Міністерство освіти і науки України
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
кафедра математики та методики її навчання

Лов’янова І. В.

Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Базовий рівень підготовки

навчальний посібник
для підготовки студентів спеціальності
014.04 Середня освіта Математика
до атестації здобувачів вищої освіти

Кривий Ріг
2022

УДК

ББК

Рецензенти

І. А. Акуленко – доктор педагогічних наук, професор, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

К. В. Власенко – доктор педагогічних наук, професор, Національний університет "Києво-Могилянська академія"

Т. Г. Крамаренко – кандидат педагогічних наук, доцент, Криворізький державний педагогічний університет

Друкується за рішенням кафедри математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету (протокол №10 від 21 квітня 2022 року)

Лов'янова І. В.
Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Базовий рівень підготовки / І. В. Лов'янова. – Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет. 3-тє видання, доповнене і перероблене– 2022. – 128 с.

Посібник містить матеріали для повторення, узагальнення і систематизації знань студентів з дисципліни «Методика навчання математики» і підготовки до атестації здобувачів вищої освіти відповідно до робочої програми навчальної дисципліни. Весь зміст курсу представлено питаннями, до кожного питання подано розширений план відповіді і варіант відповіді на базовому рівні підготовки.

Посібник призначений для викладачів і студентів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК

ББК

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА…………………………………………………………..........4

РОЗДІЛ 1. Запитання державної атестації……………......................5

1.1. Відповідність питань державної атестації темам робочої програми…………………………………………………….……………5

1.2. Перелік запитань держаної атестації…...………………………..6

РОЗДІЛ 2. Відповіді на запитання. Базовий рівень підготовки …..11

2.1. Загальна методика……………………………………………….…11

2.2. Методика навчання алгебри……………………………...……..39

2.3. Методика навчання планіметрії………………………………...74

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ…..……………………………………………...…….129

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Методика навчання математики» за навчальним планом підготовки бакалаврів спеціальності 014 Середня освіта. Математика входить до циклу професійної підготовки.

Атестація бакалаврів передбачає перевірку знань студентів з кількох дисциплін навчального плану, до числа яких віднесена і дисципліна «Методика навчання математики». Пропонований посібник складено відповідно до робочої програми навчальної дисципліни. Питання, які виносяться на атестацію здобувачів вищої освіти, охоплюють весь курс методики навчання математики, який опановується студентами на лекціях, практичних і лабораторних заняттях, під час педагогічної практики і підготовки курсових проектів. Цей процес триває протягом чотирьох семестрів, тому нагальною є проблема узагальнення і систематизації знань студентів напередодні державної атестації, під час оглядових лекцій з дисципліни.

Пропонований посібник містить запитання та розгорнутий план відповідей атестації відповідно до змістових модулів курсу, а саме: «Загальна методика», «Методика навчання алгебри», «Методика навчання планіметрії».

Матеріали посібника можуть бути використані викладачами для проведення оглядових лекцій і організації самостійної роботи студентів на етапі їх підготовки до атестації здобувачів вищої освіти.

РОЗДІЛ 1

Запитання державної атестації

1. Відповідність питань державної атестації темам робочої програми

Питання	Теми в програмі
1.Предмет методики навчання математики. Зв'язок МНМ з іншими науками. Поняття методичної системи МНМ.	Тема 1.1. Методика математики як наука і як навчальний предмет.
2.Поняття як форма мислення. Основні характеристики математичного поняття. Співвідношення змісту та обсягу поняття. 3.Види математичних понять, відношення між ними. 4.Означення понять. Види означень. Вимоги до означень математичних понять. Аналіз помилок учнів , що виникають при означенні математичних понять. 5.Класифікація математичних понять, її роль у процесі навчання математики.	Тема 1.2. Математичні поняття. Методика роботи з означеннями математичних понять
6.Математичні твердження та їх види. Теореми в шкільному курсі математики. Види теорем за структурою та змістом. 7.Необхідні і достатні умови в шкільному курсі математики. Різні формулювання і переформулювання математичних тверджень. 8.Доведення теорем. Методи доведення математичних тверджень. Методи доведення за напрямком міркувань. Методи доведення в залежності від використаних математичних теорій.	Тема 1.3. Математичні твердження. Методика навчання доведенню математичних тверджень.
9.Роль і види задач у навчанні математики. 10Методи і способи розв'язування задач. Методика навчання учнів розв'язувати задачі.	Тема 1.4. Задачі у навчанні математики.
11.Логіко-математичний аналіз змісту.	Тема. 1.5. Логіко-математичний аналіз змісту.
12.Урок математики. Методи навчання математики. Поєднання методів навчання. Специфічні методи навчання. Загальна характеристика засобів навчання математики.	Тема 1.6 Методи, форми, засоби навчання математики.
13.Методика формування основних	Тема 2.1. Методика

знань, умінь та навичок в темі «Натуральні числа» в курсі 5-го класу. 14.Методика вивчення розділу «Подільність чисел» в курсі математики 6-го класу 15.Методика вивчення десяткових і звичайних дробів (5 клас). Методика вивчення раціональних чисел (6 клас). 16.Методика вивчення дійсних чисел в шкільному курсі алгебри основної школи.	вивчення тем змістової лінії «Числа». Розв'язування текстових задач.
17.Про поняття «вираз» в математиці і шкільному курсі математики. Тотожно рівні вирази, тотожність, тотожне перетворення. Методика вивчення раціональних виразів та їх перетворень в курсі алгебри 7-9 класів.	Тема 2.2. Тотожні перетворення цілих, раціональних і ірраціональних виразів. Методика вивчення тотожних перетворень.
18.Різні трактування поняття «рівняння» в математиці і шкільному курсі алгебри. Методика вивчення рівнянь в курсі алгебри основної школи. 19.Формування поняття «нерівність». Методика вивчення нерівностей в курсі алгебри основної школи. 20.Системи в курсі алгебри основної школи. Методика навчання учнів розв'язуванню задач на складання рівнянь та їх систем	Тема 2.3. Рівняння і нерівності та їх системи в курсі алгебри основної школи. Методика навчання учнів розв'язуванню задач на складання рівнянь.
21.Розвиток поняття функції, різні означення функції. Функціональна пропедевтика.. Методика вивчення окремих видів функцій в курсі алгебри основної школи.	Тема 2.4. Функції в курсі алгебри основної школи.
22.Логічна будова шкільного курсу планіметрії, її реалізація у діючих підручниках Вивчення аксіом в курсі геометрії 7 класу. Методика введення перших понять. Доведення перших теорем.	Тема 3.1. Про побудову шкільного курсу геометрії. Перші уроки систематичного курсу геометрії.
23.Прямі і кути на площині. Паралельні і перпендикулярні прямі, ознаки паралельності.	Тема 3.2. Прямі і кути на площині. Паралельні і перпендикулярні прямі, ознаки паралельності.
24.Методика вивчення теми «Трикутник». Медіана, бісектриса, висота трикутника: означення і властивості. Види трикутників за сторонами і кутами.	Тема 3.3. Вивчення трикутників в курсі планіметрії 7 класу.

25.Методика вивчення ознак рівності трикутників. Перша і друга ознаки рівності трикутників. 26.Методика вивчення теми «Рівнобедрений трикутник» в курсі 7 кл. Методика вивчення третьої ознаки рівності трикутників. 27.Методика вивчення теореми про суму кутів трикутника. Реалізація методики роботи з готовим доведенням теореми. 28.Методика вивчення теми «Прямокутний трикутник». Ознаки рівності прямокутних трикутників (7 клас).	
29.Методика вивчення теми «Подібність трикутників» (8 клас)	Тема 3.4. Методика вивчення теми «Подібність трикутників».
30.Методика вивчення площ трикутників.	Тема 3.5. Методика вивчення площ трикутників.
31.Методика вивчення прямокутного трикутника (8 клас). Теорема Піфагора. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. 32.Співвідношення між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику Методика розв'язування прямокутних трикутників. 33.Методика розв'язування трикутників. Базові задачі на розв'язування трикутників.	Тема 3.6. Прямокутний трикутник. Теорема Піфагора. Методика розв'язування прямокутних трикутників.
34.Теорема косинусів, теорема синусів, наслідки з теореми синусів	Тема 3.7. Методика розв'язування трикутників.
35.Методика навчання учнів розв'язувати задачі на побудову в курсі планіметрії. Основні побудови. Метод геометричних місць точок.	Тема 3.8. Геометричні побудови в курсі планіметрії
36.Методика вивчення декартових координат в шкільному курсі геометрії. Координатний метод розв'язування задач	Тема 3.9. Методика вивчення декартових координат в шкільному курсі геометрії.
37.Методика вивчення елементів аналітичної геометрії: рівняння прямої, рівняння кола.	Тема 3.10. Методика вивчення елементів аналітичної геометрії: рівняння прямої, рівняння кола.
38.Методика вивчення теми «Вектори»	Тема 3.11. Методика

в курсі геометрії 9 класу. Методика розв’язування задач векторним методом.	вивчення векторів в шкільному курсі геометрії.
39.Методика вивчення геометричних перетворень фігур: рухи, гомотетія, перетворення подібності на площині і в просторі.	Тема 3.12. Геометричні перетворення фігур: рухи, гомотетія, перетворення подібності на площині і в просторі.
40.Методи розв’язування планіметричних задач: метод рівних трикутників, метод подібних трикутників, метод перетворень фігур на площині.	Тема 3.13. Методи розв’язування планіметричних задач.

2. Перелік запитань державної атестації

Загальна методика

1. Предмет методики навчання математики. Зв'язок МНМ з іншими науками. Поняття методичної системи МНМ.
2. Поняття як форма мислення. Основні характеристики математичного поняття. Співвідношення змісту та обсягу поняття.
3. Види математичних понять, відношення між ними.
4. Означення понять. Види означень. Вимоги до означень математичних понять. Аналіз помилок учнів , що виникають при означенні математичних понять.
5. Класифікація математичних понять, її роль у процесі навчання математики.
6. Математичні твердження та їх види. Теореми в шкільному курсі математики. Види теорем за структурою та змістом.
7. Необхідні і достатні умови в шкільному курсі математики. Різні формулювання і переформулювання математичних тверджень.
8. Доведення теорем. Методи доведення математичних тверджень. Методи доведення за напрямком міркувань. Методи доведення в залежності від використаних математичних теорій.
9. Роль і види задач у навчанні математики.
10. Методи і способи розв’язування задач. Методика навчання учнів розв’язувати задачі.
11. Логіко-математичний аналіз змісту навчального матеріалу.
12. Урок математики. Методи навчання математики. Поєднання методів навчання. Специфічні методи навчання. Загальна характеристика засобів навчання математики.

Методика навчання алгебри

13. Методика формування основних знань, умінь та навичок в темі «Натуральні числа» в курсі 5-го класу.

14. Методика вивчення розділу «Подільність чисел» в курсі математики 6-го класу

15. Методика вивчення десяткових і звичайних дробів (5 клас). Методика вивчення раціональних чисел (6 клас).

16. Методика вивчення дійсних чисел в шкільному курсі алгебри основної школи.

17. Про поняття «вираз» в математиці і шкільному курсі математики. Тотожно рівні вирази, тотожність, тотожне перетворення. Методика вивчення раціональних виразів та їх перетворень в курсі алгебри 7-9 класів.

18. Різні трактування поняття «рівняння» в математиці і шкільному курсі алгебри. Методика вивчення рівнянь в курсі алгебри основної школи.

19. Формування поняття «нерівність». Методика вивчення нерівностей в курсі алгебри основної школи.

20. Системи в курсі алгебри основної школи. Методика навчання учнів розв'язуванню задач на складання рівнянь та їх систем.

21. Розвиток поняття функції, різні означення функції. Функціональна пропедевтика.. Методика вивчення окремих видів функцій в курсі алгебри основної школи.

Методика навчання планіметрії

22. Логічна будова шкільного курсу планіметрії, її реалізація у діючих підручниках Вивчення аксіом в курсі геометрії 7 класу. Методика введення перших понять. Доведення перших теорем.

23. Прямі і кути на площині. Паралельні і перпендикулярні прямі, ознаки паралельності.

24. Методика вивчення теми «Трикутник». Медіана, бісектриса, висота трикутника: означення і властивості. Види трикутників за сторонами і кутами.

25. Методика вивчення ознак рівності трикутників. Перша і друга ознаки рівності трикутників.

26. Методика вивчення теми «Рівнобедрений трикутник» в курсі 7 кл. Методика вивчення третьої ознаки рівності трикутників.

27. Методика вивчення теореми про суму кутів трикутника. Реалізація методики роботи з готовим доведенням теореми.

28. Методика вивчення теми «Прямокутний трикутник». Ознаки рівності прямокутних трикутників (7 клас).

29. Методика вивчення теми «Подібність трикутників» (8 клас)

30. Методика вивчення площ трикутників.

31. Методика вивчення прямокутного трикутника (8 клас). Теорема Піфагора. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику.

32. Співвідношення між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику Методика розв'язування прямокутних трикутників.

33. Методика розв'язування трикутників. Базові задачі на розв'язування трикутників.

34. Теорема косинусів, теорема синусів, наслідки з теореми синусів

35. Методика навчання учнів розв'язувати задачі на побудову в курсі планіметрії. Основні побудови. Метод геометричних місць точок.

36. Методика вивчення декартових координат в шкільному курсі геометрії. Координатний метод розв'язування задач

37. Методика вивчення елементів аналітичної геометрії: рівняння прямої, рівняння кола.

38. Методика вивчення теми «Вектори» в курсі геометрії 9 класу. Методика розв'язування задач векторним методом.

39. Методика вивчення геометричних перетворень фігур: рухи, гомотетія, перетворення подібності на площині і в просторі.

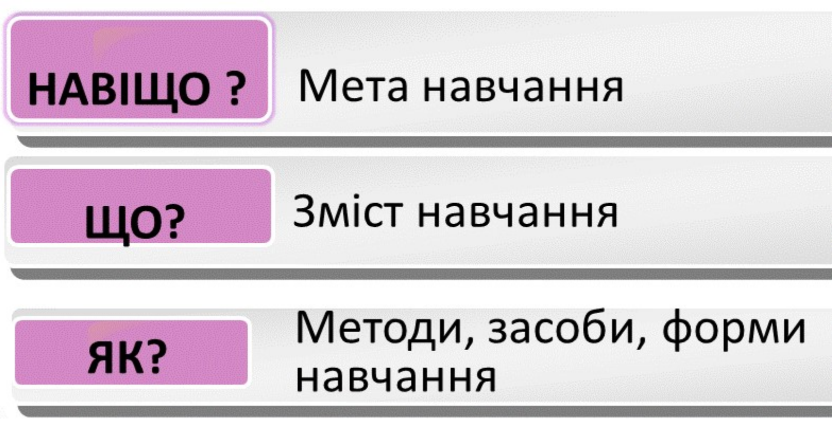
40. Методи розв'язування планіметричних задач: метод рівних трикутників, метод подібних трикутників, метод перетворень фігур на площині.

РОЗДІЛ 2.

Відповіді на запитання. базовий рівень підготовки

Загальна методика

1. Предмет методики навчання математики. Зв'язок МНМ з іншими науками. Поняття методичної системи МНМ.

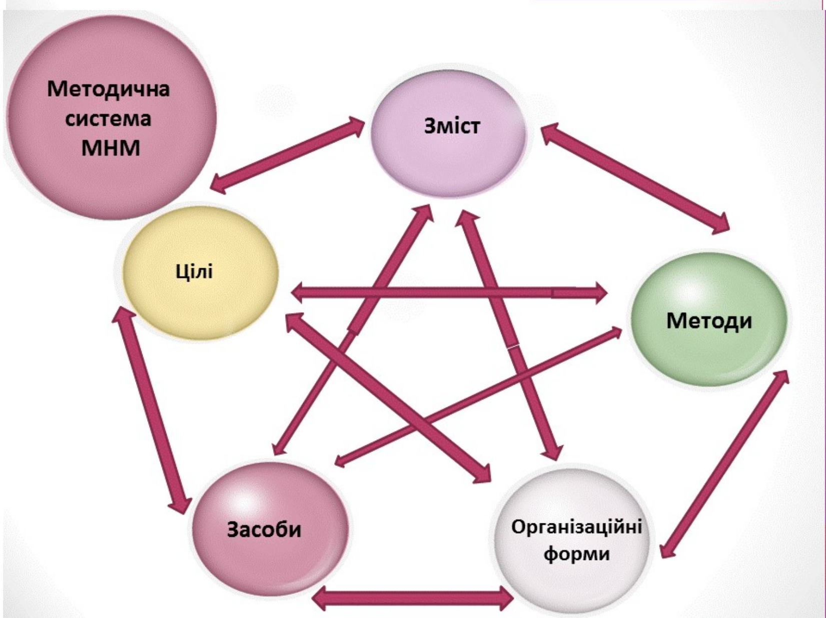


МНМ є наукою

Предметом МНМ є процес навчання математики. Процес навчання відображає суттєві ознаки навчання і характеризує його внутрішню будову

МНМ відноситься до циклу педагогічних наук

Структура курсу МНМ як навчального предмету



Зміст компонентів системи:

- ЦІЛІ навчання:
  - ✓ Розумовий розвиток учнів;
  - ✓ Формування позитивних якостей особистості;
  - ✓ Забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань навичок і вмінь;
  - ✓ Формування уявлень про ідеї і методи математики та її роль у пізнанні навколишнього світу;
- ЗМІСТ навчання:
  - ✓ Один із основних компонентів процесу навчання. Це система наукових знань, умінь, навичок, оволодіння якими забезпечує всебічний розвиток особистості учня;
  - ✓ Зміст освіти відображається в навчальних планах, програмах, підручниках, дидактичних матеріалах, наочних посібниках.
- Під методом навчання розуміють:
  - ✓ Способи навчальної роботи вчителя і організації навчально-пізнавальної діяльності учнів з розвязування різних дидактичних задач, спрямованих на опанування матеріалом, що вивчається,
- Організаційні форми – це зовнішнє вираження узгодженої діяльності вчителя і учнів, що здійснюється у встановленому порядку і в певному режимі.
- Засоби навчання – підручник, дидактичні матеріали, навчальне обладнання, екранні засоби навчання.

Освітній стандарт – це основа на якій розробляється пакет різнорівневих програм і створюються нові підручники

Освітні галузі базового навчального плану


Сучасний ШКМ групується навколо 10 змістових ліній
Числа
Вирази
Рівняння
Функції
алгебра
Комбінаторика, елементи статистики і теорії ймовірностей
Геометричні фігури
Геометричні величини
Геометричні перетворення
Геометричні побудови
геометрія
Координати і вектори на площині і в просторі


міжпредметні зв'язки математики та інших шкільних дисциплін
математика
Природничі дисципліни
фізика
хімія
біологія
технології
креслення
Трудове навчання
Соціально-гуманітарні
Економіка і географія

2. Поняття як форма мислення. Основні характеристики математичного поняття. Співвідношення змісту та обсягу поняття.

Поняття → форма мислення — особливості предметів та явищ

істотні властивості

відмінні властивості

Поняття

Сприйняття (чуттєве відображення дійсності) ↔ Уявлення (відбитий образ предмета у свідомості людини)

Основні характеристики математичного поняття

Обсяг (всі об'єкти)

Зміст (всі істотні властивості)

Приклад поняття: парне число.
Зміст: це ознака, число кратне 2-м.
Обсяг: множина всіх парних чисел, яка є нескінченою.

Види понять

Одиничні (1)

Загальні (1,2,3…)

Порожні (0)

1. Є лише один об'єкт (пр.: парне просте число)
2. Декілька об'єктів (пр.: рівняння, трикутник)
3. Не існує жодного об'єкта (пр.: дійсні корені кв. р-ня з від'ємним дискримінантом)

За змістом

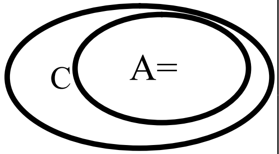
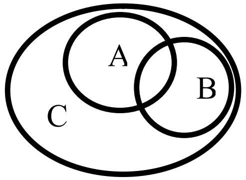
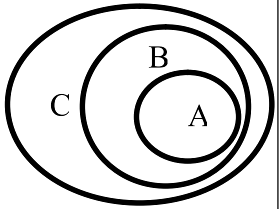
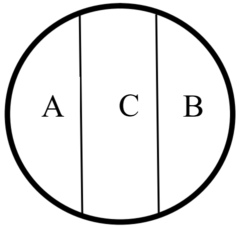
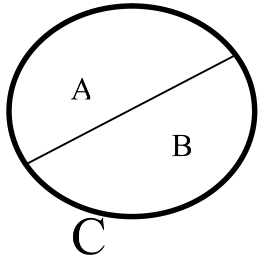
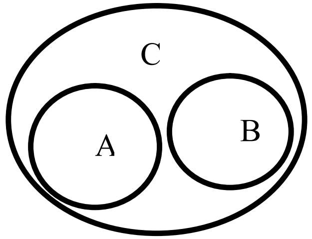
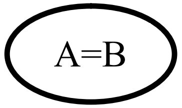
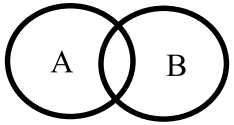
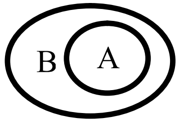
Порівняльні (мають хоча б одну спільну ознаку). **Пр.:** коло, піраміда – геомет. фігури.

Непорівняльні (не мають жодної спільної ознаки). **Пр.:** корінь квадр., циліндр.

Сумісні (є хоча б один спільний об'єкт)

Несумісні (не має жодного спільного об'єкта)

3. Види математичних понять, відношення між ними.

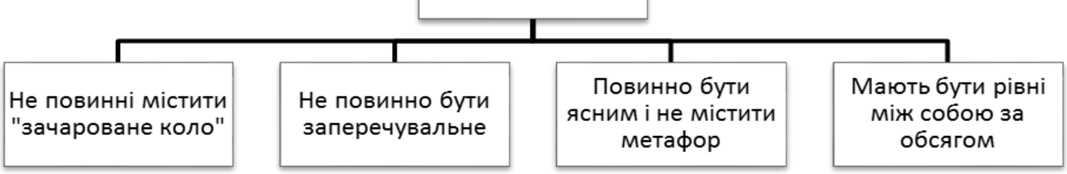
Поняття (за змістом)							
Порівняні (за обсягом)							Не порівняні
Сумісні $A \cap B \neq \emptyset$				Не сумісні $A \cap B = \emptyset$			
рівнозначні	перехрещуванні	підрядні	супідрядні	протилежні	суперечливі	супідрядні	
A=B	$A \cap B \neq 0$ $A \not\subset B$, $B \not\subset A$	$A \neq B$ $A \subset B$	  				
							
Промінь і півпряма (геом.); біном і двочлен (алг.)	Ромби; прямокутники, тоді на перетині квадрат.	Прямокутник, паралелограм, натуральні і цілі числа.	Геометрична фігура, паралелограм.	Додатні і від'ємні числа, нуль; гостр., тупок. і прямокутні трик.	Додатні і не додатні числа; рівноб. і не рівноб. трапеції.	Паралелограм, трапеції.	Геометрична фігура і число

4. Означення понять. Види означень. Вимоги до означень математичних понять. Аналіз помилок учнів , що виникають при означенні математичних понять.

Означенням математичного поняття називається речення, в якому у стислій формі за допомогою вже відомих понять називаються ті суттєві ознаки поняття, кожна з яких є необхідною, а всі разом достатні для визначення даного поняття.

Означення

Словесні	**Символічні**
1.Через найближчий рід і видові відмінності; **Наприклад:** Ромбом називається паралелограм у якого всі сторони рівні. 2.Генетичні означення; **Наприклад:** Арифметичною прогресією називається послідовність в якій кожний член, починаючи з другого дорівнює сумі попереднього і даного числа, яке називається різницею арифметичної прогресії. 3.Означення через перелік; **Наприклад:** Числа натуральні, їм протилежні і нуль називаються цілими числами. 4.Аксіоматичне означення; **Наприклад:** Аксіоматичне означення натурального числа через систему аксіом Пеано. 5.Означення через абстракцію; **Наприклад:** Поняття границі числової послідовності, похідної, інтеграла.	Означення, що записуються за допомогою символів. 1.$f'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 2.$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$ 3.$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$



Методи введення понять

Конкретно- індуктивна методика	Абстрактно- дедуктивна методика
1. Аналіз конкретних прикладів; 2. Формування початкового означення; 3. Строге означення; 4. Демонстрація етапів підведення під поняття: 5. Демонстрація етапів виведення наслідків; 6. Заміна означення еквівалентним; 7. Окремі випадки.	1. Точне означення; 2. Суттєві і несуттєві властивості 3. Демонстрація етапів підведення під поняття: 4. Демонстрація етапів виведення наслідків; 5. Заміна означення еквівалентним; 6. Окремі випадки.

Наприклад: Трапецією називається чотирикутник у якого тільки дві сторони паралельні.

Суттєві ознаки	Несуттєві ознаки
1. Чотирикутник; 2. Тільки дві сторони паралельні.	1. Величини сторін; 2. Наявність прямого кута; 3. Рівність бічних сторін; 4. Позначення; 5. Розташування на площині.

5. Класифікація математичних понять, її роль у процесі навчання математики.

Вимоги до проведення класифікації

1.Класифікація повинна проводитисьза однією ознакою.

Наприклад: Трикутник можна класифікувати за за кутами або за сторонами.

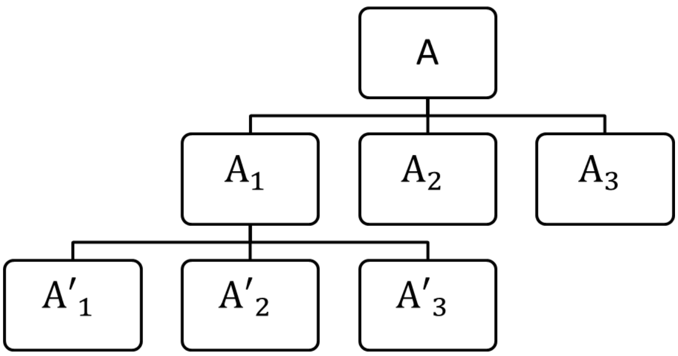
2.Класифікація має бути повною, а саме об'єднання обсягів понять, які потрапили в класи.

Наприклад: A=$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

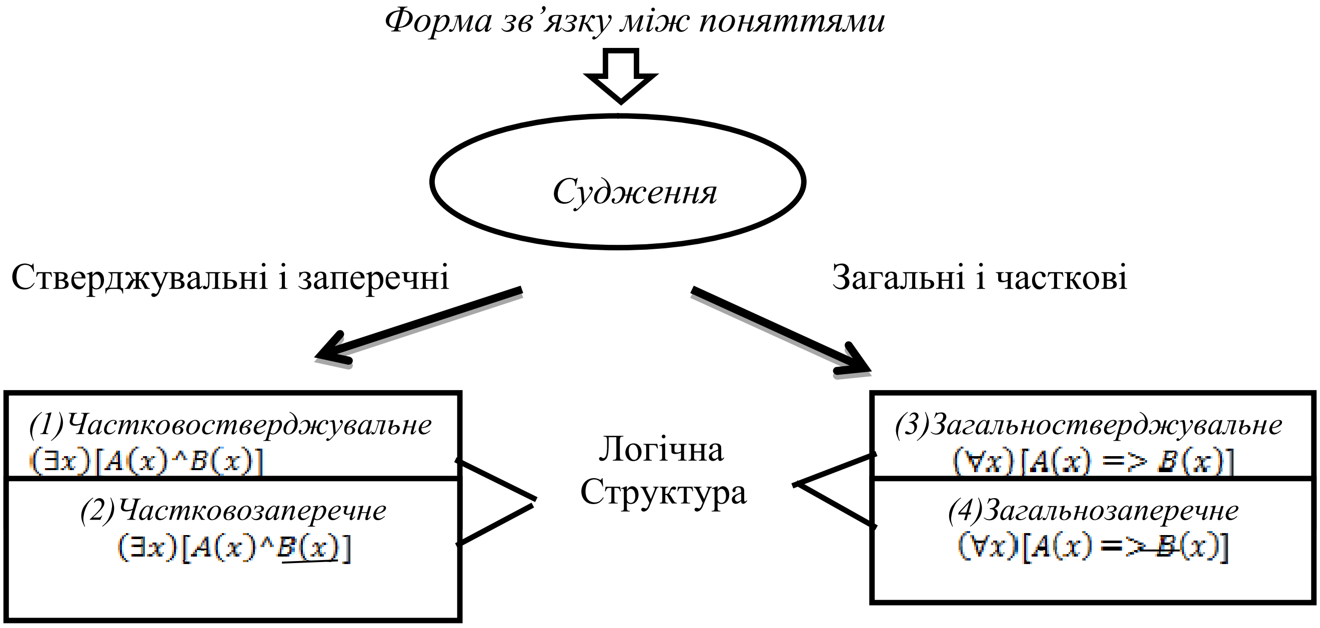
3.Об'єкти, які потрапили в різні класи повинні взаємовиключати один одного.

Наприклад: $A_i \cap A_j = \emptyset$

4.Повина бути неперервною. Наприклад:



6. Математичні твердження та їх види. Теореми в шкільному курсі математики. Види теорем за структурою та змістом.



Приклади:

(1) Існують такі квадратні рівняння, які мають два однакових кореня.

(2) Існують такі квадратні рівняння, які не мають дійсних коренів.

(3) Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

(4) Якщо прямі паралельні, то вони не мають спільної точки.

Теореми в шкільному курсі математики.

- Ознаки рівності і подібності трикутників.
- Ознаки паралельності прямих.
- Теорема Піфагора.
- Ознаки паралельності та перпендикулярності прямих і площин у просторі.
- Теорема Вієта.
- Теорема про властивості функції.
- Ознаки монотонності функції, екстремуми.
- Теореми про похідні, властиво первісної.

Структура теореми

$$(\forall x \epsilon P)(A(x) => B(x)),$$

де $(\forall x \epsilon P)$ *– роз'яснювальна частина;* $A(x)$ *– умова теореми;* $B(x)$ *– заключення теореми.*

Види теорем:

1) **За структурою:**

- **A=>B** – пряме твердження;

Пр. *Якщо кути вертикальні, то вони рівні.(істина)*

- **B=>A –** обернене твердження;

Пр. *Якщо кути рівні, то вони вертикальні.(хиба)*

- $\overline{\mathbf{A}}$**=>**$\overline{\mathbf{B}}$ – протилежне до прямого;

Пр. *Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні.(хиба)*

- $\overline{\mathbf{B}}$**=>**$\overline{\mathbf{A}}$ – обернене до протилежного або протилежне до оберненого;

Пр. *Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні.(істина)*

- **A=>**$\overline{\mathbf{B}}$ **–** протирічливе прямому.

Пр. *Якщо кути вертикальні, то вони не рівні.(хиба)*

2) **За змістом:**

- **Теореми існування.**

Пр. *Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.*

- **Теорема «необхідна і достатня умова».**

Пр. *Для того, щоб дві прямі були паралельними необхідно і достатньо, щоб односторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, були рівними.*

- **Теорема про єдність.**

Пр. *Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна даній.*

- **Теорема-ознака.**

Пр. *Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник є рівнобедреним.*

- **Теорема-властивість.**

Пр. *У паралелограма протилежні кути рівні.*

- **Лемма.**
- **Наслідок.**

Пр. *Теорема про нерівність трикутника є наслідком основної властивості довжини відрізка.*

7. Необхідні і достатні умови в шкільному курсі математики. Різні формулювання і переформулювання математичних тверджень.

Означення	Умова	Висловлення
І. Умова необхідна, якщо без її наявний висновок не може існувати.	А необхідна для В	А =>В (хиба) В=>А (істина)
ІІ. Умова достатня, якщо за її наявності обов'язково виконується.	А достатня для В	А=>В (істина) В=>А (хиба)
ІІІ. Умова необхідна і достатня, якщо без її виконання висновок не може виконуватись і в разі її виконання висновок обов'язково виконується.	А необхідна і достатня для В	А=>В (істина) В=>А (істина)

Різні формулювання математичних тверджень.

А=>В – формулювання прямого твердження

Щоб виконувалося **В** [*необхідно, або достатньо, або необхідно і достатньо*], щоб виконувалося **А.** **–** формулювання необхідної і достатньої умови

Вертикальні кути рівні
Якщо кути вертикальні, то вони рівні.
А – кути вертикальні, В – кути рівні А=>В (істина); В=>А (хиба)
А достатньо для В
Щоб кути були рівні, достатньо, щоб вони були вертикальні.
ІІІ ознака рівності трикутників
Якщо три сторони одного трикутника рівні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.
А – три сторони одного трикутника рівні трьом сторонам іншого трикутника
В – трикутники рівні, А=>В (істина); В=>А (істина)
Щоб трикутники були рівними необхідно і достатньо щоб три сторони одного трикутника були рівні трьом сторонам іншого трикутника.

8. Доведення теорем. Методи доведення математичних тверджень. Методи доведення за напрямком міркувань. Методи доведення в залежності від використаних математичних теорій.

