усложнить и даже нарушить нормальный технологический процесс (например, колебание электродов дуговых электропечей, колебание валков листопркатных станов, приводящее к ухудшению качества листов, буксование валков прокатных станов и т.д.).

Динамические расчеты машин предусматривают определение величины амплитуд и частот колебаний нагрузок в машине и на этой основе проводятся расчеты деталей на выносливость.

Большое влияние на качество машин оказывает выбор рациональных кинематических схем с возможно минимальным числом пар и звеньев без пассивных связей, обеспечивающих минимальные динамические нагрузки и большую их надежность. К основным направлениям развития современного машиностроения, обеспечивающим снижение динамической напряженности и высокое качество машин, можно отнести следующие:

- повышение мощностей, скоростей и производительности машин при одновременном улучшении их динамических характеристик и уменьшении металлоемкости;
- максимально возможное упрощение кинематических схем механизмов;
- рациональное размещение приводов отдельных механизмов в машинах с минимальной длиной приводных линий, обеспечивающее снижение динамических нагрузок и массы машин;
- упрощение конструкций механизмов путем применения индивидуальных приводов, исключая трансмиссии и муфты включения;
- использование компактных приводов типа «двигатель–редуктор», планетарных, волновых и других передач;
- применение для тяжелонагруженных машин и механизмов безредукторных приводов;
- более широкое использование гидро– и пневмоприводов, комбинированных электрогидро– и пневмогидроприводов;
- применение многодвигательных приводов.

Расчет динамических нагрузок колебательного характера в машинах включает следующие основные этапы:

- 1) Составление физической модели машины.
- 2) Определение величины и характера изменения внешних нагрузок, приложенных к системе.
- 3) Составление дифференциальных уравнений движения упругой системы.
- 4) Определение частот собственных колебаний системы.

- 5) Расчет упругих сил и моментов в звеньях приводов.
- 6) Определение действительных законов перемещения и скоростей рабочих органов машин.

1. СОСТАВЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАШИНЫ

1.1 Общие положения

Всякая машина состоит из двигателя, передачи и исполнительного органа или механизма. Для определения действующих нагрузок целесообразно действительные схемы машин представлять в виде физических моделей, т.е. в приведенном виде.

В зависимости от целей исследований и конструктивных особенностей машин приведенные расчетные схемы содержат одну массу или систему сосредоточенных масс (две, три, иногда четыре), соединенных упругими звеньями, или распределенных в пределах определенных участков.

Приведенные массы могут быть по величине постоянными или переменными. Жесткость упругих звеньев и внешние силы (движущие силы и силы сопротивления) в общем случае являются переменными, зависящими от положения элементов системы и места их нагружения или скорости ведущего элемента. В некоторых случаях внешние силы выражаются в функции времени.

Точки приведения обычно выбирают в местах расположения основных масс механизма. Приведенные значения масс, находящиеся по одну сторону от упругого элемента, для которого определяется расчетная нагрузка, складывают.

Например, при составлении физической модели приведенной одномассовой системы для токарного станка (рис. 1), приведенный момент инерции масс к валу патрона будет состоять из приведенных значений моментов инерции масс движущихся частей электродвигателя, муфты, вращающихся элементов коробки скоростей и патрона.

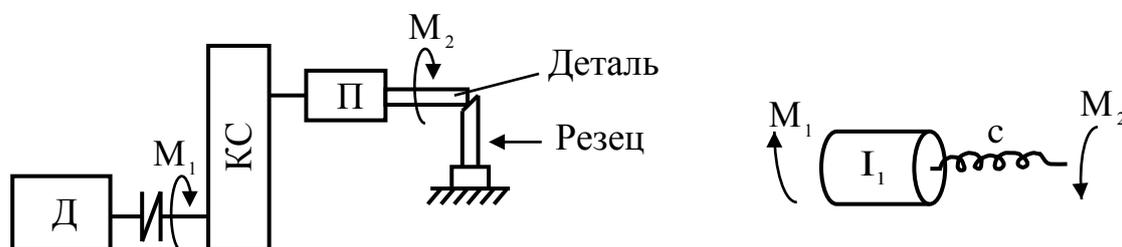


Рис. 1. Одномассовая система:

M_1 – момент привода; M_2 – момент сопротивления;
 I_1 – приведенный момент инерции масс; c – приведенная жесткость элементов системы.

В качестве примера составления двухмассовой физической расчетной модели можно рассмотреть прокатный стан кварто (рис. 2).

В этом случае один из приведенных моментов инерции масс I_1 будет состоять из приведенных значений моментов инерции масс якоря двигателя, муфт, вращающихся частей редуктора и шестеренной клетки. Моменты инерции масс шпинделей могут быть отнесены к ведомой приведенной массе, включающей рабочие и опорные валки. В такой схеме дальнейшие расчеты позволят определить наибольшую из возможных нагрузок на шпинделях.

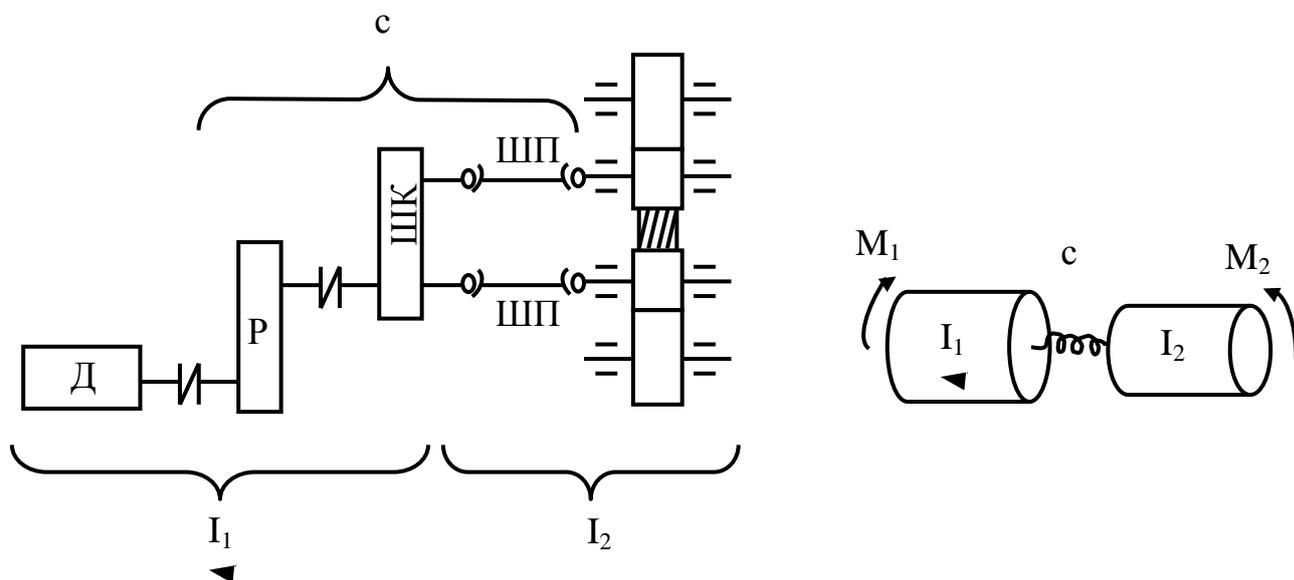


Рис. 2. Двухмассовая система

Если в состав механизма в процессе его работы входят вращающиеся и поступательно движущиеся массы, физическую модель можно представить как в виде совокупности приведенных масс, так и в виде совокупности приведенных моментов инерции масс (рис. 3).

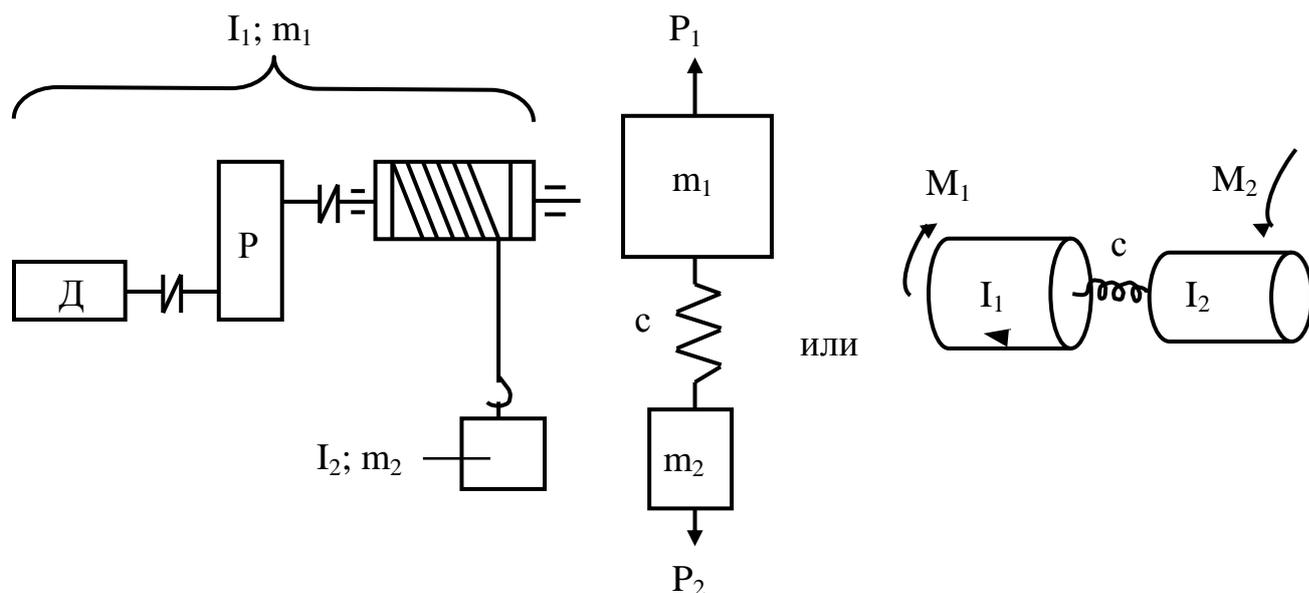


Рис. 3. Смешанная двухмассовая модель

Переход от массы к моменту её инерции и обратно будет рассмотрен ниже.

К внешним нагрузкам машины относятся силы и моменты сил, которые оказывают сопротивление движению машины или её элементов.

Рассмотрим механизм, состоящий из двигателя и передач (рис. 4).

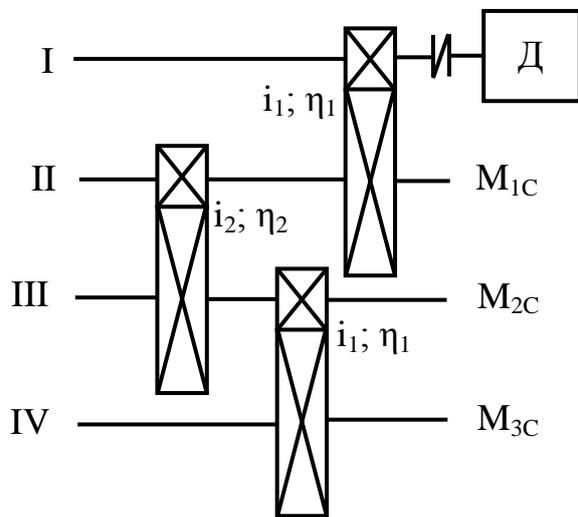


Рис. 4. Схема для приведения внешних нагрузок

Требуется привести все моменты к концам вала III. Тогда приведенный момент с левой стороны вала III будет равен

$$M_1 = M_d \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 - M_{1C} \cdot i_2 \cdot \eta_2 - M_{2C},$$

а с правой

$$M_2 = \frac{M_{3C}}{i_3 \cdot \eta_3}.$$

Для вала II аналогично получим

$$M_1 = M_d \cdot i_1 \cdot \eta_1 - M_{1C},$$

$$M_2 = \frac{M_{3C}}{i_2 \cdot i_3 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3} + \frac{M_{2C}}{i_2 \cdot \eta_2}.$$

Здесь M_{1C} , M_{2C} , M_{3C} – моменты сопротивления вращению на соответствующих валах. Если внешние

нагрузки выражены в виде сил и моментов, то приведенное значение должно быть одноименным (в виде только сил или только моментов).

Силы в виде моментов или моменты в виде сил выражают через соответствующие радиусы приведения.

Например, силы сопротивления P передвиганию тележки (рис. 5) необходимо привести к валу двигателя и выразить в виде момента.

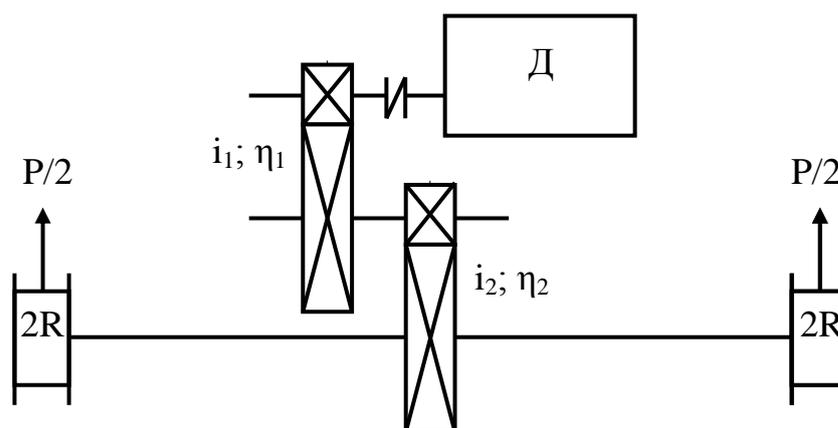


Рис. 5. Схема механизма передвижения тележки

Радиус приведения в данном случае равен радиусу ходового колеса R , а приведенный момент

$$M_C = \frac{P \cdot R}{i_2 \cdot i_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1}.$$

1.2. Определение моментов инерции вращающихся масс

В общем случае, для тела любой формы (рис. 6) момент инерции его массы равен

$$I = \sum_1^n m_i \cdot r_i^2.$$

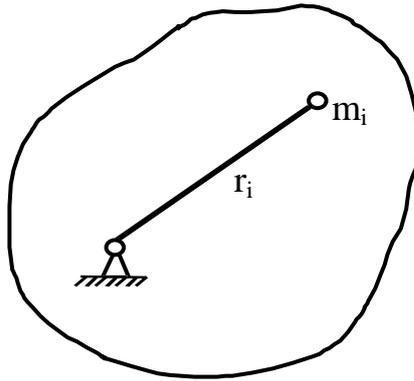


Рис. 6. К определению момента инерции массы вращающегося тела

Для сплошного цилиндра

$$I = \int_V r^2 \cdot \rho \cdot dV = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\rho \cdot \pi R^4 \cdot h}{2} = 0,125mD^2,$$

где R и D – радиус и диаметр цилиндра,
 ρ – плотность материала цилиндра,
 h – толщина (высота) цилиндра,
 m – масса цилиндра.

Для полого цилиндра

$$I = 2\pi\rho h \int_{R_0}^R r^3 dr = \frac{\rho \cdot \pi \cdot h}{2} (R^4 - R_0^4),$$

где R_0 – диаметр отверстия (внутренний диаметр) цилиндра.

Детали типа шкив, муфта, зубчатое колесо и др. представляют собой комбинацию элементов (например, ступица, обод, зубчатый венец и т. п.). В этом случае момент инерции массы детали складывается из суммы моментов инерции масс её элементов.

В практических расчетах обычно используется формула

$$I = k \cdot m \cdot D^2,$$

где D – наружный диаметр детали;

k – коэффициент распределения массы.

Для сплошного цилиндра $k=0,125$;

для полого цилиндра $k=0,25$;

для деталей типа шкив $k=0,15$.

Если известен маховой момент элемента (например, якоря двигателя), то

$$I = k \cdot \frac{GD^2}{g};$$

где g – ускорение свободного падения;

G – вес элемента.

1.3. Приведение сосредоточенных масс и моментов инерции масс

Условием динамического приведения масс (моментов инерции) является равенство кинетических энергий приведенной массы m_{Π} (приведенного момента инерции I_{Π}) и всех масс (моментов инерции) действительного механизма.

Если массы, движущиеся поступательно (рис. 7а), приводят к точке приложения приведенной массы m_{Π} , движущейся со скоростью v_{Π} , можно записать

$$\frac{m_{\Pi} \cdot v_{\Pi}^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} + \frac{m_3 \cdot v_3^2}{2}, \quad (1)$$

откуда

$$m_{\Pi} = m_1 \cdot \frac{v_1^2}{v_{\Pi}^2} + m_2 \cdot \frac{v_2^2}{v_{\Pi}^2} + m_3 \cdot \frac{v_3^2}{v_{\Pi}^2}. \quad (2)$$

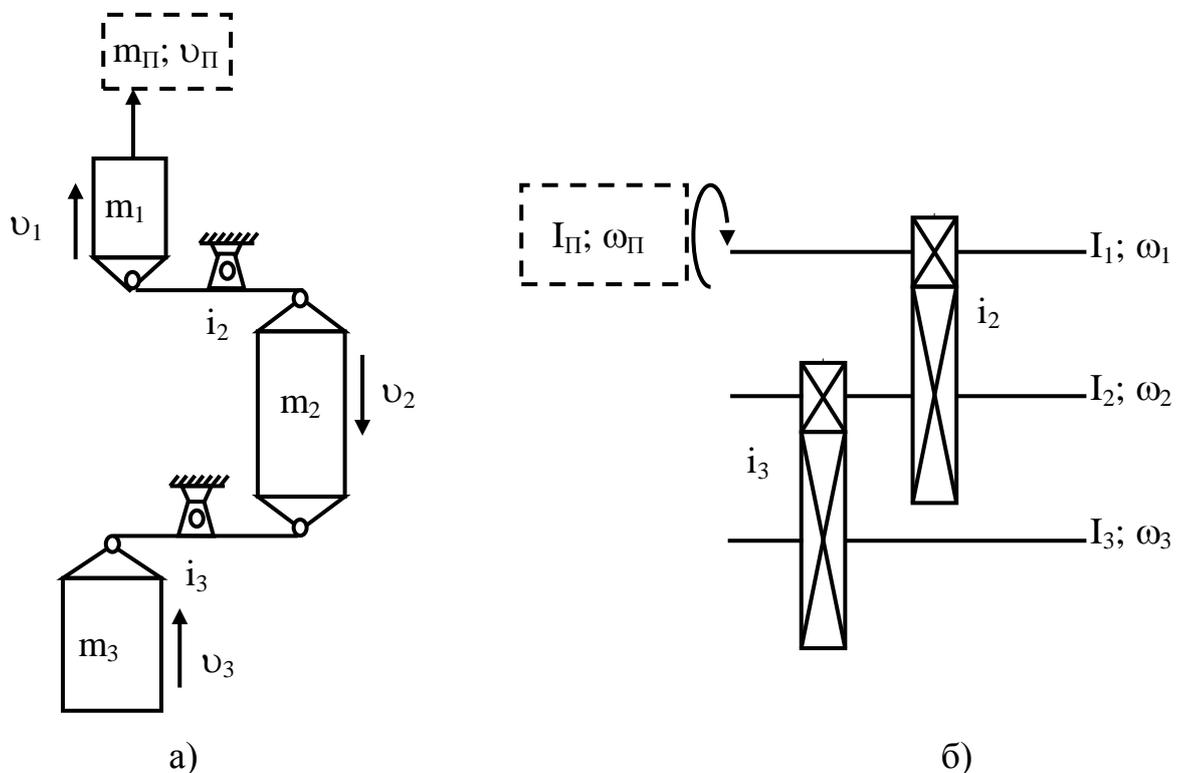


Рис. 7. Условные схемы для приведения:
а) поступательное движение; б) вращательное движение.