Характеристика методів доведення Таблиця 3.1

<table>
<tr><th>Назва методу</th><th>Логічна основа</th><th>Схема</th><th>Переваги[1)] і недоліки[2)]</th><th>Область застосування</th></tr>
<tr><td>Синтетичне доведення</td><td rowspan="2">Із істинного твердження завжди випливає істинний наслідок</td><td>$A \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to B$</td><td>1) логічна переконаність, компактність
2) невизначеність при проведенні перших кроків доведення</td><td>В підручнику для пред’явлення готових доведень</td></tr>
<tr><td>Аналітичне доведення

Аналіз Євкліда (нисхідний)

Аналіз Паппа (висхідний)</td><td>$B \to B_1 \to B_2 \to \ldots \to A$

$B_1 \to B$
$B_2 \to B_1$
.
.
$A \to B_n$

$B \leftarrow B_1 \leftarrow B_2 \leftarrow \ldots \leftarrow A$</td><td>1) більша визначеність,
2) менша переконливість

1) вказується з чого треба починати і в якому напрямку проводити міркування</td><td>В процесі пошуку доведення</td></tr>
<tr><td>Доведення від супротивного</td><td>Із двох протилежних тверджень тільки одне істинне</td><td>$\neg (A \to B) \equiv A \wedge \neg B$</td><td>2) труднощі у формулюванні суперечливого твердження, труднощі у отриманні протиріч у процесі міркувань</td><td>Теореми про єдність, теореми про взаємне розташування прямих і площин</td></tr>
<tr><td>Метод математичної індукції</td><td>Принцип математичної індукції</td><td>Із справедливості твердження при n=1 і припущення його правильності при n=k випливає його справедливість для n=k+1</td><td>2) труднощі у знаходженні n-го члена</td><td>Застосовується для доведення тверджень, які охоплюють нескінчену кількість часткових випадків</td></tr>
</table>

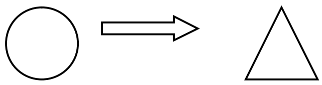
При формуванні окремих загальних прийомів навчання доведенню математичних тверджень необхідно розкрити його операційний склад, способи формування операцій і критерії сформованості.

1*. Аналіз тексту твердження має наступний операційний склад:

- прочитайте твердження;
- виділіть умову(и) і висновок(и);
- уточніть висновок: назвіть його, про які фігури йде мова, за якою властивістю можна їх встановити, що в умові є для того, щоб встановити висновок;
- уточніть умову: перерахуйте фігури, про які йде мова, скільки їх, яким властивостями вони володіють, що в них є для того, щоб прийти до висновку;
- зробіть рисунок (якщо він необхідний) і короткий запис;
- якщо після виконання аналізу доведення знайдено, запишіть його.

Щоб навчити учнів читати математичні твердження, необхідно показати можливі конструкції тверджень.

Наприклад:

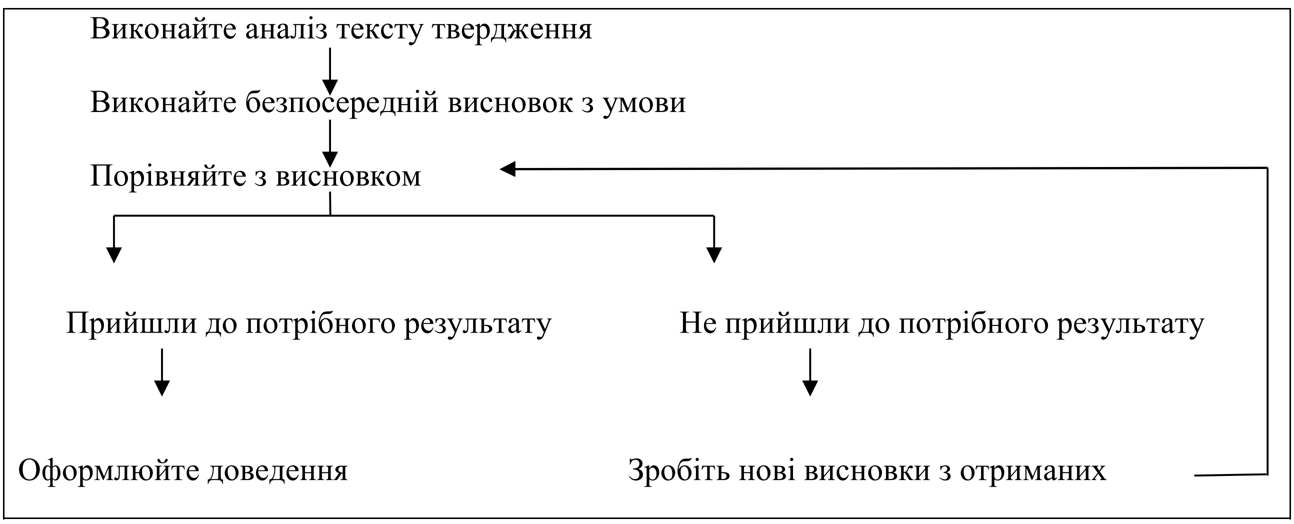


об’єкт (об’єкти) — властивості об’єктів (взаємозв’язок між об’єктами)

1. Якщо дано О, то Δ .
2. Так як дано О, то Δ .
3. Оскільки дано О, то Δ .
4. Для того, щоб було дано О, необхідно, щоб Δ .
5. Для того щоб Δ , досить, щоб було дано О

2*. При формуванні прийому розгортання умови необхідно розкрити його операційний склад, який можна зобразити у вигляді схеми 6.1

Схема 8.1



Оскільки більшість умовиводів в шкільному курсі математики робиться за правилом висновку і правилом заперечення, то на змістовному рівні можна ознайомити з ними учнів.

а) Якщо *A,* то *B* [$A(x) \rightarrow B(x)$],
виконується *A*.

Висновок: виконується *B*;

б) Якщо *A,* то *B* [$A(x) \rightarrow B(x)$],
не виконується *B*.

Висновок: не виконується *A*.

3*. При формуванні прийому послідовного аналізу висновку і умови твердження операційний склад його може бути розкритий в схемі 8.2.

Схема 8.2

Виконайте аналіз тексту твердження

З’ясуйте, що достатньо знати для того, щоб прийти до потрібного висновку (сформулюйте проміжний висновок)

Виконайте безпосередні висновки з умови (сформулюйте проміжні висновки)

Порівняйте з тим, що потрібно довести

Прийшли до потрібного висновку

Не прийшли до потрібного висновку

З’ясуйте, що достатньо знати, щоб прийти до проміжного висновку (сформулюйте проміжний висновок)

Зробіть нові висновки з умови

Порівняйте з тим, що тепер треба довести (з новим проміжним результатом)

Прийшли до потрібного висновку

Не прийшли до потрібного висновку

Оформлюйте доведення

Для формування вміння знаходити достатні підстави можна використовувати, наприклад, наступні задачі:

1) Що достатньо знати для того, щоб стверджувати, що даний трикутник рівнобедрений?

2) Відомо, що виконуються наступні рівності: $AB=MP$, $BC=PK$. Доповніть цю умову так, щоб можна було зробити висновок, що $\Delta ABC=\Delta\ MPK$.

Добрим засобом для розв’язання запропонованих задач є складання карток (див. таблицю 8.1)

Таблиця 8.1

Для того щоб довести	достатньо довести
рівність трикутників	1) рівність двох пар відповідних сторін і рівність кутів між ними; 2) рівність трьох пар відповідних сторін; 3) і т.д.

9. Роль і види задач у навчанні математики.

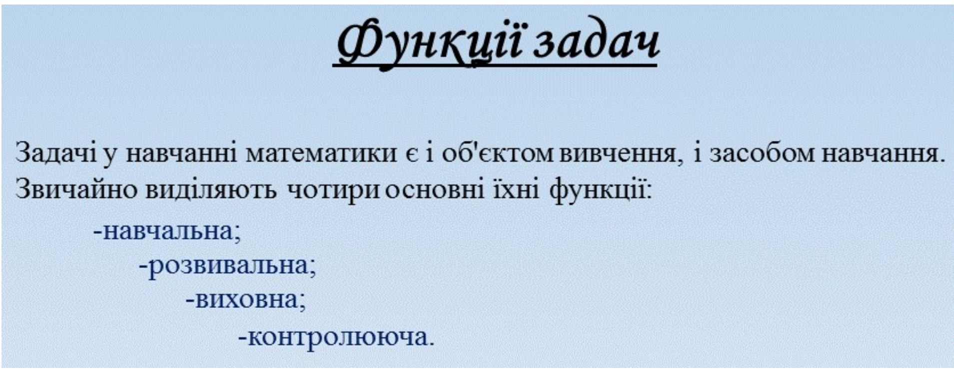
Задача – це об’єкт мислительної діяльності, який містить вимогу деякого практичного перетворення або відповіді на теоретичне питання шляхом пошуку умов, які дозволяють розкрити зв'язок між відомими і невідомими елементами.

Математична задача – це будь-яка вимога, обчислити, побудувати, довести або дослідити, що не будь, що стосується просторових форм чи кількісних відносин або запитання рівносильне вимозі.

Те, що дано –умова. Те, що знайти –вимога.

Розв’язати задачу – означає виконати поставлену в задачі вимогу.

Перехід від задачі до теорії характеризується проблемною ситуацією. Перехід від теорії до задач – застосування теорії.



Навчальна функція

Навчальна функція спрямована на формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах навчання. Через систему задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й переконуються на етапі мотивації у потребі здобуття нових знань; в процесі розв'язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи розв'язування.

Розвивальна функція

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення школярів, на формування у них розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо.

Виховна функція

Виховна функція задач спрямована на формування в учнів наукового світогляду, сприяє екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю, відповідальність за доручену справу та ін.).

Контролююча функція

Контролююча функція задач спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом в цілому.

Види задач

Залежно від того, яку вимогу поставлено в задачі, розрізняють задачі на *обчислення, доведення, побудову і дослідження.*

У задачах на обчислення треба знайти число (або множину чисел) за даними числами і умовами, якими вони пов'язані між собою та з невідомими числами. До таких задач належать текстові задачі і різноманітні приклади (задачі на розв'язування рівнянь, нерівностей, їхніх систем тощо).

У задачах на доведення вимагається довести сформульоване в них твердження. Цим вони не відрізняються від теорем. Тому не дивно, що одне й те саме твердження виступає в різних підручниках або під рубрикою теорем, або під рубрикою задач. До теорем звичайно відносять найважливіші твердження, які широко використовуються під час розв'язування різноманітних задач і доведення інших теорем. Водночас на окремі задачі доводиться посилатися як на теореми.

До задач на побудову належать як геометричні задачі, в яких вимагається побудувати яку-небудь фігуру, що задовольняє умову задачі, так і задачі на побудову графіків функцій, діаграм, перерізів многогранників та інших тіл.

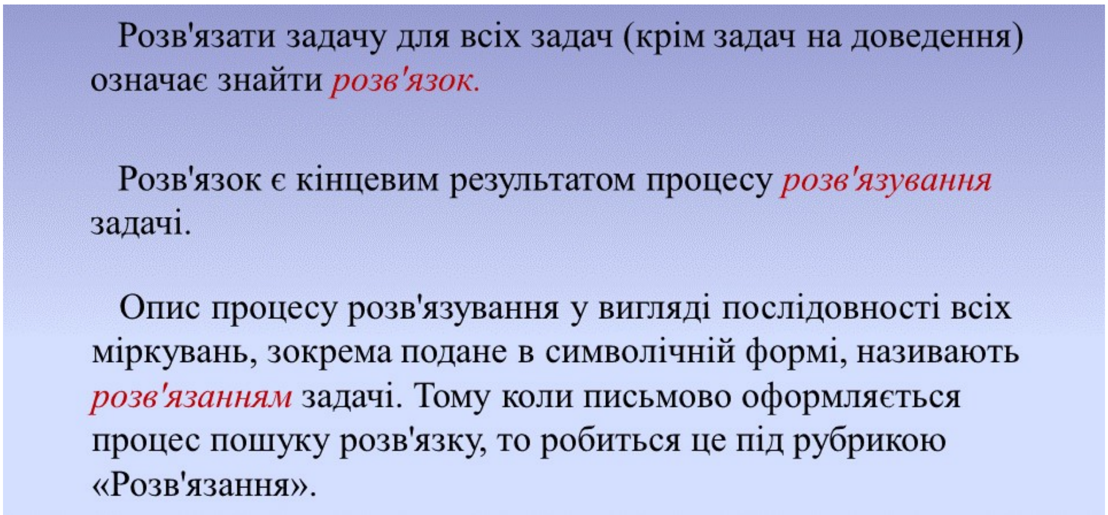
У задачах на дослідження вимагається дослідити що-небудь. Наведемо приклади таких задач.

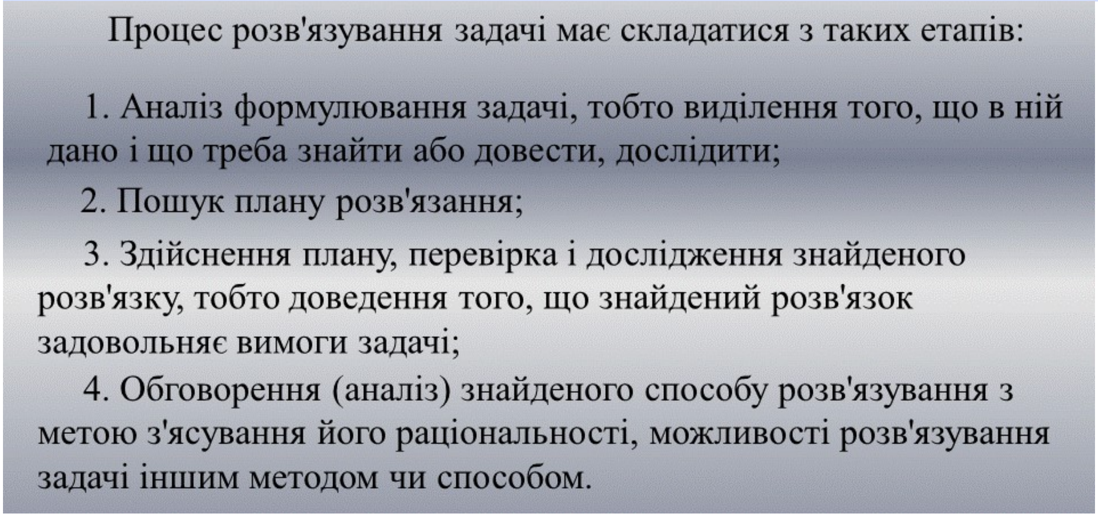
1. Чи існує піраміда, в якій дві протилежні грані перпендикулярні до основи і перпендикулярні між собою?

2. Чи може проекція паралелограма у разі паралельного проектування бути квадратом?

3. Дослідити на монотонність і екстремум функцію $y = (x-1)/(2x+1)$.

10. Методи і способи розв’язування задач. Методика навчання учнів розв’язувати задачі.





У діяльності щодо розв’язування задач виділяють чотири етапи:

I. Ознайомлення зі змістом задачі.

II. Пошук розв’язку – висування плану розв’язування задачі.

III. Процес розв’язання – реалізація плану розв’язування.

IV. Перевірка розв’язку.

Розглянемо приклад.

Три ділянки загальною площею 360 га засіяли житом. Перша ділянка на 120 га менше другої, яка на 60 га більше третьої. З першої ділянки зібрали по 26 ц з одного га, з другої – по 24 ц, а з третьої – по 22 ц з одного га. Скільки центнерів жита зібрали?

I. Ознайомлення зі змістом задачі.

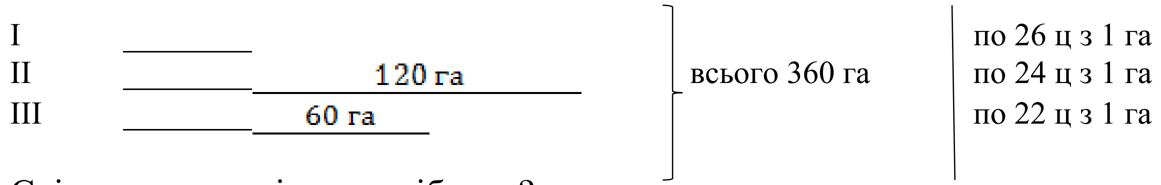
Кроткий запис задачі можна представити у вигляді таблиці або графічної схеми.

1 спосіб – таблиця.

Ділянка	Площа, га	Врожайність, ц з 1 га
I II III	на 120 га менше II на 60 га менше II	26 24 22
Всього	360	

Скільки центнерів жита зібрали?

2 спосіб – схема.



Скільки центнерів жита зібрали?

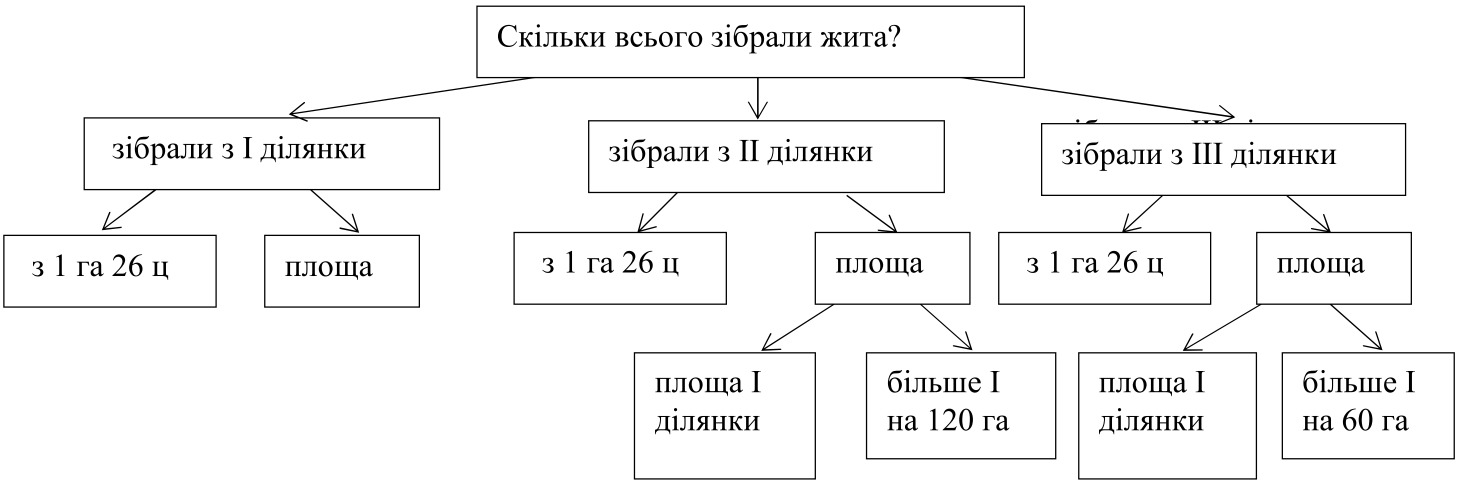
II. Пошук розв’язку – висування плану розв’язування задачі.

Аналіз задачі можна записати у вигляді таблиці або змістовною схемою пошуку розв’язку задачі.

1 спосіб – таблиця.

Щоб дізнатися	Треба визначити
1) скільки центнерів жита зібрали	1) яка площа кожної ділянки і скільки центнерів зібрали з 1 га кожної ділянки (відомо)
2) яка площа першої ділянки	2) яка площа другої ділянки і на скільки I ділянка менша за II (відомо на 120 га)
3) яка площа третьої ділянки	3) яка площа другої ділянки і на скільки III ділянка менша за II (відомо на 60 га)

2 спосіб – схема.



З аналізу отримують план розв’язання (залежить від арифметичного або алгебраїчного способу розв’язання).

Особливості *арифметичного способу.*

Форми запису можуть бути:

1) запитання з наступною дією;

2) дія з наступним поясненням;
3) запис розв’язання з попереднім поясненням;
4) числове розв’язання без будь-якого тексту.

При розв’язуванні задач *алгебраїчним способом* використовується евристична схема пошуку рівняння до задачі. Для нескладних задач вона має такий вигляд:

1) вибрати невідому і позначити її – x;
2) виразити через x інші величини, про які йдеться в задачі;
3) спираючись на залежність між відомими і невідомими величинами, скласти рівняння.

Аналіз даної задачі приводить до висновку, що задачу можна розв’язувати арифметичним способом. Спочатку знайдемо площу кожної ділянки, а потім знайдемо скільки центнерів жита зібрали з трьох ділянок разом.

III. Процес розв’язання – реалізація плану розв’язування.

Користуючись схемами аналізу задачі, знайдемо площу першої ділянки.

1) (360 – (120 + 60)) : 3 = 60 (га) – площа I ділянки.
2) 60 + 120 = 180 (га) – площа II ділянки.
3) 60 + 60 = 120 (га) – площа III ділянки.
4) $60 \cdot 26 + 180 \cdot 24 + 120 \cdot 22 = 60 \cdot (26 + 72 + 44) = 60 \cdot 142 = 8520$ (ц) – жита зібрали з трьох ділянок разом.

IV. Перевірка розв’язку.

Особливу увагу слід приділити перевірці розв’язання задачі.

Види перевірки:

1) розв’язання задачі іншим способом;
2) встановлення факту, чи задовольняє отримана відповідь умові задачі за змістом.

У даній задачі іншим способом розв’язання може бути комбінований метод, який поєднує алгебраїчний спосіб розв’язання і арифметичний. В алгебраїчному способі можна вибирати різні невідомі величини і складати відповідні рівняння.

Вся площа	I ділянка	II ділянка	III ділянка	Рівняння
360 га	x $y - 60$ $z - 120$	$x + 120$ $y + 60$ z	$x + 60$ y $z - 60$	$x + x + 120 + x + 60 = 360$ $y - 60 + y + 60 + y = 360$ $z - 120 + z + z - 60 = 360$

Отримання декількох розв’язань однієї задачі дозволяє вказати найбільш раціональний спосіб.

Останній етап – осмислення відповіді і повний її запис.

Відповідь: 8520 центнерів жита зібрали.

11. Логіко-математичний аналіз змісту навчального матеріалу. Логіко-математичний аналіз теми:

«НАЗВА ТЕМИ»

за підручником: «Назва підручника, клас, автори»

Витяг з програми

Таблиця 1

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу.

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові			
Базові			

Таблиця 2

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристична властивість

Таблиця 3

Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ / Поняття	Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості	Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння текстового значення

Структурно-логічна модель, яка охоплює основні поняття теми (Схематичне представлення понять теми, опорний конспект)

Таблиця 4

Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження

Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	
2. Встановлення виду твердження	
3. Виділення роз'яснювальної частини	
4. Виділення умови	
5. Виділення вимоги	
6. Формулювання твердження рівносильного даному	

Таблиця 5.

Аналіз форми, виду, способу доведення математичного факту

Форма доведення	Дедуктивний, індуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме, непряме доведення
Метод доведення	Аналітико-синтетичний метод, метод від супротивного, ММІ
Специфічний метод доведення	Алгебраїчний, векторний, координатний,
Основна ідея доведення	
Етапи доведення	

Таблиця 6

Факти, сформульовані в задачах

Номер задачі, сторінка підручника	**Факт**

Структурно-логічна модель, яка охоплює основні факти теми

Схематичне представлення фактів теми (опорний конспект)

Таблиця **7**

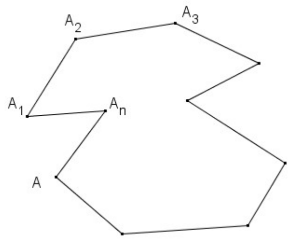
Логіко –математичний аналіз системи вправ підручника призначених для формування способу діяльності

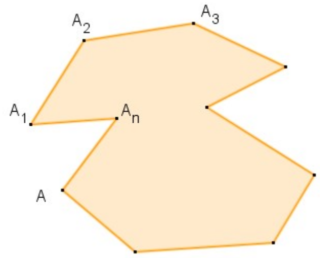
Основні способи діяльності	**Відпрацювання операцій, які формують способи діяльності**	**Відпрацювання операцій, які входять у спосіб діяльності**	**Застосування способу діяльності**

Фрагменти логіко - математичного аналізу теми: «Многокутники. Площа многокутників» за підручником «Геометрія» 8 клас авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір

Таблиця 2

Логіко - математичний аналіз формулювання означень нових понять теми:

<table>
<tr><th>Поняття</th><th>Формулювання означення</th><th>Види означень, характеристичні властивості</th></tr>
<tr><td>Многокутник</td><td>Розглянемо фігуру яка складається з точок A_1, A_2, … An і відрізків таких, що жодні два сусідні відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідні відрізки не мають спільних точок


Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на


Цю частину площини разом з відрізками , що її обмежують, називають многокутником.</td><td>Конструктивний вид
Хар-ні властивості
1) n точок, n відрізків
2) Два сусідні відрізки не лежать на одній прямій
3) Два несусідні відрізки не мають спільних точок
4) Фігура обмежує частину площини</td></tr>
</table>

Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження

Таблиця 4

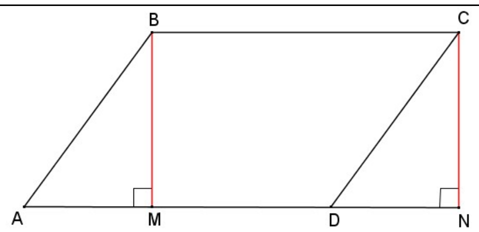
Теорема про суму кутів опуклого n-кутника

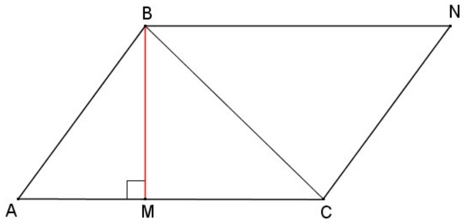
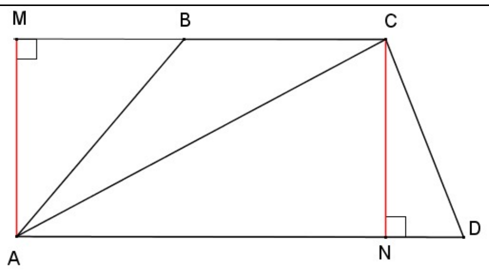
Етапи проведення аналізу	Результати
1. Формулювання твердження	Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$
2. Встановлення виду твердження	Просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	n-кутник
4. Виділення умови	Многокутник є опуклим n-кутником
5. Виділення вимоги	Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо многокутник є опуклим n-кутником, то сума його кутів дорівнює $180°(n-2)$

Аналіз форми, виду, способу доведення математичного факту

Таблиця 5

Теорема про площу паралелограма

1. Форма доведення	Дедуктивна
2. Види доведення	Пряме
3. Метод доведення	Аналітичний
4. Спеціальний математичний метод доведення	
5. Основна ідея доведення	Використовуючи теорему про площу прямокутника випливає площа паралелограма
6. Етапи доведення	1) Проведемо дві висоти паралелограма BM і CN 2) Покажемо, що прямокутник MBCN рівновеликий паралелограму 3) Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника ABM і трапеції MBCD 4) Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника DCN і трапеції MBCD 5) Доводимо, що трикутники ABM і DCN рівні за гіпотенузою і гострим кутом, а отже вони рівновеликі. 6) Отримали, що паралелограм ABCD і прямокутник MBCN рівновеликі 7) Тоді площа прямокутника S=BM· BC буде площею паралелограма 8)
Представлення математичних фактів теми	
Площа паралелограма	
	$S_{ABCD} = BM \cdot BC$

Площа трикутника	
 	$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM$
Площа трапеції	
 	$S = S_{ABC} + S_{ACD} =$ =½BC AM+½AD CN= =½BC CN+½AD CN= =½(BC+AD)CN

12. Урок математики. Методи навчання математики. Поєднання методів навчання. Специфічні методи навчання. Загальна характеристика засобів навчання математики.

Урок – це цілісний, логічно завершений, обмежений рамками часу відрізок навчального процесу, в якому проводиться робота з постійною кількістю учнів майже одного віку й рівня підготовки.

Ознаки уроку:

- наявність триєдиної мети;
- відбір конкретного навчального матеріалу й рівнів його засвоєння;
- досягнення поставленої мети шляхом підбору засобів і методів навчання;
- організація відповідної навчальної діяльності учня.

Вимоги до сучасного уроку.

Загально педагогічні	**Психологічні**
1. Врахування вікових та індивідуальних особливостей учнів. 2. Створення емоційно-актуального фону уроку. 3. Педагогічний такт і культура мови. 4. Пізнавальна самостійність учнів. 5. Чітке визначення освітніх, виховних і розвиваючих завдань уроку.	1. Врахування психологічних особливостей кожного учня. 2. Нормальний психічний стан і стійкий настрій учителя й учнів. 3. Розумна вимогливість і доброзичливість учителя до учнів. 4. Педагогічна етика і психологічний такт.
Гігієнічні	**Дидактичні**
1. Температурний режим. 2. Норми освітлення. 3. Провітрювання.	1 Раціональне використання кожної хвилини уроку. 2 Раціональність єдності словесних,

4. Відповідність нормативам шкільних меблів. 5. Чергування видів навчальної роботи й різноманітність методів навчання.	наукових і практичних методів навчання. 3 Розвиток пізнавальних інтересів і активності учнів. 4 Зв'язок із раніше вивченим. 5 Формування вмінь учнів самостійно здобувати знання і застосовувати їх на практиці. 6 Індивідуалізація, диференціація та інтенсифікація навчального процесу. 7 Організація закінчення уроку.

Розглянемо більш детально особливості кожного етапу уроку.

Початок уроку. Початок уроку, як правило, пов'язаний з розв'язанням наступних питань:

- організаційних;
- змістовних;
- етичних.

Так, до організаційних питань відносять: взаємне привітання, перевірку стану кабінету, учбового обладнання, робочих місць, з'ясування відсутніх. Процес постановки й розв'язання змістовних питань на початку уроку може здійснюватися декількома способами. З цією метою на початку уроку використовуються: усна лічба, математичні диктанти, ігрові завдання, завдання на пошук закономірностей, на знаходження раціональних способів розв'язання задач.

Успіху уроку сприяє також вирішення **етичних** питань, які залежать від емоційного настрою вчителя та учнів, зовнішнього вигляду вчителя, ділового настрою, поважного відношення з боку вчителя до учнів.

Уміння розв'язувати всі, поставлені вище питання, на початку уроку сприяють поглибленню співробітництва між учителем та учнями.

Вивчення нового матеріалу. Вибір методів та форм уведення нового матеріалу здебільшого залежить від вікових особливостей учнів, рівня підготовленості класу, рівня складності матеріалу, який вивчатиметься на уроці і таке інше. А тому, нагадаємо, що способи вивчення нового можуть бути як конкретно-індуктивні так і абстрактно-дедуктивні, як проблемно-пошукові так і репродуктивні, як з ведучою діяльністю учнів так і вчителя. Вибір методів і способів вивчення нового матеріалу здійснюється вчителем і кожного разу залежить від об'єктивних умов.

Активне сприйняття нового матеріалу буває тоді, коли учень стежить за думкою вчителя, сам робить висновки, працює з великою увагою й інтересом. Активне сприймання забезпечує глибокі й усвідомлені знання. Вчитель має застосовувати такі методи, які розвивають активну пізнавальну діяльність учнів і їх самостійне творче мислення, метод проблемного навчання. Проблемний підхід до формування нових знань доцільний під час введення математичних понять, вивчення нових математичних тверджень, розв’язування задач.

Закріплення вивченого. При закріпленні вивченого забезпечується засвоєння учнями учбового матеріалу на рівні, який відповідає програмним вимогам. У процесі роботи над закріпленням вивченого особливу увагу слід приділяти організації особистої діяльності учнів у формі, при якій, вчитель зможе проконтролювати її хід і результати.

У теорії й практиці навчання найбільш активно використовуються на етапі закріплення вивченого самостійні роботи.

Існують різні підходи до класифікації самостійних робіт:

- за дидактичною метою;
- за рівнем самостійності учнів;
- за степенню індивідуалізації;
- за джерелом й методом придбання знань;
- за формою виконання;
- за місцем виконання.

Розглянемо види самостійних робіт у кожній класифікації.

Так, за дидактичним призначенням самостійні роботи поділяються на навчальні та контролюючі.

За степеню самостійності учнів виділяють:

1. самостійні роботи за зразком;
2. реконструктивно-варіантні, вони відрізняються від робіт за зразком тим, що при їх виконанні необхідно перетворити вихідні данні;
3. частково-пошукові (евристичні) самостійні роботи;
4. дослідницькі (творчі) самостійні роботи.

Класифікація за степеню індивідуалізації включає загально класні, групові і індивідуальні самостійні роботи. Різноманітні види самостійних робіт містить класифікація за джерелом й методом придбання знань. Перерахуємо деякі з них:

- робота з книгою;
- розв’язання й складання задач;
- лабораторні й практичні роботи.

За формою виконання розрізняють усні й письмові самостійні роботи, а за місцем виконання – класні й домашні.

Контроль знань і вмінь. У контролюючій частині встановлюється зворотній зв'язок у системі "учитель-учень", який дозволяє регулярно отримувати інформацію, для визначення якості засвоєння учнями учбового матеріалу.