Учитывая, что $\frac{v_1}{v_{\Pi}} = i_1$, $\frac{v_2}{v_{\Pi}} = i_2$, $\frac{v_3}{v_{\Pi}} = i_3$, для нашей схемы получим

$$m_{\Pi} = m_1 + m_2 \cdot i_2^2 + m_3 \cdot i_3^2. \quad (3)$$

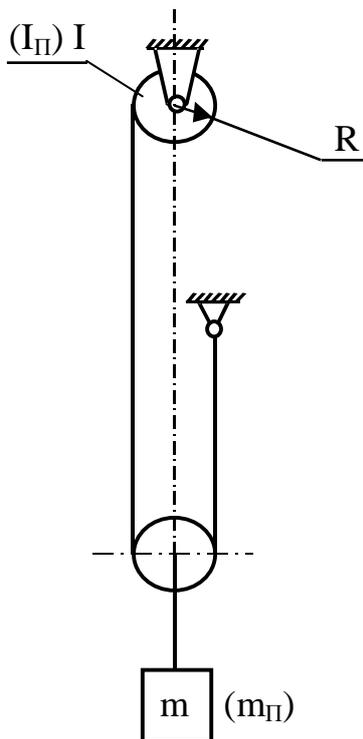
Аналогично, для вращательного движения масс (рис. 7б)

$$I_{\Pi} = I_1 + I_2 \cdot i_2^2 + I_3 \cdot i_3^2. \quad (4)$$

Если механизм содержит движущиеся поступательно и вращающиеся элементы, массу необходимо выразить через момент инерции или момент инерции через массу.

Например, требуется привести массу груза m , поднимаемого с помощью троса, наматываемого на барабан радиусом R (рис. 8).

Приведенный момент инерции системы



$$I_{\Pi} = I + \frac{mR^2}{n^2}, \quad (5)$$

приведенная масса системы

$$m_{\Pi} = m + \frac{I \cdot n^2}{R^2}, \quad (6)$$

где n – кратность полиспаста.

1.4. Приведение распределенных (рассредоточенных) масс

Для решения задач динамики целесообразно представлять распределенные массы в виде сосредоточенных в заданной точке элемента. При этом должно выполняться сформулированное в п. 1.3 условие как равенство кинетических энергий приведенной (сосредоточенной) массы и всех элементарных масс, распределенных по длине действительного элемента.

Рассмотрим некоторые примеры приведения распределенных масс.

Рис. 8. Смешанная система

1.4.1. Стержень постоянного сечения ($S = \text{const}$)

Удлинение части стержня длиной x равно

$$y_x = \int_0^x \frac{q(L-x)}{E \cdot S} dx = \frac{\left(qL - \frac{qx}{2} \right) x}{E \cdot S}, \quad (7)$$

где q – погонный вес стержня;

E – модуль нормальной упругости;

S – площадь поперечного сечения.

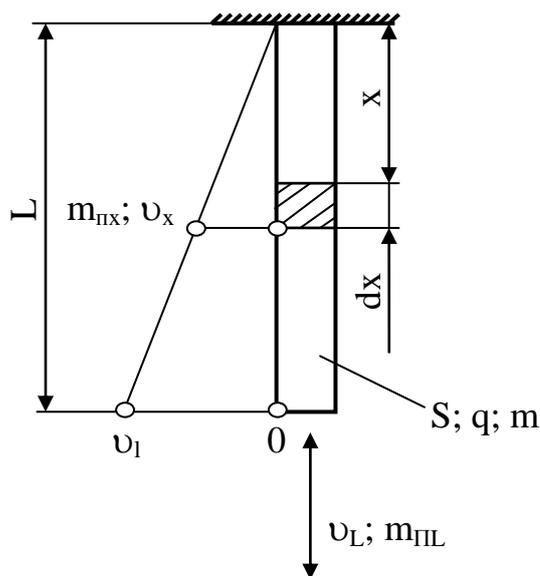


Рис. 9. К приведению массы к концу стержня

При $x = L$ получим

$$y_L = \frac{qL^2}{2E \cdot S}. \quad (8)$$

Поскольку из формулы (8)

$$ES = \frac{qL^2}{2y_L}, \quad (9)$$

можем записать:

$$y_x = \frac{2\left(qL - \frac{qx}{2}\right)x}{qL^2} \cdot y_L. \quad (10)$$

Скорость перемещения элемента стержня dx равна

$$v_x = \frac{2\left(qL - \frac{qx}{2}\right)x}{qL^2} \cdot v_L. \quad (11)$$

Кинетическая энергия элемента стержня длиной dx

$$dT_x = \frac{q \cdot dx}{2g} \cdot v_x^2 = \frac{2 \cdot q \left(qL - \frac{dx}{2}\right)^2 x^x \cdot v_L^2}{g \cdot q^2 \cdot L^4} dx. \quad (12)$$

Кинетическая энергия всего стержня

$$T = \int_0^L dT_x. \quad (13)$$

После интегрирования и преобразований получим

$$T = 0,533 \frac{qL}{g} \cdot \frac{v_L^2}{2} = 0,533m \frac{v_L^2}{2}. \quad (14)$$

При приведении распределенной массы стержня m к его концу приведенная кинетическая энергия равна

$$T_{ПЛ} = m_{ПЛ} \cdot \frac{v_L^2}{2}. \quad (15)$$

Таким образом, при условии $T_{ПЛ} = T$ получим

$$m_{ПЛ} = 0,533m. \quad (16)$$

При приведении распределенной массы стержня m к сечению со скоростью v_x

$$T_{Пх} = m_{Пх} \cdot \frac{v_x^2}{2}. \quad (17)$$

Из условия $T_{\text{Пк}} = T$ будем иметь для любого сечения стержня

$$m_{\text{Пк}} = \frac{2m \cdot L^4}{15x^2 \left(L - \frac{x}{2} \right)^2}. \quad (18)$$

1.4.2. Консольная балка

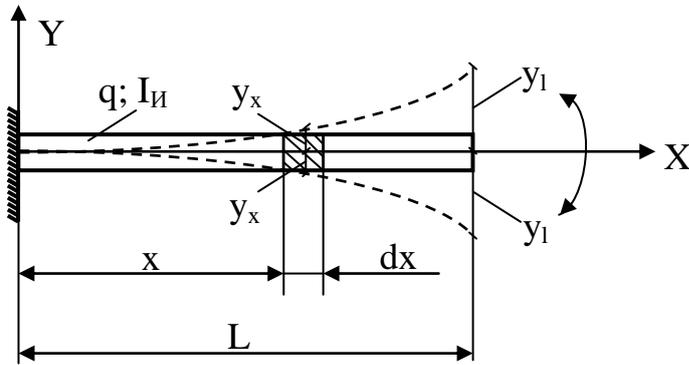


Рис. 10. К приведению массы консольной балки

При колебаниях балки момент изгиба в сечении X равен

$$M_x = \frac{q(L-x)^2}{2}, \quad (19)$$

а уравнение её упругой линии

$$EI_{\text{И}} \frac{d^2 y_x}{dx^2} = M_x. \quad (20)$$

Интегрируя дважды выражение

$$EI_{\text{И}} \frac{d^2 y_x}{dx^2} = M_x = \frac{q(L-x)^2}{2},$$

получим

$$y_x = \frac{1}{2EI_{\text{И}}} \left(\frac{q(L-x)^4}{12} + \frac{qL^3 x}{2} - \frac{qL^4}{12} \right). \quad (21)$$

При $x=L$ имеем

$$y_L = \frac{qL^4}{8EI_{\text{И}}}. \quad (22)$$

Тогда формулу (21) можно представить в виде

$$y_x = \frac{4 \left[\frac{qL^2 x^2}{2} - \left(\frac{qLx^3}{3} - \frac{qx^4}{12} \right) \right] y_L}{qL^4}. \quad (23)$$

Кинетическая энергия элемента dx равна

$$dT_x = \frac{q \cdot dx}{2g} \cdot v_x^2, \quad (24)$$

а всей балки

$$T = \int_0^L dT_x.$$

Из условия $T = T_{\text{Пл}}$ получаем

$$m_{\text{Пл}} = 0,257m, \quad (25)$$

а для любого сечения балки при $T = T_{Пх}$

$$m_{Пх} = \frac{26mL^8}{45 \left(\frac{x^4}{2} - 2L^3x + \frac{3L^4}{2} \right)^2}. \quad (26)$$

1.4.3. Двухопорная балка постоянного сечения

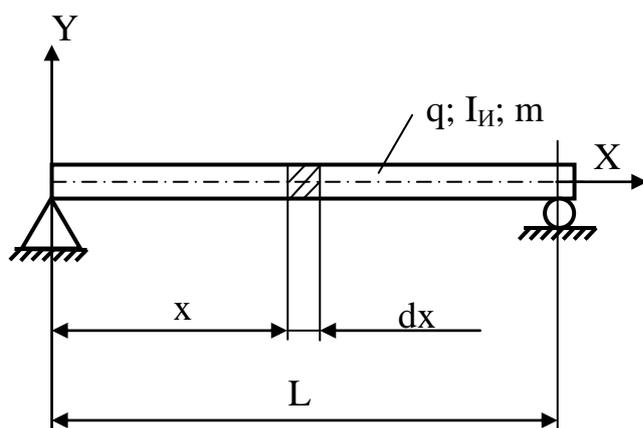


Рис. 11. К приведению массы балки

Аналогично п. 1.4.2 получаем

$$M_x = \frac{q}{2} [L(L-x) - (L-x)^2], \quad (27)$$

$$EI_{и} \frac{d^2 y_x}{dx^2} = -M_x, \quad (28)$$

$$y_x = \frac{1}{24EI_{и}} \left(\frac{qL^3x}{2} + 2qLx^3 + qx^4 \right). \quad (29)$$

Прогиб по середине балки

$$y_{L/2} = \frac{13}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI_{и}}. \quad (30)$$

Из условия

$$2 \int_0^{L/2} \frac{qv_x^2}{2g} dx = m_{ПL/2} \cdot \frac{v_{L/2}^2}{2} \quad (31)$$

после интегрирования и преобразований получаем

$$m_{ПL/2} = 0,505 \cdot m, \quad (32)$$

а для любого сечения x балки

$$m_{Пх} = \frac{31mL^8}{630 \cdot x^2(L-x)^2 [L^2 + x(L-x)]^2}. \quad (33)$$

В табл. 1 приведены формулы для определения приведённых масс.

1.5. Определение жесткости элементов, механизмов и машин

Под жесткостью механической системы или отдельного её элемента понимают отношение нагрузки к вызываемой ею деформации.

В общем, виде линейная жесткость равна

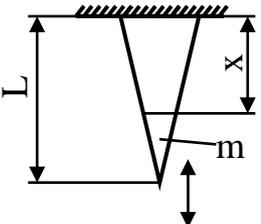
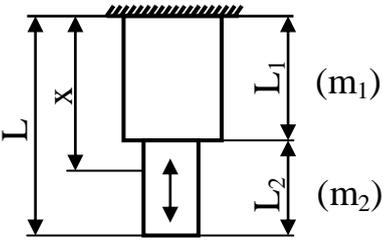
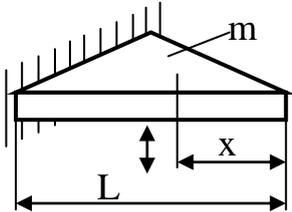
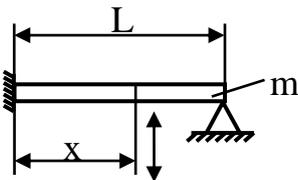
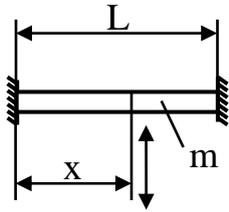
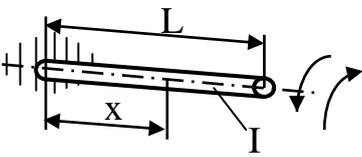
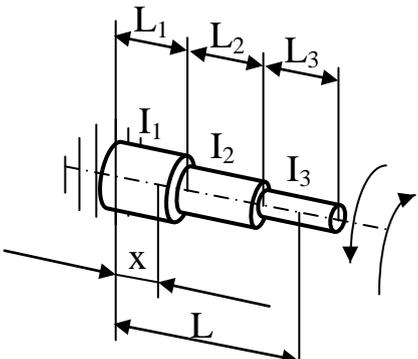
$$c_L = \frac{P}{y}, \frac{Н}{мм}, \quad (34)$$

а угловая жесткость

$$c_y = \frac{M}{\varphi}, \frac{Н \cdot мм}{рад}, \quad (35)$$

где P – растягивающее, сжимающее или изгибающее усилие;

Формулы для определения приведенных масс

	$m_{\text{Пк}} = \frac{2mL^4}{35x^2 \left(L - \frac{x}{2} \right)^2}$
	<p>При $x=L$</p> $m_{\text{Пл}} = \frac{m_1 L_1^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{m_2}{m_1} \right)^2}{3 \left[\frac{L_2^2}{2} + L_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{m_2}{m_1} \right)^2 \right]} + \frac{8m_2}{15}$
	$m_{\text{Пк}} = \frac{32mL^8}{35(x^4 - 4L^3x + 3L^4)^2}$
	$m_{\text{Пк}} = \frac{19mL^8}{630(L-x)^2(3L-x)^2 \cdot x^4}$
	$m_{\text{Пк}} = \frac{mL^8}{630 \cdot x^4(L-x)^4}$
	$I_{\text{Пк}} = \frac{8IL^2}{15x^2}$
	$I_{\text{Пк}} = \frac{I_1 \frac{L_1^2}{d_1^8} + I_2 \left(\frac{L_1}{d_1^4} + \frac{L_2}{d_1^4} \right)^2}{3 \left(\frac{L_1}{d_1^4} + \frac{L_2}{d_1^4} + \frac{L_3}{d_3^4} \right)^2} + \frac{8 \cdot I_3}{15}$

y – перемещение в сечении, в котором прикладывается деформирующее усилие;

M – крутящий момент;

φ – угол закручивания в сечении, в котором прикладывается крутящий момент.

Для конкретных элементов (стержни, валы переменного сечения, балки, пружины, рессоры и т.п.) методами теории упругости находят деформацию элемента (y или φ) в рассматриваемом сечении и определяют его жесткость.

Жесткость элемента зависит от следующих факторов:

- материал (E, G);
- форма поперечного сечения (за исключением растяжения и сжатия);
- место (координата) приложения нагрузки;
- способ закрепления концов.

Иногда в расчетах удобнее пользоваться понятием податливость

$$e = \frac{1}{c}, \left(\frac{\text{мм}}{\text{Н}}, \frac{\text{рад}}{\text{Н} \cdot \text{мм}} \right). \quad (36)$$

Для определения жесткости элементов сложной формы (лопасти, вилки, зубья шестерен и т.п.) часто используют эмпирические формулы, включающие различные коэффициенты, учитывающие соотношения размеров элементов.

В табл. 2 приведены формулы для определения жесткости элементов, наиболее часто встречающихся в машинах и механизмах металлургических машин.

1.6. Приведение жесткостей системы

Жесткости звеньев, соединяющих приведенные массы, также должны быть приведенными.

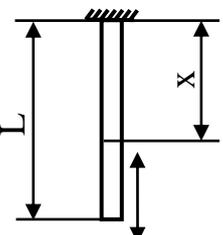
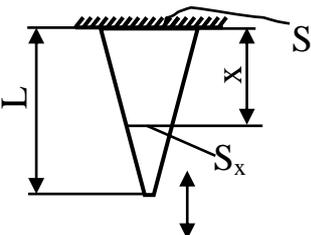
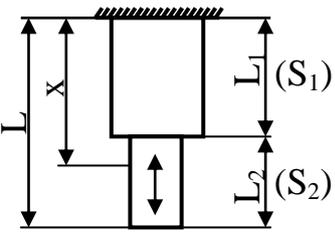
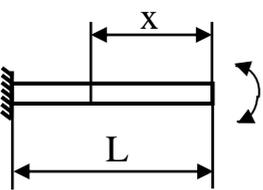
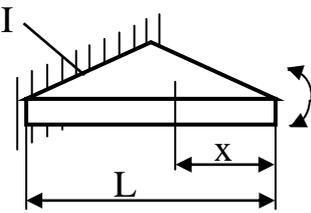
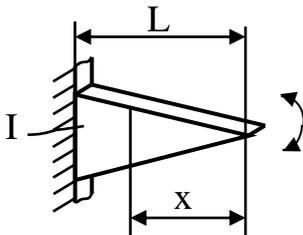
Рассмотрим систему, состоящую из поступательно движущихся масс (рис. 12а), нагруженных силами $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_n$.

Если приведение системы производят к массе m_{Π} , приведенная жесткость расчетной системы определяется следующим образом.

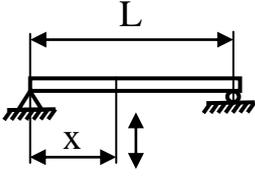
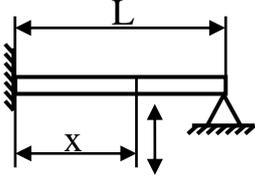
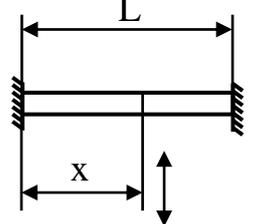
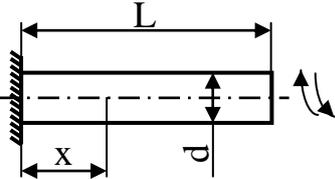
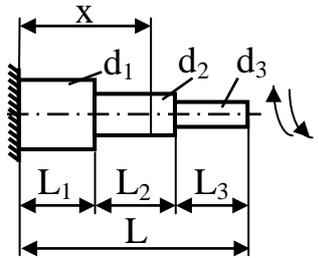
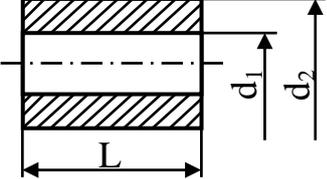
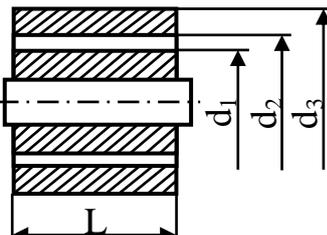
Статическая сила P_1 , действующая на массу m_1 , вызовет перемещение $\frac{P_1}{c_1}$ за счет упругой деформации звена c_1 ; перемещение массы m_2 , соответственно, равно $\frac{P_1}{c_2} \cdot i_1$, перемещение следующей массы m_3 составит $\frac{P_1}{c_3} \cdot i_1 \cdot i_2$ и т.д., т.е. перемещение массы m_1 под действием силы P_1

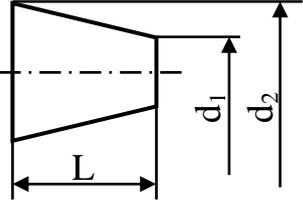
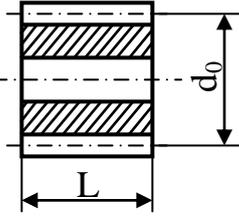
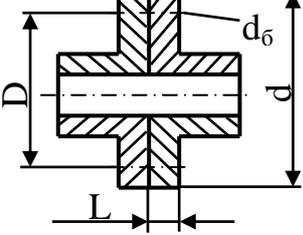
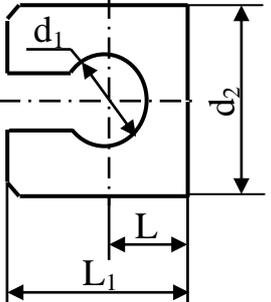
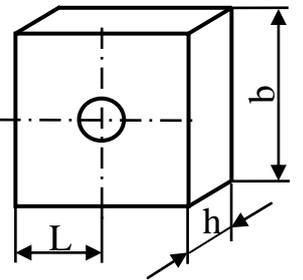
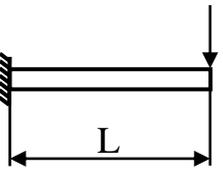
$$y_1 = \frac{P_1}{c_1} + \frac{P_1 \cdot i_1^2}{c_2} + \frac{P_1 \cdot i_1^2 \cdot i_2^2}{c_3} + \dots \quad (37)$$

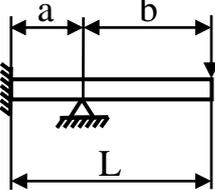
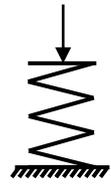
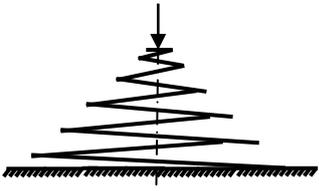
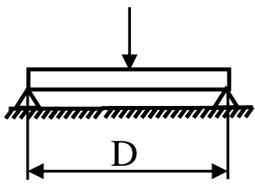
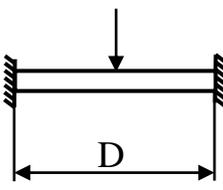
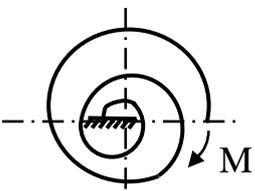
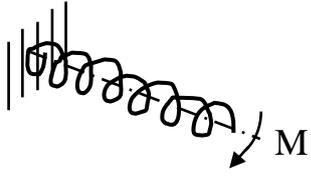
Формулы для определения жесткости элементов систем*

1	2	3
	Стержень постоянного сечения ($S=\text{const}$)	$c_x = \frac{E \cdot S}{x}$
	Плоский стержень трапецидального профиля ($S=\text{var}$)	$c_x = \frac{E \cdot L \sqrt{S \cdot S_x}}{x^2}$
	Ступенчатый стержень	При $x=L$ $c_1 = \frac{E}{\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2}}$
	Консольная балка при $I=\text{const}$	$c_x = \frac{3EI}{(L-x)^3}$
	Консольная балка при $I_x=\text{var}$, I – в сечении заделки	$c_x = \frac{EI}{L \left(\frac{x^2}{2} - Lx + \frac{L^2}{2} \right)}$
	Консольная балка при $I_x=\text{var}$, I – в сечении заделки	$c_x = \frac{EI}{L^3 \left(\frac{x}{L} + \ln \frac{L}{x} - 1 \right)}$ При $\frac{L}{x} = 10$ $c_x = \frac{EI}{1,4L^3}$

* S и I – площадь и момент инерции поперечного сечения соответственно.