Існують три типи контролю:

- зовнішній контроль вчителя за діяльністю учнів;
- взаємний контроль учнів;
- самоконтроль.

Завдання додому і кінець уроку. Домашня навчальна робота є важливою з точки зору формування в учнів навичок самоосвіти й виховання відповідальності за результати своєї праці.

Види домашніх завдань:

- усні й письмові;
- пов'язані з пропедевтикою, засвоєнням, узагальненням і систематизацією знань і вмінь;
- репродуктивні, конструктивні і творчі;
- обов'язкові і за бажанням;
- загальні, диференційовані і індивідуальні;
- регламентовані і без установленого вчителем строку виконання;
- комбіновані і таке інше.

Мотивуюча й мобілізуюча роль домашніх завдань суттєво послаблюється, якщо вчитель не відпрацює систему її перевірки й оцінки.

Форми перевірки домашніх завдань можуть бути самими різноманітними:

1. Фронтальна перевірка домашніх завдань.
2. Виконання класом навчальної самостійної роботи.
3. Ущільнене опитування.
4. Позаурочна перевірка вчителем зошитів із домашніми завданнями.
5. Взаємний контроль виконання домашніх завдань.
6. Самоперевірка домашніх завдань.
7. Опосередкований контроль виконання домашніх завдань.

Постановка домашнього завдання можлива на різних етапах уроку. Вона передбачається і на початку уроку, і перед закріпленням вивченого, і в кінці уроку. Останнє означає, що кінець уроку можу бути пов'язаний з постановкою домашнього завдання і не тільки з нею. Крім того, корисно урізноманітнювати способи закінчення уроку:

- шляхом підведення підсумків;
- ознайомлення учнів з узагальнюючими висновками;

- застосування історичних відомостей;
- виконання ігрових вправ, розв’язання кросвордів, ребусів і т.п.

Важливий структурний елемент уроку – перевірка домашніх завдань. Ставляться до цього неоднозначно, зважаючи на тип уроку, його мету і особливо на прийоми перевірки, щоб вона разом із контролюючою функцією виконувала ще й навчальну.

На уроці закріплення матеріалу, де перевіряються знання, уміння і навички, що формуються, можна викликати до дошки кількох учнів для розв’язання і пояснення вправ з домашньої роботи. Можна організувати серед учнів взаємоперевірку, запропонувавши звірити свої результати із заздалегідь записаними на дошці.

Коли на уроці передбачається вдосконалення вмінь і навичок, корисно перевірити домашнє завдання за допомогою диференційованої самостійної роботи з аналогічними вправами.

Методика навчання алгебри

13. Методика формування основних знань, умінь та навичок в темі «Натуральні числа» в курсі 5-го класу.

Основні уміння:

a) Читати і записувати натуральні числа;
b) Порівнювати натуральні числа;
c) Додавати, віднімати, множити і ділити натуральні числа за правилами;
d) Формулювати властивості арифметичних дій та використовувати їх для раціонального обчислення.

Формування умінь:

a) У формуванні умінь читати та записувати багатоцифрові числа значне місце відіграє використання таблиці розрядних одиниць і одиниць класів.

Клас мільярдів			Клас мільйонів			Клас тисяч			Клас одиниць		
Сотні мільярдів	Десятки мільярдів	Одиниці мільярдів	Сотні мільйонів	Десятки мільйонів	Одиниці мільйонів	Сотні тисяч	Десятки тисяч	Одиниці тисяч	Сотні	Десятки	Одиниці

Формування уміння читати багатоцифрові натуральні числа полегшує використання правила:

1) Запис числа розбивають на три цифри справа наліво 17 025 543 607 ці групи називаються класами;
2) Число кожного класу читають як трицифрове, двоцифрове, одноцифрове, додаючи при цьому назву класу;
3) Назву класу одиниць, а також класу, усі три цифри якого – нулі, не промовляють.

Слід зауважити, що: у системі вправ досить обмежитись першими чотирма класами; повторенню і розширенню десяткової нумерації сприяють вправи, що стосуються метричної системи мір.

b) У порівнянні натуральних чисел розрізняють:

- Порівняння невеликих чисел (в межах сотні) 20 > 17, 25 < 45;
- Порівняння багатоцифрових чисел з різною кількістю цифр (чим більше цифр у записі числа тим більше число) 72 925 > 7 320;
- Порівняння багатоцифрових чисел з однаковою кількістю цифр.

Для порівняння двох багатоцифрових чисел з однаковою кількістю цифр користуються **правилом:**

з двох натуральних чисел з однаковою кількістю цифр (розрядів) більше те, в якого більша перша (рухаючись зліва направо) з неоднакових цифр

$72\underline{5}6 > 72\underline{4}9$; $582\underline{6}47 < 582\underline{8}79$

Корисно в цій темі показати важливу властивість координатного променя: на координатному промені більше число розташоване правіше, а менше – лівіше.

c) Дії над натуральними числами.

Додавання:

- Обґрунтовують правило додавання багатоцифрових чисел, спираючись на запис чисел у вигляді суми розрядних одиниць.

2352 = 2тис. + 3сот. + 5дес. + 2од.
6243 = 6тис. + 2сот. + 4дес. + 3од.
переставляючи доданки і сполучаючи їх у групи дістаємо:
(2од. + 3од.) + (5дес. + 4дес.) + (3сот. + 2сот.) + (2тис. + 6тис.) =
=5од. + 9дес. + 5сот. + 8тис. = 8тис. + 5сот. + 9дес. + 5од.= 8595

з такого обгрунтування випливає зручний спосіб додавання багатоцифрових чисел у стовпчик:

$$\begin{array}{r} 2352 \\ +\ \underline{6243} \\ 8595 \end{array}$$

• Учні повинні усвідомити, що дією додавання розв`язуються дві різні за змістом задачі:

в одній – дане число збільшують на кілька одиниць;
в іншій – знаходять суму двох доданків;

• Спеціального розгляду потребує питання про зміну суми залежно від зміни доданків, що є елементом пропедевтики вивчення поняття функції у 7 класі.
• Слід повторити правила додавання натурального числа до 0, тобто $a + 0 = a$, $0 + a = a$, $0 + 0 = 0$.
• Слід звернути увагу, учнів на неоднозначність вживання терміна «сума» – як результат додавання і як вираз, що складається з кількох чисел.

Віднімання:

• Означається в шкільних підручниках як дія, обернена додаванню:

відняти від числа a число *в* означає знайти таке число x, яке в сумі з числом *в* дає a, позначається $\text{в} + x = a$;
• Важливо вдосконалити навички віднімання багатозначних натуральних чисел;
• Необхідно показати учням два способи перевірки дії віднімання: перший – додаванням від`ємника і різниці, другий – відніманням, знаходячи від`ємник за зменшуваним і різницею.
• Обгрунтування рівностей $a – a = 0$, $a – 0 = a$ здійснюється за означенням дії віднімання.

Множення:

• Означення: помножити число a на число *в* означає знайти суму *в* доданків, кожний з яких дорівнює a.
доречно ввести конкретно-індуктивним способом після розв`язування учнями певної кількості прикладів;

• Множення одиниці на натуральне число $a\cdot$ і нуля на число $a\cdot$ обгрунтовують, виходячи з означення дії множення;
• Під час розв`язування вправ на множення багатоцифрових натуральних чисел стовпчиком слід пояснити чому при множенні на десятки результат множення зсувається на одне місце вліво і на основі якого закону відбувається множення на одиниці, а потім на десятки;
• Необхідно простежити, щоб учні раціонально записували в стовпчик множення чисел з нулями.

$$\begin{array}{r} 327 \\ \times\ \ 35 \\ \hline 1635 \\ +981\ \ \\ \hline 11445 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \ \ \ 3500 \\ \times 4030 \\ \hline \ \ \ 105 \\ 140 \\ \hline 14105000 \end{array}$$

<u>Ділення:</u>

- Дія ділення означається аналогічно дії віднімання як дія, обернена множенню:

поділити число *а* на число *в* означає знайти таке число *х*, при множенні якого на число *в* дістанемо число *а*.

- З рівності $0 \cdot a = 0$ випливає рівність $0 : a = 0$;

- Вводиться правило: «Ділити на нуль неможна»;
- Особливу увагу треба звернути на випадки ділення з нулями в частці.

d) Властивості дій над числами.

- Властивості додавання подають у вигляді буквених виразів:

а + в = в + а – переставна властивість,

(а + в) + с = а + (в + с) – сполучна властивість;

- Використовують властивості для зручного обчислення:

(42 + 37) + 58 = (37 + 42) + 58 = 37 + (42 + 58) = 37 + 100 = 137;

- Властивості множення:

а·в = в·а – переставна властивість множення,

(а·в)·с = а·(в·с) – сполучна властивість множення,

а·(в + с) = а·в + а·с – розподільна властивість множення відносно додавання,

а·(в – с) = а·в – а·с – розподільна властивість множення відносно віднімання;

- Закріплення властивостей відбувається на прикладах типу: обчисліть зручним способом:

$$25\cdot 867\cdot 4$$
$$329\cdot 754 + 329\cdot 246$$
$$65\cdot 246 - 65\cdot 229 - 65\cdot 17$$

14. Методика вивчення розділу «Подільність чисел» в курсі математики 6-го класу

Основні поняття теми: дільник, кратне, прості числа, складені числа, спільний дільник, спільне кратне, найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне.

Факти: ознаки подільності на 5,10, 2, 3, 9.

Способи діяльності: алгоритми розкладання числа на прості множники, знаходження НСД і НСК.

Розглянемо зміст основних понять, фактів і способів діяльності, які вивчаються в цій темі.

Прості і складені числа.

Якщо натуральне число m ділиться на натуральне число n, то m називається кратним числу n, а n, у свою чергу – дільником числа m.

Якщо m кратне числу n, то існує таке натуральне число k, що $m = n \cdot k$, де m – ділене, n – дільник, k – частка.

Якщо не існує такого числа k, що $k \cdot n = m$, то говорять, що m не ділиться націло на число n, тобто розглядають ділення з остачею, при якому $m = p \cdot n + r$, де m – ділене, n – дільник, p – неповна частка, r – остача.

Наприклад: $21 = 3 \cdot 7$, де 21 – ділене, 7 – дільник, 3 – частка;
$22 = 3 \cdot 7 + 1$, де 22 – ділене, 7 – дільник, 3 – неповна частка, 1 – остача.

Натуральне число p називається простим, якщо в нього тільки два дільники – 1 і саме число p.

Простих чисел нескінченно багато. Найменше просте число – 2.

Якщо число має більше двох дільників, воно називається складеним.

Число 1 не відноситься ні до простих, ні до складених чисел.

Ознаки подільності числа m.

на 2 - остання цифра числа m ділиться на 2;
на 5 - остання цифра числа m – 0 або 5;
на 10^k – число m закінчується на k нулів;
на 4 – число, виражене двома останніми цифрами даного числа m,
на 8 – число, виражене трьома останніми цифрами даного числа m;
на 3 - сума цифр числа m ділиться на 3;
на 9 - сума цифр числа m ділиться на 9;
на 11 - різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях числа m (рахуючи справа наліво), і сумою цифр, що стоять на парних місцях

Будь-яке складене натуральне число можна розкласти на прості множними і до того ж єдиним способом.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Алгоритм знаходження НСД двох натуральних чисел	
1) розкласти дані числа на прості множники; 2) скласти добуток зі спільних простих множників, взятих із найменшим показником степеня; 3) знайти значення одержаного добутку.	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$ $34 = 2 \cdot 17$ НСД (18; 34) = 2. $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$ $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3$ НСД $(72; 96) = 2^3 \cdot 3 = 24$.
Якщо НСД двох чисел a і b дорівнює 1, то такі числа називають взаємно простими.	

<table>
<tr><th colspan="2">Алгоритм знаходження НСК двох натуральних чисел</th></tr>
<tr><td>1) розкласти дані числа на прості множники;
2) скласти добуток з усіх одержаних простих множників, взявши кожний із них із найбільшим показником степеня;
3) знайти значення одержаного добутку.</td><td>$28 = 7 \cdot 2^2$
$63 = 7 \cdot 3^2$
НСК $(28; 63) = 7 \cdot 2^2 \cdot 3^2 =$
$= 7 \cdot 4 \cdot 9 = 252$</td></tr>
<tr><td colspan="2">НСД $(a; b)$ · НСК $(a; b) = a \cdot b$, з цього слідує, що НСК двох взаємно простих чисел дорівнює добутку цих чисел.</td></tr>
</table>

15. Методика вивчення десяткових і звичайних дробів (5 клас). Методика вивчення раціональних чисел (6 клас).

Звичайні дроби

У 5-му класі дріб трактується як частина цілого.

У 6-му – як частина від ділення двох натуральних чисел.

- Важливо розглянути зображення дробів на координатному промені.
- На координатному промені ефективно ілюструється основна властивість дробу і порівняння дробів;
- додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками виконується за **правилами**:

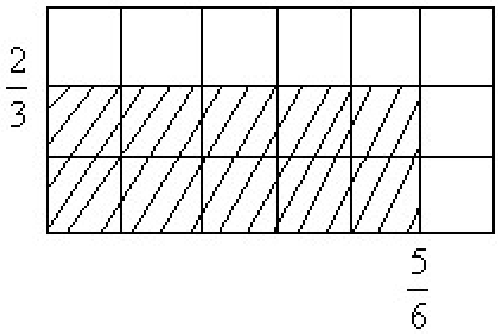
  1) Щоб додати два дроби з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.

  2) Щоб відняти два дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.
- на завершальному етапі варто виконати узагальнення і вжити записи:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, $\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ $\quad a>c,\ a=c,\ b \neq 0.$

- В 6-му класі після вивчення теми: "Подільність чисел" учням пропонують розглянути правила додавання та віднімання дробів з різними знаменниками;
- свідомість і міцність навичок виконання додавання і віднімання дробів з різними знаменниками значною мірою залежить від сформованості умінь зводити дроби до спільного знаменника;
- доцільно на першому етапі розв’язування вправ вимагати докладних пояснень і розгорнутих записів.
- при вивченні дій над звичайними дробами головна мета набуття умінь та навичок виконувати дії над дробовими числами, а тому система вправ повинна містити вправи такого характеру: віднімання правильного дробу від одиниці, від цілого числа, потім – віднімання дробового числа, що містить цілу і дробову частини, від цілого числа і, нарешті – найскладніший для учнів випадок, коли дробова частина від’ємника більша за дробову частину зменшуваного.
- Існують два підходи щодо введення дії множення на дріб.

1-й підхід: правило множення на дріб пов'язується із задачею знаходження дробу від числа, а ділення на дріб тлумачиться як знаходження числа за даним його дробом.
2-й підхід: виклад починається із введення загального правила множення дробу на дріб, а множення дробу на натуральне число і натуральне число на дріб розглядається як окремі випадки, якщо натуральне число подати у вигляді дробу із знаменником 1. Дія ділення на дріб зводиться до множення на обернений дріб; обґрунтування правила здійснюється шляхом розгляду задачі про площу прямокутника; задачі про знаходження дробу числа і числа за його дробом вводяться пізніше, ніж задачі на застосування дій множення і ділення на дріб.



- вчитель має розуміти принципову відмінність між поняттями "дріб" і "дробове число".
- у школі прийнята "історична" схема розвитку числа

$\mathbf{N} \subset \mathbf{N_0} \subset \mathbf{Q^+} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

5 клас

<table>
<tr><td colspan="3">Додавання дробів з однаковими знаменниками</td></tr>
<tr><td>$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$</td><td>Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники і суму записати у чисельник, а знаменник залишити без змін.</td><td>$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Віднімання дробів з однаковими знаменниками</td></tr>
<tr><td>$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$</td><td>Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від’ємника й різницю записати в чисельник, а знаменник залишити без змін.</td><td>$\frac{17}{23}-\frac{3}{23}=\frac{17-3}{23}=$
$=\frac{14}{23}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Додавання і віднімання мішаних дробів</td></tr>
<tr><td colspan="2">Щоб додати (відняти) мішані дроби з однаковими знаменниками треба додати (відняти) їх цілі і дробові частини окремо, результат спростити.</td><td>$2\frac{3}{7}+1\frac{1}{7}=3\,\frac{3+1}{7}=3\frac{4}{7}$;</td></tr>
</table>

6 клас

Основна властивість дробу		
$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c};\ \frac{a\cdot d}{b\cdot d}=\frac{a}{b}$	Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, дістанемо дріб, що дорівнює даному.	$\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{2}{6}$ $\frac{14}{21}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{2}{3}$

Алгоритм зведення дробів до найменшого спільного знаменника	
1) знайти найменше спільне кратне знаменників; 2) знайти додаткові множники для кожного дробу; 3) чисельник і знаменник кожного дробу помножити на відповідні додаткові множники.	$\frac{11}{36}$ і $\frac{13}{60}$ НСК (36;60) = 180, 180 : 36 = 5, 180 : 60 = 3 $\frac{11}{36}=\frac{11\cdot 5}{36\cdot 5}=\frac{55}{180},\quad \frac{13}{60}=\frac{13\cdot 3}{60\cdot 3}=\frac{39}{180}.$

Множення звичайних дробів		
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	Добутком звичайних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників цих дробів, а знаменник дорівнює добутку їхніх знаменників.	$\frac{7}{13}\cdot\frac{5}{9}=\frac{35}{117}$ $\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{3}=\frac{5\cdot\cancel{8}^4}{\cancel{6}^3\cdot 3}=\frac{20}{9}$

Ділення звичайних дробів		
$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	Щоб поділити один дріб на інший, необхідно ділене помножити на число, обернене дільнику.	$\frac{7}{9}:\frac{14}{27}=\frac{7}{9}\cdot\frac{27}{14}=\frac{\cancel{7}^1\cdot\cancel{27}^3}{\cancel{9}^1\cdot\cancel{14}^2}=\frac{3}{2}$

Десяткові дроби

Основна мета вивчення десяткових дробів у 5 класі – сформувати вміння читати, записувати, порівнювати й округлювати десяткові дроби, виконувати чотири арифметичні дії над ними.

Відомі два підходи введення десяткового дробу.

Перший підхід. Десятковий дріб тлумачився як окремий випадок звичайного дробу.

Другий підхід. Спирався на позиційний принцип десяткової нумерації й ідею поширення вправо від одиниці основної властивості розрядних одиниць десяткової системи числення.

(одиниця кожного розряду в десять разів менша за одиницю розряду, що стоїть зліва і в десять разів більша за одиницю розряду, що стоїть справа).

Отже, десяткові дроби записуються за тим самим позиційним принципом десяткової нумерації, що і натуральні числа.

Правило читання десяткових дробів.

1) прочитати цілу частину дробу як натуральне число і додати слово "цілих";

2) прочитати дробову частину як натуральне число, не звертаючи уваги на нулі на початку дробової частини, і додати назву останнього розряду дробової частини.

Правила дій над десятковими дробами також зручно пояснювати, використовуючи співвідношення між одиницями метричної системи мір. Потім треба розглянути додавання десяткових дробів з різною кількістю десяткових знаків, додавання десяткового дробу і натурального числа.

Аналогічно можна пояснити і віднімання десяткових дробів.

Правило множення десяткових дробів зручно ілюструвати на прикладі знаходження площі прямокутника.

Ділення десяткових дробів можна виконувати двома способами: перший – замінювати і ділене і дільник натуральними числами; другий – замінювати тільки дільник натуральним числом.

<table>
<tr><th colspan="2">Звичайні дроби із знаменником 10 або чисельником кратним десяти (десяткові дроби)</th></tr>
<tr><td>Якщо дріб має знаменник виду 10, 100, 1000 тощо, його можна записати у вигляді десяткового дробу таким чином: записують цілу частину (якщо дріб звичайний, на місці цілої частини записують 0), ставлять кому, а потім записують чисельник дробу, кількість цифр після коми має дорівнювати кількості нулів у знаменнику.</td><td>$2\frac{3}{10} = 2,3;\ 7\frac{5}{1000} = 7,005$
$15\frac{23}{100} = 15,23;\ \frac{17}{100} = 0,17$
$\frac{137}{10000} = 0,0137$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Алгоритм додавання (віднімання) десяткових дробів</th></tr>
<tr><td>1) зрівняти в дробах кількість знаків після коми;
2) записати дроби один під одним так, щоб кому було записано під комою;
3) виконати додавання (віднімання), не звертаючи уваги на кому;
4) у відповіді поставити кому під комами даних чисел.</td><td>а) $13,72 + 23,318 = 13,720 + +24,318 = 38,038$
$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}13,720\\ \underline{24,318}\end{array}\\ 38,038\end{array}$
б) $8,3 - 4,678 = 8,300 - 4,678 = 3,622$</td></tr>
</table>

	$\begin{array}{r} -\,8{,}300 \\ 4{,}678 \\ \hline 3{,}622 \end{array}$

Для додавання, віднімання десяткових дробів мають місце ті ж властивості дій, що і для дій з натуральними числами.

Наприклад:

а) $(4{,}12+0{,}116)-1{,}12=(0{,}116+4{,}12)-1{,}12=$

$=0{,}116+(4{,}12-1{,}12)=0{,}116+3=3{,}116;$

б) $0{,}844-(0{,}244+0{,}018)=0{,}844+(-0{,}244)+(-0{,}018)=$

$=\big(0{,}844+(-0{,}244)\big)-0{,}018=(0{,}844-0{,}244)-0{,}018=$

$=0{,}600-0{,}018=0{,}582.$

Алгоритм множення двох десяткових дробів

1) виконати множення цих чисел як натуральних, незважаючи на коми; 2) у добутку відокремити справа комою стільки десяткових знаків, скільки їх мають обидва множники разом. Примітка: якщо в добутку менше цифр, ніж треба відокремити комою, то спереду дописують потрібну кількість нулів.	а) $\begin{array}{r} *\;3.46 \\ 0.14 \\ \hline 1384 \\ +\;346 \\ \hline 0.4844 \end{array}$

Правила ділення числа на десятковий дріб

$29{,}88:8{,}3=298{,}8:83=3{,}6$	Щоб поділити число на десятковий дріб, потрібно в діленому і дільнику перенести кому вправо на стільки десяткових знаків, скільки їх є в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

Правила ділення десяткового дробу на натуральне число

$\begin{array}{r\|l} -\;118{,}03 & 29 \\ 116 & \hline 4{,}07 \\ \hline 203 & \\ -\,203 & \\ \hline 0 & \end{array}$	Ділення десяткового дробу на натуральне число виконується як ділення натуральних чисел, але після закінчення ділення цілої частини числа треба в частці поставити кому.

Раціональні числа. 6 клас

Правила дій із числами з різними знаками		
$(-m)+(-n)=$ $=-(m+n)$	Щоб додати два від'ємних числа, треба додати їхні модулі й поставити перед одержаним числом знак «–».	$-12{,}1+(-5{,}6)=$ $=-(12{,}1+5{,}6)=$ $=-17{,}7$
$(-m)+n=-(m-n)$, якщо $m>n$. $(-m)+n=n-m$, якщо $m<n$. $(-m)+n=0$, якщо $m=n$.	Щоб додати два числа з різними знаками, треба від більшого модуля відняти менший і поставити перед одержаним числом знак того доданка, модуль якого більший.	$-13{,}1+7=$ $=-(13{,}1-7)=-6{,}1;$ $(-7)+10=10-7=3;$ $(-3{,}2)+3{,}2=0$
$(-m)\cdot n=-m\cdot n$	Щоб знайти добуток двох чисел із різними знаками, треба перемножити їхні модулі й поставити перед одержаним числом знак «–».	$(-7)\cdot 3{,}1=-21{,}7$
$(-m)\cdot(-n)=m\cdot n$	Щоб перемножити два від'ємних числа, треба перемножити їхні модулі	добуток двох від'ємних чисел є додатне число $(-5)\cdot(-2{,}5)=12{,}5$
Властивості дій із від'ємними числами		
$\pm m+0=\pm m$ $\pm m\cdot 0=0;$	$n-m=n+(-m)$ $-(-n)=n$ $a(-1)=(-1)\cdot a=-a$	$a(b-c)=ab-ac$ $\pm m\cdot 1=\pm m$

16. Методика вивчення дійсних чисел в шкільному курсі алгебри основної школи.

У попередніх класах учні вже вивчали різні множини чисел. Добре відомі натуральні числа (1, 2, 3, …) – N. Якщо до натуральних чисел приєднати число 0 і всі цілі від'ємні числа, то одержиться множина цілих чисел Z. Якщо до множини Z приєднати всі дробові числа, то одержиться множина раціональних чисел – Q. Тобто всі цілі числа і дробові, і 0, називаються раціональними числами, бо кожне число можна подати у вигляді частки m/n , де m $\in$ Z, n $\in$ N.

Далі на конкретних прикладах слід пояснити, що кожній звичайний дріб можна перетворити на десятковий. При цьому в одних випадках дістанемо скінчений десятковий дріб, а в інших – нескінчений, але обов'язково періодичний.

Зауваживши, що і скінчений десятковий дріб, і ціле число, можна зображувати у вигляді нескінченого періодичного дробу і з нулем в періоді.

2. На одиничному відрізку координатної прямої будується квадрат (рис. 16.1).

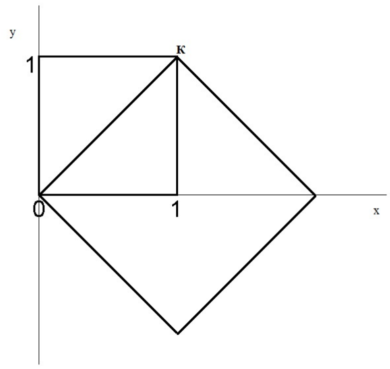


Рис. 16.1

Ставиться за мету визначити довжину його діагоналі *ОК*, а відповідне число зобразити точкою Р на координатній прямій.

Ставиться питання: «Яким чином виражається координати точки *K*?». Щоб з'ясувати це позначимо довжину *ОК* = *х* і побудуємо ще один квадрат, стороною якого є відрізок *ОК*. З рис. видно, що площа цього квадрата вдвічі більше за площу одиничного квадрата. Отже, $x^2 = 2$, оскільки площа одиничного квадрата дорівнює 1. Щоб визначити х треба розв'язати одержане квадратне рівняння.

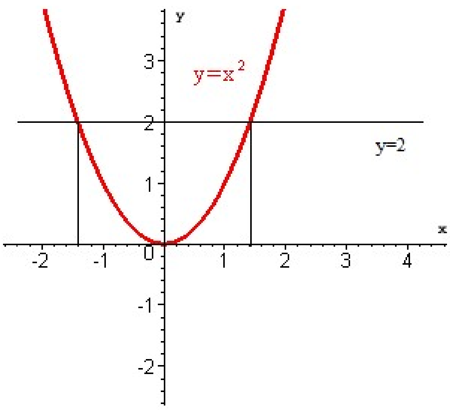
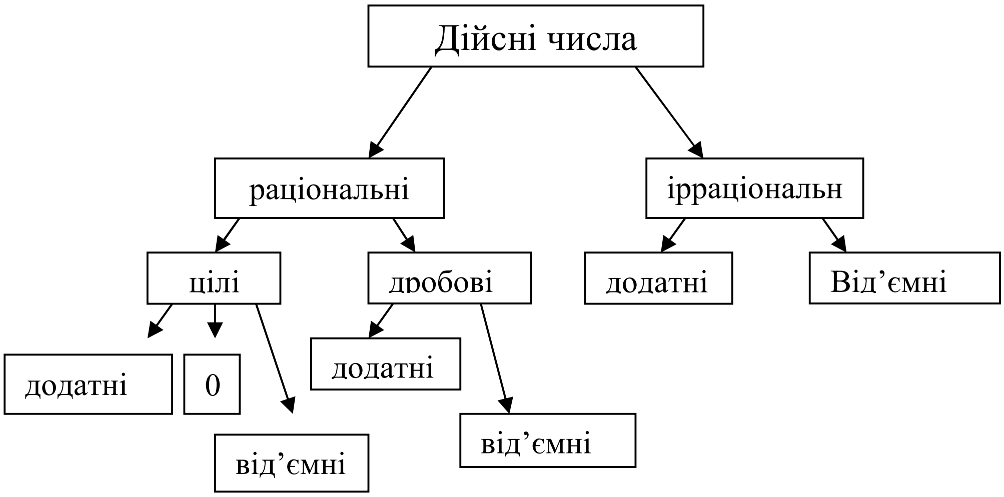


Рис. 16.2

З рисунку 16.2 видно, що існує два корені цього рівняння. Квадрат кожного з них дорівнює 2.

Кожне ірраціональне число можна записати у вигляді якогось нескінченого неперіодичного десяткового дробу і навпаки – кожен нескінчений періодичний десятковий дріб позначає якесь ірраціональне число. Якщо множину раціональних чисел доповнити множиною ірраціональних, то разом вони складають множину дійсних чисел.

Вводити дійсні числа можна за відомими дітям схемами: числа натуральні, 0 і протилежні натуральним разом утворюють множину цілих чисел, числа цілі і дробові становлять множину раціональних чисел, аналогічно, числа раціональні і ірраціональні становлять множину дійсних чисел.



Кожне дійсне число можна записати за допомогою нескінченого десяткового дробу (періодичного чи неперіодичного).

Наприклад, обчислюючи значення $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π, дістають нескінченні неперіодичні десяткові дроби:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots,\quad \sqrt{10} = 3{,}1622776\ldots,\quad \pi = 3{,}1415926\ldots .$$

Їх можна порівнювати за такими ж **правилами**, що й десяткові.

Два дійсних числа вважають рівними, якщо вони мають однакові модулі і знаки.

Якщо дійсні числа відрізняються або знаками, або модулями, то вони нерівні.

З двох дійсних додатних чисел більше те, в якого більша ціла частина, а якщо їх цілі частини однакові, в якого більше десятих і т. д.

З двох від'ємних дійсних чисел менше те, у якого модуль більший.

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для додавання і множення їх справедливі переставний, сполучений і розподільний закони.

Наприклад,

$$\sqrt{2}+\pi=\pi+\sqrt{2}, \quad (3+\pi)+\sqrt{5}=3+(\pi+\sqrt{5}),$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}, \quad (\sqrt{5}\cdot\sqrt{20})\cdot\sqrt{8}=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{20}\cdot\sqrt{8}),$$

$$\pi\cdot(1{,}020202\ldots+5{,}12345\ldots)=$$
$$=\pi\cdot 1{,}020202\ldots+\pi\cdot 5{,}12345\ldots.$$

17. Про поняття «вираз» в математиці і шкільному курсі математики. Тотожно рівні вирази, тотожність, тотожне перетворення. Методика вивчення раціональних виразів та їх перетворень в курсі алгебри 7-9 класів.

Вирази та їх види. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Культура тотожних перетворень.

У курсі математики 5-6 класу змістову лінію виразів та їх перетворень представлено буквеними виразами і обчисленням їх значень, введено поняття формули. Вивчаються найпростіші перетворення виразів: розкриття дужок, зведення подібних доданків.

В курсі алгебри 7-8 класів тотожні перетворення становлять значний обсяг програми. Так у 7 класі вводиться поняття степеня з натуральним показником, одночлена, многочлена, тобто цілих раціональних виразів. Вивчаються прямі і обернені тотожні перетворення цілих виразів: зведення одночленів і многочленів до стандартного вигляду, множення одночлена на одночлен, двох многочленів та обернене перетворення (розкладання многочлена на множники). Вивчаються формули скороченого множення та їх застосування.

У 8 класі вивчаються раціональні дроби, вводиться поняття дробу, основні його властивості, додавання, віднімання, множення і ділення дробів, тотожні перетворення дробово-раціональних виразів. У зв’язку з введенням поняття квадратного кореня вивчаються його тотожні перетворення (винесення множника з-під знака кореня та обернене перетворення).

Вивчення тотожних перетворень виразів на різних етапах навчання учнів має на меті оволодіння такими знаннями, вміннями і навичками:

- формування початкових уявлень про використання букв для запису виразів і властивостей дій над числами;
- удосконалення обчислювальних навичок;

- виконання тотожних перетворень різних видів виразів;
- удосконалення умінь і навичок тотожних перетворень виразів і застосування їх до розв'язування тригонометричних, показникових, логарифмічних, ірраціональних рівнянь і нерівностей.

Тотожні перетворення виразів пронизують увесь курс навчання математики середньої школи та становлять значний обсяг програми. Тому є дуже важливим з'ясувати на якому рівні викладено матеріал даної змістової лінії.

Згідно діючої програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів учні поступово ознайомлюються з лінією тотожних перетворень в курсі математики 5-6 класах і алгебри 7-9.

На пропедевтичному етапі формування понять про вирази та їх тотожні перетворення (5-6 класи) учні повинні мати уявлення про числові і буквені вирази, знати основні властивості арифметичних дій з натуральними й раціональними числами, уміти складати числові і буквені вирази та знаходити їх значення.

В 7 класі учні переходять до систематичного вивчення теми тотожних перетворень виразів: вводиться поняття цілого раціонального виразу, степеня з натуральним показником, одночлена і многочлена, тотожно рівних виразів, тотожності. На цьому етапі учні повинні навчитись зводити до стандартного вигляду одночлени і многочлени, виконувати тотожні перетворення цілих виразів та знати і вміти застосовувати формули скороченого множення. На вивчення цієї теми програмою передбачено 54 години навчального часу.