1	2	3
	<p>Двухопорная балка при I=const</p>	$c_x = \frac{3EI L}{x^2(L-x)^2}$
	<p>Двухопорная балка с заделкой одного конца при I=const</p>	$c_x = \frac{12EI L^3}{x^3(L-x)^2[3L+(L-x)]}$
	<p>Балка с жесткой заделкой концов при I=const</p>	$c_x = \frac{48EI}{x^2(3L-4x)}$
	<p>Вал постоянного диаметра</p>	$c_x = \frac{\pi G d^4}{32x}$
	<p>Ступенчатый вал</p>	$c_x = \frac{\pi G}{32 \left[\frac{L_1}{d_1^4} + \frac{L_2}{d_2^4} + \frac{x-L_1-L_2}{d_3^4} \right]}$
	<p>Полый вал</p>	$e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{L}{\left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right] d_2^4}$
	<p>Деталь типа шкива</p>	$e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{L}{\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_3} \right)^4 \right] d_3^4 + d_1^4}$

1	2	3										
	<p>Конический вал</p>	$e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{L}{3 \cdot d_1^3 \cdot d_2} \cdot \left[1 + \frac{d_1}{d_2} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right]^*$										
	<p>Зубчатое колесо $\alpha=20^\circ$ – угол зацепления; z – число зубьев; $k_3 = \begin{cases} 6 \cdot 10^{11} & \text{– прямозубые,} \\ 3,6 \cdot 10^{11} & \text{– косозубые,} \\ 4,4 \cdot 10^{11} & \text{– шевронные} \end{cases}$</p>	$e = \left(\frac{32}{\pi G} \cdot \frac{1}{d_0^4} + \frac{k_3}{Lz^2 \cdot \cos^2 \alpha} \right),$ <p style="text-align: center;">или</p> $e = \frac{4k_3}{Ld_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$										
	<p>Муфта: d_6 – диаметр болта; z – число болтов.</p>	$e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{L}{0,5 \cdot D^2 \cdot z \cdot d_6^4}$										
	<p>Вилка универсального шпинделя</p>	$e = \frac{L \left(\frac{0,5d_2}{0,5d_2 - 0,5d_1} \right)^{3,35}}{0,592 \cdot \left(\frac{d_2}{2} \right)^4 \cdot G}$										
	<p>Прямоугольный элемент γ – коэффициент, учитывающий соотношение b/h</p>	$e = \frac{L}{\gamma \cdot G \cdot b \cdot h^3}$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>b/h</td> <td>2,0</td> <td>2,5</td> <td>3,0</td> <td>4,0</td> </tr> <tr> <td>γ</td> <td>0,23</td> <td>0,25</td> <td>0,26</td> <td>0,28</td> </tr> </table>	b/h	2,0	2,5	3,0	4,0	γ	0,23	0,25	0,26	0,28
b/h	2,0	2,5	3,0	4,0								
γ	0,23	0,25	0,26	0,28								
	<p>Плоская пружина: δ – толщина; b – ширина пружины</p>	$c = \frac{Eb\delta^3}{4L^3}$										

1	2	3
	<p>Плоская пружина с промежуточной опорой</p>	$c = \frac{Eb\delta^3}{4L(L-a)^2 \left(1 - \frac{a}{4L}\right)}$
	<p>Цилиндрическая винтовая пружина: D – средний диаметр пружины; d – диаметр проволоки; i – число витков</p>	$c = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot i \cdot D^3}$
	<p>Коническая винтовая пружина: D и d₁ – наибольший и наименьший диаметры пружины; d – диаметр проволоки; i – число витков</p>	$c = \frac{G \cdot d^4}{2i(D^2 + d_1^2)(D + d_1)}$
	<p>Мембрана, свободно опертая по периметру: δ – толщина мембраны; ν – коэффициент Пуассона</p>	$c = \frac{16\pi E\delta^3(1+\nu)}{3D^2(1-\nu^3)(3+\nu)}$
	<p>Мембрана, защемленная по периметру</p>	$c = \frac{16\pi E\delta^3}{3D^3(1-\nu^3)}$
	<p>Спиральная пружина: δ и b – толщина и ширина сечения витков пружины; L – полная длина пружины</p>	$c = \frac{E \cdot \delta^3 \cdot b}{12L}$
	<p>Винтовая пружина при кручении: D – диаметр пружины; d – диаметр проволоки; i – число витков</p>	$c = \frac{E \cdot d^4}{64Di}$

Перемещение той же массы m_1 под действием силы P_2

$$y_2 = \left(\frac{P_2}{c_2} + \frac{P_2 \cdot i_2^2}{c_3} + \frac{P_2 \cdot i_2^2 \cdot i_3^2}{c_4} + \dots \right) i_1 \quad (38)$$

и так далее.

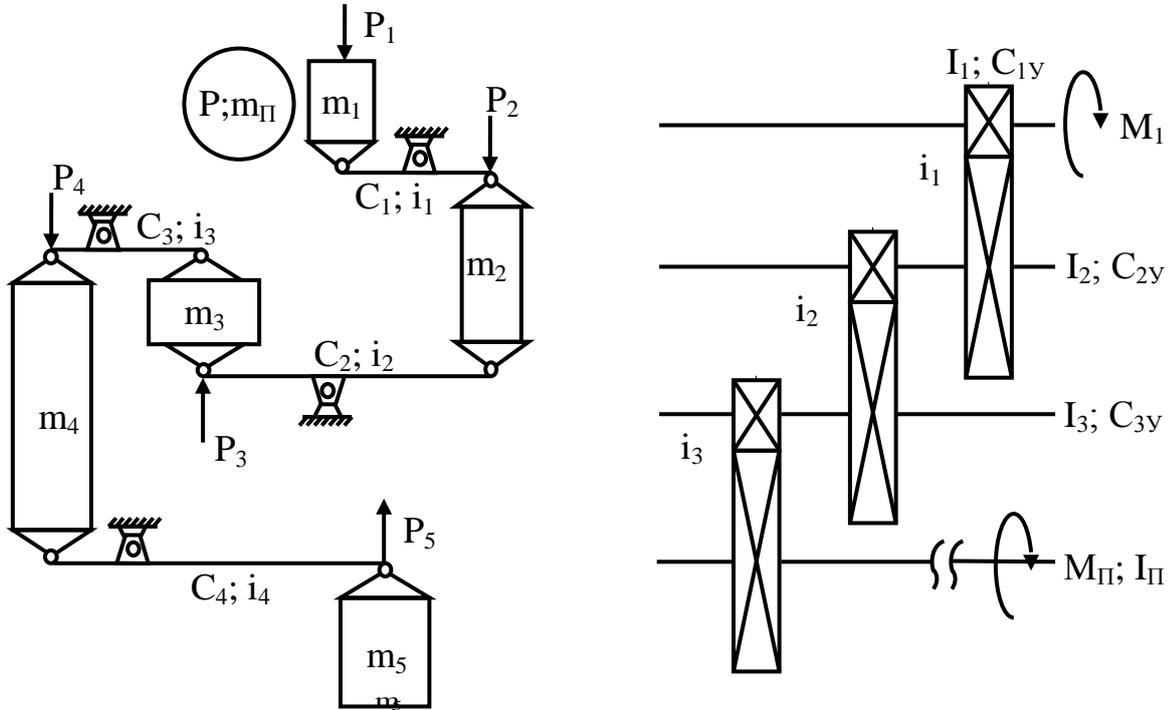


Рис. 12. Схема для приведенных жёсткостей:
а – линейных; б – угловых

Полная деформация системы, т.е. перемещение массы m_1 составит

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots \quad (39)$$

Нагрузка системы, приведенная к массе m_1 (m_{II}),

$$P = P_1 + \frac{P_2}{i_1} + \frac{P_3}{i_1 \cdot i_2} + \dots \quad (40)$$

Приведенная жесткость системы

$$c_{л} = \frac{P}{y} = \frac{1}{P_1 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{i_1^2}{c_2} + \frac{i_1^2 \cdot i_2^2}{c_3} + \dots \right) + P_2 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{i_2^2}{c_3} + \dots \right) i_1 + P_3 \left(\frac{1}{c_3} + \frac{i_3^2}{c_4} + \dots \right) i_1 \cdot i_2 + \dots} \quad (41)$$

Большинство машин воспринимает внешние нагрузки только крайними массами. Для этого случая в формуле (41) все силы, кроме P_1 , должны быть равны нулю.

Тогда

$$c_{л} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{i_1^2}{c_2} + \frac{i_1^2 \cdot i_2^2}{c_3} + \frac{i_1^2 \cdot i_2^2 \cdot i_3^2}{c_4} + \dots} \quad (42)$$

Для системы с вращающимися массами (рис. 12б) приведенная угловая жесткость равна

$$c_y = \frac{1}{\frac{1}{c_{1y}} + \frac{i_1^2}{c_{2y}} + \frac{i_1^2 \cdot i_2^2}{c_{3y}} + \dots} \quad (43)$$

Если в системе имеются движущиеся поступательно и вращающиеся части (массы), то жесткость может быть представлена либо как линейная, либо как угловая:

$$c_{\text{ПЛ}} = \frac{c_{\text{Л}} \cdot c_y}{R^2 \cdot c_{\text{Л}} + c_y}, \quad (44)$$

или

$$c_{\text{ПУ}} = \frac{R^2 \cdot c_{\text{Л}} \cdot c_y}{R^2 \cdot c_{\text{Л}} + c_y}, \quad (45)$$

где R – радиус приведения линейной жесткости к угловой и обратно.

1.7. Определение суммарной жесткости системы

Суммарная жесткость системы складывается из приведенных жесткостей её элементов и зависит от характера их соединения (рис. 13).

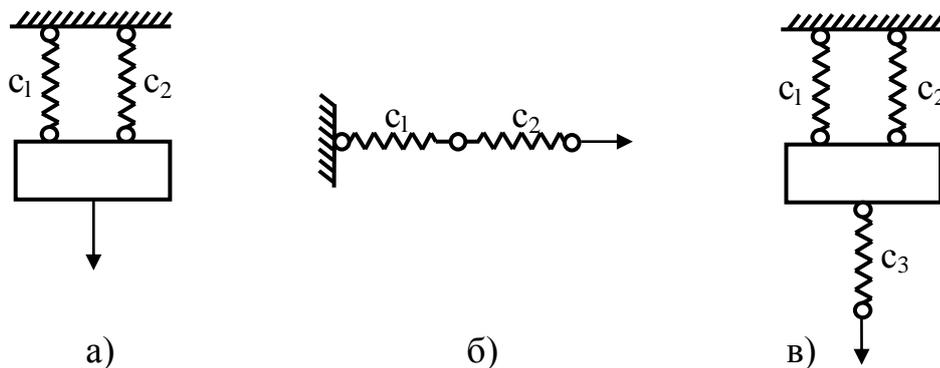


Рис. 13. Схемы соединения жесткостей элементов системы:
а – параллельное; б – последовательное;
в – смешанное (параллельно-последовательное)

При параллельном соединении (рис. 13а)

$$c_{\Sigma} = c_1 + c_2 + \dots \quad (46)$$

При последовательном соединении (рис. 13б)

$$\frac{1}{c_{\Sigma}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots = e_1 + e_2 + \dots \quad (47)$$

При смешанном соединении (рис. 13в)

$$\frac{1}{c_{\Sigma}} = \frac{1}{c_1 + c_2} + \frac{1}{c_3}, \quad (48)$$

или

$$c_{\Sigma} = \frac{c_3(c_1 + c_2)}{c_1 + c_2 + c_3}. \quad (49)$$

1.8. Собственная частота колебаний системы

Простейшая динамическая система, состоящая из массы m и упругой связи c , показана на рис. 14.

Если в начальный момент времени отклонить массу на величину a и предоставить систему самой себе, то возникнут колебания, причем смещение центра тяжести массы (ЦТ) в момент времени t , будет

$$y = \cos \omega_C t, \quad (50)$$

где ω_C – круговая частота колебаний, $1/c$

$$\omega_C = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

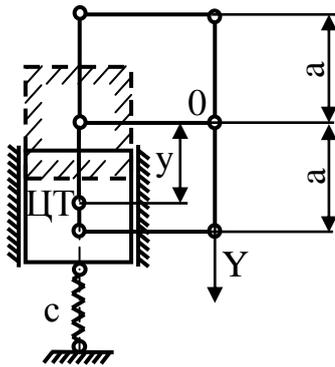


Рис. 14. Схема одномассовой системы

Таким образом, если в системе возбуждены колебания (импульс силы или возмущающая периодическая сила), то после снятия возмущающей силы система будет совершать свободные колебания, частота которых зависит только от параметров системы (c и m) и не зависит от величины возмущающей силы. Такие колебания называются свободными или собственными.

Если обозначить период колебаний через T , то из равенства (50) вытекает

$$\cos \omega_C t = \cos \omega_C (t + T), \quad (51)$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_C}. \quad (52)$$

Если к системе приложена внешняя периодическая сила (рис. 15)

$$Q = Q_0 \cdot \cos \omega t, \quad (53)$$

то возникают вынужденные колебания с частотой этой внешней силы.

Частное решение уравнения движения

$$P_{И} + P_{У} = Q_0 \cdot \cos \omega t, \quad (54)$$

или

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \cdot y = Q_0 \cdot \cos \omega t, \quad (55)$$

где $P_{И}$ – сила инерции;

$P_{У}$ – сила упругости звена c ,

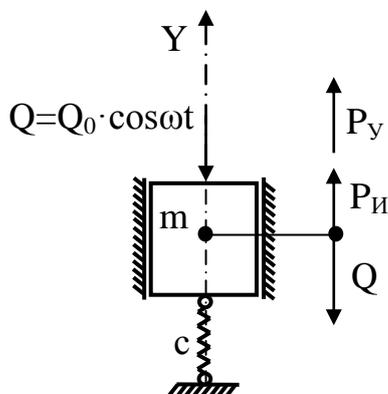


Рис. 15. Вынужденные колебания системы

будем искать в виде

$$y = a \cdot \cos \omega t. \quad (56)$$

Подставляя зависимость (56) в равенство (55), находим

$$a = \frac{Q}{c - m\omega^2}, \quad (57)$$

т.е.

$$\frac{Q_0}{a} = c - m\omega^2. \quad (58)$$

После снятия возмущающей силы ($Q_0 = 0$) имеем

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (59)$$

Для двухмассовой системы

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}. \quad (60)$$

Для системы с вращающимися массами:

одна масса –

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_y}{I}}, \quad (61)$$

две массы –

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_y(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}}. \quad (62)$$

Системы делятся на высокочастотные и низкочастотные.

К высокочастотным относятся такие системы, собственные колебания которых имеют период T в несколько раз меньший, чем время изменения внешней силы (технологическое сопротивление). К ним относится подавляющее большинство металлургических машин. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать задачи этого класса.

1.9. Определение величины и характера изменения внешних нагрузок

Силы (моменты), действующие на машину, можно разделить на группы:

- движущие (привод);
- технологические;
- вредные сопротивления (трение и т.п.).

1.9.1. Движущие силы

В качестве привода может использоваться:

- гидропривод (гидроцилиндры, гидроприводы вращения);
 - пневмопривод;
 - электропривод (электродвигатели постоянного и переменного тока).
- и другие (двигатели внутреннего сгорания, газовые и т.п.).

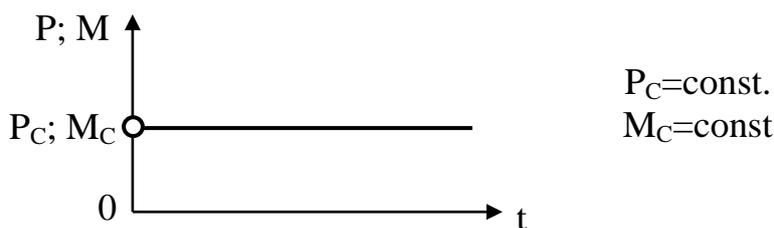
Многочисленные типы электродвигателей обладают различными внешними (рабочими и пусковыми) характеристиками. В зависимости от требований, предъявляемых к различным машинам, применяется тот или иной тип двигателей.

Для высокочастотных систем с некоторым приближением можно принять, что движущая сила остается постоянной.

1.9.2. Технологические нагрузки

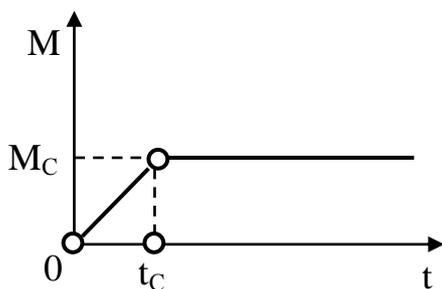
Выполняемые металлургическими машинами операции весьма разнообразны (прокатка, резка металла, кантовка заготовок, подъемно-транспортные операции, кантовка сосудов с жидким металлом и т.д.). В связи с этим весьма разнообразны и характеры изменения нагрузок, а также математические зависимости их описывающие. Использование таких зависимостей при решении задач динамики систем практически невозможно из-за их сложности, громоздкости и возникающих непреодолимых математических трудностей. В связи с этим, при решении практических задач принимаются формализованные модели характера нагружения, которые достаточно близки к реальным. Рассмотрим ряд таких моделей.

1) Технологическая нагрузка прикладывается мгновенно и далее остается постоянной во времени.

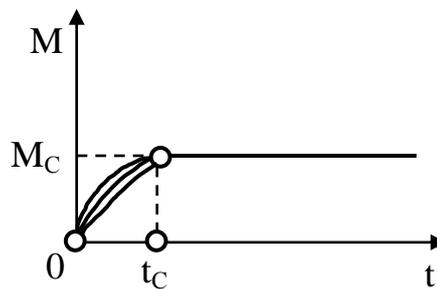


Примером такого случая нагружения является подъем груза лебедкой, краном и т.п.

2) Технологическая нагрузка изменяется в функции времени



а)



б)

При линейной зависимости момента от времени, его текущее значение равно

$$M = M(t) = M_c \frac{t}{t_c},$$

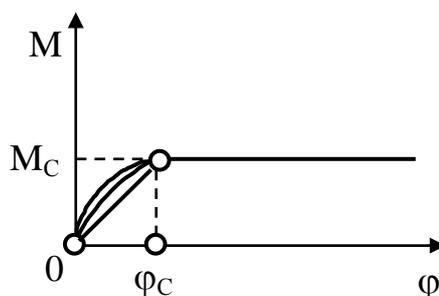
а при использовании экспоненциального закона (б)

$$M = M(t) = M_C \left(1 - e^{-\frac{t}{A}} \right),$$

где e – основание натурального логарифма;

A – показатель экспоненты, определяющий интенсивность нарастания технологической нагрузки.

3) Технологическая нагрузка изменяется в функции угла поворота



Законы изменения M аналогичны варианту 2).

4) Технологическая нагрузка изменяется периодически по гармоническому закону, например,

$$M = M_C \cdot \sin \omega t .$$

5) Импульсное (ударное) приложение технологической нагрузки.

2. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Задачи динамики жестких систем заключаются в том, чтобы по заданным силам или моментам определить закон движения системы (положение - x или φ , скорости $\frac{dx}{dt}$ или $\frac{d\varphi}{dt}$ и ускорения $\frac{d^2x}{dt^2}$ или $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ в любой момент времени) или по заданному закону движения определить силы, под действием которых оно происходит.

Жесткие системы могут быть представлены в виде одной приведенной массы (момента инерции массы), движущейся под действием приведенной силы (момента).

Приведенные силы могут зависеть от координаты x , скорости $v = \frac{dx}{dt}$ и времени t . Величина приведенной массы также может быть переменной и зависеть от положения (координаты x).

Обозначим переменные приведенную силу $P(x, v, t)$ и приведенную массу $m(x)$.

При рассмотрении системы как жесткой, её элементы не деформируются при действии сил и моментов.

Пусть в момент времени отсчета t_0 скорость движения приведенной массы m равна v_0 . Тогда работа внешней силы для поступательно движущейся массы равна

$$\frac{m(x)}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^x P(x, v, t) dx, \quad (63)$$

скорость движения

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2 \int_0^x P(x, v, t) dx}{m(x)} + \frac{mv_0^2}{m(x)}}, \quad (64)$$

ускорение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{2 \int_0^x P(x, v, t) dx}{m(x)} + \frac{mv_0^2}{m(x)}}, \quad (65)$$

координата

$$x = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{2 \int_0^x P(x, v, t) dx}{m(x)} + \frac{mv_0^2}{m(x)}} dt. \quad (66)$$

При заданных координатах из формулы (64)

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2 \int_0^x P(x, v, t) dx}{m(x)} + \frac{mv_0^2}{m(x)}}}, \quad (67)$$

откуда

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2 \int_0^x P(x, v, t) dx}{m(x)} + \frac{mv_0^2}{m(x)}}}. \quad (68)$$

Для вращающихся масс результаты выводов аналогичны при использовании координаты φ , скорости ω , момента инерции массы I и момента силы $M(\varphi, \omega, t)$ в приведенных выше формулах.

Приемы интегрирования дифференциального уравнения движения жесткой системы связаны с характером функций $m(x)$, $I(\varphi)$, $P(x, v, t)$, $M(\varphi, \omega, t)$. Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

1) Масса системы $m(x) = m = \text{const}$,

Движущая сила $P(x, v, t) = P = \text{const}$.

Скорость из формулы (64) будет равна

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2Px}{m} + v_0^2}. \quad (69)$$

Возведя обе части в квадрат и дифференцируя по t , найдем ускорение

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{P}{m}, \quad (70)$$

или

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P. \quad (71)$$

Выражение (71) является вторым законом Ньютона в упрощенном виде. Представив выражение (69) в виде

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2Px}{m} + v_0^2}}, \quad (72)$$

получим

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2Px}{m} + v_0^2}} = \frac{m}{P} \left[\sqrt{\frac{2Px}{m} + v_0^2} - v_0 \right], \quad (73)$$

откуда

$$x = \frac{\left(t + \frac{m}{P} v_0 \right)^2 \cdot P}{2m} - \frac{m v_0^2}{2P}, \quad (74)$$

а скорость приведенной массы

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{P \left(t + \frac{m}{P} v_0 \right)}{m}. \quad (75)$$

Если начальная скорость $v_0 = 0$, то формулы (73), (74) и (75) примут вид

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2Px}{m}} = \frac{P \cdot t}{m}, \quad (76)$$

$$t = \frac{m}{P} \sqrt{\frac{2P \cdot x}{m}} = \sqrt{\frac{2m \cdot x}{P}}, \quad (77)$$

$$x = \frac{P t^2}{2m}. \quad (78)$$

Аналогичные формулы получаются и для вращающейся массы.

2) Момент инерции массы $I(\varphi) = I = \text{const}$,

движущий момент изменяется в функции угла поворота φ по закону

$$M(\varphi) = M \frac{\varphi}{\varphi_1},$$

где φ – текущая угловая координата, а

φ_1 – угол, соответствующий максимальному значению $M(\varphi)$, равному M , причем $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Угловая скорость равна

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2 \int_0^{\varphi} M \frac{\varphi}{\varphi_1} d\varphi}{I} + \omega_0^2} = \sqrt{\frac{M \varphi^2}{\varphi_1 I} + \omega_0^2}, \quad (79)$$

откуда

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{M \cdot \varphi^2}{\varphi_1 \cdot I} + \omega_0^2}}, \quad (80)$$

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{M\varphi^2}{\varphi_1 I} + \omega_0^2}} = \sqrt{\frac{\varphi_1 I}{M}} \cdot \ln \frac{\varphi \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}} + \sqrt{\frac{M\varphi^2}{\varphi_1 I} + \omega_0^2}}{\omega_0}. \quad (81)$$

Преобразуя выражение (81), получим

$$t \cdot \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}} = \ln \frac{\varphi \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}} + \sqrt{\frac{M\varphi^2}{\varphi_1 I} + \omega_0^2}}{\omega_0}, \quad (82)$$

или

$$e^{t \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}}} = \frac{\varphi \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}} + \sqrt{\frac{M\varphi^2}{\varphi_1 I} + \omega_0^2}}{\omega_0}, \quad (83)$$

откуда

$$\omega_0 \cdot e^{t \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}}} - \varphi \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}} = \sqrt{\frac{M\varphi^2}{\varphi_1 I} + \omega_0^2}. \quad (84)$$

Возводя обе части равенства (84) в квадрат, решая относительно φ и дифференцируя по t , получаем

$$\varphi = \frac{\omega_0 \left(e^{2t \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}}} - 1 \right) \sqrt{\frac{\varphi_1 I}{M}}}{2e^{t \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}}}}, \quad (85)$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0 \left(e^{2t\sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}} + 1} \right)}{2e^{t\sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}}}}, \quad (86)$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\omega_0 \left(e^{2t\sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}} - 1} \right) \sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}}}{2e^{t\sqrt{\frac{M}{\varphi_1 I}}}}. \quad (87)$$

3) Момент инерции массы $I(\varphi) = I = \text{const}$, движущий момент изменяется в функции скорости $M(\omega) = \text{var}$.

Пусковые характеристики электродвигателей часто принимают линейными. При этом момент может быть выражен в виде

$$M(\omega) = M \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1}, \quad (88)$$

где M – наибольший приведенный пусковой момент,
 ω_1 – наибольшая скорость приведенной массы.

Для краткости выводов примем $\omega_0 = 0$.

Тогда из (64)

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2M(\omega_1 - \omega)}{I}, \quad (89)$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M(\omega_1 - \omega)}{\omega_1 I}, \quad (90)$$

или, заменив $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$, получим

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M(\omega_1 - \omega)}{\omega_1 I},$$

откуда

$$dt = \frac{I\omega_1}{M(\omega_1 - \omega)} d\omega \quad (91)$$

и

$$t = \int_0^{\omega} \frac{I\omega_1}{M(\omega_1 - \omega)} d\omega = \frac{I\omega_1}{M} \cdot \ln \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega}. \quad (92)$$

Решая относительно $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, найдем

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 \left(1 - e^{-\frac{tM}{I\omega_1}} \right). \quad (93)$$

Дифференцируя и интегрируя, получаем

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M}{I} \cdot e^{-\frac{tM}{I\omega_1}}, \quad (94)$$

$$\varphi = \int_0^t \omega_1 \left(1 - e^{-\frac{tM}{I\omega_1}} \right) dt = \omega_1 t + \frac{I\omega_1^2}{M} \left(e^{-\frac{tM}{I\omega_1}} - 1 \right). \quad (95)$$

4) Момент инерции массы $I(\varphi) = I = \text{const}$, движущий момент изменяется в функции времени $M(t) = \text{var}$.

При разгоне электродвигателя с контакторным управлением

$$M(t) = M \left(1 - \frac{t}{t_1} \right), \quad (96)$$

где M – максимальный пусковой момент;

t_1 – время разгона.

Для рассматриваемого случая

$$\omega^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2M\varphi \left(1 - \frac{t}{t_1} \right)}{I}, \quad (97)$$

откуда аналогично предыдущим решениям получим

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M \left(1 - \frac{t}{t_1} \right)}{I}, \quad (98)$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M \left(1 - \frac{t}{2t_1} \right) t}{I}, \quad (99)$$

$$\varphi = \frac{M \left(1 - \frac{t}{3t_1} \right) t^2}{2I}. \quad (100)$$

3. ОБЩИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СИСТЕМ

Задачи динамики упругих систем заключаются в определении характера изменения и максимальных значений динамических нагрузок звеньев, частот колебаний, условий резонансного состояния системы.

Рассмотрим совместное решение двух линейных уравнений второго порядка. Эти уравнения описывают движение двухмассовой системы с упругой связью (рис. 16).

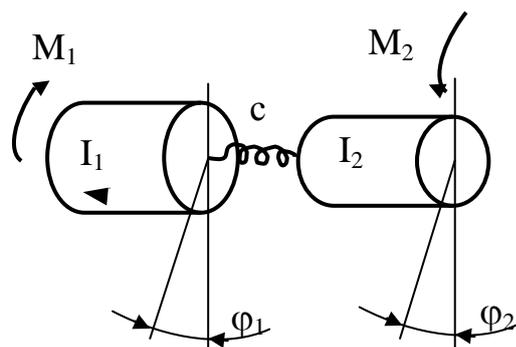


Рис. 16. Двухмассовая система

Здесь:

φ_1 и φ_2 – текущие углы поворота масс с I_1 и I_2 , которые при наличии упругой связи не равны ($\varphi_1 \neq \varphi_2$);

I_1 – ведущая масса;

I_2 – ведомая масса.

На массу I_1 действует некоторый момент M_1 , а на массу I_2 – момент M_2 , представляющий статическое сопротивление, действующее на эту массу.

Система может прийти в движение в случае, когда $M_1 > M_2$. При пуске и торможении машины её разгон или торможение осуществляются за счет разности ($M_1 - M_2$). Поскольку $M_1 > M_2$, можем написать

$$M_1 = M_2 + f(t), \quad (101)$$

где $f(t)$ – избыточная сила (момент), зависящая от времени и существующая в периоды неустановившихся процессов.

Дифференциальные уравнения движения масс I_1 и I_2

$$I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + c(\varphi_1 - \varphi_2) = M_2 + f(t), \quad (102)$$

$$I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c(\varphi_1 - \varphi_2) = -M_2 \quad (103)$$

Для решения системы уравнений (102) и (103), продифференцируем каждое из них

$$I_1 \frac{d^4 \varphi_1}{dt^4} + \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \cdot c - \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} \cdot c = f(t), \quad (104)$$

$$I_2 \frac{d^4 \varphi_2}{dt^4} - \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \cdot c + \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} \cdot c = 0. \quad (105)$$

Суммируя эти уравнения, получим

$$I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = f(t), \quad (106)$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{f(t)}{I_1}, \quad (107)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -\frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{f(t)}{I_2}. \quad (108)$$

Подставляя значение (108) в уравнение (104), а (107) в (105), после преобразований получим

$$\frac{d^4\varphi_1}{dt^4} + \frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2} \cdot \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{f(t) \cdot c}{I_1 \cdot I_2} + \frac{f(t)}{I_1}, \quad (109)$$

$$\frac{d^4\varphi_2}{dt^4} + \frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2} \cdot \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{f(t) \cdot c}{I_1 \cdot I_2}. \quad (110)$$

Решения уравнений (109) и (110) относительно вторых производных φ_1 и φ_2 по t в общем виде будет

$$\varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = A_1 \cdot \sin t \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}} + B_1 \cdot \cos t \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}} + \varphi_1(t), \quad (111)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = A_2 \cdot \sin t \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}} + B_2 \cdot \cos t \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}} + \varphi_2(t), \quad (112)$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – частные решения уравнений, зависящие от функции $f(t)$.

С учетом формулы (62) выражения (111) и (112) можно представить в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = A_1 \cdot \sin \omega_C t + B_1 \cdot \cos \omega_C t + \varphi_1(t), \quad (113)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = A_2 \cdot \sin \omega_C t + B_2 \cdot \cos \omega_C t + \varphi_2(t). \quad (114)$$

Дважды интегрируя уравнения (113) и (114), получим

$$\varphi_1 = A_1 \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C^2} - B_1 \frac{\cos \omega_C t}{\omega_C^2} + \iint \varphi_1(t) + C_1 t + D_1, \quad (115)$$

$$\varphi_2 = -A_2 \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C^2} - B_2 \frac{\cos \omega_C t}{\omega_C^2} + \iint \varphi_2(t) + C_2 t + D_2. \quad (116)$$

Зная режим разгона или торможения – $f(t)$, и, следовательно, имея возможность найти частные решения уравнений (113) и (114) $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, а также используя соотношения между φ_1 , φ_2 , $\frac{d\varphi_1}{dt}$ и $\frac{d\varphi_2}{dt}$ из уравнений (102) и (103), запишем

$$\frac{A_2}{A_1} = \alpha; \quad \frac{B_2}{B_1} = \beta; \quad \frac{C_2}{C_1} = \gamma; \quad \frac{D_2}{D_1} = \delta. \quad (117)$$

Тогда можно записать выражения, содержащие одинаковые постоянные коэффициенты

$$\varphi_1 = A_1 \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C^2} - B_1 \frac{\cos \omega_C t}{\omega_C^2} + \iint \varphi_1(t) + C_1 t + D_1, \quad (118)$$

$$\varphi_2 = -\alpha A_1 \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C^2} - \beta B_1 \frac{\cos \omega_C t}{\omega_C^2} + \iint \varphi_2(t) + \gamma C_1 t + \delta D_1. \quad (119)$$

Приняв начальные условия, действительные для разгона или торможения, подставив их в уравнения (118) и (119), найдем конкретные решения для φ_1 и φ_2 .

Деформация упругого звена будет определяться разностью

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1 - \varphi_2) = \\ &= A_1 \frac{(\alpha - 1) \sin \omega_C t}{\omega_C^2} + B_1 \frac{(\beta - 1) \cos \omega_C t}{\omega_C^2} + \iint \varphi_1(t) - \iint \varphi_2(t) + C_1(1 - \gamma)t + D_1(1 - \delta). \end{aligned} \quad (120)$$

Момент в упругой связи равен

$$M_y = \varphi \cdot c, \quad (121)$$

где c – приведенная жесткость рассматриваемой системы.

4. ДИНАМИКА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ НЕНАГРУЖЕННЫХ МАШИН

Переходные процессы (пуск и остановка) многих машин (прокатные станы, ножницы, металлургические станки и т.п.) проходят при отсутствии внешних сопротивлений. Однако в момент пуска и остановки холостой машины её элементы испытывают динамические нагрузки.

Дифференциальные уравнения движения двухмассовой системы (рис. 16) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot c &= M_1; \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Здесь $M_2 = 0$;

M_1 – момент, создаваемый двигателем в период пуска или тормозной – в период остановки.

Умножим первое уравнение на I_2 , а второе на I_1 и вычтем второе из первого. После преобразований получим одно уравнение

$$I_1 I_2 \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} \right) + c(I_1 + I_2)(\varphi_1 - \varphi_2) = M_1 \cdot I_2. \quad (123)$$

Заменяя $(\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi$ и преобразуя, найдем

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} \cdot \varphi = \frac{M_1}{I_1}, \quad (124)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_c^2 \cdot \varphi = \frac{M_1}{I_1}. \quad (125)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = A \cdot \sin \omega_c t + B \cdot \cos \omega_c t + \frac{M_1 I_2}{c(I_1 + I_2)}. \quad (126)$$

Примем начальные условия: при $t = 0$ $\varphi = 0$.

Тогда

$$A = 0, \quad B = -\frac{M_1 I_2}{c(I_1 + I_2)}. \quad (127)$$

После подстановки значений коэффициентов **A** и **B** в (126) получим

$$\varphi = \frac{M_1 I_2}{c(I_1 + I_2)} (1 - \cos \omega_c t). \quad (128)$$

Текущее значение момента в упругой связи

$$M_y = \varphi \cdot c = \frac{M_1 I_2}{I_1 + I_2} (1 - \cos \omega_c t). \quad (129)$$

Максимальная деформация упругого звена будет в момент времени, соответствующий значению $\cos \omega_c t = -1$, т.е.

$$\varphi_{\max} = \frac{2M_1 I_2}{c(I_1 + I_2)}, \quad (130)$$

а максимальный динамический момент в упругом звене

$$M_{y \max} = \varphi_{\max} \cdot c = \frac{2M_1 I_2}{I_1 + I_2}. \quad (131)$$

Формула (131) справедлива для разгона и торможения системы, если тормозной момент прикладывается к ведущей массе (например, вал электродвигателя). В случае, когда момент торможения приложен к ведомой массе, формула имеет вид

$$M_{y \max} = \frac{2M_1 I_1}{I_1 + I_2}. \quad (132)$$

5. ДИНАМИКА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ НАГРУЖЕННЫХ МАШИН

Пуск и остановка многих машин (мостовые краны, различные грузоподъемные устройства, скиповые подъемники и т.п.) осуществляются при наличии внешних нагрузок. Рассмотрим несколько случаев, характеризующихся разным характером приложения внешних нагрузок.

5.1. Мгновенное приложение нагрузки

Примером такого приложения нагрузки является подъем груза «с подрывом» (рис. 17).

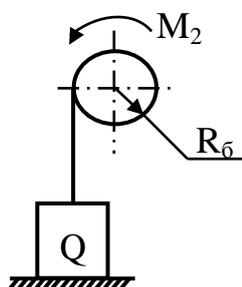


Рис. 17. Мгновенное приложение нагрузки

Дифференциальные уравнения движения системы при пуске

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + c(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1; \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c(\varphi_1 - \varphi_2) &= -M_2 \end{aligned} \right\}. \quad (133)$$

В результате решения системы уравнений (133) для начальных условий $t = 0$, $M_2 = 0$ получим

$$M_y = \frac{I_1 M_2 + I_2 M_1}{I_1 + I_2} (1 - \cos \omega_c t), \quad (134)$$

где

$$\begin{aligned} M_2 &= Q \cdot R, \\ \frac{I_1 M_2 + I_2 M_1}{I_1 + I_2} &= M_C = \text{const}. \end{aligned}$$

Тогда

$$M_{y \max} = 2M_C, \quad (135)$$

а коэффициент динамичности

$$k_d = \frac{M_{y \max}}{M_C} = 2. \quad (136)$$

5.2. Пуск при постоянной нагрузке

Примером такого характера приложения нагрузки является подъем груза из промежуточного положения (рис. 18).

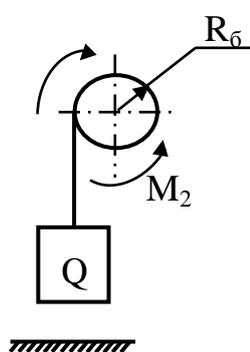


Рис. 18. Пуск системы при $M_2 = \text{const}$

Решая систему уравнений (133) получим

$$\varphi = A \cdot \sin \omega_c t + B \cdot \cos \omega_c t + \frac{(M_1 - M_2)I_2}{c(I_1 + I_2)} + \frac{M_2}{c}. \quad (137)$$

Отсчитывая время от начала движения обеих масс системы, т.е. полагая, что при $t = 0$ $\varphi = \frac{M_2}{c}$ и

$\frac{d\varphi}{dt} = 0$, и подставляя эти условия в уравнение (137),

получим

$$A = 0; B = -\frac{(M_1 - M_2)I_2}{c(I_1 + I_2)}.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{I_2(M_1 - M_2)}{c(I_1 + I_2)}(1 - \cos \omega_c t) + \frac{M_2}{c}. \quad (138)$$

Момент, воспринимаемый упругим звеном

$$M_y = \varphi \cdot c = \frac{I_2(M_1 - M_2)}{I_1 + I_2}(1 - \cos \omega_c t) + M_2, \quad (139)$$

а его максимальное значение

$$M_{y \max} = \frac{2I_2(M_1 - M_2)}{I_1 + I_2} + M_2. \quad (140)$$

При торможении системы тормозящий момент может быть приложен к ведущей или ведомой массам.