Поняття «вираз» в шкільному курсі математики не означається.

В ШКМ під виразом розуміють запис, який складається з чисел, букв, які поєднано знаками арифметичних дій і операцій.

Два **вирази називають тотожно-рівними**, якщо вони мають однакову область визначення і набувають однакових значень при всіх значеннях змінної з цієї області визначення.

Наприклад:

$\boldsymbol{x^2 - 4}$ ***і*** $\boldsymbol{(x-2)(x+2)}$ **—**тотожно-рівні вирази.

Тотожним перетворенням виразу називається заміна даного виразу іншим, тотожно-рівним йому.

Тотожністю на деякій множині називають рівність, яка виконується для будь-яких значень змінної на цій множині.

Основна мета навчання учнів тотожним перетворенням полягає у підготовці апарата для розв'язування рівнянь і нерівностей.

Існують чотири способи доведення тотожностей:

1 спосіб — ліву частину тотожності перетворюють до правої

2 спосіб — навпаки

3 спосіб — одночасно перетворюють ліву і праву частину

4 спосіб — доводять, що різниця лівої і правої частини рівна нулю.

Тотожні перетворення цілих виразів.

Перше тотожне перетворення в курсі алгебри — це **зведення одночлена до стандартного вигляду**. Теоретична основа цього перетворення така: у разі зведення одночлена до стандартного вигляду використовується переставний, сполучний закони множення і правило множення степенів з однаковою основою.

До **основних видів тотожних перетворень многочленів** належать:

- зведення многочленів до стандартного вигляду;
- додавання і віднімання многочленів;
- множення одночленів на многочлен і обернене перетворення (розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки);
- множення многочлена на многочлен і обернене перетворення (розкладання многочлена на множники способом групування).

Доцільно сформулювати учням **правило розкладання многочленів на множники** способом винесення спільного множника за дужки:

1) знайти спільний множник всіх членів многочлена;
2) кожний член многочлена подати у вигляді добутку двох множників, з яких один спільний;
3) винести спільний множник за дужки, спираючись на розподільний закон множення.

Правило відшукання спільного множника членів многочлена:

1) знайти найбільший спільний дільник всіх коефіцієнтів членів;
2) помножити його на степені змінних з найменшим показником, з яким вони входять до всіх членів многочлена.

Формули скороченого множення:

$(а \pm в)^2 = а^2 \pm 2ав + в^2$

$(а - в)(а + в) = а^2 - в^2$

$(а \pm в)(а^2 \pm ав + в^2) = а^3 \pm в^3$

1) Доведення формул не викликає труднощів.

2) Запам’ятовуванню сприяє словесне формулювання формул.

3) Запам’ятовуванню сприяє геометричне тлумачення формул (рис.17.1).

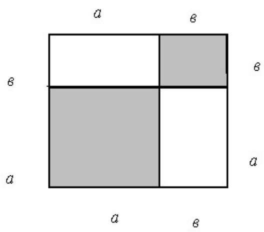


Рис. 17.1

На рівні поглибленого вивчення розглядаються формули
$(а \pm в)^3 = а \pm 3а^2в - 3ав^2 \pm в^3$

Тотожні перетворення раціональних виразів в курсі алгебри основної школи

До тотожних перетворень раціональних виразів належать:

- скорочення раціональних дробів;
- додавання і віднімання раціональних дробів;
- множення, піднесення до степеня з натуральним показником;
- ділення дробів;
- тотожні перетворення раціональних виразів, до складу яких входять цілі і дробові вирази.

Раціональні дроби та їх властивості

Алгебраїчний вираз	
Алгебраїчним виразом називається вираз, що складається з чисел і букв за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до натурального степеня й добування арифметичного кореня	$3a^2b + ab^2 - 4ab$; $x + y + \frac{x}{9}$; $\frac{5x^2 - x + 1}{x + 1}$; $\sqrt{0{,}3x^2 + y}$.
Цілий вираз	
Цілим виразом називається алгебраїчний вираз, що не містить ділення на букву й добування кореня з букви	$x^4 + x^2 + 1$; $(7n - 0{,}5)^2 - (4n + 0{,}5)^2$; $a^4 - 6a^3 + 54a - 81$; $\frac{2x(x^3+27)}{27}$.
Дробовий вираз	
Дробовим називається алгебраїчний вираз, що містить ділення на букву й не містить добування кореня з букви	$\frac{a-b}{a+b}$; $\frac{x^2-49}{x^2-25}$; $a + b + \frac{1}{a}$.

<table>
<tr><th colspan="2">Раціональні вирази (цілі й дробові вирази)</th></tr>
<tr><td>Дробовим виразом називають частку від ділення двох виразів, записану за допомогою дробової риски. Як і інші вирази, дроби бувають числові та зі змінними</td><td>$4a-\frac{b}{2a+1}$;
$\frac{x+y}{x^2-3xy+y^2}$;</td></tr>
<tr><td>Вираз, складений із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення й піднесення до степеня, називається раціональним</td><td>$\frac{5}{a};\frac{b-2}{10};\frac{x+y}{x^2-xy+y^2};\frac{3}{m^2-n^2}.$</td></tr>
<tr><td>Два вирази, відповідні числові значення яких рівні при всіх допустимих значеннях змінних, називаються тотожно рівними або тотожними</td><td>$\frac{21y}{3y^2}=\frac{7}{y}$;
$\frac{a^2-9}{ab+3b}=\frac{a-3}{b}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Основна властивість дробу. Скорочення дробів</th></tr>
<tr><td>Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий вираз, то дістанемо дріб, який тотожно дорівнює даному. Це дозволяє скорочувати дроби й приводити їх до нового знаменника
$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$</td><td>Скоротити дріб.
$\frac{a^2-9}{ab+3b}=\frac{(a+3)(a-3)}{b(a+3)}=\frac{a-3}{b}$.
Привести дріб $\frac{2x}{7y}$до знаменника $35y^3$
$\frac{2x}{7y}=\frac{2x\cdot 5y^2}{7y\cdot 5y^2}=\frac{10xy^2}{35y^2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{P}{Q}=-\frac{-P}{Q}=-\frac{P}{-Q};\ \frac{-P}{Q}=\frac{P}{-Q}=-\frac{P}{Q}$</td><td>Наприклад:
а) $\frac{2x-3}{3x+1}=-\frac{-(2x-3)}{3x+1}=-\frac{2x-3}{-(3x+1)}$;
б) $\frac{x^2+1}{2y-1}=-\frac{-(x^2+1)}{2y-1}=-\frac{x^2+1}{-(2y-1)}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Скорочення дробів</th></tr>
<tr><td>$\frac{P\cdot Q}{P\cdot R}=\frac{Q}{R}, P\neq 0$ і $R\neq 0$
1) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники;
2) якщо чисельник і знаменник дробу мають спільний множник, то дріб можна скоротити</td><td>$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x-3}{x+3}$</td></tr>
</table>

Перетворення суми і різниці раціональних дробів з різними знаменниками спирається на вміння знаходити найпростіший спільний знаменник.

Правило (алгоритм) відшукання спільного знаменника:
1) скласти добуток НСК модулів коефіцієнтів знаменників даних дробів і степенів кожної змінної з найбільшим показником, з яким змінна входить до знаменників цих дробів;
2) знайти додаткові множники даних дробів; для цього досить записати спільний знаменник у вигляді добутку двох співмножників, з яких один— знаменник даного дробу, тоді другий буде додатковим множником його;
3) знайти добуток чисельника кожного дробу на додатковий множник і записати спільний знаменник.

18. Різні трактування поняття «рівняння» в математиці і шкільному курсі алгебри. Методика вивчення рівнянь в курсі алгебри основної школи.

У 7 класі в курсі алгебри основної школи вводиться означення лінійного рівняння з одним невідомим через його загальний вигляд
$ax = b$
і досліджується питання кількості коренів залежно від коефіцієнта a і вільного члена b.

На завершення курсу алгебри 7 класу вводиться поняття про лінійне рівняння з двома невідомими, його графік, систему лінійних рівнянь з двома невідомими і способи їх розв’язування.

Систематичне вивчення квадратних рівнянь відбувається у 8 класі. Після цього розв’язують дробово-раціональні рівняння, які зводяться до квадратних.

У 9 класі вивчаються біквадратні рівняння та системи рівнянь другого степеня.

Вивчення кожного нового виду рівнянь і їх систем супроводжується розв’язуванням текстових задач на складання рівнянь.

В математичній науці існує кілька підходів до означення поняття рівняння залежно від понять, через які воно трактується. Основні з них означають рівняння через вираз, функцію і предикат.

Означення 1. Рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x) називають рівність виразів $f_1(x)$ і $f_2(x)$ тобто , $f_1(x) = f_2(x)$, що визначені відповідно на множинах, і для якої поставлено завдання відшукати множину всіх значень x, які належать спільній області визначення функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, таких, щоб вирази $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мали однакові числові значення.

Означення 2. Рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x) називають рівність $f_1(x) = f_2(x)$ двох аналітично заданих функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ з областями визначення і областями зміни , де $Y_1 \subseteq R$, $Y_2 \subseteq R$, для якої поставлено завдання відшукати всі значення $x \in D_r \subseteq D = D_1 \cap D_2$ такі, щоб обидві функції мали однакові числові значення.

Означення 3. Предикат $f_1(x)=f_2(x)$ з множиною визначення D, для якого поставлено завдання знайти множину істинності $D_r \subseteq D$, називають рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x).

В основній школі найпростішим є перше означення, оскільки родове поняття «вираз» простіше для сприймання ніж «функція» або «предикат».

У підручнику алгебри рівняння трактується як рівність, що містить змінну. Через поняття змінної подається означення кореня рівняння. Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені, або довести, що їх немає.

У методичній літературі докладно висвітлено такі способи розв'язування простіших рівнянь:

1) на основі залежностей між компонентами і результатами дій;
2) за властивостями рівностей;
3) за теоремами про рівносильність рівнянь;
4) графічний спосіб.

За підручником поняття рівносильних рівнянь означає так: Рівняння, що мають один і той же корінь називають рівносильними.

Способи отримання рівносильних рівнянь сформульовані у теоремах:

Теорема 1. Якщо до обох частин рівняння **(1)** ***f(x)=g(x)*** додати один і той же вираз *ϕ(x),* який визначено при всіх значеннях x із області визначення рівняння (1), то одержимо рівняння $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ рівносильне рівнянню (1).

Теорема 2. Якщо обидві частини рівняння **(1)** ***f(x)=g(x)*** помножити або розділити на один і той же вираз *ϕ(x),* визначений при всіх значеннях x із області визначення рівняння (1) і відмінний від нуля у кожній точці цієї області, то отримаємо рівняння $f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ або $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{g(x)}{\varphi(x)}$ рівносильне даному.

Теорема 3. Якщо обидві частини рівняння **(1)** ***f(x)=g(x)***, де *f(x) і g(x)* не від'ємні при всіх значеннях x із області визначення рівняння (1) піднести до одного й того ж натурального степеня n, то отримаємо рівняння $f^n(x)=g^n(x)$ рівносильне рівнянню (1).

У 7 класі в курсі алгебри основної школи вводиться означення лінійного рівняння з одним невідомим через його загальний вигляд $ax=b$
і досліджується питання кількості коренів залежно від коефіцієнта *a* і вільного члена b.

Вивчення теми «Лінійні рівняння» в курсі алгебри 7 класу починається з того розгляду трьох рівнянь:

$$2x=-3,$$
$$0x=0,$$
$$0x=2.$$

Число $-1{,}5$ є єдиним коренем першого рівняння.

Оскільки добуток будь-якого числа на нуль дорівнює нулю, то коренем другого рівняння є будь-яке число.

Третє рівняння коренів не має.

Незважаючи на істотні відмінності отриманих відповідей, наведені рівняння зовні схожі: усі вони мають вигляд $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа.

Рівняння виду $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Наведемо ще приклади лінійних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 7; \ -0{,}4x = 2{,}8; \ -x = 0.$$

Далі зміст розгортається в узагальненому вигляді.

Розв'яжемо рівняння $ax = b$ для різних значень a і b.

1) Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a, отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь, що дорівнює $\frac{b}{a}$.

2) Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$.

Тоді можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо $a = 0$ та $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.

У другому випадку, коли $b \neq 0$, то при будь-якому значенні x маємо хибну рівність $0x = b$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо $a = 0$ та $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має.

На завершення курсу алгебри 7 класу вводиться поняття про лінійне рівняння з двома невідомими, його графік, систему лінійних рівнянь з двома невідомими і способи їх розв'язування.

Систематичне вивчення квадратних рівнянь відбувається у 8 класі. Квадратним називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b і c називають коефіцієнтами квадратного рівняння. Число a називають першим або старшим коефіцієнтом, число b – другим коефіцієнтом, число c – вільним членом.

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають зведеним.

Наприклад, $x^2+\sqrt{2}x-1=0$, $x^2-4=0$, $x^2+3x=0$ – це зведені квадратні рівняння.

Оскільки у квадратному рівнянні $ax^2+bx+c=0$ старший коефіцієнт не дорівнює нулю, то незведене квадратне рівняння завжди можна перетворити у зведене, рівносильне даному. Розділивши обидві частини рівняння $ax^2+bx+c=0$ на число a, отримаємо зведене квадратне рівняння $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Розглядаються види квадратних рівнянь.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2+bx+c=0$ хоча б один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним квадратним рівнянням.

Існує три види неповних квадратних рівнянь.

Розв'язання неповного квадратного рівняння

Коефіцієнти рівняння $ax^2+bx+c=0$	Неповне квадратне рівняння	Корені
$b=c=0$	$ax^2=0$	$x=0$
$b\neq 0,\ c=0$	$ax^2+bx=0$	$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$
$b=0,\ -\frac{c}{a}<0$	$ax^2+c=0$	Коренів немає
$b=0,\ -\frac{c}{a}>0$	$ax^2+c=0$	$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Алгоритм розв'язування квадратних рівнянь задається формулою коренів квадратного рівняння.

З метою підготовки до виведення зазначеної формули розв'язується кілька рівнянь способом виділення квадрата двочлена.

Виведемо формулу, яка дає змогу за коефіцієнтами a, b і c квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ знаходити його корені.

Маємо: $ax^2+bx+c=0$.

Оскільки $a\neq 0$, то, помноживши обидві частини цього рівняння на $4a$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0.$$

Виділимо в лівій частині цього рівняння квадрат двочлена:

$$4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0;$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Існування коренів останнього рівняння та їхня кількість залежить від знаку значення виразу b^2-4ac. Це значення називають дискримінантом квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ і позначають буквою D, тобто

$D = b^2 - 4ac$. Термін «дискримінант» походить від латинського слова discriminare, що означає «розрізняти», «розділяти».

Тепер рівняння $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ можна записати так:

$(2ax + b)^2 = D$

Можливі три випадки: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Якщо $D < 0$, то рівняння коренів не має. Справді, при будь-якому значенні x вираз $(2ax + b)^2$ набуває тільки невід'ємних значень.

2. Якщо $D = 0$, то рівняння набуває вигляду

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Звідси $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Якщо $D > 0$, то рівняння можна записати у вигляді

$$(2ax + b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2.$$

Звідси $2ax + b = -\sqrt{D}$ або $2ax + b = \sqrt{D}$. Тоді $x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ або $x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Цей запис називають формулою коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Отриману формулу можна застосовувати й у випадку, коли $D = 0$. Маємо: $x = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{2a}$.

В результаті виведення формули отримуємо алгоритм розв'язування квадратного рівняння, який є своєрідним узагальненням формули і не потребує її виведення кожного разу, а тільки формулює правило використання формули.

Під час розв'язування квадратних рівнянь зручно керуватися таким алгоритмом:

- знайти дискримінант D квадратного рівняння;
- якщо $D < 0$, то у відповіді записати, що коренів немає;

якщо $D \geq 0$, то скористатися формулою коренів квадратного рівняння

Після цього розв'язують дробово-раціональні рівняння, які зводяться до квадратних.

Розв'язуючи дробові раціональні рівняння доцільно запропонувати учням кілька можливих способів розв'язування залежно від теоретичної основи.

Перший спосіб полягає в тому, щоб:

1) знайти спільний знаменник дробів, що входять до рівняння;
2) помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник;

3) розв’язати одержане ціле рівняння;

4) виключити з його коренів ті, які перетворюють на нуль спільний знаменник.

Другий спосіб

Всі члени рівняння переносять в ліву частину і одержаний там вираз зводять до дробу вигляду $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Рівняння $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ розв’язують, скориставшись необхідного і достатнього умовами рівності нулю дробу: дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Такий спосіб розв’язання дає змогу учням краще усвідомити потребу позбутися коренів, які перетворюють знаменник на нуль.

У 9 класі вивчаються біквадратні рівняння та системи рівнянь друго степеня. Вивчення кожного нового виду рівнянь і їх систем супроводжується розв’язуванням текстових задач на складання рівнянь.

19. Формування поняття «нерівність». Методика вивчення нерівностей в курсі алгебри основної школи.

За чинними програмами з вивчення нерівностей починаються уроки алгебри в 9 класі. Учні вивчають числові нерівності та їх властивості, нерівності зі змінною, окремі види нерівностей.

Зміст співвідношень «більше» і «менше» можна розкрити таким означенням.

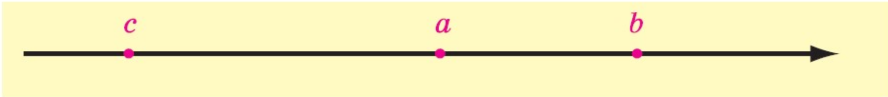
Число a більше від b, якщо різниця $a - b$ — число додатне; число a менше від b, якщо різниця $a - b$ — число від’ємне.

Оскільки різниця $a - b$ може бути додатною, від’ємною або дорівнювати нулю, то для довільних дійсних чисел a і b виконується одне і тільки одне з трьох співвідношень:

$$a > b, \ a < b \text{ або } a = b.$$

На координатній прямій меншому числу відповідає точка, що лежить ліворуч від точки, яка відповідає більшому числу. Наприклад, малюнок 1 відповідає таким співвідношенням:

$$c < a,\ a < b,\ c < b.$$



Мал. 1

Нерівність — абстрактна математична модель відношень менше — більше, нижче — вище, коротше — довше, вужче — ширше, тонше — товстіше, дешевше — дорожче, молодше — старше та багатьох інших. Крім знаків < (менше) і > (більше) часто використовують також знаки: ≤ — менше або дорівнює (не більше), ≥ — більше або дорівнює

Розглянемо нерівності виду $a < b$, $c > d$ та ін., де a, b, c, d — довільні дійсні числа.

Теорема 1. **Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.**

Доведення. Якщо $a < b$ і $b < c$, то числа $a - b$ і $b - c$ — від'ємні. Їх сума $(a - b) + (b - c) = a - c$ — також число від'ємне. А якщо $a - c$ — число від'ємне, то $a < c$. Це й треба було довести.

Теорема 1 виражає *властивість транзитивності* нерівностей з однаковими знаками.

Приклад. Оскільки $\sqrt{1,9} < \sqrt{2}$ і $\sqrt{2} < 1,42$, то $\sqrt{1,9} < 1,42$.

Теорема 2. **Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.**

Наприклад, якщо $a < b$ і c — довільне дійсне число, то $a + c < b + c$.

Доведення. Якщо $a < b$, то $a - b$ — число від'ємне. Оскільки $a - b = (a + c) - (b + c)$, то різниця $(a + c) - (b + c)$ — число також від'ємне. А це означає, що $a + c < b + c$.

Теорема 3. **Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.**

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Теорема 4. Нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати.

Наприклад, якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Д о в е д е н н я. Якщо $a < b$ і $c < d$, то за теоремою 2 $a + c < b + c$ і $b + c < b + d$, звідси за теоремою 1 $a + c < b + d$.

Приклад. $2 < 3$ і $5 < 7$, тому $2 + 5 < 3 + 7$ або $7 < 10$.

Теорема 5. Нерівності з однаковими знаками можна почленно перемножати, якщо їх ліві й праві частини — додатні числа.

Наприклад, якщо $a < b$, $c < d$ і числа a, b, c, d — додатні, то $ac < bd$.

Д о в е д е н н я. Нехай $a < b$ і $c < d$, а числа c і b — додатні. Згідно з теоремою 3 $ac < bc$ і $bc < bd$, звідси за теоремою 1 $ac < bd$.

Розв'язком нерівності **з однією змінною називають значення цієї змінної, яке задовольняє дану нерівність.**

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Розв'язують нерівність, замінюючи її іншими нерівностями, простішими і рівносильними даній.

Дві нерівності називають *рівносильними,* якщо вони мають одні й ті самі розв'язки, тобто якщо кожний розв'язок першої нерівності задовольняє другу, а кожний розв'язок другої нерівності задовольняє першу. Нерівності, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Наприклад, нерівність $5x - 2 > 8$ рівносильна кожній з нерівностей: $5x > 2 + 8$, $5x > 10$, $x > 2$.

Нерівності зі змінними мають багато властивостей, аналогічних до властивостей рівнянь.

1. Якщо з однієї частини нерівності перенесемо в іншу доданок з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

2. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

3. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Якщо a і b — дані числа, а x — невідома змінна, то кожна з нерівностей

$$ax < b, ax > b, ax \le b, ax \ge b \qquad (*)$$

називається *лінійною нерівністю* з однією змінною x.

Приклади лінійних нерівностей:

$$2x < 3, \quad -7x > 14, \quad 0{,}5x \le 1, \quad 9x \ge 0.$$

Лінійні нерівності часто записують і так:

$$ax - b < 0, \quad ax - b > 0, \quad ax - b \le 0, \quad ax - b \ge 0.$$

Якщо число a відмінне від нуля, то кожна з нерівностей (*) має множину розв'язків, якій відповідає нескінченний числовий промінь (або промінь без вершини).

Залежність розв'язків лінійної нерівності від значення коефіцієнтів при змінній і знака нерівності наведено в таблиці.

$ax > b$	$ax \le b$
Якщо $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$ 	Якщо $a > 0$, то $x \le \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$ 
Якщо $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$ 	Якщо $a < 0$, то $x \ge \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; \infty\right)$ 

Якщо $a = 0$, то кожна з нерівностей (*) або не має розв'язків (наприклад, $0x > 5$), або множиною її розв'язків є множина всіх дійсних чисел (наприклад, $0x < 5$).

Квадратні нерівності можна розв'язувати методом інтервалів.

Розглянемо розв'язування квадратичних нерівностей методом інтервалів на прикладі.

Приклад 1. Знайдіть, при яких значеннях *x* квадратний тричлен $x^2 - 5x + 6$ набуває додатних значень, а при яких — від'ємних.

Розв'язання. Розкладемо квадратний тричлен $x^2 - 5x + 6$ на множники

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Точки x = 2 і x = 3 (див. рис. 19.2) поділяють числову пряму на три проміжки: *(-∞; 2); (2; 3); (3; +∞).*

Рис. 19.2

Вираз (x – 2)(x – 3) є добутком двох множників. Знак кожного з цих множників та їх добутку подамо у вигляді табл. 19.2.

Таблиця 19.2

Проміжки/множники	(–∞; 2)	(2; 3)	(3; +∞)
x – 2	–	+	+
x – 3	–	–	+
(x – 2)(x – 3)	+	–	+

Рухаючись уздовж числової осі зліва направо, ми бачимо, що на проміжку (–∞; 2) квадратний тричлен $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ набуває додатних значень, оскільки в цьому випадку обидва множники $x - 2$ і $x - 3$ є від’ємними.

На проміжку (2; 3) цей тричлен набуває від’ємних значень і, отже, при переході через точку x = 2 змінює знак. Це відбувається тому, що в добутку $(x - 2)(x - 3)$ при переході через точку $x = 2$ перший множник $x - 2$ змінює знак, а другий множник $x - 3$ — ні.

При переході через точку $x = 3$ тричлен знову змінює знак, оскільки в добутку $(x - 2)(x - 3)$ перший множник $x - 2$ не змінює знак, а другий множник $x - 3$ змінює.

Отже, рухаючись уздовж числової прямої, ми спостерігаємо, як змінюється знак добутку $(x - 2)(x - 3)$.

Таким чином, задачу про знак квадратного тричлена $x^2 - 5x + 6$ можна розв’язати у такий спосіб.

Позначити на числовій прямій корені рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$, тобто точки $x = 2$, $x = 3$. Вони поділяють числову пряму (рис. 19.3) на три проміжки. На проміжку (–∞; 2) значення тричлена $x^2 - 5x + 6$ додатне, тому розставляємо його знаки на останніх проміжках, ураховуючи чергування знаків.

Рис. 19.3

На рис. 19.3 видно, що $x^2 - 5x + 6 > 0$ на проміжку $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, і $x^2 - 5x + 6 < 0$ на проміжку (2; 3) - .

20. Системи в курсі алгебри основної школи. Методика навчання учнів розв’язуванню задач на складання рівнянь та їх систем.

В темі курсу алгебри 7-го класу «Системи лінійних рівнянь з двома змінними» вивчаються: Рівняння з двома змінними. Лінійне рівняння з двома змінними. Системи рівнянь із двома змінними. Розв’язування систем методом підстановки. Розв’язування систем методом додавання.

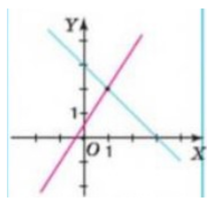
До поняття системи лінійних рівнянь з двома невідомими учнів підводять в 7 класі після розгляду лінійного рівняння з двома невідомими і його графіка. Означення системи не вводять, але пояснюють на прикладі розв’язування текстової задачі і кажуть, що одержані під час розв’язування задачі рівняння утворюють систему рівнянь. Вводиться форма запису системи (фігурні дужки) і формулюється означення розв’язання системи двох рівнянь з двома невідомими.

Насамперед вводиться графічний спосіб розв’язування системи, щоб дати геометричне тлумачення розв’язків кожного з рівнянь і системи рівнянь як координат точки перетину обох графіків.

З’ясовується можлива кількість розв’язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими залежно від розташування графіків.

На наступних уроках в 7 класі розглядають два алгебраїчні способи розв’язування таких систем: спосіб підстановки і спосіб додавання.

Способи розв’язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Спосіб	План розв’язування	Приклад
Графічний	1) Побудувати в одній системі координат графік кожного з рівнянь системи; 2) Визначити координати точки перетину цих графіків, якщо це можливо.	$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases}$ 1) Побудували в одній системі координат графіки рівнянь $x + y = 3$ і $3x - 2y = -1$;  2) Прямі перетинаються в точці $A(1; 2)$. Відповідь: $(1; 2)$.

Підстановки	1) З'ясувати, в якому рівнянні системи та яку змінну зручніше виразити через іншу; 2) В обраному рівнянні виразити обрану «зручну» змінну через іншу; 3) Підставити знайдений вираз в інше рівняння системи; 4) Розв'язати отримане рівняння відносно «зручної» змінної; 5) Підставити знайдений корінь у те рівняння системи, з якого виразили «зручну» змінну через іншу; 6) Розв'язати отримане рівняння відносно іншої змінної; 7) Записати пару чисел, яка є розв'язком системи.	$\begin{cases} x+y=3, \\ 3x-2y=-1. \end{cases}$ 1) $x+y=3$; 2) $y=-x+3$; 3) $3x-2(-x+3)=-1$; 4) $3x+2x-6=-1$, $5x=5$, $x=1$; 5) $y=-1+3$; 6) $y=2$. 7) Відповідь: $(1;2)$.
Додавання	1) З'ясувати, для якої змінної її коефіцієнти в обох рівняннях зручно перетворити на протилежні числа; 2) Для коефіцієнтів «зручної» змінної знайти додаткові множники, які дозволять перетворити ці коефіцієнти на протилежні числа; 3) Відповідно помножити рівняння системи, на ці додаткові множники; 4) Додати отримані рівняння та розв'язати рівняння-суму як рівняння відносно другої змінної; 5) Підставити знайдений корінь в одне з рівнянь системи; 6) Розв'язати отримане рівняння як рівняння відносно «зручної» змінної; 7) Записати пару чисел, яка є розв'язком системи.	$\begin{cases} x+y=3, \\ 3x-2y=-1. \end{cases}$ 1) для y; 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ 3x-2y=-1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+2y=6, \\ 3x-2y=-1; \end{cases}$ 4) $5x=5$, $x=1$; 5) $1+y=3$; 6) $y=2$. 7) Відповідь: $(1;2)$.

У 9 класі учні повертаються до вивчення систем рівнянь. Тут уже розглядаються системи, в яких одне або обидва рівняння – другого степеня.

Системи рівнянь другого степеня з двома змінними розглядаються в курсі алгебри 9-го класу. Щодо останніх, то увага зосереджується на системах, де одне рівняння – другого степеня, а друге –першого степеня. Передбачається розгляд лише найпростіших систем рівнянь, у яких обидва рівняння другого степеня.

21. Розвиток поняття функції, різні означення функції. Функціональна пропедевтика.. Методика вивчення окремих видів функцій в курсі алгебри основної школи.

В курсі алгебри 7 класу вводиться одне з фундаментальних понять – поняття "функції". Розглядається лінійна функція та її графік, вводиться поняття математичного моделювання.

Рівняння і функції розглядаються як засоби математичного моделювання реальних процесів і явищ, на цій основі розв'язуються прикладні задачі.

Введенню поняття функції має передувати вивчення раціональних чисел. Щоб стверджувати, що графіком лінійної функції є пряма, треба розглядати функцію на множині всіх дійсних чисел. А не тільки раціональних. Поєднуючи науковість і доступність викладу теми: "Функції" семикласникам в пропедевтичному плані повідомити, що крім відомих їм раціональним числам, існують числа не раціональні. Такі числа разом з раціональними утворюють множину дійсних чисел.

На координатній прямій існує безліч точок, координати яких числа – ірраціональні.

Змістове наповнення курсу алгебри 8 класу має незначні відмінності від попередніх курсів. Нова програма містить лише 3 теми, але змістове наповнення цих тем передбачає вивчення матеріалу всіх змістових ліній (числа, вирази та їх перетворення, функції, елементи прикладної математики).

Функції $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2, y = \sqrt{x}$ на відміну від попередніх програм вивчається не в окремому розділі, а паралельно з відповідними виразами та рівняннями. Новим у вивчені математики 8 класу є виокремлення таких змістових одиниць:

1. дроби замість "алгебраїчні дроби".
2. раціональні числа.
3. числові множини.
4. етапи розвитку числа.
5. добуток і частка квадратних коренів.
6. квадратний тричлен, його корені.
7. розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

В курсі алгебри основної школи учні вивчають такі функції:

$y = kx + b$ (7 клас)

$y = kx$ (7 клас)

$y = \frac{k}{x}$ (8 клас)

$y = x^2$ (8 клас)

$y = \sqrt{x}$ (8 клас)

$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ (9 клас).

В результаті вивчення функції до учнів висуваються такі вимоги:

1. розуміти зміст поняття "функції".
2. знати про основні способи задання функції.
3. розуміти суттєві ознаки функції. Розпізнавати деякі функції серед інших функцій, вміти будувати їх графіки і читати за графіками властивості.

Основна мета вивчення функцій – формувати вміння будувати і читати графіки функцій, а також характеризувати за графіками функцій їхні властивості та реальні процеси, які вони описують.

В 1643 – 1727рр. ще не було явного означення функції (проте в цей період активно досліджувалось і розвивалось інтегральне і диференціальне числення).

У 1718р. Й. Бернуллі вперше означив функцію.

У 1748р. Л. Ейлер уточнив означення Й. Бернуллі.

"Функція змінної кількості – це аналітичний вираз складений якимсь чином з цієї кількості і чисел або сталих кількостей".

У 1834р. Лобачевский сформулював більше загальне означення функції.

В XX ст. поняття функції розширюється далі. Сам термін "функція" у 1694р. увів Лейбніц. З латинської функція означає виконання або здійснення.

В шкільних та вузівських підручниках поширеними є два напрями функції: класичний і сучасний (теоретико – множинний напрям).

За класичним напрямом функцію розглядають як залежну змінну величину, функцію розглядають як закон (правило) за яким значення залежної змінної величини залежить від значення незалежної змінної величини.

Відповідність між значенням незалежних змінних величин.

Сучасний (теоретико - множинний) по – перше розглядає не саму функцію, функціональну ситуацію; функція розглядається як певного виду відповідність між множинами, або як відношення між елементами двох множин; в цьому напряму розглядають функцію як закон відповідності між множинами.

В шкільних підручниках під редакцією Колмогорова функція трактувалася на основі теоретико – множинного підходу. В навчальних посібниках під редакцією Теляковського функцію трактують на основі класичного напрямку.

Функціональна пропедевтика здійснюється на уроках математики в 5 – 6 класі. Під час вивчення звичайних і десяткових дробів, числові вирази, обчислення за формулами, буквені вирази, зображення чисел на прямій, координати точки, прямокутна система координат, таблиці, діаграми, графіки, площа прямокутника, об’єм паралелепіпеда.

У діючому підручнику "Алгебра" (Бевз Г. П.) у розділі " Функції" дано таке означення "якщо кожному значенню змінної x з деякої множини М відповідає єдине значення змінної y, то змінну y називають функцією від x.

Змінну x в цьому випадку називають аргументом даної функції, множина М – областю визначення функції, а відповідність між x і y функціональною відповідністю. Аргумент ще називають незалежною змінною, а функцію – залежною". Таким чином вже на початку вивчення 8 класу термін "функція" вживається для назви двох понять:

1. залежності між змінними;
2. залежної змінної.

Далі пояснюють учням як задавати функцію. Питання про способи задання функції важливе значення у процесі формування поняття функції.

$y = 2x - 1$.

Відомо 5 способів задання функції:

1. аналітичний (за допомогою формули);
2. табличний (за допомогою таблиці);
3. графічний (за допомогою графіка);
4. описовий (усне або письмове описання функції);
5. за допомогою графа.

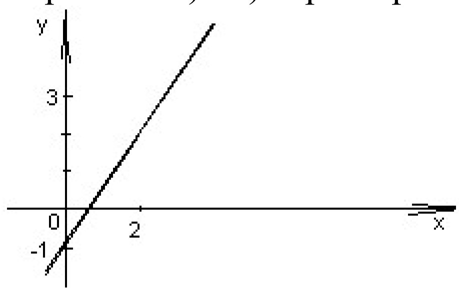
В школі вивчають перших три способи задання функції, але чомусь прийнято такий порядок вивчення окремих функцій: формула, таблиця, графік. Кожен із цих способів має свої переваги і недоліки, саме в сукупності ці способи дають можливість глибше вивчати конкретні види функцій і розуміти поняття функції взагалі.

План характеристики способів задання функції

1) компактність;
2) наочність (можливість судити про властивості одразу);
3) можливість знаходити *y* по заданому *x*.

Аналітичний спосіб

Переваги: 1) і 3) характеристика присутні.



Табличний спосіб.

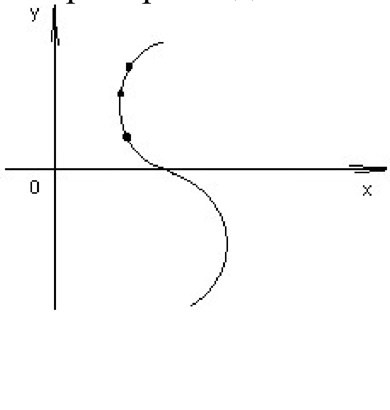
Переваги: більш наочний в порівнянні з аналітичним, відразу представленні значення *y* від деяких значень *x*, але він громіздкий.

Графічний спосіб.

Переваги: наочність, при необхідності для відповідних *x* можна знайти відповідні значення *y* (проте завжди точно).

Розглядаючи графічний спосіб слід відмітити, що кожній функції відповідає деяка множина точок координатної площини (графік), але не навпаки.

Контр – приклад:



Більшість функцій, що вивчаються в шкільному курсі математики мають схожі особливості, а саме: аналітичний спосіб задання, особливості графіків, область застосування. Вивчення однієї функції як члена класу відбувається за певною схемою:

1) вивчення функції як члену класу;

2) вивчення властивостей всього класу на прикладі типової функції цього класу.

Зв'язок у межах функціональної лінії при вивченні функції:

I. $y = kx + b$, $y = kx$

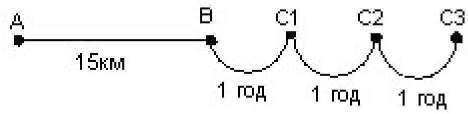
II. $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$

III. $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^n$

IV. $y = \dfrac{k}{x}$, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Типовий і одночасно важливий для математики клас функцій: лінійні функції. Для того, щоб вивчити клас лінійних функцій необхідно поставити учням задачу: дослідити клас функцій $y = kx + b$, в залежності від параметрів, встановити геометричний зміст параметрів.

Розглянемо особливості вивчення функцій на прикладі лінійної функції:

<table>
<tr><th>Етап вивчення</th><th>Зміст матеріалу</th></tr>
<tr><td>1. Перед введенням означення має бути розглянута прикладна задача.</td><td>1. Пройшовши спочатку 15 км з пункту А в пункт В далі велосипедист їхав зі швидкістю 10км/год. Знайти відстань через годину після того, як велосипедист почав рух із точки В, через 2 години і т. д. через t годин.


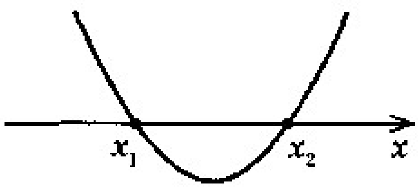
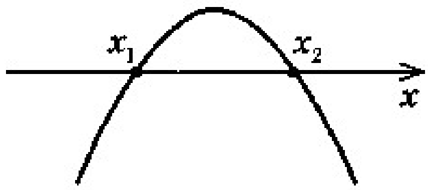
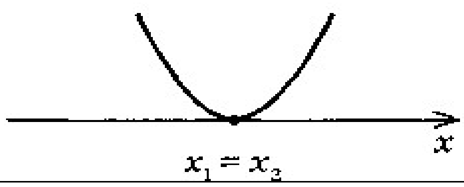
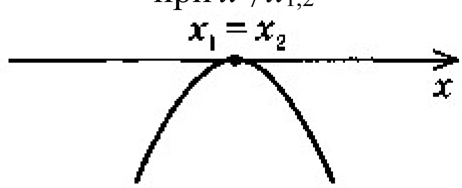
$15 + 10 \cdot 1$, $15 + 10 \cdot 2$, $15 + 10 \cdot 3$, $15 + 10 \cdot t$,
$S = 15 + 10t$.
Робимо перехід до означення лінійної функції так: така залежність змінної S від змінної t називається лінійною функцією.</td></tr>
<tr><td>2. Дається строге означення функції.</td><td>2. Лінійною називається функція, яку можна задати формулою виду: $y = kx + b$, де x – незалежна змінна, k, b – дані числа.</td></tr>
<tr><td>3. З’ясовується область визначення функції, при цьому користуються аналітичним записом функції.</td><td>3. $x \in R$</td></tr>
<tr><td>4. Вибирають конкретну лінійну функцію з фіксованим значенням k,b. Складаємо таблицю для деяких її значень. Значення аргументу вибираються із множини раціональних чисел, чим більше, тим краще.</td><td>4. $y = 3x - 2$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$-\frac{1}{3}$</td><td>1</td><td>$\frac{1}{9}$</td><td>$-\frac{5}{3}$</td><td>-10</td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>-3</td><td>1</td><td>$-\frac{5}{3}$</td><td>-7</td><td>-32</td></tr></table></td></tr>
</table>

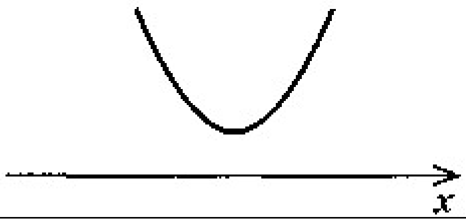
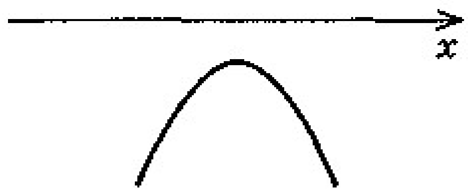
5. За таблицею будуємо графік функції.	5. На прямокутній системі координат наносимо точки, вказані в таблиці. Учням пропонується з'ясувати як ці точки розташовані на координатній площині, після проведення прямої лінії на ній вибирається точка, координата якої не потрапили в таблицю (бажано цілі значення) знаходяться її координати і підставляються в аналітичний запис функції. Таким способом ми доводимо, що графіком лінійної функції є пряма лінія.
6. Розглядаємо властивості даної лінійної функції, досліджуючи її графік.	6. $k = 3>0$, графік функції утворює гострий кут з додатнім напрямом вісі x. При x=0 координата $y = -2 = b$. Це означає, що пряма перетинається в точці з координатою b.

Вивчення квадратичної функції в курсі алгебри 9 класу. Дається означення квадратичної функції та запис її у вигляді тричлена $y = ax^2 + bx + c$, де a,b,c – дійсні числа, $a \neq 0$. Після чого розглядається, що графіки функції $y = ax^2 + bx + c$ і $y = ax^2$ – однакові параболи з вершинами в різних точках. Вершина параболи $y = ax^2 + bx + c$ має координати $(\frac{-b}{2a};\frac{-D}{4a})$

Таблиця 21.1

Властивості квадратичної функції (функції виду $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$)

$a>0$	$a<0$
1. $D(y) = R$ 2. $E(y) = [y_0; +\infty)$	1. $D(y) = R$ 2. $E(y) = (-\infty; y_0]$
(y_0 — ордината вершини параболи)	
Функція зростає, якщо $x \in [x_0; +\infty)$ б) Функція спадає, якщо $x \in (-\infty; x_0]$	3. а) Функція зростає, якщо $x \in (-\infty; x_0]$ б) Функція спадає, якщо $x \in [x_0; +\infty)$
(x_0— абсциса вершини параболи)	
4. а) Якщо D>0, то y> 0 при $x \in (-\infty;x_1)$ U$(x_2; +\infty)$, y <0при $x \in (x_1;x_2)$ 	4. а) Якщо D>0,то y> 0 при $x \in (x1; x2)$, y<0при $x \in (-\infty;x_1)$ U$(x_2; +\infty)$ 
(x_1, x_2– нулі функції)	
б) Якщо D = 0, то y > 0 при $x \neq x_{1,2}$ 	б) Якщо D = 0,то y < 0 при $x \neq x_{1,2}$ 

в) Якщо $D<0$,то $y > 0$при $x\in R$ 	в) Якщо $D<0$,то $y <0$ при $x\in R$ 

Методика навчання планіметрії

22. Логічна будова шкільного курсу планіметрії, її реалізація у діючих підручниках Вивчення аксіом в курсі геометрії 7 класу. Методика введення перших понять. Доведення перших теорем.

а) Вступні зауваження.

До перших уроків геометрії ми відносимо навчальний матеріал, який вводить учнів у геометрію. Це відповідно:§1,2 у підручнику Мерзляка А.Г.; розділ 1 в підручнику Бевза Г.П.; §1-6 в підручнику Капіносова А.М.

Саме тут автори розглядають первісні поняття геометрії, найпростіші геометричні фігури: відрізок, пів пряма, кут, півплощина, трикутник, паралельні та перпендикулярні прямі.

Розглядаючи властивості найпростіших геометричних фігур, учням не повідомляється термін *«аксіома»*. Вводиться поняття про аксіому і теорему в окремих параграфах підручника. Наприкінці перших уроків геометрії, як правило, тут формулюються всі аксіоми, покладені в основу курсу.

Основна мета перших уроків геометрії – дати поняття про геометрію; систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури; ввести первісні (неозначувальні) поняття і поставити учнів перед потребою ввести означення деяких відомих їм фігур: відрізок, пів пряма, кут, трикутник, паралельні прямі; розглянути первісні та означу вальні відношення; сформулювати основні властивості найпростіших фігур і властивості вимірювання відрізків і кутів, які наприкінці теми буде названо аксіомами.

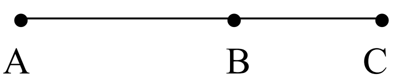
Всі діючі підручники дотримуються досягнення зазначеної мети.

б)Найпростіші фігури. Формування понять.

Щодо первісних неозначувальних понять планіметрії («точка», «пряма») , то уявлення про них учні вже повинні мати з попередніх класів. Розглянемо як формуються інші поняття. Розглянемо поняття «промінь», «доповняльні промені», «відрізок», «кут», «трикутник», « паралельні прямі» за підручником Капіносова([13]).

Специфіка викладення змісту понять в цьому підручнику є те, що автор дає терміни – синоніми до багатьох понять. Так, розглядаючи властивості належності точок і прямих, з одного боку говорять: «точка лежить на прямій», з іншого «пряма проходить через точку».

Якщо на прямій розташовані три точки, то можемо сказати, що:

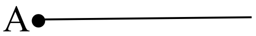


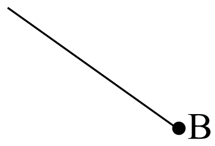
1) Одна з них (В) лежить між двома іншими (А і С);
2) Точки А і С лежать з різних боків від В;
3) Точки В і С лежать з одного боку від А.

У §2 підручника учні мають можливість ознайомитися з означеннями понять: «промінь», «доповняльні промені», «відрізок». Виконаємо логіко-дидактичний аналіз цих понять:

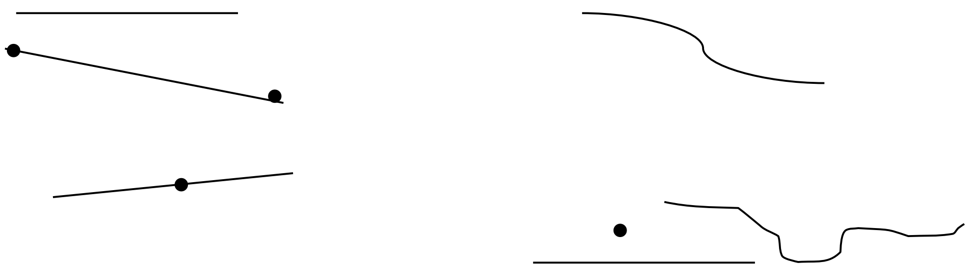
Промінь – частина прямої, що складається з точки, яку називають початком променя, а також з усіх точок прямої, що лежать з одного боку від вказаної точки.

Приклади:



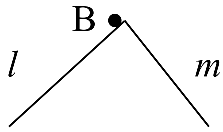


Контрприклади:

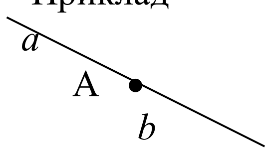


Доповняльні промені – два промені однієї прямої, які мають тільки одну спільну точку.

Контрприклад:



Приклад



Відрізок – частина прямої, що складається з двох точок прямої, а також усіх точок прямої, які лежать між цими точками.

Кут – два промені, що мають спільний початок і частина площини, обмежена цими променями. Промені називаються сторонами кута, а їхній спільний початок –вершиною кута.

Трикутником називають частину площини, обмежену трьома відрізками, що попарно сполучають три точки, які не лежать на одній прямій.

Означувальні поняття на перших уроках геометрії можна вводити і конкретно-індуктивним, і абстрактно-дедуктивним методом. Так учні можуть самостійно сформулювати означення таких понять: «відрізок», «розгорнутий кут», «паралельні прямі», «бісектриса кута», а означення таких понять, як «кут», «трикутник», «рівні трикутники», «суміжні кути», «перпендикуляр до прямої» доцільніше ввести абстрактно-дедуктивним методом.

в) Система аксіом планіметрії

Мерзляк	Бевз
1)Основна властивість прямої: через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну. **2)Основна властивість довжини відрізка**: якщо т.С є внутрішньою точкою відрізка АВ , то відрізок АВ дорівнює сумі відрізка АС і СВ, тобто АВ=АС+СВ. Якщо т.С не належить відрізку АВ, то АВ<АС+СВ. **3)Основна властивість величини кута:** Якщо промінь ОС ділить кут АОВ на два кути АОС і СОВ, то кут АОВ дорівнює сумі кутів АОС і СОВ. **4)**Для будь-яких двох точок М і Н існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями і кожен відрізок має певну довжину. **5)**Якою б не була пряма існують точки, які належать цій прямій і точки, які не належать їй. **6)Основна властивість трикутника:** для даного трикутника АВС і променя А, М існує трикутник А1В1С1 рівний трикутнику АВС і такий,що АВ=А1В1,ВС=В1С1, АС=А1С1 і сторона А1В1 належить променю А1М, а вершина С1 у заданій півплощині відносно прямої А1М. **7)Основна властивість паралельних прямих**: через точку,яка лежить на даній прямій проходить тільки одна пряма, паралельна даній.	**1. Основні властивості розміщення точок на прямій.** 1.1 Яка б не була пряма існують точки, що належать цій прямій і точки,що їй не належать. 1.2 Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну. 1.3 З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими. **2. Основні властивості вимірювання відрізків** 2.1 Кожен відрізок має певну довжину 2.2 Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка внутрішня точка. **3. Основні властивості вимірювання кутів** 3.1 Кожний кут має певну міру 3.2 Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.

г) Доведення перших теорем

Однією з методичних проблем ШКГ є ознайомлення учнів з першими логічними доведеннями геометричних тверджень. Учні не розуміють призначення доведень, а тому в них не виникає потреби доводити геометричні твердження. В зв’язку з цим, логічні обґрунтування на перших уроках планіметрії слід проводити не з метою запевнити учнів у істинності геометричних тверджень, а для пояснень нових геометричних знань з опорою на вже відомі факти і наявні знання. Тому робота з першими теоремами геометрії має починатися з експерименту, тобто з дослідної перевірки фактів; після того, як доведено теореми, слід кожного разу підкреслювати, що, оскільки теорема доведена, то відпадає необхідність у повторенні експерименту.

Процес ознайомлення учнів з теоремами, їх виникненням і прийомами доведення, має складатися з таких етапів:

I. **Експеримент**, який встановлює дослідним шляхом вірогідність справедливості того чи іншого судження, яке виникає на основі життєвого досвіду, або спостереження учнів.

II. **Доведення,** яке полягає в поясненні причин, за яких відбувається факт, сформульований в теоремі.

III. **Застосування** теореми на практиці, та при розв'язуванні задач.

Без останнього етапу засвоєння теореми не буде осмисленим і плідним.

Починаючи з вивчення перших теорем слід привчати учнів до старанного запису умов і висновку теорем за наперед заготовленим рисунком. Також треба навчити учнів до культури запису на дошці і в зошиті, а саме рекомендувати запис теореми зліва, а скорочений запис теореми справа. Для скороченого запису доречно показати учням вживання деяких символів: $\notin, \in$.

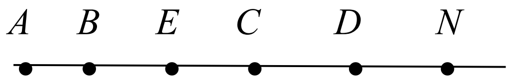
д)особливості системи задач перших уроків.

Система задач, які розв'язуються на перших уроках геометрії покликана вирішити педагогічні проблеми у геометричній підготовці учнів, а саме:

1) Найпростіші геометричні задачі повинні сприяти розумінню учнями змісту доведень математичних тверджень.

Розглянемо приклади таких задач і методику їх доведення:

Задача 1



Дано:*AB=BC=CD=6* см.
т.*E* – середина *BC*
Знайти: *AE* і *ED*

Учитель ознайомлює учнів з задачею і коротко записує на дошці. Учні записують у зошит. Вчитель повинен впевнитися, що учні усвідомили умову задачі.

Наступним кроком учитель пропонує учням розв'язати задачу самостійно. Деякі учні знаходять довжини безпосередньо вимірюванням. Інші самостійно виконують найпростіші логічні міркування із яких слідує, що *BE=EC=3* см. (оскільки *E*-середина *BC*). *AE=AB+BE=6+3=9* (см). *ED=EC=3+6=9* (см).

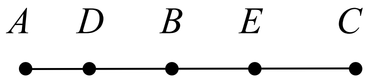
Обидва способи правильні, але другий спосіб краще, оскільки не потрібно вимірювати. При розв'язуванні задач другим способом , в учнів формується потреба у доведенні як необхідність впевнитися логічними міркуваннями, про те, що інтуїтивне передбачення було правильне.

2) Доречно розв'язувати такі задачі, які є з'єднуючою ланкою між задачами на доведення і на обчислення.

Приклад:

Дано: *AD*=1,8 см, *EC*=3 см, т.*D* –середина *AB*, т.*E* – середина *BC*.

Знайти: *DE* і *AC*



3) Система задач має бути спрямована на властивості найпростіших фігур, на формування вмінь, посилатися на аксіоми, теореми і доведення у процесі доведення нових математичних тверджень.

Ніколи не було методичною проблемою розв’язування задач, які мають тренувальний характер і зводяться до застосування теореми, яку тільки вивчили. Більш складним є завдання навчити розв’язувати задачі в яких треба застосувати не одну теорему, а декілька.

23. Прямі і кути на площині. Паралельні і перпендикулярні прямі, ознаки паралельності.

В теорії паралельних прямих учні мають змогу засвоїти означення паралельних прямих: *дві прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.*

Аксіома паралельних прямих: *через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.*

Але цих відомостей недостатньо, щоб визначити паралельність цих двох заданих прямих. Тому вчитель має пояснити учню необхідність введення теорем-ознак та відмінність ознаки від означення.

Введення означень внутрішніх односторонніх і внутрішніх різносторонніх кутів має передувати ознайомленню з цими кутами на наочному рівні із залученням рисунка.

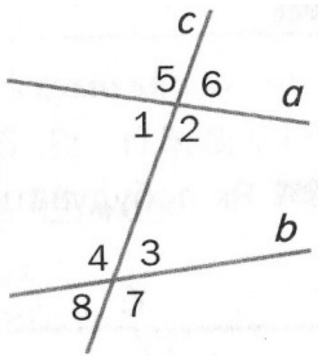


Рис. 23.1

Слід домогтися, щоб учні означали і правильно називали кути при перетині двох паралельних третьою.

Якщо дві прямі ***a*** і ***b*** перетнути третьою прямою ***c*,** то утвориться вісім кутів (рис. 23.1). Пряму ***c*** називають січною прямих ***a*** і ***b***.

Кути 3 і 2, 4 і 1 називають ***односторонніми***.

Кути 3 і 1, 4 і 2 називають ***різносторонніми***.

Кути 6 і 3 , 5 і 4, 2 і 7, 1і 8 називають ***відповідними***.

До теорем-ознак паралельності прямих в підручнику Мерзляк А.Г. та інших автори відносять наступні теореми:

1) Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.
2) Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.
3) Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
4) Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.
5) Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Вивчення ознак паралельності прямих, методична схема:

1) Підвести учнів до теореми і сформулювати її.
2) Повідомити ідею і план доведення.
3) Провести доведення за планом, закріпити кожен з етапів.
4) Закріпити доведення шляхом його повного повторення.
5) Застосувати теореми до розв'язування задач.

Теореми теми мають велике практичне значення.

Після доведення теореми 1 (дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні) з'являється змога за допомогою лінійки і косинця будувати паралельні прямі.

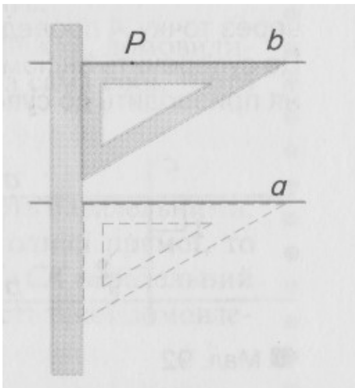


Рис. 23.2

Наслідок з теореми 1: Через дану точку *M*, яка не належить прямій *a*, можна провести пряму *b* паралельну *a.*

Але цей наслідок не завжди зрозумілий учням, оскільки вони не розрізняють теорему і аксіому паралельних.

На завершення вивчення теми раціонально разом з учнями виділити правило-орієнтир з'ясування паралельності двох прямих:

«Щоб довести паралельність двох прямих на площині, досить довести одне з таких тверджень:

1) внутрішні різносторонні кути рівні;
2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;

3) відповідні кути рівні;

4) кожна з прямих паралельна третій прямій;

5) кожна з прямих перпендикулярна третій прямій».

<u>Доведення теорем.</u>

Теорема 14.1. ***Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

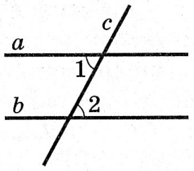


Рис. 205

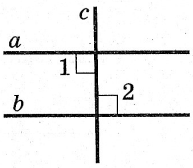


Рис. 206

Доведення. ⊙ На рисунку 205 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Якщо $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (рис. 206), то паралельність прямих a і b випливає з теореми 13.1.

Нехай тепер пряма c не перпендикулярна до жодної з прямих a і b. Позначимо точку M — середину відрізка AB (рис. 207). Через точку M проведемо перпендикуляр ME до прямої a. Нехай пряма ME перетинає пряму b у точці F. Маємо: $\angle 1 = \angle 2$ за умовою; $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як вертикальні. Отже, $\Delta AME = \Delta BMF$ за другою ознакою. Звідси $\angle AEM = \angle MFB = 90^\circ$. Ми показали, що прямі a і b перпендикулярні до прямої EF, отже, вони паралельні. ▲

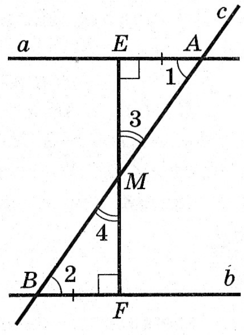


Рис. 207

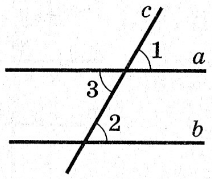


Рис. 209

Теорема 14.2. ***Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 208 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 суміжні, отже, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Тоді $\angle 2 = \angle 3$. Але вони різносторонні. Тому за теоремою 14.1 $a \parallel b$. ▲

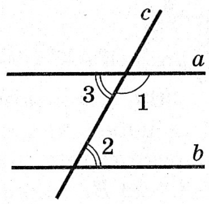


Рис. 208

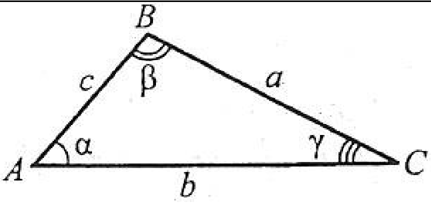
Теорема 14.3. ***Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

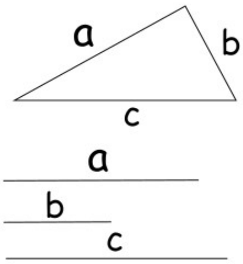
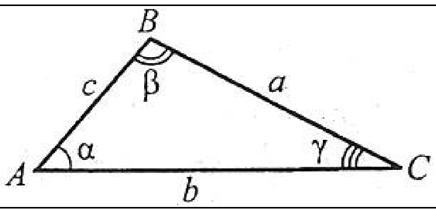
Доведення. ⊙ На рисунку 209 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

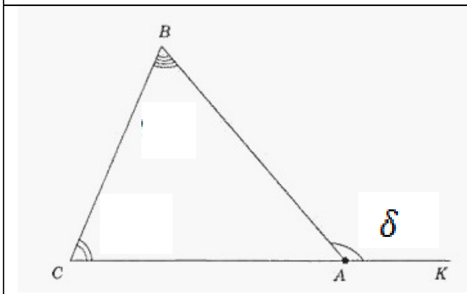
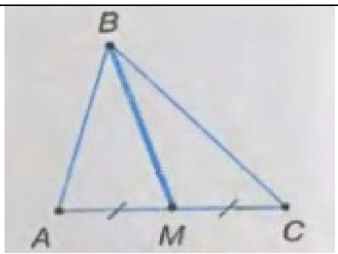
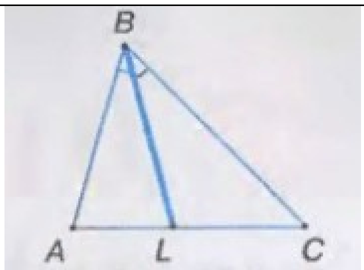
Кути 1 і 3 рівні як вертикальні. Отже, $\angle 3 = \angle 2$. Але вони різносторонні. Тому за теоремою 14.1 $a \parallel b$. ▲

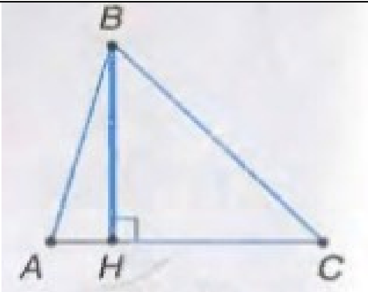
24. Методика вивчення теми «Трикутник». Медіана, бісектриса, висота трикутника: означення і властивості. Види трикутників за сторонами і кутами.

Основні поняття і факти про трикутник згідно з програмою вивчаються в темі «Трикутник» в курсі геометрії 7 класу. Далі факти і відомості про цю фігуру поступово розгортаються в інших темах 7,8,9 класів.

<table>
<tr><td colspan="3">ТРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Означення трикутника</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Трикутником називається геометрична фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки</td><td>Точки
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ – вершини трикут

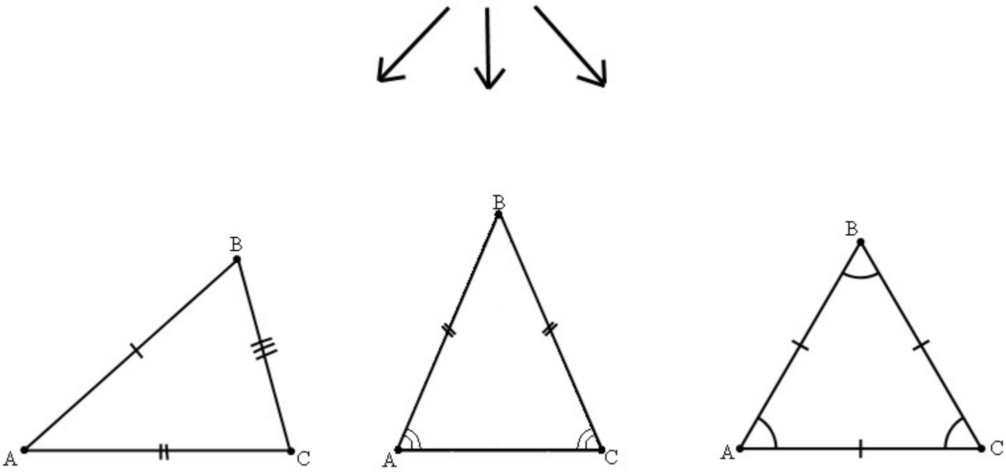
кути $\angle\boldsymbol{\alpha}, \angle\boldsymbol{\beta}, \angle\boldsymbol{\gamma}$ – кути тр
відрізки $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – сторони</td></tr>
<tr><td colspan="3">Нерівність трикутника</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Будь-яка сторона трикутника менша за суму двох інших сторін, але більша за модуль їх різниці.</td><td>$|a-b| < c < a+b$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Сума кутів трикутника</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Сума кутів трикутника дорівнює 180°.
Проти більшої сторони у трикутнику лежить більший кут і навпаки.</td><td>$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$b > a \leftrightarrow \beta > \alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Зовнішній кут трикутника</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.</td><td>$\delta = \gamma + \beta$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Медіана, бісектриса, висота трикутника</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.</td><td>BM – медіана AM=MC</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає його вершину з точкою на протилежній стороні трикутника.</td><td>BL - бісектриса
$\angle ABL = \angle CBL$</td></tr>
</table>

	**Висотою трикутника** називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.	BH - висота, $BH \perp AC$
Кожний трикутник має три медіани, три бісектриси і три висоти. Їх позначають і маленькими буквами: медіану – m, бісектрису – l, висоту – h.		

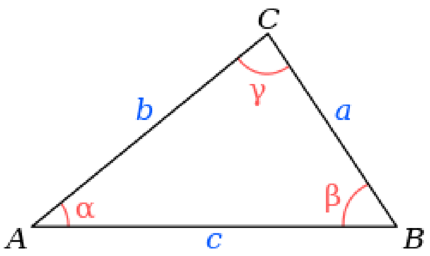
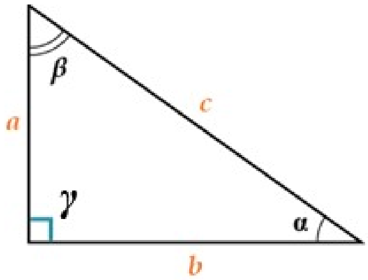
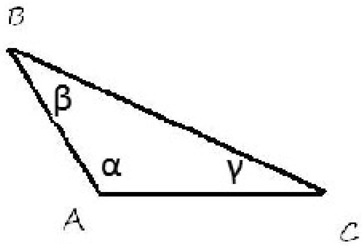
За кількістю рівних сторін трикутники можна класифікувати так.

Трикутники



Різносторонні трикутники Рівнобедрені трикутники Рівносторонні трикутники

Види трикутників за кутами

Гострокутні трикутники	**Прямокутні трикутники**	**Тупокутні трикутники**
		
$\angle\alpha < 90^\circ$ $\angle\beta < 90^\circ$ $\angle\gamma < 90^\circ$	$\angle\alpha < 90^\circ$ $\angle\beta < 90^\circ$ $\angle\gamma = 90^\circ$	$\angle\alpha > 90^\circ$ $\angle\beta < 90^\circ$ $\angle\gamma < 90^\circ$

25. Методика вивчення ознак рівності трикутників. Перша і друга ознаки рівності трикутників.