В первом случае момент торможения и момент нагрузки M_2 имеют одинаковый знак. Поэтому в начальных условиях следует принять, что для $t = 0$

$\varphi = -\frac{M_2}{c}$. Тогда

$$M_{y \max} = \frac{2I_2(M_1 + M_2)}{I_1 + I_2} - M_2. \quad (141)$$

Во втором случае в первом из уравнений (133) следует правую часть приравнять нулю, а во втором уравнении правая часть будет $(M_1 + M_2)$.

При этом

$$M_{y \max} = \frac{2(M_1 I_1 - M_2 I_2)}{I_1 + I_2} + M_2. \quad (142)$$

6. ДИНАМИКА НАГРУЖЕНИЯ МАШИН ПОСЛЕ РАЗГОНА

Внешняя нагрузка рабочего органа машин может изменяться в функции угла поворота, времени или скорости движения.

6.1. Изменение внешней нагрузки в функции угла поворота

Наиболее простым и часто встречающимся случаем является линейное изменение нагрузки

$$M_2 = M_c \frac{\varphi_2}{\varphi_c}, \quad (143)$$

где φ_c – угол, соответствующий установившейся статической нагрузке M_c ведомой массы.

Одним из примеров такой ситуации, когда $M_2(\varphi)$, является процесс заполнения очага деформации при захвате полосы валками.

В большинстве двигателей скорость вращения вала двигателя после разгона сохраняется относительно постоянной. При этом система уравнений принимает вид

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= 0; \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c(\varphi_1 - \varphi_2) &= -M_C \frac{\varphi_2}{\varphi_C} \end{aligned} \right\}. \quad (144)$$

Из первого уравнения получим

$$\varphi_1 = \omega t, \quad (145)$$

где ω – установившаяся скорость ведущей массы.

Подставив значение φ_1 во второе уравнение системы (144), найдем

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{c + \frac{M_C}{\varphi_C}}{I_2} \varphi_2 = \frac{\omega c}{I_2} t, \quad (146)$$

общее решение которого

$$\varphi = A \cdot \sin t \sqrt{\frac{c\varphi_C + M_C}{I_2 \varphi_C}} + B \cdot \cos t \sqrt{\frac{c\varphi_C + M_C}{I_2 \varphi_C}} + \frac{\omega \varphi_C \cdot c}{c\varphi_C + M_C} t. \quad (147)$$

Начальные условия: при $t = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega$.

Тогда

$$B = 0, \quad A = \omega \left(1 - \frac{c\varphi_C}{c\varphi_C + M_C} \right) \sqrt{\frac{I_2 \varphi_C}{c\varphi_C + M_C}} \quad (148)$$

и

$$\varphi_2 = \frac{\omega \cdot M_C}{c\varphi_C + M_C} \sqrt{\frac{I_2 \varphi_C}{c\varphi_C + M_C}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c\varphi_C + M_C}{I_2 \varphi_C}} + \frac{\omega \varphi_C c t}{c\varphi_C + M_C}. \quad (149)$$

Деформация упругого звена равна

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1 - \varphi_2) = \\ &= \omega \left[t \left(1 - \frac{c\varphi_C}{c\varphi_C + M_C} \right) - \frac{M_C}{c\varphi_C + M_C} \sqrt{\frac{I_2 \varphi_C}{c\varphi_C + M_C}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c\varphi_C + M_C}{I_2 \varphi_C}} \right]. \end{aligned} \quad (150)$$

Характер изменения нагрузки $M_Y = c \cdot \varphi$ показан на рис. 19, где

t_C – время, соответствующее $\varphi_2 = \varphi_C$.

Если при выбранных условиях

$$\sin t \sqrt{\frac{c\varphi_C + M_C}{I_2 \varphi_C}} = -1,$$

тогда из выражения (150) найдем

$$t_C = \sqrt{\frac{\varphi_C I_2}{c\varphi_C + M_C}} \cdot \frac{M_C}{c\varphi_C} + \frac{c\varphi_C + M_C}{\omega c}. \quad (151)$$

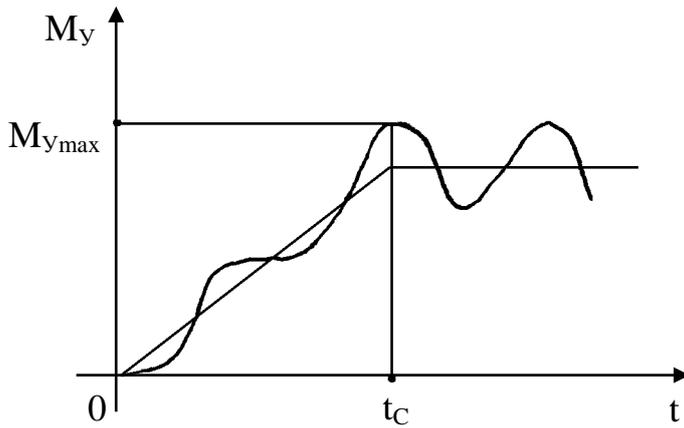


Рис. 19. Изменение нагрузки упругого звена при изменении нагрузки (внешнего сопротивления) в функции угла поворота ведомой массы

Подставим значение t_c в уравнение (150) и умножим на c . Тогда получим

$$M_{y \max} = \frac{\omega M_c}{\varphi_c} \sqrt{\frac{I_2 \varphi_c}{c \varphi_c + M_c}} + M_c. \quad (152)$$

6.2. Изменение внешней нагрузки в функции времени

6.2.1. Система уравнений движения двухмассовой системы при воздействии на ведомую массу нагрузки, изменяющейся в функции времени по линейному закону, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= 0; \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c(\varphi_1 - \varphi_2) &= -M_c \frac{t}{t_c} \end{aligned} \right\}, \quad (153)$$

где t_c – время, соответствующее окончанию нарастания нагрузки.

Заменим во втором уравнении $\varphi_1 = \omega t$ и получим

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{c}{I_2} \varphi_2 = \left(\omega c - \frac{M_c}{t_c} \right) \frac{t}{I_2}, \quad (154)$$

общее решение которого

$$\varphi_2 = A \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + B \cdot \cos t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + \left(\omega - \frac{M_c}{c t_c} \right) t. \quad (155)$$

При $t=0$ $\varphi_2 = 0$ и $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, откуда

$$A = \frac{M_c}{c t_c} \sqrt{\frac{I_2}{c}}, \quad B = 0.$$

Тогда

$$\varphi_2 = \frac{M_C}{ct_C} \sqrt{\frac{I_2}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + \left(\omega - \frac{M_C}{ct_C} \right) t. \quad (156)$$

Деформация упругого звена

$$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{M_C}{ct_C} \left(t - \sqrt{\frac{I_2}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} \right). \quad (157)$$

Характер изменения нагрузки $M_y = c \cdot \varphi$ аналогичен показанному на рис. 19.

В момент $t = t_C$ окончания нарастания внешней нагрузки

$$\varphi = \frac{M_C}{c}. \quad (158)$$

Скорость деформации упругого звена

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_C}{ct_C} \left(1 - \cos t \sqrt{\frac{c}{I_2}} \right). \quad (159)$$

Условие (158) предполагает согласно (157), что при $t = t_C$ $\sin t_C \sqrt{\frac{c}{I_2}} = 0$ или $\cos t_C \sqrt{\frac{c}{I_2}} = \pm 1$ в (159). Для значения $\cos t_C \sqrt{\frac{c}{I_2}}$, соответствующего наибольшей скорости деформации, при $t = t_C$ получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2M_C}{ct_C}. \quad (160)$$

Уравнение движения ведомой массы после окончания нарастания внешнего сопротивления

$$I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + c \varphi_2 = \omega ct - M_C, \quad (161)$$

а его общее решение

$$\varphi_2 = A \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + B \cdot \cos t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + \omega t - \frac{M_C}{c}. \quad (162)$$

Деформация упругого звена

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = A_1 \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + B_1 \cos t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + \frac{M_C}{c}. \quad (163)$$

Начиная новый отсчет времени и подставляя при $t = 0$ $\varphi = \frac{M_C}{c}$ и $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2M_C}{ct_C}$

[см. уравнения (158) и (160)], получим

$$\varphi = \frac{2M_C}{ct_C} \sqrt{\frac{I_2}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + \frac{M_C}{c}; \quad (164)$$

$$\varphi_{\max} = \frac{2M_C}{ct_C} \sqrt{\frac{I_2}{c}} + \frac{M_C}{c}; \quad (165)$$

$$M_{y_{\max}} = \varphi_{\max} \cdot c = \frac{2M_C}{t_C} \sqrt{\frac{I_2}{c_1}} + M_C. \quad (166)$$

6.2.2. Если изменение внешней нагрузки пропорционально квадрату времени (по параболическому закону), то

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= 0; \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c(\varphi_1 - \varphi_2) &= -M_C \frac{t^2}{t_C^2} \end{aligned} \right\}. \quad (167)$$

Процесс динамического нагружения упругого звена будет состоять из двух этапов:

- от $t = 0$ до $t = t_C$ (соответствует $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{M_C}{c}$);
- от $t = t_C$ до установившегося колебательного состояния системы.

На первом этапе $\varphi_1 = \omega t$, т.е.

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{c}{I_2} \varphi_2 = \frac{\omega c t}{I_2} - \frac{M_C t^2}{I_2 t_C^2}. \quad (168)$$

Решение этого уравнения (при сохранении начальных условий по п. 6.2.1) имеет вид

$$\varphi_2 = \frac{2I_2 M_C}{c^2 t_C^2} \left(1 - \cos t \sqrt{\frac{c}{I_2}} \right) - \frac{M_C t^2}{c t_C^2} + \omega t. \quad (169)$$

Деформация упругого звена

$$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{M_C}{c t_C^2} \left[t^2 - \frac{2I_2}{c} \left(1 - \cos t \sqrt{\frac{c}{I_2}} \right) \right]. \quad (170)$$

В начале второго этапа момент окончания нарастания внешней нагрузки соответствует $\varphi = \frac{M_C}{c}$ и $t = t_C$. Скорость деформации упругого звена

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2M_C}{c t_C} \left(t_C - \sqrt{\frac{I_2}{c}} \cdot \sin t_C \sqrt{\frac{c}{I_2}} \right). \quad (171)$$

При начальном условии $t = t_c \left(\varphi = \frac{M_c}{c} \right)$, $\cos t \sqrt{\frac{c}{I_2}} = 1$, чему соответствует $\sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} = 0$. Таким образом, второе начальное условие второго этапа будет: при $t = t_c \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2M_c}{ct_c}$.

Уравнением движения ведомой массы на втором этапе будет выражение (161), а его общим решением – формула (169). Начиная отсчет времени t от начала второго этапа, подставим приведенные условия и выразим деформацию упругого звена в виде

$$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) = \omega t - \varphi_2 = \frac{2M_c}{ct_c} \sqrt{\frac{I_2}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} + \frac{M_c}{c}. \quad (172)$$

Найдя φ_{\max} , получим

$$M_{y \max} = \varphi_{\max} \cdot c = M_c \left(\frac{2}{t_c} \sqrt{\frac{I_2}{c_1}} + 1 \right). \quad (173)$$

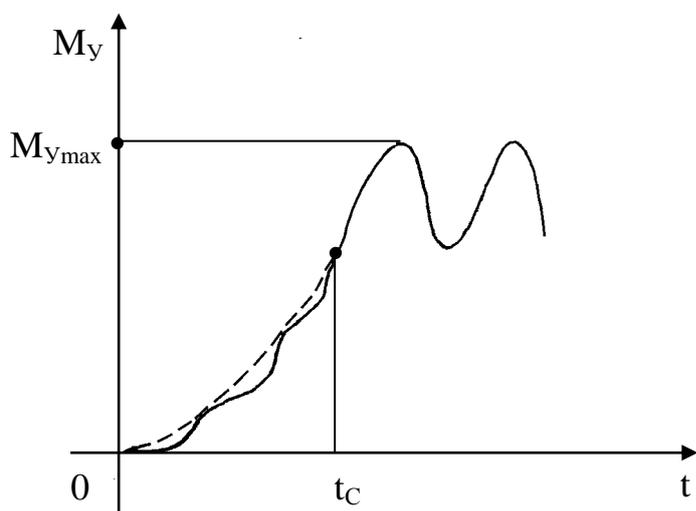


Рис. 20. Изменение нагрузки упругого звена при изменении внешнего сопротивления в функции времени по параболическому закону

График изменения нагрузки упругого звена во времени показан на рис. 20.

Формула (173) совершенно идентична формуле (166). Однако максимальные нагрузки упругих звеньев систем, нагружаемых в функции времени по линейному и параболическому законам, не одинаковы при одинаковых M_c , I_2 и c , т.к. время нарастания нагрузки t_c до величины M_c при параболическом законе меньше, чем при линейном.

Пусть на тело с моментом инерции массы I_2 действует момент силы, изменяющийся во времени по линейному закону. Уравнение его движения

$$I_2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -M_c \frac{t}{t_c}. \quad (174)$$

Решение имеет вид

$$\varphi_1' = -\frac{M_c t^3}{6I_2 t_c} + At + D. \quad (175)$$

При начальных условиях: $t = 0 \quad \varphi_1 = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega$.

Тогда

$$\varphi_1' = \omega t - \frac{M_C t^3}{6I_2 t_C}. \quad (176)$$

Для случая, когда внешний момент изменяется по параболическому закону,

$$I_2 \frac{d^2 \varphi_1''}{dt^2} = -M_C \frac{t^2}{t_C^2}, \quad (177)$$

решение (при прежних начальных условиях) имеет вид

$$\varphi_1'' = \omega t - \frac{M_C \cdot t^4}{12I_2 t_C^2}. \quad (178)$$

При $t = t_C$ из решений (176) и (178) получим

$$\varphi_1' = \left(\omega - \frac{M_C t_C}{6I_2} \right) t_C; \quad (179)$$

$$\varphi_1'' = \left(\omega - \frac{M_C t_C}{12I_2} \right) t_C. \quad (180)$$

Сравнивая положительные значения φ_1' и φ_1'' , видим, что при $\varphi_1' = \varphi_1''$ значение t_C в формуле (180) должно быть меньше, чем в формуле (179). Следовательно, если t_C в обеих формулах имеет одинаковую величину, то $\varphi_1' < \varphi_1''$.

6.3. Периодическое нагружение системы

Характер периодического нагружения может описываться достаточно сложными зависимостями, например, при прокатке периодических профилей различного сортамента. Для того, чтобы рассмотреть методологию решения такого класса задач, примем более простую функцию в виде гармонического закона $M_2 = M_C \cdot \sin \omega t$.

Для двухмассовой системы в этом случае имеем

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= 0; \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c(\varphi_1 - \varphi_2) &= -M_C \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (181)$$

Заменяя во втором уравнении $\varphi_1 = \omega t$, получим

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{c \varphi_2}{I_2} = \frac{\omega c}{I_2} t - \frac{M_C}{I_2} \sin \omega t. \quad (182)$$

Решая задачу по аналогии с предыдущими (п. 6.2), найдем

$$M_y = \frac{M_C \cdot c}{I_2 \left(\frac{c}{I_2} - \omega^2 \right)} \left[\left(\sin \omega t - \omega \sqrt{\frac{I_2}{c_1}} \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} \right) + \omega \sqrt{\frac{I_2}{c_1}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{I_2}} \right]. \quad (183)$$

7. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ОТ УДАРОВ В ЗАЗОРАХ

В период неустановившегося движения машины в момент упругого замыкания зазоров в линиях приводов возникают большие динамические нагрузки. Рассмотрим двухмассовую систему (рис. 21), в упругом звене которой показан суммарный приведенный зазор линии привода θ (рад.).

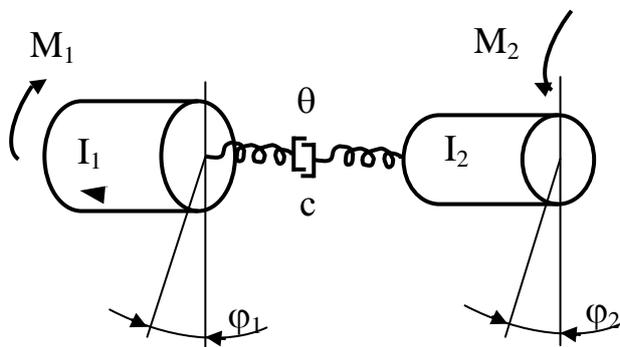


Рис. 21. Двухмассовая система при наличии приведенного суммарного зазора θ

Рассмотрим случай, когда якорь двигателя начал поворачиваться, а ведомая масса I_2 остается еще некоторое время неподвижной, пока не выбран зазор линии θ .

Уравнение движения якоря двигателя

$$I_1 \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = M_1. \quad (184)$$

При нулевых начальных условиях и постоянном пусковом моменте M_1 решение имеет вид

$$\phi_1 = \frac{M_1 \cdot t^2}{2I_1}. \quad (185)$$

При равномерно ускоренном вращении якоря двигателя его скорость в конце выбора зазора равна

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2M_1\theta}{I_1}}. \quad (186)$$

После замыкания зазора система превращается в двухмассовую и дифференциальные уравнения имеют вид (133), в результате решения которых получаем

$$\phi_1 = A \cdot \cos \omega_C t + B \cdot \sin \omega_C t + \frac{M_C}{I_1 \cdot \omega_C^2}, \quad (187)$$

$$\phi_2 = -\frac{I_1}{I_2} \left(A \cdot \cos \omega_C t + B \cdot \sin \omega_C t + \frac{M_C}{I_1 \cdot \omega_C^2} \right), \quad (188)$$

где

$$M_C = \frac{I_2 M_1 + I_1 M_2}{I_1 + I_2}.$$

Начальные условия для пускового периода: $t = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_3$.

Тогда

$$A = -\frac{M_C}{I_1 \cdot \omega_C^2}, \quad B = \frac{\omega_3}{\omega_C}.$$

Подставив значения **A** и **B** в (187) и (188), получим

$$\varphi_1 = \frac{M_C}{I_1 \cdot \omega_C^2} (1 - \cos \omega_C t) + \frac{\omega_3}{\omega_C} \sin \omega_C t, \quad (189)$$

$$\varphi_2 = -\frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{M_C}{I_1 \cdot \omega_C^2} (1 - \cos \omega_C t). \quad (190)$$

Момент в упругом звене линии привода в период соударения масс равен

$$M_y = M_C (1 - \cos \omega_C t) + \frac{\omega_3 \cdot c}{\omega_C} \sin \omega_C t. \quad (191)$$

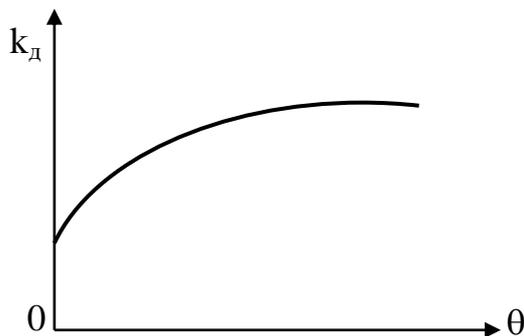
Первая составляющая в формуле (191) не зависит от зазоров в системе, поэтому рассмотрим составляющую от упругого удара в зазорах

$$M_3 = \frac{\omega_3 \cdot c}{\omega_C} \cdot \sin \omega_C t. \quad (192)$$

Подставив значение скорости якоря двигателя ω_3 (186) в (192), получим с учетом $\omega_C = \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}}$:

$$M_3 = \sqrt{2M_1 \theta c \frac{I_2}{I_1 + I_2}} \cdot \sin \omega_C t. \quad (193)$$

Амплитуда дополнительных динамических нагрузок от упругого удара в зазорах нарастает в зависимости от величины зазора θ по параболической кривой.