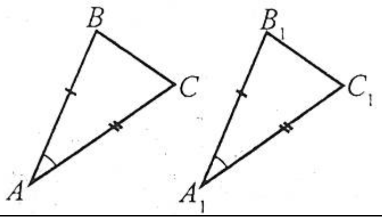
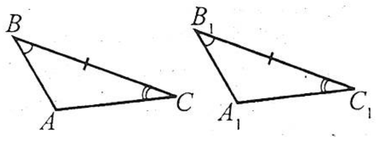
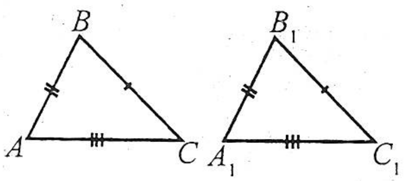
Ознаки рівності трикутників формулюються так:

- (перша ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними) ***Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють***

відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

- (друга ознака рівності трикутників за стороною і двома прилеглими до неї кутами) ***Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***
- (третя ознака рівності трикутників за трьома сторонами) ***Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Всі тереми-ознаки сформульовано в умовній формі, що сприяє чіткому виділенню умови та вимоги кожної теореми.

За двома сторонами і кутом між ними 	Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника, відповідно рівні двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.	$AB = A_1B_1$ $AC = A_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$
За стороною і двома прилеглими кутами 	Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно рівні стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.	$BC = B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = \angle C_1$ тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$
За трьома сторонами 	Якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.	$AB = A_1B_1$ $BC = B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Проте відомо, що сформульовані у категоричній формі теореми більш лаконічні, а завдання учням переформулювати теореми в категоричну форму сприяє розвитку логічного мислення та математичної мови.

Ідея доведення ознак рівності трикутників спирається на означення рівних трикутників, я саме: ***Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити.***

Доведення перших ознак рівності трикутників доцільно організувати на трьох рівнях строгості або в «три підходи»:

1)Вчитель виконує сам. Його мета ознайомити учнів зі структурою доведення в цілому. За рисунком вчитель пояснює основну ідею доведення, називає основні твердження, з яких воно складається, без потрібних обґрунтувань.

2)При виконанні другого підходу доведення відтворюється з усіма необхідними обґрунтуваннями. В цьому разі доречно заздалегідь заготувати таблицю: в лівому стовпчику записати всі твердження, з яких складається доведення, а в правому – обґрунтування кожного з них. На початку другого підходу доведення теореми правий стовпчик має бути закритий і відкриватися в міру відповідей учнів на запитання «чому?».

3)Під час третього підходу вводиться домовленість випускати обґрунтування деяких найбільш інтуїтивних і наочно зрозумілих тверджень для скорочення доведення. З метою закріплення доведення ще раз повторює його в скороченому варіанті.

Проілюструємо методичний варіант на прикладі вивчення І-ї ознаки рівності трикутників. Теорема 8.1(за двома сторонами і кутом між ними). Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Дано: трикутник *ABC* і трикутник $A_1B_1C_1$; Нехай $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$.

Довести: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$;

Доведення:

І прохід – вчитель виконує сам. Розглянемо трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$, в яких $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$. Накладемо трикутник *ABC* на трикутник $A_1B_1C_1$, так щоб промінь *BA* сумістився з променем B_1A_1, а промінь *BC* – з променем B_1C_1. Це можна зробити тому, що за умовою $\angle B=\angle B_1$. Доведемо, що за таких умов вершина *A* збігається з вершиною A_1, вершина *C* – з вершиною C_1(основна ідея доведення). Оскільки за умовою $BA=B_1A_1$, $BC=B_1C_1$, то при такому накладанні сторона *BA* суміститься з B_1A_1, *BC* суміститься з B_1C_1. Отже трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, тобто вони рівні.

ІІ прохід - вчитель показує учням таблицю.

Твердження	Обгрунтування
1)Накладемо трикутник *ABC* на трикутник $A_1B_1C_1$ так: промінь *BA* суміститься з B_1A_1, *BC* – з B_1C_1	За умовою $\angle B=\angle B_1$, за означення рівних трикутників
2)Відрізок *BA* суміститься з B_1A_1	За умовою, що $AB=A_1B_1$; за означенням рівних відрізків
3)Відрізок *BC* суміститься з B_1C_1	За умовою, що $BC=B_1C_1$; за означенням рівних відрізків
4) $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$	За доведеним і за означенням рівних трикутників

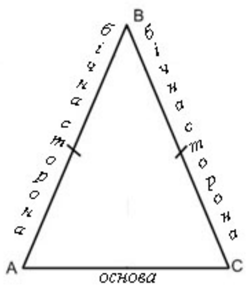
В лівому стовпчику таблиці записано всі твердження, з яких складається доведення (правий стовпчик закритий) і пропонує відповісти на запитання «чому виконується кожне твердження?». Правий стовпчик відкривається в міру відповідей учнів.

ІІІ прохід – вчитель ще раз повторює доведення в скороченому варіанті. Це по суті доведення, наведене в підручнику.

26. Методика вивчення теми «Рівнобедрений трикутник» в курсі 7 кл. Методика вивчення третьої ознаки рівності трикутників.

Рівнобедрений трикутник та його властивості вивчаються після доведення другої ознаки рівності трикутників перед третьою ознаки рівності трикутників.

Означення поняття «рівнобедрений трикутник» вводиться через найближчий рід і суттєві властивості, а саме:



Трикутник, у якого дві сторони рівні називають *рівнобедреним*.

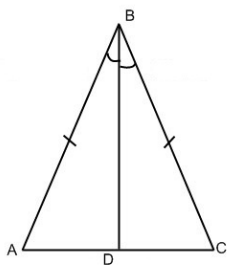
Вводяться назви елементів рівнобедреного трикутника. Рівні сторони називають бічними, третю сторону називають основою. Спільну точку бічних сторін називають вершиною. Кут В – кутом при вершині , кути А і С – кути при основі. Ці елементи вводяться описово.

Зміст поняття «рівнобедрений трикутник» також розкривається в теоремі-властивості.

Теорема 9.1. У рівнобедреному трикутнику:

1) кути при основі рівні;
2) бісектриса кута при вершині є медіаною і висотою.

(Доведення теореми спирається на першу ознаку рівності трикутників.)



Дано: ΔABC, $AB=BC$;
BD – бісектриса $\angle ABC$;
Довестити: а) $\angle A=\angle C$;
б) BD – медіана і висота.

Доведення:

Крок:	Логічне обґрунтування:
а) 1. $\Delta BAD=\Delta BCD$ 2. $\angle BAD=\angle BCD$, тобто $\angle A=\angle C$	а) 1. За першою ознакою рівності трикутників: $AB=BC$ (за умовою), BD – спільна, $\angle ABD=\angle CBD$ (BD – бісектриса). 2. З рівності $\Delta BAD=\Delta BCD$ слідує рівність відповідних елементів.
б) 1. $AD=DC$, тоді CD – медіана 2. $\angle BDA=\angle BDC=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$, тоді BD – висота	б) 1. З рівності $\Delta BAD=\Delta BCD$ слідує рівність відповідних елементів, тобто, що $AD=DC$; з означення медіани. 2. З рівності $\Delta BAD=\Delta BCD$ слідує рівність відповідних елементів, тобто, що $\angle BDA=\angle BDC$; з властивості суміжних кутів; з означення медіани.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає:

1. У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.

2. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота і медіана, проведені з його вершини збігаються.

В цьому ж параграфі вводяться означення рівнобедреного і рівностороннього трикутника, тому з'являється можливість класифікувати всі трикутники за сторонами (по кількості рівних сторін).

Ознаки рівнобедреного трикутника

За чинною програмою розглядають 4 ознаки рівнобедреного трикутника:

(1) Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений (доводиться теорема за допомогою властивості серединного перпендикуляра).

(2) Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений (доводиться теорема за допомогою II ознаки рівності трикутників).

(3) Якщо медіана трикутника е його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений (доводиться теорема за допомогою I ознаки рівності трикутників).

(4) Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений (доводиться теорема методом від супротивного і спирається на властивість серединного перпендикуляра).

27. Методика вивчення теореми про суму кутів трикутника. Реалізація методики роботи з готовим доведенням теореми.

Теорема про суму кутів трикутника є одним з фундаментальних тверджень, що стосується властивостей трикутників.

Теорема про суму кутів трикутника безпосередньо використовується для доведення властивості зовнішніх кутів трикутника, ознак рівності прямокутних трикутників, теореми про існування і єдність перпендикуляра до прямої. Теорема про суму кутів трикутника допускає самостійне її відкриття. Якщо сформулювати теорему у вигляді задачі і в подальшій роботі запропонувати учням самостійно провести експеримент, вимірюючи кути двох різних трикутників за допомогою транспортира, знайти суму кутів. Таким чином, готується підґрунття для повноцінного засвоєння цієї теореми.

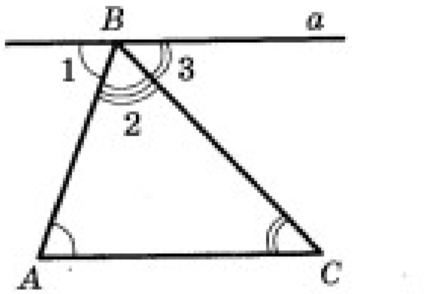
Теорема про суму кутів трикутника

Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Сума кутів трикутника дорівнює 180^o.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Який би не був многокутник
4. Виділення умови	Многокутник є трикутником (Проста)
5. Виділення вимоги	Сума кутів многокутника дорівнює 180^o (Проста)

6. Формулювання твердження рівносильного даному	Який би не був многокутник, якщо многокутник є трикутником, то сума кутів многокутника дорівнює 180º.

Розглянемо доведення.

Теорема: Сума кутів трикутника дорівнює 180°.



Дано: $\Delta\ ABC$

Довести: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Ідея доведення: знайти кути, рівні кутам трикутника, такі, щоб їх градусна міра була заздалегідь відома.

План доведення

Крок доведення	Логічне обґрунтування
1) Через вершину *B* трикутника проведемо пряму *a* паралельну *AC*	1) На основі тереми про існування прямої, паралельної даній
2) Кут *A* дорівнює куту 1 як різносторонній при а паралельна *AC* і січній *AB*	2) На основі властивостей паралельних прямих
3) Кут *C* дорівнює куту *2* як різносторонні при а паралельна *AC* і січній *AB*	3) На основі властивостей паралельних прямих
4) $\angle 1 + \angle 2 + \angle B = 180°$	4) Очевидний факт випливає із градусної міри розгорнутого кута, аксіоми вимірювання кутів
5) $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	5) На основі 2-го і 3-го 4-го кроків доведення

Розглядаючи наслідок з теореми про суму кутів трикутника і теореми про існування і єдність перпендикуляра до прямої, доцільно залучити учнів до колективного пошуку доведення у відповідності із введеним раніше алгоритмом застосування методу від супротивного.

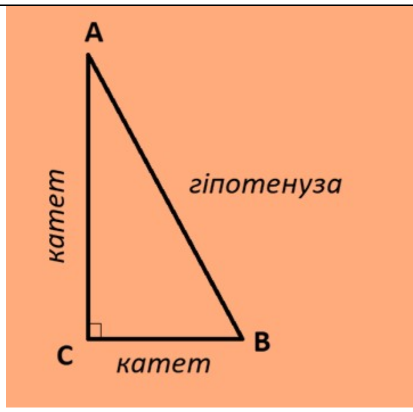
28. Методика вивчення теми «Прямокутний трикутник». Ознаки рівності прямокутних трикутників (7 клас).

У 7 класі учнів знайомлять з поняттям прямокутного трикутника, з ознаками рівності прямокутних трикутників та властивості прямокутних трикутників. Після цього вивчення прямокутних трикутників продовжується у 8 класі в темі: «Розв’язування прямокутних трикутників».

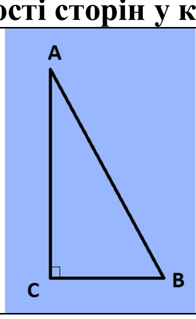
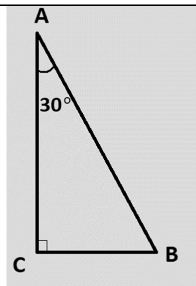
Державні вимоги до знань та умінь учнів:

7 клас: **Формулює** *властивості* прямокутного трикутників; **зображує та знаходить на малюнках** : прямокутні трикутники та їх елементи; **обґрунтовує**: належність трикутника до певного виду, рівність трикутників; **застосовує** вивчені означення та властивості до розв’язування задач.

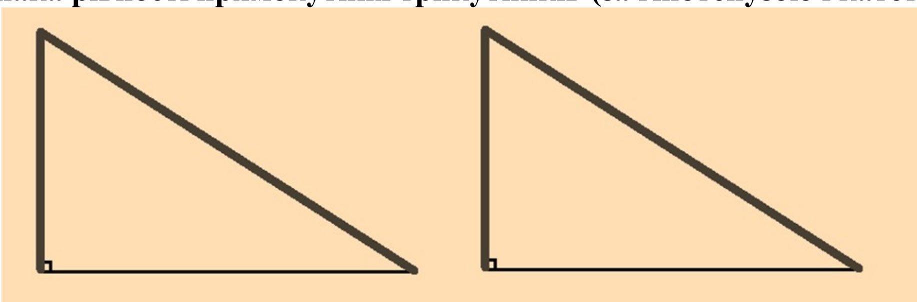
Наведемо фрагменти ЛМА теми

Прямокутний трикутник	Трикутник називають прямокутним, якщо один з його кутів прямий.	
Катет	Сторони прямокутного трикутника, прилеглі до прямого кута, називають катетами.	
Гіпотенуза	Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою.	

Властивості сторін у кутів прямокутного трикутника

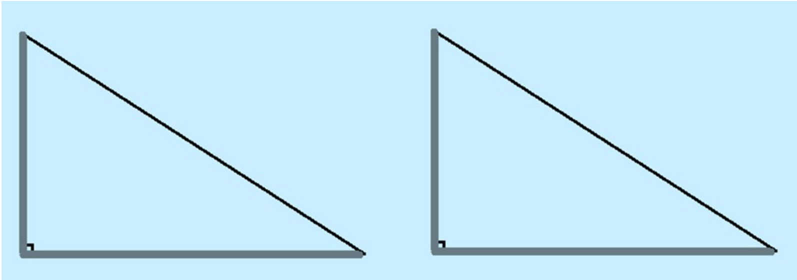
Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90^0		В прямокутному трикутнику катет, який лежить проти кута 30^0 дорівнює половині гіпотенузи	

Ознака рівності прямокутних трикутників (за гіпотенузою і катетом)



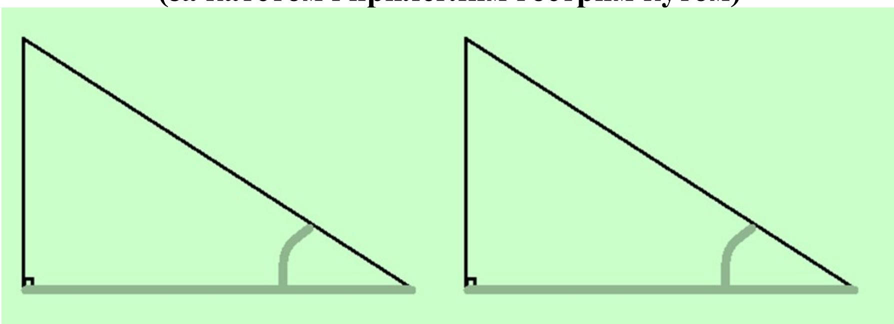
Етапи проведення аналізу	**Результат**
1. Формулювання твердження	Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Умовне, складене, кон’юнктивна структура
3. Виділення роз’яснювальної частини	Для двох прямокутних трикутників
4. Виділення умови	Гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого (Складена, кон’юнктивна)
5. Виділення вимоги	трикутники рівні (Проста)
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Прямокутні трикутники, з рівними відповідно гіпотенузою і катетом, будуть рівними.

Ознака рівності прямокутних трикутників (за двома катетами)



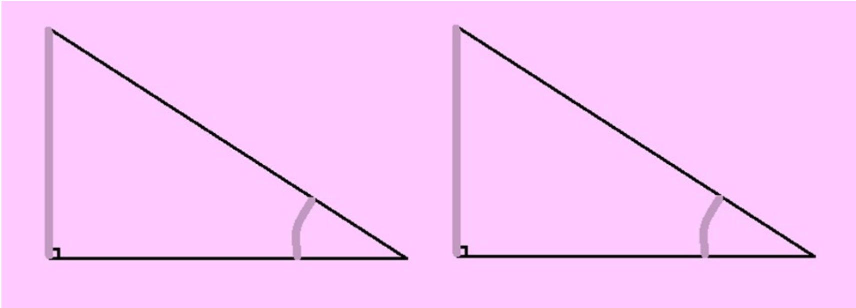
Етапи проведення аналізу	Результат
1.Формулювання твердження	Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.
2.Встановлення виду твердження	Умовне, складене, кон'юнктивна структура
3.Виділення роз'ясн. частини	Для двох прямокутних трикутників.
4.Виділення умови	Катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого (Проста)
5.Виділення вимоги	Трикутники рівні (Проста)
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Прямокутні трикутники, у яких катети відповідно дорівнюють одне одному, будуть рівними.

Ознака рівності прямокутних трикутників
(за катетом і прилеглим гострим кутом)



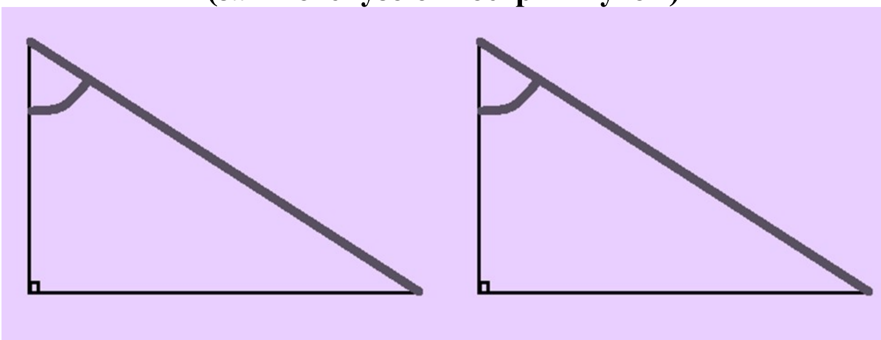
Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Умовне, складене, кон'юнктивна структура
3. Виділення роз'ясн. частини	Для двох рівних трикутників
4. Виділення умови	Катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього гострому куту другого (Складена)
5. Виділення вимоги	Трикутники рівні (Проста)
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Прямокутні трикутники, у яких катети і прилеглі до них гострі кути відповідно дорівнюють одне одному, будуть рівними.

Ознака рівності прямокутних трикутників
(за катетом і протилежним гострим кутом)



Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Умовне, складене, кон'юнктивна структура
3. Виділення роз'ясн. частини	Для двох рівних трикутників
4. Виділення умови	Катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому гострому куту другого (Складена, кон'юнктивна)
5. Виділення вимоги	Трикутники рівні (Проста)
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Прямокутні трикутники, у яких катети і протилежні їм гострі кути відповідно дорівнюють одне одному, будуть рівними.

Ознака рівності прямокутних трикутників
(за гіпотенузою і гострим кутом)



Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
2. Встановлення виду твердження	Умовне, складене, кон'юнктивна структура
3. Виділення роз'ясн. частини	Для двох рівних трикутників
4. Виділення умови	Гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого (Складена, кон'юнктивна)
5. Виділення вимоги	Трикутники рівні (Проста)
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Прямокутні трикутники, у яких гіпотенуза і гострі кути відповідно дорівнюють одне одному, будуть рівними.

Теорема про порівняння гіпотенузи і катета

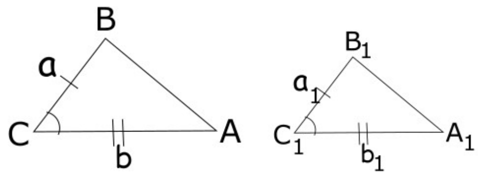
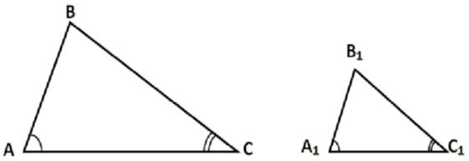
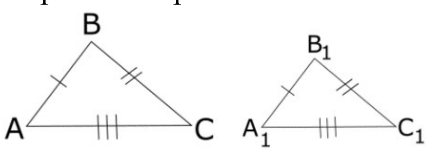
Етапи проведення аналізу	Результат

1. Формулювання твердження	У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'ясн.частини	Прямокутний трикутник
4. Виділення умови	Сторона трикутника є гіпотенузою (Проста)
5. Виділення вимоги	Сторона більша за катет (Проста)
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо сторона трикутника є гіпотенузою, то вона більша за катет.

29. Методика вивчення теми «Подібність трикутників» (8 клас)

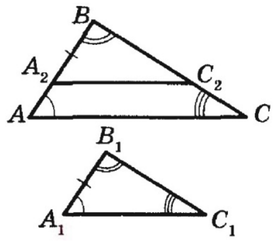
В курсі геометрії 8 класу після вивчення теореми Фалеса, та узагальненної теореми Фалеса вивчається тема «Подібність трикутників». Основні поняття теми:

Відношення двох відрізків (8)	Відношенням двох відрізків називають відношення їх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях виміру.	Вид: конструктивне означення Характеристичні властивості: 1) Відношення двох відрізків 2) Відношення довжин відрізків, виражених в одних і тих самих одиницях виміру
Подібні трикутники (8)	Два трикутники називають подібними, якщо у них рівні кути і відповідні сторони пропорційні.	Вид: описове означення Характеристичні властивості: 1) Два трикутники 2) Рівні кути трикутників 3) Відповідні сторони трикутників пропорційні

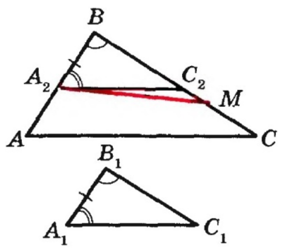
Ознаки подібності триктуників		
За двома сторонами і кутом між ними 	Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники є подібними.	$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ $\angle C = \angle C_1$ тоді $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$
За двома кутами 	Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники є подібними.	$\angle A = \angle A_1$ $\angle C = \angle C_1$ тоді $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$
За трьома сторонами 	Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники є подібними.	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ тоді $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

ЛМА доведення теорем-ознак подібності триктуників.

Перша ознака подібності трикутників

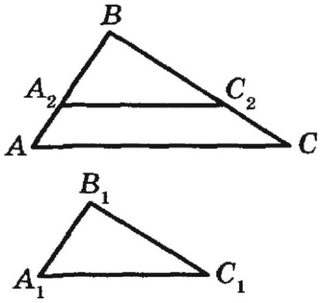
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико-синтетичний метод
Основна ідея доведення	Використання другої ознаки рівності трикутників, леми про подібні трикутники
Етапи доведення	1. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких кут A= кут A_1 і кут B= кут B_1  2. Якщо $AB=A_1B_1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні. 3. Нехай, наприклад, $AB>A_1B_1$. Відкладемо на стороні BA відрізок BA_2, який дорівнює стороні B_1A_1. Через точку A проведемо пряму A_2C_2, паралельну стороні AC. 4. Кути A і BA_2C_2 є відповідними при паралельних прямих A_2C_2 і AC та січній AA_2. Звідси кути A і BA_2C_2 рівні. 5. Отже, трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників. Тоді за лемою про подібні трикутники, трикутники A_2BC_2 і ABC подібні. Отже, трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні.

Друга ознака подібності трикутників

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико-синтетичний метод
Основна ідея доведення	Використання першої ознаки рівності трикутників, леми про подібні трикутники
Етапи доведення	1. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB:A_1B_1=BC:B_1C_1=k$ і кути B і B_1  2. Якщо k=1, то $AB=A_1B_1$ і $BC=B_1C_1$, а отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників, тобто ці трикутники подібні. 3. Нехай, наприклад, k>1, тобто $AB>A_1B_1$ і $BC>B_1C_1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідні точки A_2 і C_2 так, що $BA_2=A_1B_1$ і $BC_2=B_1C_1$. Тоді $AB:BA_2=BC=BC_2$. 4. Покажемо, що $A_2C_2\|AC$. Припустимо, що це не так. Тоді на стороні BC позначимо точку M таку, що $A_2M\|AC$. Маємо $AB:BA_2=BC:BM$. Але $AB:BA_2=BC:BC_2$, тоді $BC:BC_2=BC:BM$, тобто $BC_2=BM$. Отже, буквами M і C_2 позначено одну й ту саму

	точку. Тоді $A_2C_2 \parallel AC$. 5. За лемою про подібні трикутники, трикутники ABC і A_2BC_2 подібні. Проте очевидно, що трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.

Третя ознака подібності трикутників

Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітико-синтетичний метод
Основна ідея доведення	Використання третьої ознаки рівності трикутників, леми про подібні трикутники
Етапи доведення	1. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB:A_1B_1=BC:B_1C_1=CA:C_1A_1=k$.  2. Якщо k=1, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників, тобто ці трикутники подібні. 3. Нехай, наприклад, k>1. На сторонах BA і BC позначимо відповідні точки A_2 і C_2 так, що $BA_2=A_1B_1$ і $BC_2=B_1C_1$. Тоді $AB:BA_2=BC=BC_2$. Отримуємо, що $A_2C_2 \parallel AC$ (це встановлено під час доведення другої ознаки подібності). 4. За лемою про подібні трикутники, трикутники ABC і A_2BC_2 подібні, причому коефіцієнт подібності дорівнює k. Тоді CA: $C_2A_2=k$, але за умовою CA: $C_1A_1=k$. Звідси $A_1C_1=A_2C_2$. 5. Отже, трикутник A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З урахуванням того, що трикутники A2BC2 і ABC подібні, отримаємо, що подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.

30. Методика вивчення площ трикутників.

У курсі планіметрії тема «Площа многокутника» розглядається як складова змістової лінії «Величини. Вимірювання величин». Основою вивчення теми є наочні, інтуїтивні уявлення, які учні дістали у 1-6 класах. Розглянемо методичний варіант вивчення теми «Площа многокутника» за підручником А.Г.Мерзляка та ін. Означення площі многокутника будується на практичних знаннях про площу і формулюється так:

Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості:

- рівні многокутники мають рівні площі;
- якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
- за одиницю виміру площі приймають площу одиничного квадрата, тобто квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.

Ці властивості використовують для доведення формули площі квадрата, яка сформульована у **лемі**.

Площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од (n – натуральне число) дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од^2.

Ідея доведення полягає в тому, що одиничний квадрат ділимо на n^2 рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$ (рис.30.1);

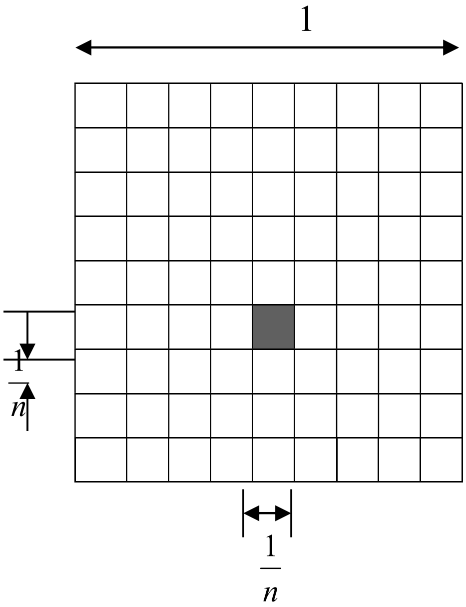


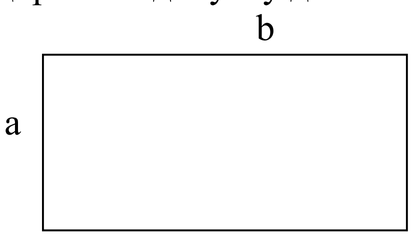
Рис. 30.1

з означення площі многокутника (властивість 1) всі ці квадрати мають рівні площі;

за властивістю 2 сума площ цих квадратів дорівнює площі одиничного квадрата, тобто 1 од^2;

а значить площа кожного маленького квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од^2.

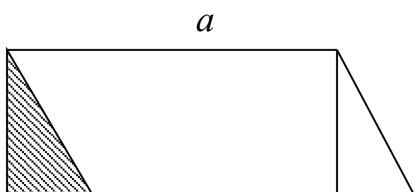
У курсі планіметрії на основі наочних уявлень про площу (1-6кл) теоретичні відомості про площі фігур будуються на індуктивній основі. Перед вивченням площ многокутників, корисно повторити одиниці вимірювання площ, співвідношення між цими одиницями, як визначити площу прямокутника,якщо довжина сторін є натуральне число. Першою в дедуктивному курсі доводиться площа прямокутника/ Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.



S =a*b

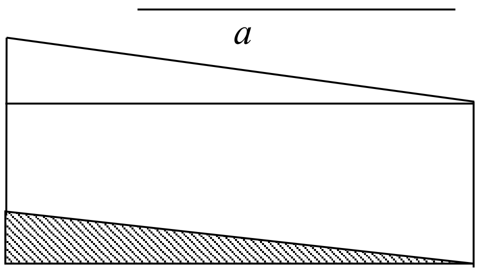
З формули площі прямокутника виводиться формула площі паралелограма.

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, яка відповідає цій стороні.



$S = a*h_a$

b

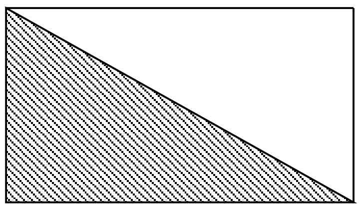


$S = b*h_b$

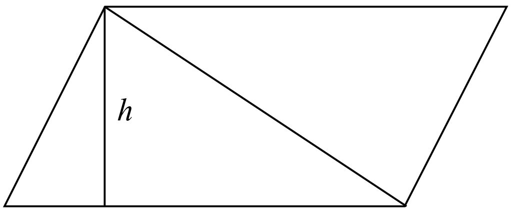
Формули для визначення площі трикутника: За допомогою виведених формул доводяться теореми про площу трикутника.

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на проведену до неї висоту.

Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів.



$$S = \frac{1}{2}ab$$



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

Крім розглянутих основних формул площ названих многокутників бажано за допомогою спеціальних систем задач ознайомити учнів з формулами площ інших многокутників. Їх доцільно звести у таблицю

Формули площ многокутників

Многокутник	Формули площі	Значення букв
Довільний трикутник	$S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $S = rp$; $S = \frac{abc}{4R}$	*a,b,c*-сторони, h_a- висота до *a*, α -кут між *a* і *b*, *p*-півпериметр, *r*-радіус вписаного кола *R*-радіус описаного кола
Прямокутний трикутник	$S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2}ch_c$	*a,b*-катети, *c*-гіпотенуза h_c-висота *c*, *a*-сторона
Рівносторонній трикутник	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	а-сторона

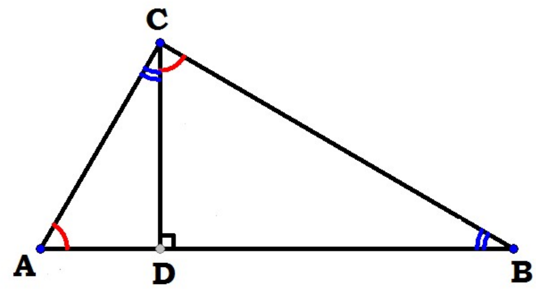
31. Методика вивчення прямокутного трикутника (8 клас). Теорема Піфагора. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику.

8 клас: **Наводить приклади** геометричних фігур та співвідношень, указаних у змісті; пояснює: що таке похила та її проекція, що означає «розв’язати прямокутний трикутник»; **формулює:**

- *властивості* перпендикуляра та похилої;
- *метричні співвідношення* у прямокутному трикутнику;
- *означення* синуса, косинуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника;
- *теорему Піфагора*;
- *співвідношення між сторонами і кутами* прямокутного трикутника.

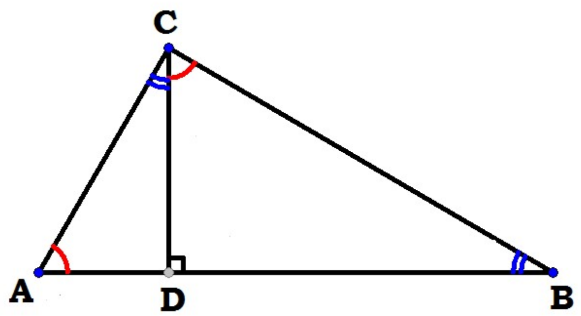
знаходить на малюнках сторони прямокутного трикутника, відношення яких дорівнює синусу, косинусу, тангенсу вказаного гострого кута; **обчислює** значення синуса, косинуса, тангенса для кутів 30°, 45°,60°; **доводить** теорему Піфагора; **розв’язує** прямокутні трикутники; **застосовує** вивчені означення й властивості до розв’язування задач.

Лема. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному трикутнику.
Звідси метричні співвідношення:
$CD^2 = AD \cdot DB$ $AC^2 = AB \cdot AD$
$CB^2 = AB \cdot DB$



Теорема 16.1 (теорема Піфагора). У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Доведення. На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$). Доведемо, що $AB^2 = AC^2 + BC^2$.