На рис. 22 показан качественный характер изменения коэффициента динамичности от величины суммарного приведенного зазора θ .

Рис. 22. Зависимость коэффициента динамичности k_d от приведенного суммарного зазора в линии θ

8. КОЛЕБАНИЯ В ПРИВОДНЫХ ЛИНИЯХ

При импульсных нагрузках в линиях приводов могут возникнуть опасные колебания, которые при определенных условиях могут привести даже к разрушению механизма. Рассмотрим это явление конкретно.

8.1. Вал с одной массой

Вал, вращающийся со скоростью ω , выведен из состояния равновесия возмущающей силой (импульсом силы).

При этом возникнут следующие деформации этого вала:

- y_y – упругий прогиб вала;
- y_o – деформация опор.

Кроме этого, следует учесть и наличие эксцентриситета вала y_e . В результате центр тяжести массы m будет вращаться на расстоянии $y_\Sigma = y_y + y_o + y_e$ от первоначального (идеального) положения оси вала 0-0 (рис. 23).

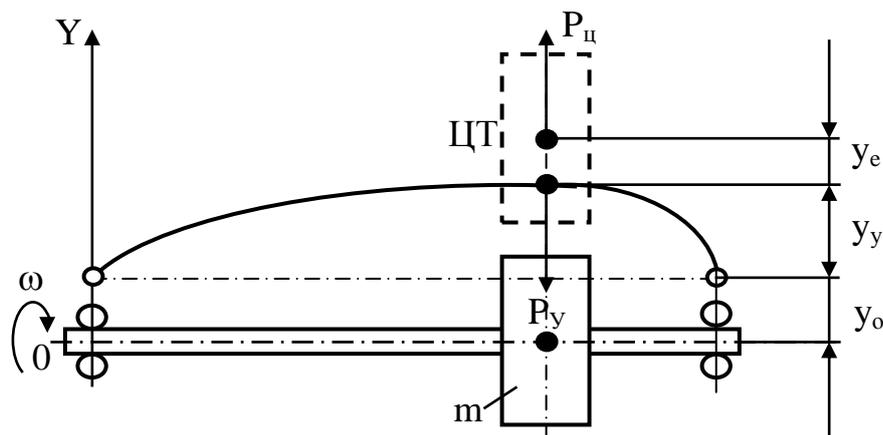


Рис. 23. Вал с одной массой

На вал будут действовать две противоположенные силы – центробежная сила и сила упругости.

Центробежная сила равна

$$P_{ц} = m\omega^2(y_y + y_o + y_e), \quad (194)$$

а сила упругости изогнутого вала

$$P_y = c \cdot y_y. \quad (195)$$

В результате можно выделить три возможных ситуации:

$P_y > P_{ц}$ – вал вернется в положение равновесия;

$P_y = P_{ц}$ – критическое состояние;

$P_y < P_{ц}$ – неуправляемый рост деформации вала до разрушения.

Рассмотрим ситуацию $P_y = P_{ц}$, которой соответствует критическая скорость вращения ω_K .

В результате преобразований из равенства уравнений (194) и (195) получим

$$\omega_K^2 = \frac{c}{m} \cdot \frac{y_y}{y_y + y_O + y_e} = \omega_C^2 \frac{y_y}{y_y + y_O + y_e}, \quad (196)$$

где ω_C – собственная частота колебаний системы.

Если не учитывать эксцентриситет ($y_e = 0$) и деформацию опор ($y_O = 0$), то из (196) найдем

$$\omega_K = \omega_C. \quad (197)$$

Это явление называется резонансом системы.

В свою очередь $y_y = \frac{P_B}{c}$ и $y_O = \frac{P_B}{c_O}$,

где P_B – возмущающая сила,

c – жесткость вала,

c_O – жесткость опор.

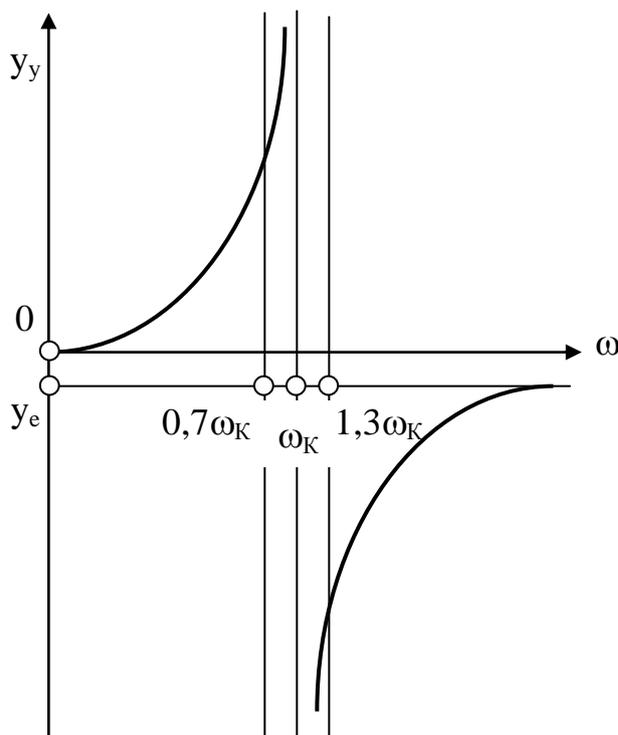


Рис. 24. Деформация вала с одной массой

Тогда

$$\omega_K = \frac{\omega_C}{\sqrt{1 + y_e \frac{c}{P_B} + \frac{c}{c_O}}}. \quad (198)$$

Рассмотрим частный случай, когда не учитывается деформация опор ($y_O = 0$). Тогда из формулы (196) получим

$$y_y = \frac{y_e}{\left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)^2 - 1}. \quad (199)$$

Характер деформации вала в зависимости от скорости его вращения показан на рис. 24. Видно, что согласно формуле (199), прогиб вала y_y по мере приближения ω к ω_K растет и при $\omega = \omega_K$ становится равным ∞ . В закритической области $\omega > \omega_K$ наблюдается самоустановка вала с $y_y = -y_e$.

Для перехода через критическую область $0,7\omega_K \leq \omega \leq 1,3\omega_K$ применяют демпфирующие устройства, позволяющие уменьшить ω_C за счет снижения жесткости системы c .

8.2. Вал с двумя массами (рис. 25)

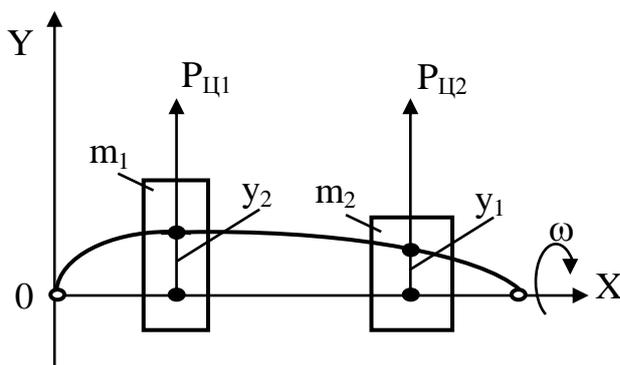


Рис. 25. Вал с двумя массами

В рассматриваемом случае

$$\left. \begin{aligned} P_{ц1} &= m_1 \omega^2 y_1; \\ P_{ц2} &= m_2 \omega^2 y_2. \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

Введем обозначения:

e_{11} – прогиб в сечении 1 от единичной силы в этом сечении;

$e_{12} = e_{21}$ (закон парности) – прогиб в сечении 1 от единичной силы в сечении 2 и то же в сечении 2 от единичной силы в сечении 1 соответственно;

e_{22} – прогиб в сечении 2 от единичной силы в этом сечении.

Тогда

$$y_1 = e_{11} \cdot P_{ц1} + e_{12} \cdot P_{ц2}, \quad (201)$$

$$y_2 = e_{21} \cdot P_{ц1} + e_{22} \cdot P_{ц2}. \quad (202)$$

Подставляя (201) и (202) в систему (200), получим

$$(\omega^2 e_{11} m_1 - 1) y_1 + \omega^2 e_{12} m_2 y_2 = 0, \quad (203)$$

$$\omega^2 e_{21} m_1 y_1 + (\omega^2 e_{22} m_2 - 1) y_2 = 0. \quad (204)$$

Определив отношения $\frac{y_1}{y_2}$ из уравнений (203) и (204) и приравняв их, запишем

одно уравнение

$$\omega^4 m_1 m_2 (e_{11} e_{22} - e_{12}^2) - \omega^2 (e_{11} m_1 - e_{22} m_2) + 1 = 0. \quad (205)$$

Решая уравнение (205), находим две критические скорости вращения вала с двумя массами

$$\omega_{K(1,2)}^2 = \frac{e_{11} m_1 + e_{22} m_2 \pm \sqrt{(e_{11} m_1 + e_{22} m_2)^2 - 4 m_1 m_2 (e_{11} e_{22} - e_{12}^2)}}{2 m_1 m_2 (e_{11} e_{22} - e_{12}^2)}. \quad (206)$$

Изложенная методика может быть использована при произвольном числе масс. Вал, несущий n масс (дисков), имеет такое же число критических скоростей вращения.

9. ДИНАМИКА УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ

Неравновесными приводными системами называются такие системы, в которых при сохранении неразрывности кинематической цепи часть элементов при установившемся равномерном движении ведущей массы движется

неравномерно, подчиняясь определенному закону, обусловленному кинематическими параметрами.

К неравновесным системам относятся машины, приводы которых содержат кривошипно-шатунный, кривошипно-кулисный или кулачковый механизм, зубчатые передачи с некруглыми колесами, цепные передачи, рычажно-зубчатые механизмы и т.п.

Наиболее типичным механизмом с возвратно-поступательным движением является кривошипно-шатунный (рис. 26).

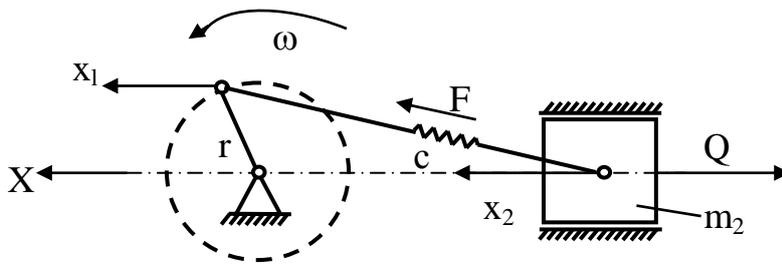


Рис. 26. Кривошипно-шатунный механизм

При установившейся скорости вала двигателя ведомая масса m_2 может быть неподвижной и только после подключения при помощи муфты будет совершать возвратно-поступательное движение.

После включения механизма через муфту ведущей массе m_1 (не показана) сообщается практически мгновенно некоторая скорость. Если двигатель (асинхронный и некоторые двигатели постоянного тока) имеет жесткую механическую характеристику, то координату x_1 можно выразить в виде

$$x_1 = f(\omega t), \quad (207)$$

где ω – угловая скорость кривошипа.

Уравнение движения ведомой массы будет

$$m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} - c(x_1 - x_2) = -Q, \quad (208)$$

где Q – внешняя нагрузка (включение механизма в нагруженном состоянии).

Для решения уравнения (208) необходимо знать конкретную функцию $f(\omega t)$. Для кривошипно-шатунных механизмов, когда отношение длины шатуна L к радиусу кривошипа r достаточно велико, можно принять

$$x_1 = r(1 - \cos \omega t). \quad (209)$$

Подставляя значение x_1 в уравнение (208), получим

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{c}{m_2} \cdot x_2 = \frac{c \cdot r}{m_2} (1 - \cos \omega t) - \frac{Q}{m_2}. \quad (210)$$

Общее решение уравнения (210) имеет вид

$$x_2 = A \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{m_2}} + B \cdot \cos t \sqrt{\frac{c}{m_2}} + r - \frac{r \cdot c \cdot \cos \omega t}{c - m_2 \omega^2} - \frac{Q}{c}, \quad (211)$$

$$x_2 = A \cdot \sin \omega_C t + B \cdot \cos \omega_C t + r - \frac{r \cdot c \cdot \cos \omega t}{c - m_2 \omega^2} - \frac{Q}{c}. \quad (212)$$

Начальные условия: при $t = 0$ $x_2 = -\frac{Q}{c}$ и $\frac{dx_2}{dt} = 0$.

Тогда

$$x_2 = \frac{r \cdot c}{c - m_2 \omega^2} \cdot \cos \omega_C t + r(1 - \cos \omega_C t) - \frac{r \cdot c \cdot \cos \omega t}{c - m_2 \omega^2} - \frac{Q}{c}. \quad (213)$$

Деформация шатуна

$$x = x_1 - x_2 = \frac{rm_2 \omega^2}{c \left(1 - \frac{m_2 \omega^2}{c} \right)} (\cos \omega t - \cos \omega_C t) + \frac{Q}{c}. \quad (214)$$

Величины ωt и $\omega_C t$ могут принимать любые значения и в том числе такие, при которых одновременно $\cos \omega t = 1$ и $\cos \omega_C t = -1$. Кроме того, для системы с достаточно большой жесткостью $\left(1 - \frac{m_2 \omega^2}{c} \right) \approx 1$.

Тогда усилие $F = x \cdot c$, воспринимаемое штангой, будет иметь максимальное значение

$$F_{\max} \approx 2rm_2 \omega^2 + Q. \quad (215)$$

В случае, когда в момент начала движения шатуна верхний конец его находится в одном из средних положений (кривошип смещен на 90° от горизонтали) и последующее движение шатуна направлено влево (рис. 26), координата $x_1 = r \cdot \sin \omega t$. Подставляя это значение x_1 в уравнение (210) и решая при предыдущих начальных условиях, получим

$$x_2 = -\frac{r \cdot c \cdot \omega}{(c - m_2 \omega^2) \omega_C} \cdot \sin t \omega_C + \frac{r \cdot c}{c - m_2 \omega^2} \cdot \sin \omega t - \frac{Q}{c}. \quad (216)$$

Деформация упругого звена (шатуна)

$$x = x_1 - x_2 = \frac{rm_2 \omega^2}{c \left(1 - \frac{m_2 \omega^2}{c} \right)} \left(\frac{\omega_C}{\omega} \cdot \sin \omega_C t - \sin \omega t \right) + \frac{Q}{c}, \quad (217)$$

а воспринимаемое усилие

$$F = x \cdot c = \frac{rm_2 \omega^2}{1 - \frac{m_2 \omega^2}{c}} \left(\frac{\omega_C}{\omega} \cdot \sin \omega_C t - \sin \omega t \right) + Q. \quad (218)$$

Максимальная нагрузка равна

$$F_{\max} \approx r \cdot \omega \left(\sqrt{cm_2} + m_2 \omega \right) + Q. \quad (219)$$

В случаях, когда начало движения шатуна происходит из остальных двух типичных положений (левое крайнее и смещенное на 90° при последующем движении шатуна вправо – рис. 26), результаты определяются соответственно формулами (215) и (219).

Графики изменения нагрузки шатуна в функции времени показаны на рис. 27 и 28.

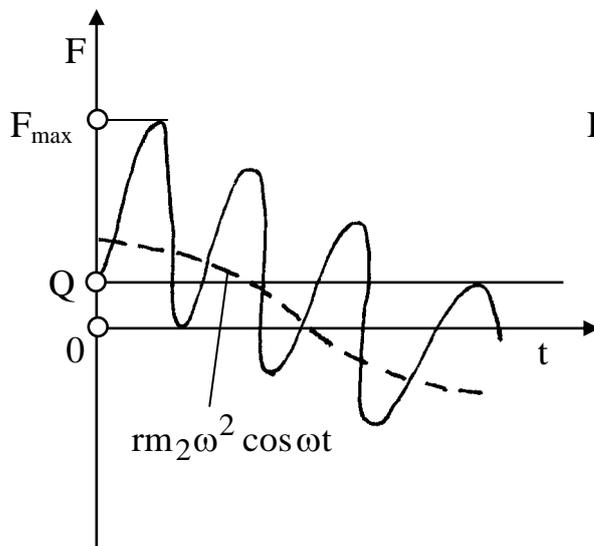


Рис. 27. График изменения нагрузки шатуна в начале движения кривошипа из крайнего правого положения (рис. 26)

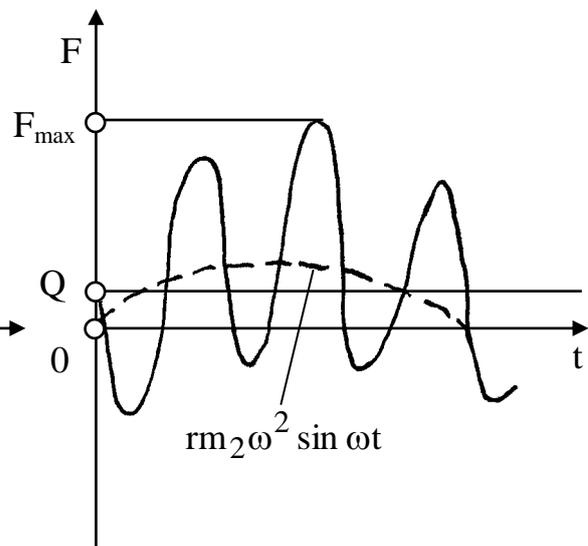


Рис. 28. График изменения нагрузки шатуна в начале движения кривошипа из положения, смещенного на 90° от горизонтали при его движении вправо (рис. 26)

10. КОЛЕБАНИЕ ОПОРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ЭЛЕМЕНТОВ

Представим некоторую опорную конструкцию в виде балки, на которой расположена машина (механизм) массой m , к которой прикладывается возмущающая сила P_B (рис. 29).

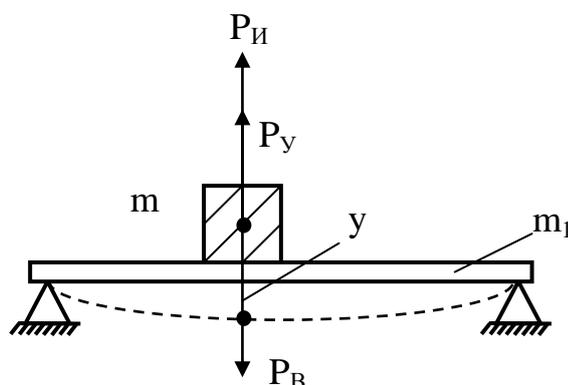


Рис. 29. Расчетная схема

При динамическом нагружении балки будут действовать силы:

P_B – возмущающая сила;

$P_{И}$ – сила инерции системы;

$P_{У}$ – сила упругости балки.

Динамическое условие равновесия

$$P_B = P_{И} + P_{У}. \quad (220)$$

В свою очередь

$$P_{У} = c \cdot y, \quad (221)$$

$$P_{И} = m_{\Pi} \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (222)$$

где m_{Π} – приведенная масса механизма m и балки m_1 в точке приложения P_B .

Тогда

$$P_B = c \cdot y + m_{\Pi} \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (223)$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_C^2 y = \frac{P_B}{m_{\Pi}}, \quad (224)$$

где ω_C – собственная частота колебаний системы.

Поведение системы зависит от характера изменения возмущающей силы. Рассмотрим случай, когда источником возмущающей силы является центробежная сила $P_{Ц}$ от неуравновешенной массы механизма (муфта, несимметричная деталь и т.п.). Схема этого случая проиллюстрирована рис. 30 и 31.

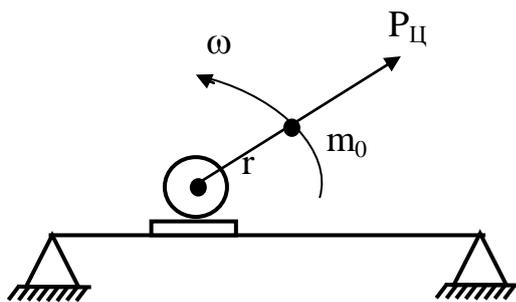


Рис. 30. Схема нагружения балки силой $P_{Ц}$

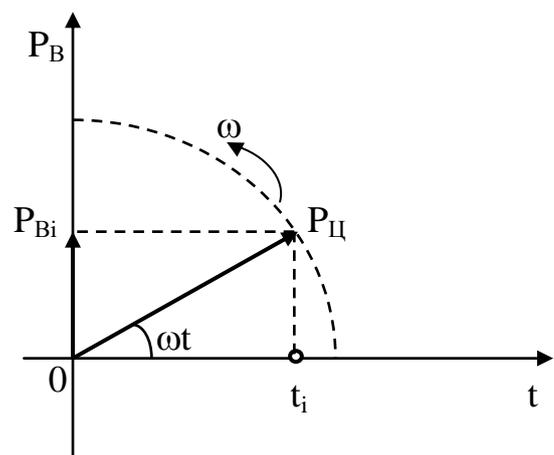


Рис. 31. Изменение возмущающей силы P_B во времени

Согласно рис. 30 и 31, деформацию y при колебаниях балки будет определять вертикальная составляющая возмущающей силы $P_{Bi} = var(t)$.

Тогда

$$P_B = P_{Ц} \cdot \sin \omega t = m_0 \omega^2 r \cdot \sin \omega t, \quad (225)$$

где m_0 – смещенная масса;

r – радиус вращения смещенной массы m_0 .

С учетом этого уравнение (224) примет вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_C^2 y = \frac{P_{Ц}}{m_{П}} \cdot \sin \omega t. \quad (226)$$

В результате решения уравнения (226) получим

$$y = \frac{P_{Ц}}{m_{П}(\omega_C^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_C} \cdot \sin \omega_C t \right). \quad (227)$$

Анализ показывает, что второй член уравнения (227) в скобках учитывает вынужденные колебания системы с собственной частотой ω_C , которые при установившемся движении затухают и ими можно пренебречь.

Тогда

$$y = \frac{P_{Ц} \cdot \sin \omega t}{m_{П}(\omega_C^2 - \omega^2)}. \quad (228)$$

Максимальная деформация при $\sin \omega t = 1$

$$y_{\max} = \frac{P_{Ц}}{m_{П}(\omega_C^2 - \omega^2)} = \frac{P_{Ц}}{m_{П} \omega_C^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_C^2} \right)}. \quad (229)$$

Поскольку $\omega_C^2 = \frac{c}{m_{П}}$, будем иметь

$$\frac{P_{Ц}}{m_{П} \cdot \frac{c}{m_{П}}} = \frac{P_{Ц}}{c} = y_{ст}, \quad (230)$$

или

$$y = y_{ст} \cdot k_d = y_{ст} \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_C^2}} \right). \quad (231)$$

Анализ формулы (231) показывает, что при $\omega = \omega_C$ наступает явление резонанса, характеризующееся тенденцией $y \rightarrow \infty$. Однако изложенный выше вывод не учитывает сопротивлений в системе.

При учете сопротивлений (вязкое трение в металле, трение в соединениях и другие потери) динамическое уравнение будет включать еще силу сопротивления, которая, согласно Фойгту, прямо пропорциональна скорости движения

$$P_C = 2\xi \cdot m_{\Pi} \frac{dy}{dt}, \quad (232)$$

где ξ – коэффициент, пропорциональный собственной частоте колебаний системы.

$$\xi = k \cdot \omega_C. \quad (233)$$

Для стальных конструкций $k=0,02\dots0,08$.

С учетом сопротивлений дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi \frac{dy}{dt} + \omega_C^2 y = \frac{P_B}{m_{\Pi}} \cdot \sin \omega t. \quad (234)$$

В результате решения уравнения (234) получим

$$y = \frac{P_{\Pi} \cdot \sin(\omega t + \psi)}{m_{\Pi} \sqrt{(\omega_C^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \xi^2}}, \quad (235)$$

где ψ – фазовый угол (разность фаз), отражающий запаздывание перемещения по отношению к возмущающей силе.

$$\psi = \arccos \frac{\omega_C^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_C^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \xi^2}}. \quad (236)$$

Максимальное перемещение (деформация) будет при $\sin(\omega t + \psi) = 1$:

$$y_{\max} = \frac{P_{\Pi}}{m_{\Pi} \sqrt{(\omega_C^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \xi^2}} = y_{\text{ст}} \cdot k_d, \quad (237)$$

где коэффициент динамичности k_d равен

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_C^2}\right)^2 + 4k^2 \frac{\omega^2}{\omega_C^2}}}. \quad (238)$$

Для условия резонанса ($\omega = \omega_C$) имеем

$$k_{d\max} = \frac{1}{2k}. \quad (239)$$

Для стальных конструкций $k_{d\max} = 6,25\dots25$.

11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВИБРОГАСИТЕЛЯ

Как уже указывалось ранее, для подавления критических частот возмущающих колебаний целесообразно применение демпферов (виброгасителей), в т.ч. механических. Рассмотрим методику определения параметров упругого виброгасителя согласно схемам на рис. 32 и 33.

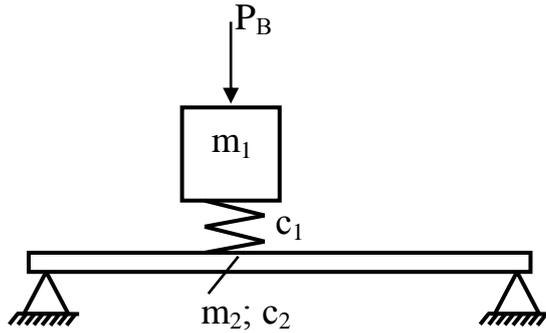


Рис. 32. Схема двухмассовой системы:

m_2 – приведенная масса опоры (рамы) к точке приложения P_B ;
 c_1 – жесткость виброгасителя

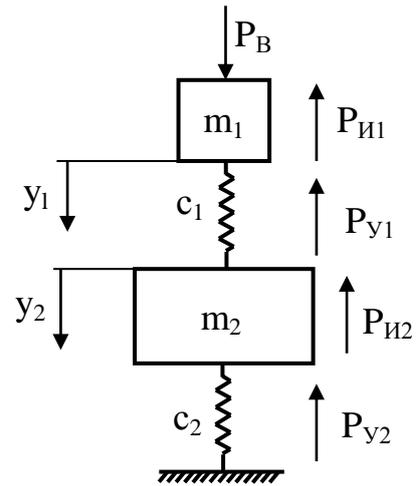


Рис. 33. Расчетная схема

Дифференциальные уравнения движения масс ($P_B = P \cdot \sin \omega t$):

$$\left. \begin{aligned} -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + P \cdot \sin \omega t + c_1(y_2 - y_1) &= 0; \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + c_1(y_2 - y_1) + c_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (240)$$

Согласно принятому закону изменения P_B , амплитуды перемещения масс m_1 и m_2 равны

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_{1\max} \cdot \sin \omega t, \\ y_2 &= y_{2\max} \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (241)$$

Подставляя значения y_1 и y_2 в уравнения (240) и сокращая все члены на $\sin \omega t$, получим

$$\left. \begin{aligned} y_{1\max} (c_1 - m_1 \omega^2) - y_{2\max} \cdot c_1 &= P, \\ y_{2\max} (c_1 + c_2 - m_2 \omega^2) - y_{1\max} \cdot c_1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (242)$$

Тогда максимальные амплитуды колебаний будут равны:

$$y_{1\max} = \frac{P \cdot k}{(c_1 - m_1 \omega^2) \cdot k - c_1^2}, \quad (243)$$

$$y_{2\max} = \frac{P \cdot c_1}{(c_1 - m_1 \omega^2) \cdot k - c_1^2}, \quad (244)$$

где

$$k = (c_1 + c_2 - m_2 \omega^2). \quad (245)$$

Для того, чтобы масса m_1 оставалась в покое, необходимо условие $y_{1\max} = 0$. Это будет выполняться, если в формуле (245) $k = 0$. Отсюда можно определить требуемую жесткость виброгасителя:

$$c_1 = m_2 \omega^2 - c_2. \quad (246)$$

При такой ситуации балка (рама) будет совершать колебания с амплитудой

$$y_{2\max} = -\frac{P}{c_1}. \quad (247)$$

12. УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КОНСТРУКЦИЙ И МЕХАНИЗМОВ

12.1. Удар при падении груза (рис. 34)

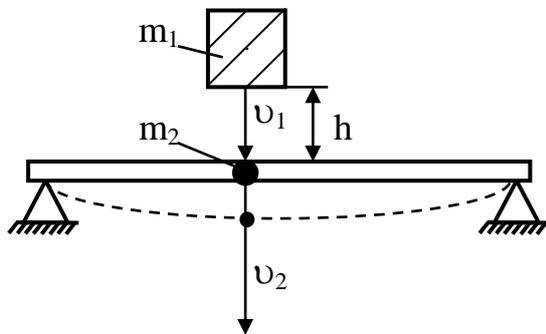


Рис. 34. Расчетная схема:
 m_2 – приведенная к точке падения груза масса балки (конструкции)

При достижении балки скорость падающего груза массой m_1 равна

$$v_1 = \sqrt{2hg}. \quad (248)$$

Затем она мгновенно уменьшается до скорости v_2 , являющийся общей скоростью движения груза и балки с общей массой $m = m_1 + m_2$.

Мгновенно приложенный импульс силы

$$P_0 = m_1 \cdot v_1. \quad (249)$$

Процесс колебаний балки вызывается действием импульса силы P_0 и статической силы $P = m_1 \cdot g$ (вес груза).

Из условия равенства импульсов сил

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 = m \cdot v_2 \quad (250)$$

имеем

$$v_2 = \frac{m_1}{m} \cdot v_1. \quad (251)$$

Уравнение движения системы

$$y = \frac{v_2}{\omega_C} \cdot \sin \omega_C t + \frac{mg}{c} (1 - \cos \omega_C t). \quad (252)$$

После подстановки значений v_2 и $m = y_{ct} \frac{c}{g}$ получим

$$y = y_{ct} \cdot k_d,$$

где

$$k_d = \sin \omega_C t \sqrt{1 + \frac{v_1^2 c}{g^2 m}} + (1 - \cos \omega_C t). \quad (253)$$

При $\sin \omega_C t = 1$ и $\cos \omega_C t = 0$ найдем

$$k_{\text{дmax}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_1^2 c}{g^2 m}}. \quad (254)$$

Если заменить $v_1 = \sqrt{2hg}$, то

$$k_{\text{дmax}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hc}{gm}}. \quad (255)$$

Имея в виду, что $\frac{c}{m} = \omega_C^2$, будем иметь

$$k_{\text{дmax}} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_C v_1}{g}\right)^2}. \quad (256)$$

Формулы (254) и (256) можно использовать в случае горизонтального удара (удар слитка по валкам блюминга при его задаче в клеть, удар по упорам крана и т.п.).

12.2. Ударное нагружение одномассовой системы (рис. 35)

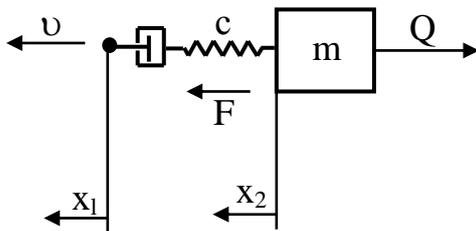


Рис. 35. Расчетная схема

К системе на рис. 35 могут быть приведены машины или механизмы, в которых явно выражена основная масса, приводимая в движение через упругое звено. При установившемся движении ведущего элемента координата $x_1 = vt$. Уравнение движения ведомой массы будет

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} - (x_1 - x_2)c = -Q. \quad (257)$$

Подставляя значение x_1 и преобразуя, получим

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{c}{m} x_2 = \frac{vc}{m} t - \frac{Q}{m}. \quad (258)$$

Общее решение уравнения (258)

$$x_2 = A \cdot \sin \omega_C t + B \cdot \cos \omega_C t + vt - \frac{Q}{c}. \quad (259)$$

Деформация упругого звена

$$x = x_1 - x_2 = -A \cdot \sin \omega_C t - B \cdot \cos \omega_C t + \frac{Q}{c}. \quad (260)$$

Начальные условия: при $t = 0$ $x = \frac{Q}{c}$, $\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = v$.

Тогда

$$x = \frac{v}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{Q}{c}. \quad (261)$$

Нагрузка упругого звена

$$F = x \cdot c = v\sqrt{mc} \cdot \sin \omega_c t + Q, \quad (262)$$

$$F_{\max} = v\sqrt{mc} + Q. \quad (263)$$

12.3. Ударное нагружение двухмассовой системы (рис. 36)

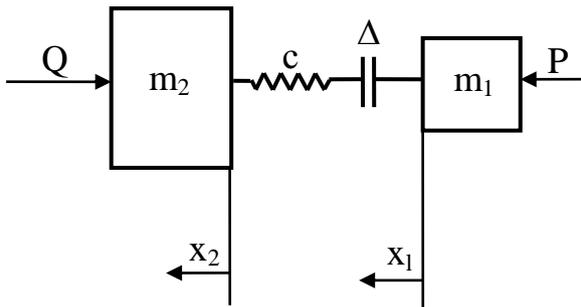


Рис. 36. Расчетная схема:

Q – внешняя нагрузка;

P – движущая сила;

Δ – зазор, образовавшийся при разрыве кинематической связи.

Система движется с установившейся скоростью v . В какой-то момент времени происходит разрыв кинематической цепи. После этого масса m_1 продолжает двигаться с той же скоростью v и ее координата $x_1 = vt$.

Процесс сближения и соударения ведущей и ведомой масс имеет три этапа:

- 1) Сближение масс до закрытия зазора Δ .
- 2) Нагружение упругого звена до величины, равной нагрузке Q .
- 3) Дальнейшее нагружение упругого звена.

Предположим, что в момент начала сближения масс упругое звено не деформировано и $\Delta > \frac{Q}{c}$.

Первый этап.

Уравнение движения ведомой массы

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -Q. \quad (264)$$

Решая его при начальных условиях (при $t = 0$ $x_2 = 0$ и $\frac{dx_2}{dt} = v$), получим

$$x_2 = vt - \frac{Qt^2}{2m_2}. \quad (265)$$

Окончанию первого этапа соответствует

$$x = x_1 - x_2 = \Delta - \frac{Q}{c}, \quad (266)$$

или

$$\Delta = \frac{Q}{c} + \frac{Qt^2}{2m_2}. \quad (267)$$

Отсюда время первого этапа

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m_2}{Q} \left(\Delta - \frac{Q}{c} \right)}. \quad (268)$$

Скорость движения ведомой массы m_2 при $t = t_1$ равна

$$\left(\frac{dx_2}{dt} \right)_1 = v - \sqrt{\frac{2m_2}{Q} \left(\Delta - \frac{Q}{c} \right)}. \quad (269)$$

Предполагая, что $\left(\frac{dx_2}{dt} \right)_1$ - величина положительная, считаем, что за время перекрытия зазора Δ масса m_2 сохранит некоторую скорость.

Второй этап.

Уравнение движения ведомой массы m_2

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - (x_1 - x_2)c = -Q. \quad (270)$$

Заменяя $x_1 = vt$ и решая, получаем

$$x_2 = A \cdot \sin \omega_c t + B \cdot \cos \omega_c t + vt - \frac{Q}{c}. \quad (271)$$

При новом отсчете времени начальные условия: при $t=0$ $x_2=0$, $\frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{dx_2}{dt} \right)_1$.

Тогда

$$x_2 = -\sqrt{\frac{2Q}{c} \left(\Delta - \frac{Q}{c} \right)} \cdot \sin \omega_c t + \frac{Q}{c} \cdot \cos \omega_c t + vt - \frac{Q}{c}. \quad (272)$$

В конце этапа $x = x_1 - x_2 = \frac{Q}{c}$ или, после подстановки значений x_1 и x_2 и преобразований

$$\sqrt{\frac{2Q}{c} \left(\Delta - \frac{Q}{c} \right)} \cdot \operatorname{tg} \omega_c t = \frac{Q}{c}. \quad (273)$$

Отсюда время второго этапа

$$t_2 = \frac{1}{\omega_c} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{Q}{2(\Delta \cdot c - Q)}}, \quad (274)$$

а скорость ведомой массы m_2 при $t = t_2$

$$\left(\frac{dx_2}{dt} \right)_2 = v - \sqrt{\frac{Q}{cm_2} (2\Delta \cdot c - Q)}. \quad (275)$$

Предполагаем, что $\left(\frac{dx_2}{dt} \right)_2 > 0$.

Третий этап.

Уравнение движения ведомой массы m_2 выражается формулой (270).

Новые начальные условия: при $t = 0$ $x = \frac{Q}{c}$, $\frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_2$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c(x_1 - x_2) &= P, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - c(x_1 - x_2) &= -Q \end{aligned} \right\}. \quad (276)$$

Нагрузка упругого звена

$$F = x \cdot c = \sqrt{Q(2\Delta \cdot c - Q)} \cdot \sin \omega_c t + Q, \quad (277)$$

$$F_{\max} = \sqrt{Q(2\Delta \cdot c - Q)} + Q. \quad (278)$$

Таким образом, динамическая добавка нагрузки равна первому слагаемому формулы (278) и определяется величиной зазора Δ .

13. АВТОКОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ

Динамические нагрузки от автоколебаний в металлургических машинах могут достигать больших значений и их следует учитывать при расчете деталей приводов на прочность и выносливость. Нагрузки при автоколебаниях опасны не только (и не столько) большими амплитудами, но и тем, что они проходят через нулевые значения и влекут за собой разрыв кинематических цепей в зазорах (зубчатых передачах, муфтах, универсальных шарнирах и т.п.) с последующим их замыканием с упругими ударами и резким повышением общей напряженности приводных линий (см. п.п. 7, 12.3).

В практике эксплуатации машин чаще всего наблюдаются случаи разрушения валов, передач, шпинделей и других деталей привода именно в период нарушения устойчивого процесса и возникновения буксования валков прокатных станов, ходовых колес кранов и других рабочих органов машин. Довольно интенсивные автоколебания возбуждаются в механизмах передвижения кранов, тележек, перегружателей, загрузочных машин, в прокатных станах, в пилах для резки металла, манипуляторах, печных толкателях и др.

Природа возбуждения механических автоколебаний довольно сложна. Одна из наиболее часто применяемых теорий основана на зависимости коэффициента трения от скорости относительного скольжения.

Момент сил сопротивлений в рабочей машине при автоколебаниях может быть аппроксимирован кубической параболой

$$M_c \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right) = k_1 - k_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + k_3 \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^3, \quad (279)$$

где k_1 , k_2 , k_3 – постоянные коэффициенты.

Для двухмассовой системы в случае автоколебаний имеем

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + c(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1 - a \frac{d\varphi_1}{dt}, \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c(\varphi_1 - \varphi_2) &= -M_c \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (280)$$

где a – угловой коэффициент характеристики электродвигателя.

Опуская сложные математические решения нелинейных дифференциальных уравнений, напишем выражение для момента сил упругости в приводной машине в виде

$$M_y = 2I_2 \omega_c \sqrt{\frac{k_2 - a(I_2/I_1)^2}{3k_3} - \omega^2} \cdot \sin \omega_c t. \quad (281)$$

Амплитуда автоколебаний зависит от соотношения коэффициентов, определяющих характеристику трения в функции скорости скольжения $\left(\frac{k_2}{k_3} \right)$, собственных колебаний системы ω_c и момента инерции массы рабочего органа машины I_2 , а также угла наклона механической характеристики двигателя.

Большие и устойчивые амплитуды автоколебаний влияют не только на прочность и выносливость деталей приводов. Они также могут отрицательно влиять на технологические процессы и точность расчета и качество поверхности особенно на листовых станах (дефект "стиральная доска").

14. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ (ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Для большого класса машин и механизмов решение задач динамики строится на физических моделях с сосредоточенными массами, т.к. распределенные массы, как правило, можно заменить сосредоточенными путем их приведения (см. п. 1.4). Однако в ряде случаев (большая протяженность рассчитываемых объектов, большие скорости деформации последних и т.п.) необходимо рассматривать элементы машины как системы с распределенными массами.