Проведемо висоту CD., отримуємо $AC^2 = AD \cdot AB;$
$BC^2 = DB \cdot AB.$
Звідси $AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + DB \cdot AB$.
Далі, $AC^2 + BC^2 == AB(AD + DB) = AB^2$.▲

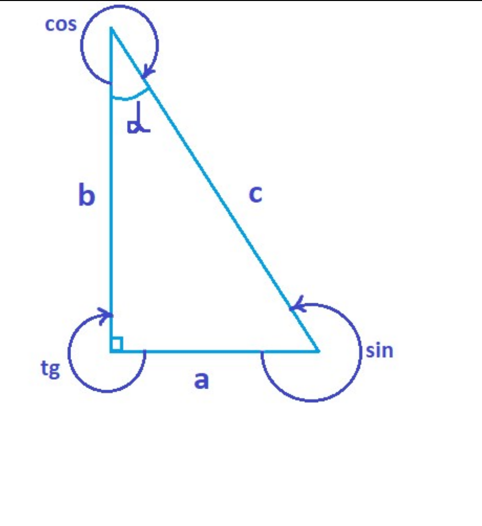
Якщо в прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють a і b, а довжина гіпотенузи дорівнює c, то теорема Піфагора може бути записана так:$a^2 + b^2 = c^2$.

Теорема Піфагора дає змогу за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2};$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

З рівності $c^2 = a^2 + b^2$ також випливає, що $c^2 > a^2$ і $c^2 > b^2$, звідси $c > a$ і $c > b$, тобто ***гіпотенузи більша за будь-який з катетів.***

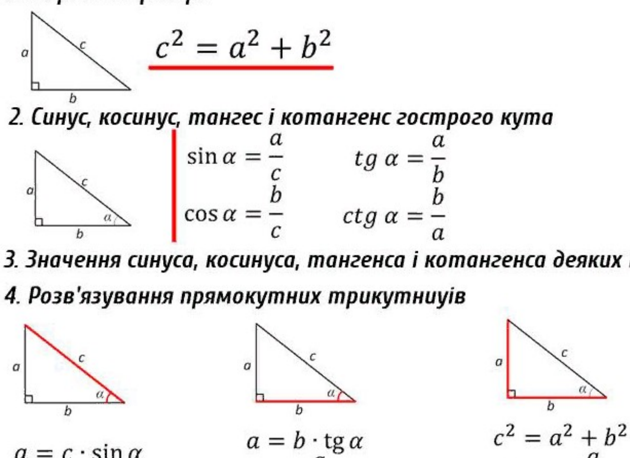
32. Співвідношення між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику Методика розв'язування прямокутних трикутників.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$



1. Теорема Піфагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. Синус, косинус, тангес і котангенс гострого кута

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad tg\,\alpha = \frac{a}{b}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

3. Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких кутів

функція \ кут α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Розв'язування прямокутних трикутниуів

$$a = c\cdot\sin\alpha \qquad a = b\cdot tg\,\alpha \qquad c^2 = a^2 + b^2$$
$$b = c\cdot\cos\alpha \qquad c = \frac{a}{\cos\alpha} \qquad tg\,\alpha = \frac{a}{b}$$

5. Основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Задача 1. Розв'язати прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом.

Дано: *a*, $\angle A$

Знайти: $\angle B$; c; b.

Розв'язання

● **1.** Знаходимо кут B: $\angle B = 90° - \angle A$.

2. За таблицею знаходимо $\sin A$ й обчислює c: $c = \frac{a}{\sin A}$.

3. За таблицею знаходимо $tg\, B$ й обчислюємо b: $b = a \cdot tgB$.●

Задача 2. Розв'язати трикутник за гіпотенузою і катетом**.**

Дано: a і c.

Знайти: b; $\angle A$; $\angle B$.

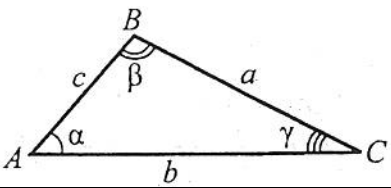
Розв'язання

● **1.** $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

2. Обчислюємо: $\sin A = \frac{a}{c}$. За таблицею синусів визначаємо кут A.

3. Знаходимо кут B: $\angle B = 90° - \angle A$. ●

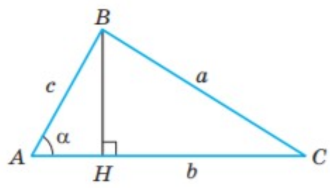
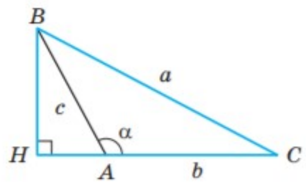
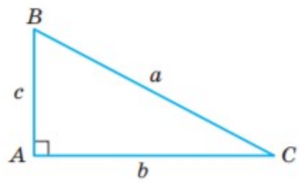
33. Методика розв'язування трикутників. Базові задачі на розв'язування трикутників.

<table>
<tr><td colspan="2">Розв'язування трикутників</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розв'язуванням трикутників називається знаходження всіх його шести елементів (тобто трьох сторін і трьох кутів) за будь-якими трьома елементами, що визначають трикутник.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Види задач на розв'язування трикутників</td></tr>
<tr><td>Задача 1.
Розв'язати трикутник за стороною a і кутами β, γ.</td><td>Формули для розв'язання.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$</td></tr>
<tr><td>Задача 2.
Розв'язати трикутник за двома сторонами a, b і кутом між ними γ.</td><td>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$</td></tr>
<tr><td>Задача 3.
Розв'язати трикутник за трьома сторонами a, b, c.</td><td>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ $\alpha + \beta + \gamma = 180°$</td></tr>
</table>

34. Теорема косинусів, теорема синусів, наслідки з теореми синусів

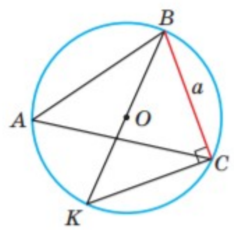
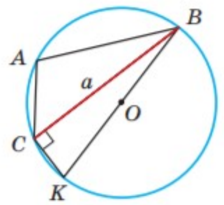
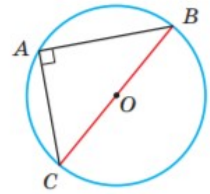
Етапи аналізу	Теорема косинусів

1. Формулювання твердження	Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз’яснювальної частини	Який би не був многокутник
4. Виділення умови	Многокутник є трикутником
5. Виділення вимоги	Квадрат його однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Який би не був многокутник, якщо многокутник є трикутником, то квадрат його однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Форма доведення	Повна індукція
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітичний
Основна ідея доведення	Отримати прямокутні трикутники, для яких можна виділити співвідношення
Етапи доведення	**ДОВЕДЕННЯ.** Нехай ABC — довільний трикутник (мал. 1), $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ і $\angle A = \alpha$. Доведемо, що $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Проведемо висоту BH даного трикутника і знайдемо квадрат сторони a за теоремою Піфагора з $\triangle BHC$. 1) Якщо $\alpha < 90°$, то $BH = c\sin\alpha$, $AH = c\cos\alpha$, $CH = AC - AH = b - c\cos\alpha$. Тоді $a^2 = BH^2 + CH^2 = (c\sin\alpha)^2 + (b - c\cos\alpha)^2 = c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha = c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2bc\cos\alpha = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$.  Мал. 1 2) Якщо $\alpha > 90°$ (мал. 2), то $BH = c\sin(180° - \alpha) = c\sin\alpha$, $AH = c\cos(180° - \alpha) = -c\cos\alpha$, $HC = AC + AH = b + (-c\cos\alpha) = b - c\cos\alpha$. Як і в першому випадку: $a^2 = BH^2 + CH^2 = (c\sin\alpha)^2 + (b - c\cos\alpha)^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$.  Мал. 2 3) Якщо $\alpha = 90°$ (мал. 3), то $\triangle ABC$ прямокутний і $\cos\alpha = 0$. За теоремою Піфагора $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.  Мал. 3 Отже, яким би не був кут α трикутника ABC завжди $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Лема до теореми синусів

Формулювання	Діаметр кола, описаного навколо трикутника, дорівнює

твердження	відношенню сторони трикутника до синуса протилежного кута.
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітичний метод
Основна ідея доведення	Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику; вписані кути, що спираються на хорду;
Етапи доведення	**ДОВЕДЕННЯ.** 1) Нехай дано гострокутний трикутник ABC, у якого відомі сторона $BC = a$ і протилежний їй кут A (мал. 1). Проведемо діаметр BK кола, описаного навколо трикутника, і відрізок KC. Кут BCK — прямий, бо вписаний і спирається на діаметр; кути K і A — рівні, бо вписані і спираються на одну й ту саму дугу BC. Трикутник BCK прямокутний з гіпотенузою $BK = 2R$. Тому $BC : BK = \sin K$, звідки $BC = 2R \sin K = 2R \sin A$, тобто $a = 2R \sin A$. 2) Якщо кут A тупий (мал. 2), то $\angle K = 180° - \angle A$. Синуси таких двох кутів рівні: $\sin(180° - \angle A) = \sin A$. Тому і в цьому випадку $BC = BK \sin K = BK \sin(180° - \angle A) = BK \sin A,\ a = 2R \sin A.$  Мал. 1  Мал. 2  Мал. 3 3) Якщо кут A прямий, то він спирається на діаметр (мал. 3), тобто $a = 2R = 2R \sin A$, бо синус прямого кута дорівнює 1. Отже, завжди $a = 2R \sin A$, звідки $2R = \frac{a}{\sin A}$. Це й треба було довести. □

Етапи аналізу	Теорема синусів
1. Формулювання твердження	Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.
2. Встановлення виду твердження	Категоричне, просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Який би не був многокутник
4. Виділення умови	Многокутник є трикутником
5. Виділення вимоги	Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Який би не був многокутник, якщо многокутник є трикутником, то сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.
Форма доведення	Дедуктивний умовивід
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітичний
Основна ідея доведення	На основі раніше доведеної леми до теореми синусів

Етапи доведення	1. Розглянемо описане коло навколо трикутника з радіусом R 2. За лемою, маємо що $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ 3. Тоді маємо що $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

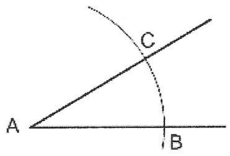
35. Методика навчання учнів розв'язувати задачі на побудову в курсі планіметрії. Основні побудови. Метод геометричних місць точок.

Найпростіші геометричні побудови сформульовані в задачах.

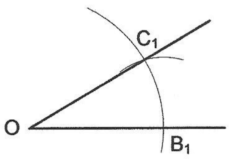
а) Побудова кута рівного даному

Задача. Відкласти від даної пів прямої в даній півплощині кут, що дорівнює даному куту.

Розв'язання



а)



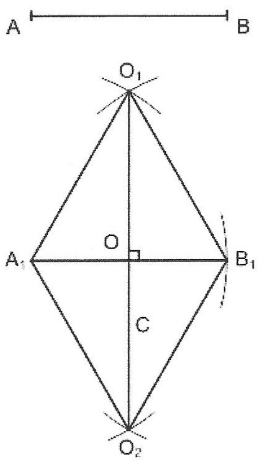
б)

Проведемо довільне коло з центром у вершині A даного кута (мал. а). Нехай B и C – точки перетину кола зі сторонами кута. Проведемо коло радіуса AB з центром у точці O – точці даної пів прямої (мал. б). Точку перетину цього кола з даною пів прямою позначимо B_1, отримаємо коло з центром B_1 і радіусом BC. Точка C перетину побудована в даній півплощині кіл лежить на стороні шуканого кута. Для доведення треба зазначити, що ΔABC і ΔOB_1C_1 є рівними трикутниками з відповідно рівними сторонами. Кути A і O відповідними кутами цих трикутників.

б) Побудова серединного перпендикуляра даного відрізка

Задача. Провести серединний перпендикуляр заданого відрізка.

Розв'язання

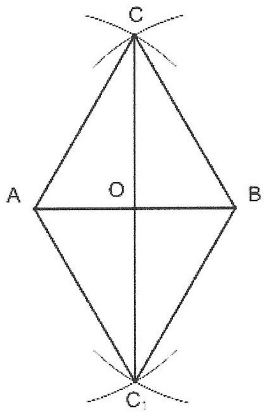


Нехай дано відрізок AB. Проведемо до нього серединний перпендикуляр C. Проведемо коло радіуса AB з центром у точці A_1 – початковій точці даної півпрямої. Точку перетину цього кола з даною півпрямою позначимо B_1. Отримаємо відрізок рівний даному. Проведемо два кола однакового радіуса з центром у точках A_1 і B_1. З'єднавши дві точки перетину кіл прямою C, одержимо серединний перпендикуляр C до даного відрізка A_1B_1. Для доведення досить зазначити, що трикутники з відповідно рівними сторонами O_1A, O_1B_1, A_1O_2, B_1O_2 – радіуси однакових кіл, O_1O_2 – спільна.

в) Поділ даного відрізка навпіл

Задача. Поділити відрізок пополам.

Розв'язання



Нехай AB – даний відрізок. З точки A і B радіусом AB описуємо кола. Нехай C і C_1 – точки перетину цих кіл. Вони лежать у різних півплощинах відносно прямої AB. Відрізок CC_1 перетинає пряму AB у деякій точці O. Ця точка і є серединою відрізка AB. Справді ΔCAC_1 і CBC_1 рівні, за 3-ю ознакою рівності трикутників. Звідси випливає рівність кутів ACO і BCO. Трикутники ACO і BCO рівні за першою ознакою рівності трикутників. Сторони AO і BO трикутників відповідні й тому рівні. Таким чином, O – середина відрізка AB.

г) Побудова прямої перпендикулярної даній

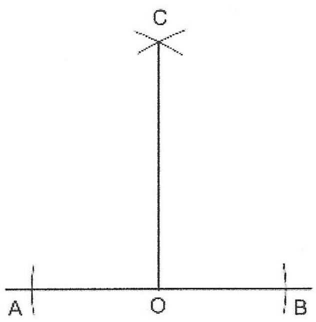
Задача. Через дану точку O провести пряму, перпендикулярну до даної прямої *a*.

Розв'язання

Можливі два випадки:

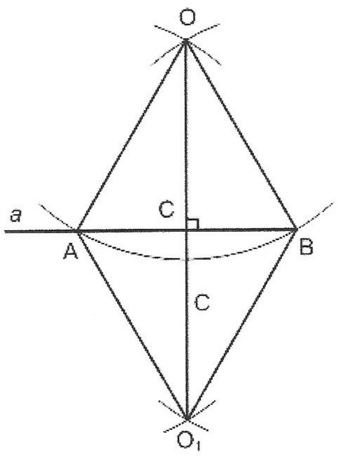
1) точка O лежить на прямій *a*;

2) точка O не лежить на прямій *a*.



а)

1) З точки O довільним радіусом проведемо коло. Воно перетинає пряму *a* у 2-х точках A і B. З точок A і B проведемо коло радіусом AB. Нехай C точка їх перетину. Шукана пряма проходить через точки O і C. Перпендикулярність прямих OC і AB випливає з рівності кутів при вершині O трикутників ACO і BCO. Ці трикутники рівні за 3-ю ознакою рівності трикутників.



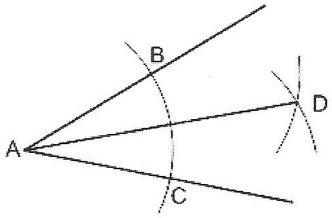
б)

2) З точки O проведемо коло, що перетинає пряму *a*. Нехай A і B – точки перетину його з прямою *a*. З точок A і B таким самим радіусом проведемо кола. Нехай O_1 – точка їх перетину, що лежить у півплощині, відмінній від тієї, у якій лежить точка O. Шукана пряма проходить через точки O і O_1. Доведемо це. Позначимо через C точку перетину прямих AB і OO_1. Трикутники AOB і AO_1B рівні за 3-ю ознакою рівності трикутників, тому $\angle OAC$ дорівнює $\angle O_1AC$. Тоді ΔOAC і ΔO_1AC рівні за 1-ю ознакою рівності трикутників. Отже їх кути ACO і ACO_1 рівні. Оскільки ці кути суміжні, то вони прямі. Таким чином OC – перпендикуляр, опущений з точки O на пряму *a*.

д) Побудова бісектриси кута

Задача. Побудувати бісектрису даного кута.

Розв'язання

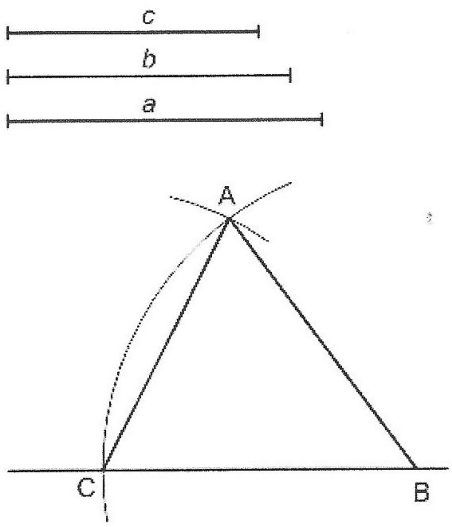


З вершини A даного кута, як з центра, описуємо коло довільного радіуса. Нехай B і C – точки перетину цього кола із сторонами кута. З точок B і C таким самим радіусом описуємо кола. Нехай D – точка їх перетину, відмінна від A. Пів пряма AD ділить кут BAC навпіл. Це випливає з рівності ΔABD і ΔACD, у яких кути DAB і DAC відповідні.

є) Побудова трикутника за трьома даними його сторонами

Задача. Побудувати трикутник з даними сторонами *a*, *b*, *c*.

Розв'язання



За допомогою лінійки проведемо довільну пряму. Позначимо на ній довільну точку B. Розмахом циркуля, що дорівнює *a*, отримаємо коло з центром B і радіусом *a*. Нехай C – точка перетину цього кола з прямою. Тепер розмахом циркуля, що дорівнює *b*, отримаємо коло з центром у точці C. Нехай A – точка перетину цих кіл. Проведемо відрізки AB і AC. ΔABC має сторони, які дорівнюють *a*, *b*, *c*.

Розв'язування задач на побудову має свої особливості

Розрізняють 4 етапи при розв'язанні будь-якої задачі на побудову. У 4 столітті до нашого століття грецькі математики розробили цю схему, якої ми користуємося і понині.

I. *Аналіз* - припускають, що задача вирішена, зробивши схематичний малюнок шуканої фігури, з'ясувати такі співвідношення між елементами задачі, які дозволяють звести її до основних задач.

II. *Побудова* - по складеному при аналізі плану і його запис.

III. *Доведення* того, що побудована фігура має необхідні властивості.

IV. *Дослідження* - чи при всяких даних задача має рішення, скільки рішень, чи немає окремих випадків.

У основній школі зазвичай при розв'язувані задач на побудову не використовують всі 4 етапи (аналіз в складних задачах, для дослідження немає теоретичних знань). В основному працює неповна схема (I,II,III або II,III).

Суть *методу геометричних місць точок* виділити геометричні місця точок(дві прямі, пряма і коло, два кола), на перетині яких лежить шукана точка.

ГМТ рівновіддалених від даної прямої – паралельна їй пряма;

ГМТ рівновіддалених від даної точки – коло з радіусом у даній точці;

ГМТ рівновіддалених від сторін кута – бісектриса цього кута;

ГМТ рівновіддалених від кінців даного відрізка – серединний перпендикуляр цього відрізка

36. Методика вивчення декартових координат в шкільному курсі геометрії. Координатний метод розв'язування задач

Метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури, або тіла за допомогою чисел або інших символів. Числа за допомогою яких визначається положення точки називають її координатами.

Перевага методу координат полягає в тому, що будь-яка геометрична задача зводиться до алгебраїчної, а алгебраїчні задачі легше алгоритмізуються.

Метод координат є основним методом дослідження властивостей геометричних фігур в аналітичній геометрії. Метод координат дає змогу встановити тісні зв'язки з фізикою, географією, астрономією, застосовувати сучасні ЕОМ до розв'язування геометричних задач, дослідження геометричних об'єктів, співвідношень графічних завдань.

Підготовча робота до введення координатної площини починається вже в 5 класі, де вводиться поняття «числовий промінь» і показується, як зображуються на ньому натуральні числа.

Відповідно до чинної програми вперше поняття «координати - як точки на прямій»; «прямокутна система координат на площині» - вводиться в курсі математики шостого класу. У 6 класі для зображення додатних і від'ємних чисел вводиться числова вісь. Учні повинні усвідомити, що положення точки *A* на прямій цілком визначається одним числом, яке називається координатою точки і позначається *A* (3), *B* (*7,8*), *M(x).* Після введення поняття координатної площини (на прикладі залу кінотеатру) корисно навести інші приклади застосування системи координат. У 6 класі поняття про координати точки на прямій і на площині вводяться описово на прикладах. Тут ще не ставиться за мету вводити означення абсциси і ординати. Важливо, щоб учні усвідомили, що координата точки на прямій – це число, модуль якого дорівнює відстані точки прямої від початку відліку – точки *O*. Модулі першої і другої координат точки *M* на координатній площині задають відстані цієї точки від осі *x* і осі *y*.

Здобуті знання і вміння в курсі алгебри 7-9-х класів застосовуються при побудові графіків функцій, графічному розв'язуванні рівнянь, нерівностей та їх систем. В курсі геометрії 9-го класу знову передбачено вивчення декартових координат і застосування методу координат до дослідження властивостей геометричних фігур і означення тригонометричних функцій кута від $0°$ до $180°$.

Основна мета вивчення декартових координат в школі – сформувати поняття про координати точки на прямій та площині, вміння знаходити точку за її координатами і розв'язувати обернену задачу, знаходити відстань між двома точками і координати середини відрізка, застосовувати метод координат при розв'язуванні геометричних задач і в подальшому вивченні курсу математики та суміжних предметів.

Метод координат в курсі геометрії 9-го класу розглядається в темі: «Координати на площині». Вивчення цієї теми треба починати з повторення і зведення в систему тих знань та умінь, які учні вже мають з попередніх класів.

На відмінно від 6-го класу в курсі геометрії 9-го класу тема: «Декартові координати на площині» вивчається на більш високому теоретичному рівні і в ширшому застосуванні, зокрема вводиться означення абсциси і ординати у точки А.

Розв'язується чотири основні задачі:

- Виведення формул координати середини відрізка;
- Виведення формули довжини відрізка;
- Виведення рівняння кола;
- Виведення рівняння прямої.

Перед доведенням формул координати середини відрізка треба повторити теорему Фалеса, спосіб визначення відстані між двома точками на прямій за їх координатами, означення модуля числа.

В навчальних посібниках для середньої школи застосовується наочно-геометричний спосіб введення координат, який є історично першим в математиці.

Першим фактом координатної геометрії з яким учні знайомляться при вивченні даної теми є **формули координат середини відрізку**. При їх введені: застосовується цікавий методичний прийом.

У підручнику Мерзляк А.Г. задача ставиться так: нехай $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ точки площини xOy. Навчимося знаходити координати $M(x_o,y_o)$ серединівідрізка AB. Цей текст є прикладом постановки навчальної проблеми підручника. Після постановки навчальної проблеми проводиться необхідні міркування, підсумком яких є шукані формули. Слід враховувати, що перше доведення зі застосуванням системи координат є незвичними для учнів. Тому при виводі формул координат середини відрізку бажаним є репродуктивний метод навчання у поєднанні з елементами евристичної бесіди.

Зауважимо, що виведення вказаних формул передбачає розгляд різних випадків розташування відрізка AB відносно координатних осей (в підручнику наведено не всі випадки).

Розглянемо виведення формул за підручником та його методичні особливості. Розглянемо випадок коли відрізок АВ не перпендикулярний до жодної з координатних осей.

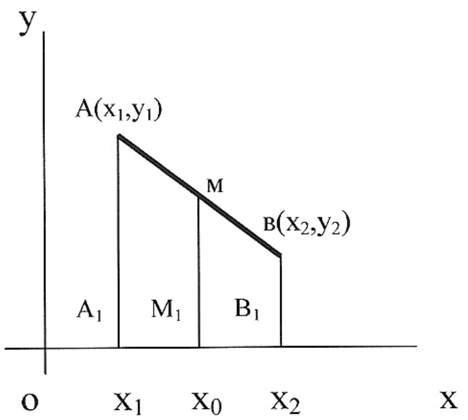


Рис. 36.1

Вважатимемо, що $x_2 < x_1$ (випадок коли $x_2 > x_1$ розглядається аналогічно). Через точки A, M, B проведемо прямі перпендикулярні до осі абсцис, які перетнуть цю вісь в точках A_1, M_1, B_1 – за теоремою Фалеса $A_1M_1=M_1B_1$

$|x_o – x_1| = | x_2 – x_0 |$. Оскільки $x_2 > x_0 > x_2$ то справедлива рівність: $x_o – x_1 = x_2 – x_o$

$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогічно можна показати, що $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Слід зазначити, що виведення форм носить конспективний характер:

1. Подається посилання на теорему Фалеса, але яким чином ця теорема використовується і до якого кута застосовується в підручнику не зазначено.

2. Не повторюються міркування для виведення формул y_0 .

3. Випадок коли відрізок АВ є перпендикулярним до однієї з осей координат
пропонується довести самостійно

Якщо вчитель не доповнює ці міркування поясненнями, то доведення формул буде сприйнято формально.

Методична рекомендація щодо вивчення теми

1. Поставити навчальну проблему.
2. Повідомити умову і вимогу задач; виконати рисунок і додаткові побудови.
3. Повідомити ідею доведення (спочатку необхідно довести рівність $A_1M_1=M_1B_1$, а потім переписати цю рівність в координатах).
4. Визначити всі випадки, які мають бути розглянуті при доведенні. Виділити основний випадок.
5. Викласти доведення для основного випадку коротко записати його на дошці.
6. Сформулювати висновки (шукані формули).
7. Закріпити доведення (частинами і в цілому).

Формули для обчислення відстані між точками, координати яких відомі, також розглядаються для різних випадів в цих точках. Отже знаходячи відстань між точками $A(x_1,y_1)$, $B(x_2, y_2)$ заданими на площині xOy, розглянемо випадок коли відрізок АВ не є перпендикулярним до жодної з осей.

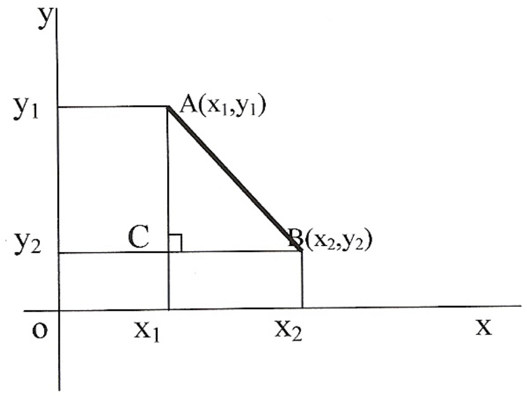


Рис. 36.2

Через точки A і B проведемо прямі перпендикулярні до координатних осей. Отримаємо прямокутний трикутник ACB. Очевидно, що $BC=|x_2-x_1|$, $AC=|y_2-y_1|$, тоді за теоремою Піфагора $AB^2 = BC^2 + AC^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$. Тоді

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Після виведення формули корисно розглянути випадки:

А) $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$;

Б) $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$;

В) $x_1 = x_2, y_1 = y_2$

Нескладно впевнитися, що виведена формула справедлива для кожного випадку.

Система задач теми в основному спрямована на закріплення введених понять і використання доведених формул.

У класах з поглибленим вивченням математики, на заняттях математичного гуртка у звичайних класах доцільно ознайомити учнів з методом координат розв'язування геометричних задач. У зв'язку з цим варто на прикладах розв'язання принаймні двох задач виділити правило-орієнтир методу координат.

Мета вивчення координатного методу в ШКМ:

- показати, що координатний метод має свою структуру, свою мову, свої прийоми, використання яких дозволяє виражати властивості геометричних фігур на мові рівнянь і нерівностей;
- формувати понятійний апарат координатного метода (координатна пряма, координатна площина, координати точки, рівняння прямої, рівняння кола, параболи, гіперболи, координати середини відрізка);
- сформувати конкретні прийоми використання координатного метода при вивченні курсів алгебри й геометрії.

Правило-орієнтир доведення тверджень координатним методом

1. Виділити у формулюванні теореми (задачі) умови і вимоги. Вибрати систему координат, відносно якої перевести умову і вимогу на мову координат.
2. Враховуючи умову і вимогу перетворити рівності зі змінними.
3. Перевести отриману рівність на мову геометрії.

Для розв'язування задач координатним методом важливо оволодіти вміннями:

1) будувати точку за її координатами;
2) знаходити координати заданих точок;
3) обчислювати відстань між точками, які задані координатами;
4) обчислювати координати середини відрізка;
5) обирати оптимально систему координат;
6) складати рівняння фігури за її характеристичною властивістю;
7) бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;
8) перетворювати алгебраїчні рівності.

Серед планіметричних задач, які доцільно розв'язувати координатним методом, виділимо задачі двох видів.

1-й вид: на обґрунтування залежностей між елементами фігур, особливо між довжинами цих елементів. Приклад такої задачі: «В трикутнику ABC: BD – медіана, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Довести, що

$BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$

2-й вид: на знаходження множини точок, які задовольняють певним властивостям. Приклад такої задачі: «Знайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина стала».

Для розвязування задач координитним методом використовують переведення мови геометрії на мову координат. Основні співідношення між фігурами подано у таблиці 36.1

Таблиця 36.1

Основні відношення між фігурами на площині

№	Мова геометрії	Мова координат
1.	Точки A та B лежать на площині	$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$
2.	Дано пряму AB	$AB:\ y=kx+b$; $ax+by+c=0$; $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
3.	Прямі AB і CD паралельні	$\left.\begin{matrix}AB: y=k_1x+b_1\\ CD: y=k_2x+b_2\end{matrix}\right\vert \rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow k_1=k_2, b_1\neq b_2$
4.	Прямі AB і CD перпендикулярні	$\left.\begin{matrix}AB: y=k_1x+b_1\\ CD: y=k_2x+b_2\end{matrix}\right\vert \rightarrow AB \perp CD \Rightarrow k_1\cdot k_2=-1$
5.	Точка O ділить відрізок AB навпіл	$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $O(x_0;y_0)$; $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$
6.	Точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=\frac{AC}{CB}$	$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_0;y_0)$; $x_0=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}$; $y_0=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}$
7.	Довжина відрізка AB дорівнює m	$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$; $m=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
8.	Відстань від точки M до прямої AB дорівнює d	$M(x_0;y_0)$, $AB:\ ax+by+c=0$; $d=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

37. Методика вивчення елементів аналітичної геометрії: рівняння прямої, рівняння кола.

Рівнянням фігури на площині в декартових координатах називається рівняння з двома змінними x і y, яке задовольняють координати будь-якої точки фігури, і навпаки: будь-які два числа, які задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки цієї фігури.

Рівняння прямої.

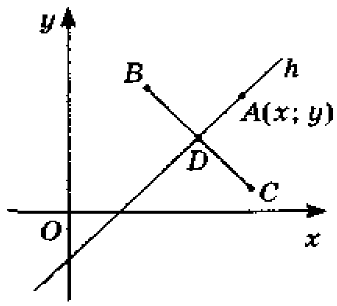
З курсу алгебри нам відомо, що пряма є графіком лінійної функції $y = kx + b$ та графіком лінійного рівняння з двома змінними $ax + by = c$. Розглянемо рівняння прямої у геометрії.

Рівняння прямої в прямокутній системі координат має вигляд $ax + by + c = 0$, де a, b, c - числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю.

Доведемо, що будь-яка пряма в декартових координатах має рівняння $ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, а x і y — змінні координати точки $A(x; y)$, яка належить прямій.

Як і при складанні рівняння кола, звернемося до такої властивості прямої, які мають точки цієї прямої, тобто: точки, які рівновіддалені від двох даних точок B і C, лежать на прямій (серединному перпендикулярі до відрізка BC), яка перпендикулярна до BC і проходить через середину відрізка BC.

Нехай h — довільна пряма на площині і $A(x; y)$ — точка цієї прямої. Проведемо яку-небудь пряму, перпендикулярну до прямої h, і відкладемо на ній від точки D перетину з прямою h рівні відрізки (рис. 38.1) BD і DC, де $B(a_1; b_1)$, $C(a_2; b_2)$. Оскільки $AB = AC$, тоді $AB^2 = AC^2$, або



$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2.$$

Спростимо цю рівність: Рис. 37.1

$$x^2 - 2xa_1 + a_1^2 + y^2 - 2yb_1 + b_1^2 == x^2 - 2xa_2 + a_2^2 + y^2 - 2yb_2 + b_2^2, \text{ або}$$

$$-2xa_1 + 2xa_2 - 2yb_1 + 2yb_2 + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = 0,$$

$$(2a_2 - 2a_1)x + (2b_2 - 2b_1)y + (a^2 + b^2 - a^2 - b^2)=0$$

тоді маємо:

$ax + by + c = 0$, де $a = 2a_2 - 2a_1$, $b = 2b_2 - 2b_1$, $c = a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2$.