Рассмотрим порядок составления уравнений движения частиц для наиболее простых и характерных случаев, которые часто встречаются в практике расчетов.

На рис. 37 приведена схема стержня постоянного сечения S , подвергающегося растяжению и сжатию.

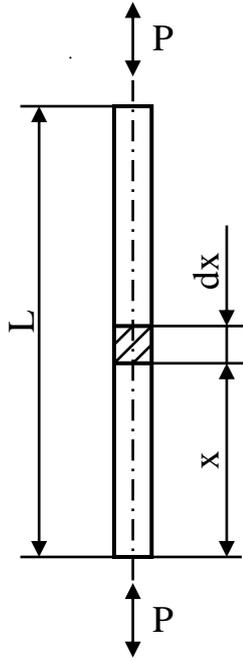


Рис. 37. Схема простейшей упругой системы

Время распространения упругой волны по длине стержня может быть выражено в виде

$$t_B = \frac{L}{a}. \quad (286)$$

С уменьшением L время t_B уменьшается. Скорость распространения упругой волны в сплошных металлических средах равна 5000 м/с. Время t_B при $L=10$ м равно 0,002 с. Таким образом, при малых L упругая волна достигает противоположного конца стержня в течение малого времени.

Время распространения упругой волны в длинных стержнях существенно, пренебрегать им нельзя, и движение отдельных сечений следует рассматривать более строго.

Если U – продольное перемещение любого сечения стержня, x – координата рассматриваемого сечения, то относительное удлинение стержня можно записать в виде $\varepsilon = \frac{dU}{dx}$, а растягивающую силу $P = SE\varepsilon = SE \frac{dU}{dx}$. Приращение ее будет

$$dP = SE \frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{dx} \right) dx = SE \frac{d^2U}{dx^2} dx.$$

Сила dP вызывает движения элемента, ограниченного длиной dx , с ускорением $j = \frac{d^2U}{dx^2}$. Используя принцип Даламбера, можем написать

$$SE \frac{d^2U}{dx^2} dx - \frac{Sdx}{g} \cdot \gamma \cdot \frac{d^2U}{dt^2} = 0, \quad (287)$$

Известно, что скорость распространения упругой волны в прямом стержне

$$a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad (282)$$

где γ – удельный вес материала стержня.

Жесткость растягиваемого или сжимаемого стержня равна

$$c = \frac{E \cdot S}{L} = a^2 \frac{S \cdot \gamma}{Lg}. \quad (283)$$

Если масса стержня

$$m = \frac{SL\gamma}{g}, \quad (284)$$

то

$$c = \frac{m}{L^2} \cdot a^2. \quad (285)$$

Жесткость определяет частоту колебаний системы. С уменьшением L (при неизменном значении m) жесткость резко возрастает.

или

$$\frac{Eg}{\gamma} \cdot \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{d^2U}{dt^2} = 0. \quad (288)$$

Заменим $\frac{Eg}{\gamma} = a^2$. Тогда получим вместо (288)

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2}. \quad (289)$$

Уравнение (289) называется волновым уравнением и описывает свободные плоские (одномерные) колебания стержня с распределенной массой.

При наличии возмущающей силы, вызывающей вынужденные плоские (одномерные) колебания системы, волновое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2} + f(t, x). \quad (290)$$

Волновое уравнение свободных колебаний пространственной системы в координатах x, y, z :

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} \right). \quad (291)$$

15. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Общий интеграл волнового уравнения вида (289) находят введением новых переменных

$$\zeta = x - at, \quad \eta = x + at,$$

откуда

$$x = \frac{1}{2}(\eta + \zeta) \text{ и } t = \frac{1}{2a}(\eta - \zeta). \quad (292)$$

По правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{dU}{d\zeta} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{d\zeta} + \frac{dU}{dt} \cdot \frac{dt}{d\zeta}; \quad (293)$$

$$\frac{dU}{d\eta} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{d\eta} + \frac{dU}{dt} \cdot \frac{dt}{d\eta}. \quad (294)$$

Дифференцируя выражения для x и t по ζ и η , получим:

$$\frac{dx}{d\zeta} = \frac{1}{2}; \quad \frac{dt}{d\zeta} = -\frac{1}{2a}; \quad \frac{dx}{d\eta} = \frac{1}{2}; \quad \frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{2a}.$$

Подставляя эти значения в (293) и (294), найдем

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{d\zeta} + \frac{dU}{d\eta}; \quad (295)$$

$$\frac{dU}{dt} = a \left(\frac{dU}{d\eta} - \frac{dU}{d\zeta} \right). \quad (296)$$

Затем, дифференцируя и применяя те же правила еще раз, получим

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dU}{d\zeta} + \frac{dU}{d\eta} \right) + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dU}{d\zeta} + \frac{dU}{d\eta} \right) = \frac{d^2U}{d\zeta^2} + 2 \frac{d^2U}{d\zeta \cdot d\eta} + \frac{d^2U}{d\eta^2}; \quad (297)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dU}{d\eta} - \frac{dU}{d\zeta} \right) - a^2 \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dU}{d\eta} - \frac{dU}{d\zeta} \right) = a^2 \left(\frac{d^2U}{d\zeta^2} - 2 \frac{d^2U}{d\zeta \cdot d\eta} + \frac{d^2U}{d\eta^2} \right). \quad (298)$$

Вычитая (298) из (297) и преобразуя, найдем

$$\frac{d^2U}{dt^2} - a^2 \frac{d^2U}{dx^2} = -4a^2 \frac{d^2U}{d\zeta \cdot d\eta}. \quad (299)$$

Поскольку

$$\frac{d^2U}{dt^2} - a^2 \frac{d^2U}{dx^2} = 0, \quad (300)$$

имеем

$$\frac{d^2U}{d\zeta \cdot d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dU}{d\zeta} \right) = 0, \quad (301)$$

откуда можем заключить, что $\frac{dU}{d\zeta}$ не зависит от η и является функцией только ζ .

Выразим

$$\frac{dU}{d\zeta} = \Phi(\zeta). \quad (302)$$

Тогда

$$U = \int \Phi(\zeta) d\zeta + \Phi_2(\eta), \quad (303)$$

где $\Phi_2(\eta)$ – некоторая функция от η , которая представлена в виде постоянной интегрирования по ζ .

Обозначая

$$\int \Phi(\zeta) d\zeta = \Phi_1(\zeta), \quad (304)$$

получим общее решение уравнения (302)

$$U = \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\eta), \quad (305)$$

или в прежних переменных

$$U(x, t) = \Phi_1(x - at) + \Phi_2(x + at). \quad (306)$$

Начальные условия: при $t = 0$ $U = \varphi(x)$ и $\frac{dU}{dt} = \varphi_1(x)$.

Подставляя начальные условия, получим

$$\varphi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \quad (307)$$

$$\varphi_1(x) = a[-\dot{\Phi}_1(x) + \dot{\Phi}_2(x)]. \quad (308)$$

Из выражения (308) найдем

$$\Phi_1(x) - \Phi_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(z) dz, \quad (309)$$

где $\varphi_1(z)dz$ – интегрируемое выражение $\varphi_1(x)dx$.

Следовательно,

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(z)dz, \quad (310)$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(z)dz. \quad (311)$$

Подставляем значения $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ в общее решение (306):

$$U(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \varphi_1(z)dz + \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \varphi_1(z)dz, \quad (312)$$

или

$$U(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)dz. \quad (313)$$

16. УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ВИДЕ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ

16.1. Продольный удар

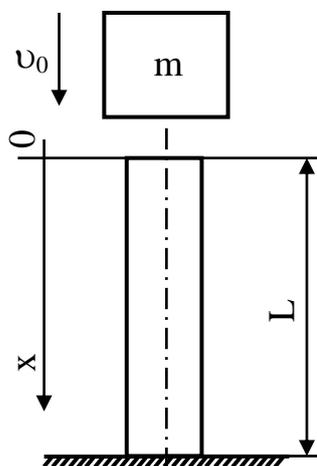


Рис. 38. Схема ударного нагружения стержня

Призматические или цилиндрические элементы машин (трубы, колонны, стойки, канаты и т.п.) могут быть приближенно представлены в виде стержня постоянного сечения, жестко закрепленного одним концом (рис. 38).

Пусть груз массой m движется со скоростью v_0 в направлении оси стержня. После соударения груза со стержнем в месте соударения возникает деформация, которая распространяется волнообразно вдоль стержня, отражается от закрепленного конца и движется к свободному концу, затем снова распространяется в сторону закрепленного конца и т.д.

Движение сечений стержня описывается уравнением волнового типа (289). Решение этого уравнения может быть получено с помощью разрывных функций. Обычно перемещение сечений стержня U находят в виде

$$U(x, t) = f(at - x) - f(at + x - 2L), \quad (314)$$

где f – произвольная функция, выражающая характер движения деформации.

Первый член правой части (314) соответствует движению волны деформации в направлении оси x (от 0 до l на рис. 38), а второй – в обратном направлении.

Полагая, что после соударения груз движется вместе со свободным концом стержня, для сечения, соответствующего $x = 0$, имеем

$$m \frac{d^2 U}{dt^2} = ES \frac{dU}{dx}. \quad (315)$$

Если выразить $E = \frac{a^2 \cdot \rho}{S}$, где $\rho = \frac{S \cdot \gamma}{g}$ – погонная масса стержня, и обозначить $\frac{\rho L}{m} = \beta$, то

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \beta \frac{a^2}{L} \cdot \frac{dU}{dx}. \quad (316)$$

Подставляя значение U из выражения (314)

$$\ddot{f}a^2(at) - \ddot{f}a^2(at - 2L) = \frac{\beta a^2}{L} [-\dot{f}(at) - \dot{f}(at - 2L)], \quad (317)$$

преобразуя и сокращая, получим

$$\ddot{f}(at) + \frac{\beta}{L} \dot{f}(at) = \ddot{f}(at - 2L) - \frac{\beta}{L} \dot{f}(at - 2L). \quad (318)$$

До соударения груза и стержня для всех сечений последнего $U = 0$. Следовательно, при $at < 0$ имеем $f(at) = 0$.

Для интервала $0 < at < 2L$ правая часть уравнения (318) равна нулю. Тогда

$$\ddot{f}(at) + \frac{\beta}{L} \dot{f}(at) = 0. \quad (319)$$

Проинтегрировав (319) в пределах $0 < at < 2L$, получим

$$\dot{f}(at) = Ae^{-\beta \frac{at}{L}}. \quad (320)$$

При $t = 0$ свободный конец стержня ($x = 0$) имеет скорость $\frac{dU}{dt} = v_0$. Введем это условие в уравнение (314):

$$a[\dot{f}(0) - \dot{f}(-2L)] = v_0, \quad (321)$$

поскольку $\dot{f}(-2L) = 0$, то $a\dot{f}(0) = v_0$.

Подставляя $t = 0$, находим $\dot{f}(0) = A$ или $A = \frac{v_0}{a}$.

Теперь

$$\dot{f}(at) = \frac{v_0}{a} e^{-\beta \frac{at}{L}}. \quad (322)$$

В соответствии с граничными (концевыми) условиями для интервала $at < (2L - x)$ функцию $f(at + x - 2L)$ следует принять равной нулю.

Тогда выражение (314) будет иметь вид

$$U = f(at - x), \quad (323)$$

а относительная деформация стержня

$$\varepsilon = \frac{dU}{dx} = -\dot{f}(at - x). \quad (324)$$

Подставляя выражение (322), получим

$$\varepsilon = \frac{dU}{dx} = \frac{v_0}{a} e^{-\frac{\beta}{L}(at-x)} \quad (325)$$

и скорость деформации

$$v = \frac{dU}{dt} = a\dot{f}(at - x) = v_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{L}(at-x)}. \quad (326)$$

Относительная деформация стержня и скорость этой деформации в любом сечении связаны при первом прохождении волны деформации зависимостью $v = -a\varepsilon$. Следовательно, деформация стержня в момент удара полностью определяется скоростью ударяющего груза v_0 и не зависит от его массы m . Если ε_y – относительная деформация, соответствующая пределу упругости, то максимально допустимая скорость удара равна

$$v_{\max} = a \cdot \varepsilon_y. \quad (327)$$

Для определения функции $f(at)$ в следующем интервале ($2L < at < 4L$) воспользуемся уравнением (318), в первую часть которого подставим значения $\dot{f}(at)$ и $\ddot{f}(at)$ при $0 < at < 2L$.

Тогда

$$\ddot{f}(at) + \frac{\beta}{L}\dot{f}(at) = -2\frac{v_0\beta}{aL} e^{-\frac{\beta}{L}(at-2L)}. \quad (328)$$

При неразрывном (совместном) движении груза и свободного конца стержня скорость не может изменяться скачкообразно. Следовательно, при $x = 0$ выражение

$$\frac{dU}{dt} = a[\dot{f}(at) - \dot{f}(at - 2L)] \quad (329)$$

должно быть непрерывной функцией.

Условие непрерывности удовлетворяется, если разрывы функции $f(at)$ повторяются при каждом изменении at на величину $2L$. При $at = 0$ функция $f(at)$ скачкообразно увеличивается на величину $\frac{v_0}{a}$. Такие же скачки повторяются при $at = 2L; 4L; 6L$ и т.д.

При $x = 0$ конец первого интервала определяется равенством $at = 2L$. При этом, согласно (322),

$$\dot{f}(2L) = \frac{v_0}{a} e^{-2\beta}. \quad (330)$$

В то же время происходит скачкообразное изменение функции $f(at)$, после чего $\dot{f}(2L)$ увеличивается на $\frac{v_0}{a}$:

$$\dot{f}(2L) = \frac{v_0}{a} (e^{-2\beta} + 1). \quad (331)$$

Выражение (331) является начальным условием для интегрирования уравнения (328). Используя (331) для определения постоянной интегрирования при $2L < at < 4L$, получим

$$\dot{f}(at) = \frac{v_0}{a} e^{-\beta \frac{at}{L}} + \frac{v_0}{a} \left(1 - 2\beta \frac{at - 2L}{L} \right) e^{-\beta \frac{at - 2L}{L}}. \quad (332)$$

Аналогично для интервала $4L < at < 6L$

$$\ddot{f}(at) + \frac{\beta}{L} \dot{f}(at) = -2 \frac{v_0}{a} \cdot \frac{\beta}{L} \left[e^{-\beta \frac{at - 2L}{L}} + 2 \left(1 - \beta \frac{at - 4L}{L} \right) \cdot e^{-\beta \frac{at - 4L}{L}} \right], \quad (333)$$

$$\dot{f}(at) = \frac{v_0}{a} e^{-\beta \frac{at}{L}} + \frac{v_0}{a} \left(1 - 2\beta \frac{at - 2L}{L} \right) e^{-\beta \frac{at - 2L}{L}} + \frac{v_0}{a} \left[1 - 2\beta \frac{at - 4L}{L} \left(2 - \beta \frac{at - 4L}{L} \right) \right] e^{-\beta \frac{at - 4L}{L}} \quad (334)$$

Так же можно определить значение $\dot{f}(at)$ для последующих интервалов.

Из выражения (314) относительная деформация стержня

$$\varepsilon = \frac{dU}{dx} = -[\dot{f}(at - x) + \dot{f}(at + x - 2L)]. \quad (335)$$

Подставляя соответствующие очередным интервалам и определяемые формулами (322), (332) и (334), получим значение ε для тех же интервалов и любых сечений стержня (любых x).

Так как $\varepsilon = \frac{F}{ES}$ и линейная жесткость $c = \frac{ES}{L}$, то $\varepsilon = \frac{F}{cL}$ или

$$F = \varepsilon \cdot c \cdot L, \quad (336)$$

где F – усилие, действующее в рассматриваемом сечении.

На основе изложенных решений получены упрощенные формулы для определения максимальных ударных нагрузок стержня:

$$\text{при } \beta > 24 \quad F_{\max} \approx cL \frac{v_0}{a} (\sqrt{\beta} + 1); \quad (337)$$

$$\text{при } 5 < \beta < 24 \quad F_{\max} \approx cL \frac{v_0}{a} (\sqrt{\beta} + 1,1); \quad (338)$$

$$\text{при } \beta < 5 \quad F_{\max} \approx 2cL \frac{v_0}{a} \left(1 + e^{-\frac{2}{\beta}} \right). \quad (339)$$

Если стержень расположен вертикально и ударная нагрузка вызывается свободно падающим грузом, то к значениям F , определяемым перечисленными формулами, следует прибавить вес груза.

16.2. Поперечный удар

Несущие части машин (крановые мосты, фермы и т.п.) приближенно можно представить в виде балки постоянного сечения (рис. 39).

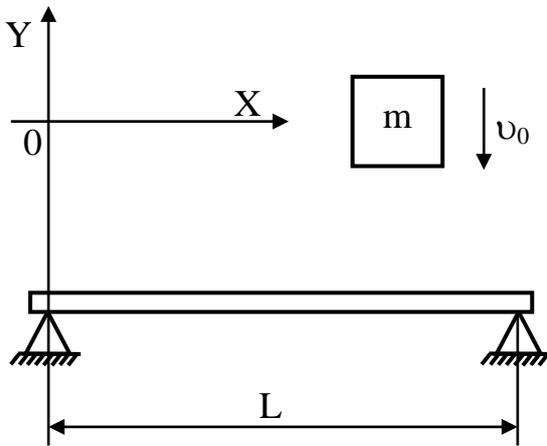


Рис. 39. Схема ударного нагружения балки постоянного сечения

В большинстве случаев достаточно точно можно рассмотреть процесс ударного нагружения и определить максимальные нагрузки такой системы путем предварительного приведения распределенных систем к системам с сосредоточенными массами (п. 12.1). Однако иногда требуется большая точность.

В этом случае задача сводится к рассмотрению волнового уравнения вида (289). Общее решение уравнения указанного типа относительно деформации балки U при воздействии на ее середину возмущающей силы P может быть получено аналогично показанному

выше. Это решение имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2L^2}{i^2 \pi^2 a m_0} \int_0^t F \cdot \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t - t_i)}{L^2} dt, \quad (340)$$

где m_0 – масса балки;

t_i – время, для которого определяется U ;

$i = 1, 2, 3, \dots$

В случае ударного нагружения сила F – величина, переменная во времени.

Если v_0 – скорость соударения груза с балкой в начальный момент,

m – масса груза,

то скорость груза после соударения в любой момент $t = t_i$ равна

$$v = v_0 - \frac{1}{m} \int_0^{t_i} F dt. \quad (341)$$

Перемещение груза в направлении удара

$$y_i = v_0 t_i - \int_0^{t_i} \frac{dt}{m} \int_0^{t_i} F dt. \quad (342)$$

Деформации (изгиб) балки могут быть соизмеримы с контактными деформациями (сжатие) в месте соударения груза и балки, поэтому последние следует учитывать.

Известно, что контактная деформация

$$y_2 = \alpha F^{2/3}, \quad (343)$$

где α – коэффициент, зависящий от кривизны поверхностей тел в месте контакта и механических свойств материала.

Например, для сферических поверхностей с радиусами кривизны R_1 и R_2

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9(1-\nu^2)^2(R_1 + R_2)}{4E^2R_1 \cdot R_2}}, \quad (344)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Если груз имеет сферическую поверхность с радиусом R , а балка в месте соударения – плоскость, то

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9(1-\nu^2)^2}{4E^2R}}. \quad (345)$$

Если после удара груз не отделяется от балки до момента, когда последняя получит максимальную деформацию, то можно записать $y_1 = U + y_2$, т.е.

$$v_0 t_1 - \int_0^{t_1} \frac{dt}{m_0} \int_0^{t_1} F dt = \sum_{i=L}^{i=\infty} \frac{2L^2}{i^2 \pi^2 a m_0} \int_0^{t_1} \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t - t_1) dt}{L^2} + \alpha \cdot F^{2/3}. \quad (346)$$

Решение уравнения (346) осуществляется численным методом путем итерации. Время от 0 до t нужно разделить на малые промежутки, подставляя которые можно получить соответствующие значения F и характер изменения этой величины во времени.