Отже, рівняння прямої має вигляд $ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа. Рівняння $ax + by + c = 0$ називають ще загальним рівнянням прямої.

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, має вигляд:

$x = m$, якщо $x_1 = x_2 = m$;
$y = n$, якщо $y_1 = y_2 = n$;
$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, *якщо* $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + b$ дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатнім параметром осі x.

Коефіцієнт κ у рівнянні $y = kx + b$ називають кутовим коефіцієнтом. Якщо $\kappa > 0$, то пряма утворює гострий кут з додатнім напрямом осі x, а якщо $\kappa < 0$ – то тупий.

Звідки отримаємо важливу **умову паралельності прямих**: прямі, що задані рівнянням $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$.

Рівняння прямої, що має кутовий коефіцієнт k і проходить через точку $A(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Рівняння кола

Для того щоб скласти рівняння кола, згадаємо його властивість, що міститься в означенні кола: усі точки кола розміщені в одній площині з його центром і однаково від нього віддалені.

Нехай центр кола M(a; b), а радіус кола R (рис. 37.2).

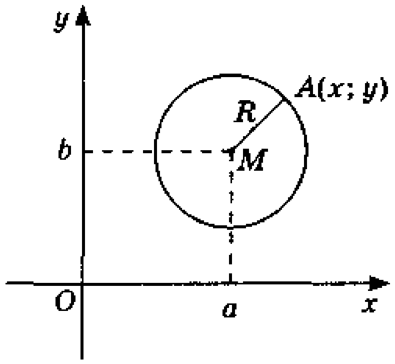


Рис. 37.2

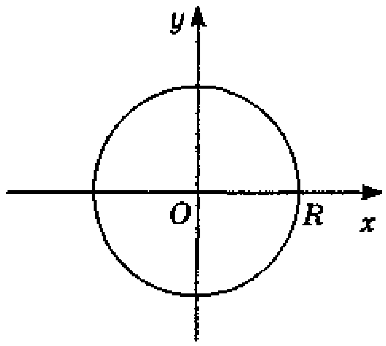


Рис. 37.3

Позначимо на колі будь-яку точку $A\ (x;\ y)$. Відстань від точки M до точки A дорівнює R, тобто $AM = R$, але за формулою відстані між двома точками маємо $AM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$, *або* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

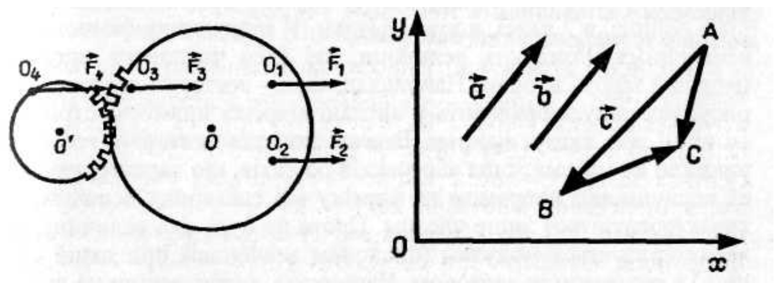
Координати будь-якої точки цього кола задовольняють рівняння кола. Правильно і те, що будь-яка точка, координати якої задовольняють рівняння кола, належить колу.

Отже, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — рівняння кола. Якщо центр кола (рис. 37.3) лежить у початку координат, то воно має рівняння $a^2 + b^2 = R^2$

38. Методика вивчення теми «Вектори» в курсі геометрії 9 класу. Методика розв'язування задач векторним методом.

Ідея вектора одна з фундаментальних ідей сучасної математичної науки та її застосувань. На векторній основі зараз будуються лінійна алгебра, аналітична і диференціальна геометрія, теорія багатовимірних просторів. Вектори широко застосовуються в сучасній фізиці, технічних науках. Тому природно, що в 50-х роках XX ст. на початку всесвітнього руху за реформу шкільної математичної освіти у всіх розвинутих країнах була висловлена одностайна думка - впровадити ідею вектора в шкільну математику. При цьому пропонувалося два підходи.

У геометрії розглядаються вільні вектори, тобто такі, для яких суттєвим є лише довжина і напрям. Наведемо приклад. Якщо маємо дві зчеплені шестерні , то вектори O_1F_1 і O_2F_2 з погляду фізики, різні, бо сили, що зображуються ними, обертають шестірню в протилежних напрямах. З погляду геометрії - всі чотири вектори O_1F_1, O_2F_2, O_3F_3, O_4F_4 зображують той самий вектор.



Вільні вектори застосовують і в фізиці. Наприклад, швидкість і прискорення твердого тіла, що рухається поступально, - вільні вектори.

У навчально-методичній літературі трапляються різні означення вільних векторів. Вектори трактуються як:

1) напрямлений відрізок прямої евклідового простору, в якого один кінець (точка *A)* називається початком вектора, а другий кінець (точка *B)* - кінцем вектора;

2) впорядкована пара точок;

3) клас еквівалентних напрямлених відрізків;

4) паралельне перенесення;

5) впорядкована пара, трійка,..., *n*-ка чисел.

Множини об'єктів, що відповідають цим трактуванням, ізоморфні одна одній. Кожне з наведених трактувань є інтерпретацією більш загального абстрактного поняття вільного вектора, означення якого формулюється в теоретичних курсах геометрії: будь-яку множину об'єктів, що задовольняє перші вісім аксіом системи Вейля, називають множиною векторів, а будь-який елемент цієї множини - вектором. У школі з дидактичних міркувань звичайно розглядають одну з інтерпретацій. У посібниках вектор означається як паралельне перенесення, а в підручниках його трактують як напрямлений відрізок. О. Д. Александров у згаданій вище статті критично проаналізував різні означення векторів і звернув увагу на те, що, даючи означення через напрямлений відрізок, треба спочатку дати означення напрямленого відрізка і рівності напрямлених відрізків, а відтак – сформулювати означення: вектором в геометрії називають напрямлений відрізок, що розглядається з точністю до вибору початку, тобто рівні один одному напрямлені відрізки вважаються представниками або зображеннями того самого вектора.

Методика введення основних понять теми. З метою мотивації запровадження поняття «вектор» доцільно нагадати учням, що з поняттям векторних величин вони стикались раніше, в 7 класі, в курсі фізики. У підручнику фізики векторними називають величини, які крім числового значення (модуля) мають напрям. Наприклад, сила – векторна величина. На рисунках силу зображують у вигляді відрізка прямої із стрілкою на кінці, яка вказує напрям. Взагалі поняття вектора в геометрії виникло як математична абстракція об’єктів, що характеризуються величиною і напрямом на відміну від скалярних величин, які характеризуються лише числом. Проте не будь-яка величина, що характеризується модулем (числовим значенням при даній одиниці) і напрямом, є вектором. Наприклад, потік машин на вулиці міста можна виміряти кількістю машин за 1 год, і цей потік має напрям. Однак такі величини не додаються як вектори, наприклад за правилом трикутника або паралелограма.

У темі, присвяченій векторам на площині, вводиться значна кількість нових для учнів понять – абсолютна величина (або модуль вектора), нульовий вектор, рівні вектори, координати вектора, кут між ненульовими векторами, колінеарні вектори та ін.

Координати вектора, як і координати точки, дають можливість визначати положення вектора на координатній площині. Координати вектора дадуть змогу означити дії (операції) над векторами, довести їхні властивості і застосувати до розв’язування задач, а також встановити зв’язок між геометричними закономірностями в розміщенні векторів і арифметичними закономірностями між їхніми координатами, навпаки.

Учням пропонується розглянути положення трьох векторів $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ на координатній площині і порівняти їх розміщення. Учні помічають, що вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ рівні (мають рівні модулі і однаково напрямлені). Вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ - різні і за довжиною, і за розміщенням на координатній площині. Щоб схарактеризувати помічені закономірності за допомогою чисел, введемо координати векторів, які задаються за допомогою координат початку і кінця вектора. Внаслідок розв'язування цієї вправи учні дістали два факти:

1) виявилось, що координати рівних векторів однакові, а різних - різні;

2) учні визначають за допомогою формули відстані між двома точками довжину вектора і роблять висновок, що модуль вектора *а* дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

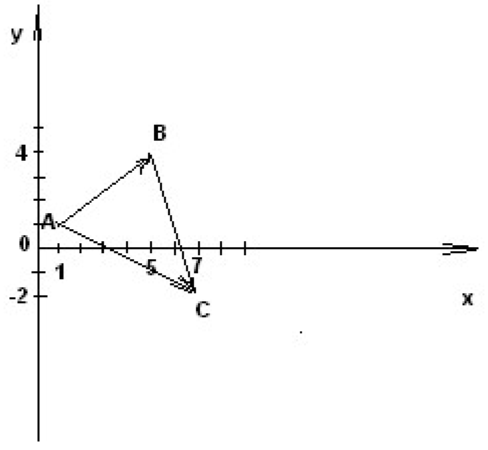
Отже, $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, тобто учні дійшли потреби довести необхідну і достатню умови рівності двох векторів. Далі доцільно поставити перед учнями запитання: *чи можна визначати координати вектора за рисунком?* Виявляється, що можна. Для цього досить порахувати кількість клітинок під час руху від початку вектора до кінця спочатку вздовж осі *x,* а потім – вздовж осі *y*.

На наступному уроці учням пропонується знайти за рисунком

вже відомі координати вектора $\overline{c} = \overline{AB}$ і векторів *BC і AC, а* відтак співвідношення між координатами векторів *AB, BC* і *AC,* які утворюють трикутник. Це підведе учнів до означення суми двох векторів. За рисунком учні визначають координати векторів:

AB(-6; -6), *BC(5; 2), AC (-1; -4).* Помічаємо, що координати вектора *AC* є сумою координат векторів *AB* і *BC*, які разом з вектором *AC* утворюють трикутник.

Вивчення дій над векторами. Для вивчення дій над векторами конкретно індуктивним методом, зокрема формулювання означення суми двох векторів доречно запропонувати учням наступне завдання:



1. За рисунком визначити координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}$(4;3), $\overrightarrow{BC}$(2,-6), $\overrightarrow{AC}$(6;-3).
2. Що ви можете сказати про співвідношення координат, або між координатами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$?

Координати вектора $\overrightarrow{AC}$ є сумою координат $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

3. Яку геометричну фігуру утворюють $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$. І порядок побудови? Ці вектори утворюють трикутник. Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, від точки B відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, вектор $\overrightarrow{AC}$ називається сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Описаний алгоритм додавання векторів називають *правилом трикутника.* Аналогічно можна підвести і до різниці двох векторів і через їх координати.

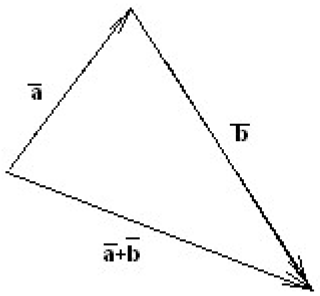


Рис. 38.1

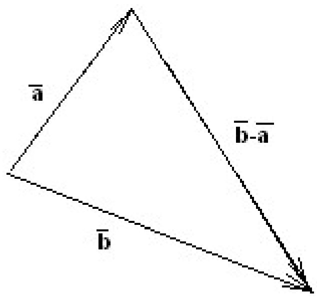


Рис. 38.2

Задачі про побудову різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ корисно розглянути двома способами.

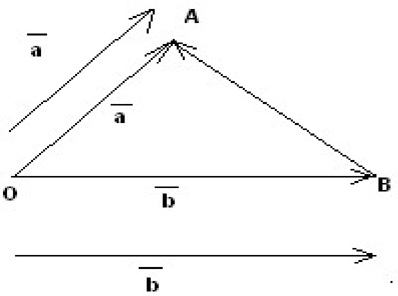


Рис.38.3

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{BA}$

І спосіб. Від довільної точки O відкладаються вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Позначимо вектор $\overrightarrow{BA}$. За правилом трикутника знаходиться векторна рівність:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a}$$

З означення векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (це такий вектор, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$) випливає, що $\overrightarrow{AB}$ є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Звідки випливає правило побудови вектора різниці: «Щоб побудувати вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ треба:

а) перенести початок векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в довільну точку О;

б) позначити вектор-різницю $\vec{c}$ у якого початок є кінець вектора від'ємника ($\vec{b}$), а кінець є кінцем вектора зменшуваного ($\vec{a}$).»

ІІ спосіб побудови вектора різниці ґрунтується на означенні протилежного вектора і доведеної теореми $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

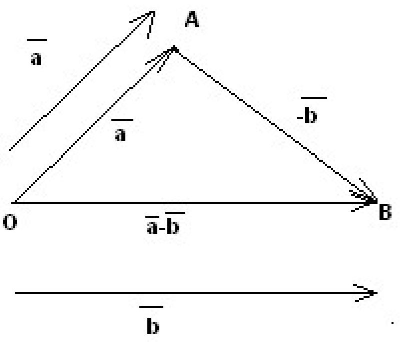


Рис. 38.4

Звідси побудова: від довільної точки О відкладемо вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, а потім від точки А відкладемо вектор $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$. Тому: $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

Координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$ та вектора $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнюють відповідно сумі та різниці координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Цей факт у діючих підручниках формулюється у вигляді теорем.

Із поняттям множення вектора на число вводиться поняття колінеарних векторів та їх властивостей. Властивості додавання векторів та множення на число аналогічне властивостям дій над числами, тобто для векторів справедлива переставна властивість, сполучна властивість і дві розподільні властивості:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переставна властивість

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – сполучна властивість

$$\left.\begin{aligned} (k+m)\vec{a} &= k\vec{a} + m\vec{a} \\ k(\vec{a} + \vec{b}) &= k\vec{a} + k\vec{b} \end{aligned}\right\}\text{—розподільні властивості}$$

Скалярний добуток векторів

Скалярний добуток векторів пов'язується з кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і в багатьох шкільних підручниках означення скалярного добутку є твердження про властивість його дорівнювати добутку числових значень довжин на косинус кута між векторами. В деяких навчальних посібниках це твердження доводиться.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$.

В теоремі формулюється властивість скалярного добутку векторів заданих своїми координатами: $\vec{a}(a_1, a_2); \vec{b}(b_1, b_2)$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Як наслідок з теореми виводиться формула знаходження кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ заданими своїми координатами:

$$\cos(\vec{a};\vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Введення скалярного добутку і поняття колінеарності векторів дає можливість розв'язувати різноманітні задачі пов'язані з перпендикулярністю і паралельністю відрізків, зокрема метричні задачі на визначення довжини відрізка і величин кутів.

Мета вивчення векторного методу в ШКМ:

- дати ефективний метод розв'язування різних геометричних задач і доведення теорем;
- показати широке застосування векторного апарату в інших сферах знань;
- формування в учнів вміння виконувати узагальнення і систематизацію;
- формування в учнів якостей мислення: гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність.

В склад уміння виконувати доведення векторним методом входять такі розумові дії:

1) переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови на мову векторів і навпаки:
2) операції над векторами;
3) представлення вектора у вигляді суми, різниці, добутку на число;
4) перетворення векторних рівностей;
5) перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між їх довжинами.

Правило-орієнтир доведення векторним методом

1. Виділити у формулюванні теореми (задачі) умови і вимоги. Сформулювати умову на мові векторів. Виконати рисунок і позначити вектори на рисунку.
2. Враховуючи умову і вимогу скласти допоміжні векторні рівності. Перетворити складені рівності. Прийти до потрібної рівності.
3. Перевести отриману рівність на мову геометрії.

Область застосування векторного методу.

Для доведення: паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок прямій, ділення відрізка у заданому відношенні, співвідношення між довжинами відрізків і величинами кутів. Для розвязування задач векторним методом використовують переведення мови геометрії на мову векторів (таблиця 38.1).

Таблиця 38.1

Основні відношення між фігурами

Мова геометрії	Мова векторів
1. Пряма $AB // CD$	1. $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$	2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
3. a – пряма; A, B, C – точки на прямій a.	3. $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ або $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ або $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ або $\overrightarrow{OC} = p \cdot \overrightarrow{OA} + q \cdot \overrightarrow{OB}$, де O – довільна точка, а $p + q = 1$.
4. $M=M_1$	4. $\overrightarrow{MM_1} = \vec{0}$ або $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1}$, де O – довільна точка
5. $AB // \alpha, CD // \alpha, EF // \alpha$, де AB, CD, EF – прямі, α— площина, AB і CD— перетинаються.	5. $\overrightarrow{EF} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{CD}$, де x, y– дійсні числа.
6. *O, A, B, C*—лежать на площині α.	6. $x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, де x, y, z— дійсні числа.
7. *C*—точка на прямій *AB* $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ $AC = CB$	7. $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{OC} = \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}$, де O – довільна точка $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
8. M_1—середина A_1B_1 M_2—середина A_2B_2	8. $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$
9. *OABC*—паралелограм	9. а) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ б) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ *A, B, C*—не лежать на одній прямій
10. $AB=m$	10. $m^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$
11. *M*—центроїд ΔABC	11. або $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, т. *O*— довільна точка або $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
12. $AB \perp \alpha, AB, CD, MF$ – прямі $CD \cap MF \in \alpha$	12. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MF} = \vec{0}$ $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{MF}$ не колінеарні

39. Методика вивчення геометричних перетворень фігур: рухи, гомотетія, перетворення подібності на площині і в просторі.

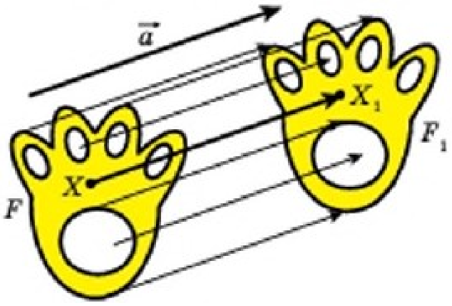
В сучасній загальноосвітній школі з геометричних перетворень розглядаються тільки рухи (без ковзної симетрії) і перетворення подібності. Основна мета вивчення геометричних перетворень – ознайомити учнів з різними видами рухів (осьова і центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення) та подібністю і гомотетією, їх властивостями, ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворення до розв'язування задач.

До понять теми слід віднести 10 нових для учнів понять, серед яких: перетворення фігури, образ і прообраз фігури, паралельне перенесення, рух тотожне перетворення, центральна симетрія, поворот, гомотетія, перетворення подібності.

Поняття руху вводиться на рівні означення через найближче родове поняття перетворення фігури. У більшості підручників прийнято конструктивні означення. Розглянемо понятят і факти теми за підручником «Геометрія» 9 клас авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір

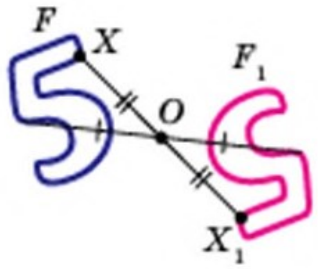
Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять

Поняття	Формулювання означення	Вид означення. Характеристичні властивості.
Перетворення фігури	Нехай задано деяку фігуру ***F***. Кожній точці фігури ***F*** поставимо у відповідність (співставимо) за певним правилом деяку точку. Усі співставлені точки утворюють деяку фігуру F_1. Кажуть, що фігура F_1 отримана в результаті перетворення фігури ***F***.	Конструктивне означення 1. фігура ***F*** 2. кожній точці фігури ***F*** ставиться у відповідність, за певним правилом, деяка точка 3. співставлені точки утворюють деяку фігуру F_1
Образ і прообраз фігури	Нехай задано деяку фігуру ***F***. Кожній точці фігури ***F*** поставимо у відповідність (співставимо) за певним правилом деяку точку. Усі співставлені точки утворюють деяку фігуру F_1. Кажуть, що фігура F_1 отримана в результаті перетворення фігури ***F***. При цьому фігуру F_1 називають образом фігури ***F***, а фігуру ***F*** називають прообразом фігури F_1.	Конструктивне означення 1. фігура ***F*** 2. кожній точці фігури ***F*** ставиться у відповідність, за певним правилом, деяка точка 3. співставлені точки утворюють деяку фігуру F_1
Паралельне перенесення	Нехай задано деяку фігуру ***F*** і вектор $\vec{a}$. Кожній точці ***X*** фігури ***F*** поставили у відповідність точку X_1 таку, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. У результаті такого перетворення фігури ***F*** отримаємо фігуру F_1. Таке перетворення фігури ***F*** називають паралельним перенесенням на	Конструктивне означення 1. фігура ***F*** і вектор $\vec{a}$ 2. кожній точці ***X*** фігури ***F*** ставиться у відповідність точка X_1 така, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$ 3. співставлені точки утворюють деяку фігуру F_1

<table>
<tr><td></td><td>вектор $\vec{a}$ (рис 1).


(рис 1)</td><td></td></tr>
<tr><td>Рух</td><td>Перетворення фігури F, яке зберігає відстань між точками, називають <u>рухом (переміщенням)</u> фігури F.</td><td>Через найближчий рід

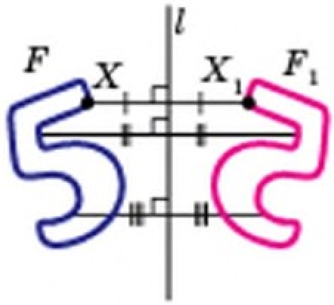
Перетворення фігури F, яке зберігає відстань між точками</td></tr>
<tr><td>Тотожне перетворення</td><td>Якщо кожній точці X фігури F поставлено у відповідність цю саму точку X, то таке перетворення фігури F називають <u>тотожним</u>.</td><td>Через найближчий рід

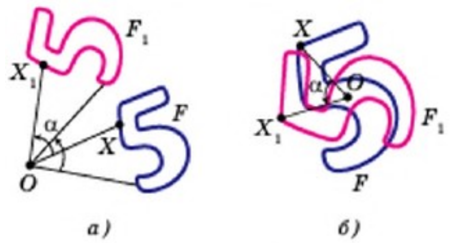
Кожній точці X фігури F ставиться у відповідність ця ж сама точка X</td></tr>
<tr><td>Центральна симетрія</td><td>Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно точки O точку X_1. У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1. Таке перетворення фігури F називають <u>центральною симетрією</u> відносно точки O. (рис 2)


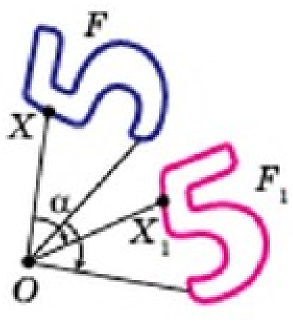
(рис 2)</td><td>Конструктивне означення

1. фігура F, точка O
2. кожній точці X фігури F ставиться у відповідність симетрична їй відносно точки O точка X_1.
3. співставлені точки утворюють деяку фігуру F_1</td></tr>
<tr><td>Осьова симетрія</td><td>Розглянемо фігуру F і пряму l. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно прямої l поставимо точку X_1. У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1. Таке перетворення фігури F називають <u>осьовою симетрією</u> відносно прямої l (рис 3).</td><td>Конструктивне означення

1. фігура F, точка O
2. кожній точці X фігури F ставиться у відповідність симетрична їй відносно прямої l точка X_1.
3. співставлені точки утворюють деяку фігуру F_1</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

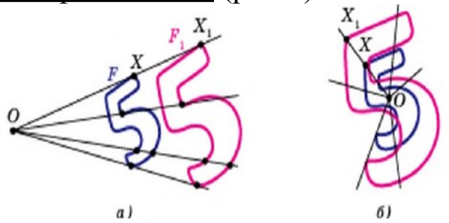
(рис 3)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Поворот</td>
<td>Розглянемо фігуру F, точку O і кут α. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X₁, яка є образом точки X при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α (якщо точка O належить фігурі F, то їй співставляється вона сама). У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F₁. Таке перетворення фігури F називають <u>поворотом навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α</u> (рис 4).


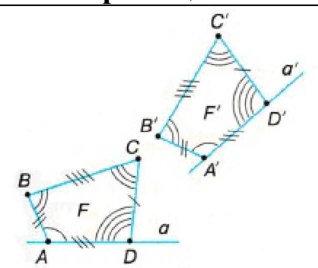
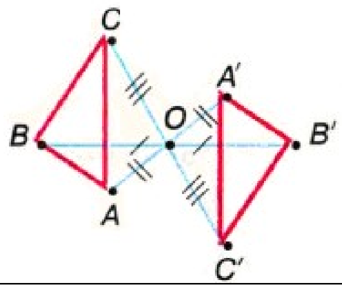
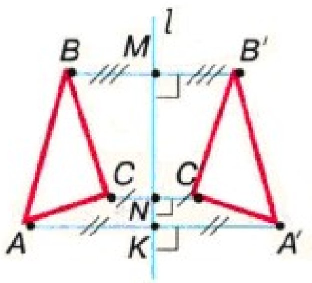
(рис 4)
Аналогічно означають перетворення «<u>поворот фігури F за годинниковою стрілкою на кут α</u>» (рис 5).


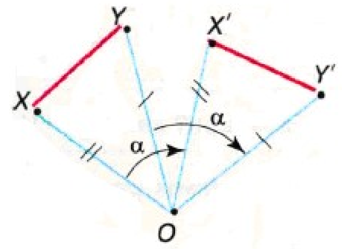
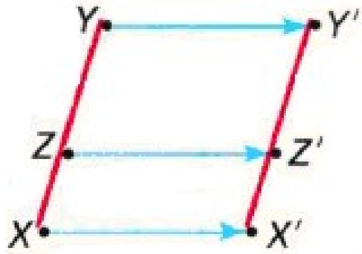
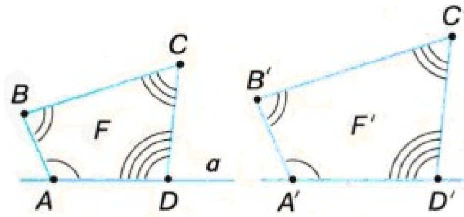
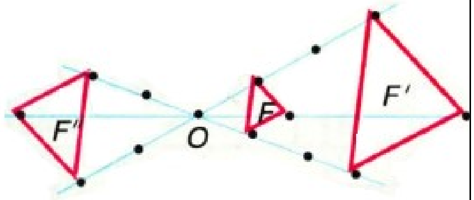
(рис 5)</td>
<td>Конструктивне означення

1. фігура F, точка O, кут α
2. кожній точці X фігури F ставиться у відповідність точка X₁, яка є образом точки X при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α
3. співставлені точки утворюють деяку фігуру F₁</td>
</tr>
<tr>
<td>Гомотетія</td>
<td>Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X₁, яка є образом точки X при гомотетії з центром O і коефіцієнтом k (якщо точка O</td>
<td>Конструктивне означення

1. фігура F, точка O, коефіцієнт k
2. Кожній точці X фігури F ставиться у відповідність точка X₁, яка є образом точки X при</td>
</tr>
</table>

	належить фігурі ***F***, то їй співставляється вона сама). У результаті такого перетворення фігури ***F*** отримаємо фігуру ***F₁***. Таке перетворення фігури ***F*** називають <u>гомотетією з центром ***O*** і коефіцієнтом ***k***</u> (рис 6).  (рис 6)	гомотетії з центром ***O*** і коефіцієнтом ***k*** 3. співставлені точки утворюють деяку фігуру ***F₁***
Перетворення подібності	Дві фігури називають <u>подібними</u>, якщо одну з них можна отримати з іншої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії і руху.	Конструктивне означення та означення через найближчий рід 1. фігура $F \rightarrow F_1$ 2. для кожної точки ***X*** фігури ***F*** застосовуємо гомотетію 3. для кожної точки ***X*** фігури ***F*** застосовуємо рух

Властивості переміщення	
Переміщення	**Властивості**
	1. Пряма переходить у пряму (***a*** в ***a '***), промінь – у промінь. 2. Відрізок переходить у рівний йому відрізок (***AB=A 'B ', BC=B 'C ', CD=C 'D ', AD=A 'D '***). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$)
Центральна симетрія	**Властивості**
	***1. AO=OA '*** ***BO=OB '*** ***CO=OC '*** 2. Пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе. 3. Центральна симетрія має всі властивості переміщення.
Осьова симетрія	**Властивості**
	***1.*** $BB' \perp l$ і $BM=MB'$ $CC' \perp l$ і $CN=NC'$ $AA' \perp l$ і $AK=KA'$ 2. Осьова симетрія має всі властивості переміщення

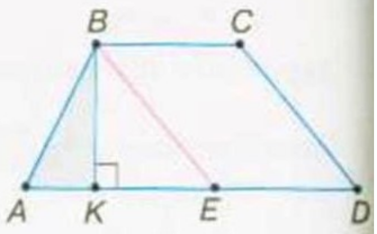
Поворот	Властивості
	1. $\angle XOX' = \angle YOY' = \alpha$ ***OX=OX', OY=OY'*** ***α*** – кут повороту ***O*** – центр повороту 2. Поворот має всі властивості переміщення
Паралельне переміщення	**Властивості**
	1. ***XX'‖ZZ'‖YY'*** і ***XX'=ZZ'=YY'*** 2. Пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе 3. Паралельне перенесення має всі властивості переміщення
Перетворення подібності	**Властивості**
 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = k$ ***k > 0*** – коефіцієнт подібності	1. Пряма переходить у пряму (***a*** в ***a'***), промінь – у промінь. 2. Відрізок переходить у відрізок (***AB*** у ***A'B'***, ***BC*** у ***B'C'***, ***CD*** у ***C'D'***, ***AD*** у ***A'D'***). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$). 4. Якщо ***F~F'***, то $\frac{S_F}{S_{F'}} = k^2$ (S_F і $S_{F'}$ - площі подібних фігур ***F*** і ***F'***)
Гомотетія	**Властивості**
 Гомотетія з центром ***O*** і коефіцієнтом ***k>0*** фігуру ***F*** переводить у фігуру ***F'***. Гомотетія з центром ***O*** і коефіцієнтом ***k<0*** фігуру ***F*** переводить у фігуру ***F''***.	1. Пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе 2. Гомотетія має всі властивості перетворення подібності

40. Методи розв'язування планіметричних задач: метод рівних трикутників, метод подібних трикутників, метод перетворень фігур на площині.

1. ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДОПОМІЖНИХ ТРИКУТНИКІВ.

Трикутник або кілька нерівних трикутників

Задача. Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють a і c ($a > c$), а прилеглі до основи a кути дорівнюють α і β.



Мал. 13

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція з основами $AD = a$, $BC = c$ і $\angle A = \alpha$, $\angle D = \beta$ (мал. 13). Проведемо пряму $BE \parallel CD$. У ΔABE $AE = a - c$, $\angle BAE = \alpha$, $\angle BEA = \angle CDA = \beta$.

За теоремою синусів знаходимо AB: $\dfrac{AB}{\sin\beta} = \dfrac{AE}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}$,

звідки $AB = \dfrac{(a - c)\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. (1)

Проведемо висоту BK трапеції. ΔABK — прямокутний.

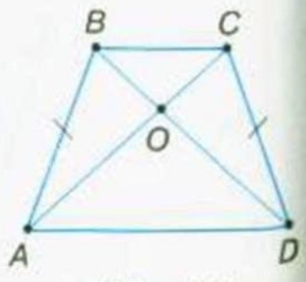
Тоді $BK = AB \cdot \sin\alpha$. (2)

Підставивши рівність (1) у (2), дістанемо: $BK = \dfrac{(a - c)\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Розв'язуючи геометричні задачі, дотримуйтесь такого плану:
1) відшукайте на малюнку трикутник (або утворіть його, провівши потрібні відрізки), який можна розв'язати (у нашій задачі – це ΔABE);
2) задача буде розв'язаною, якщо знайдений елемент (сторона AB) трикутника задовольняє умову задачі;
3) якщо ні, то, враховуючи знайдений елемент, відшукайте на малюнку другий трикутник (ΔABK). Якщо задачу задовольняє знайдений елемент другого трикутника (висота BK), – вона розв'язана. В іншому випадку розгляньте третій трикутник і т. д. доти, поки не дістанете такий трикутник, сторона чи кут якого дає розв'язок задачі.

Рівні трикутники

Задача. Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні.



Мал. 14

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція (мал. 14). У трикутників ABD і DCA: AD — спільна сторона, $AB = CD$ за означенням рівнобічної трапеції, $\angle A = \angle D$ за властивістю рівнобічної трапеції. Отже, $\Delta ABD = \Delta DCA$ за двома сторонами і кутом між ними. З рівності трикутників випливає, що $AC = BD$.

Пам'ятайте:

– щоб довести рівність двох відрізків (кутів):

1) виділіть на малюнку два трикутники, сторонами яких є ці відрізки (кути);

2) доведіть, що ці трикутники рівні;

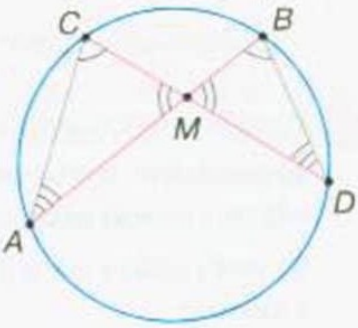
3) зробіть висновок: відрізки (кути) рівні як відповідні сторони (кути) рівних трикутників.

– якщо в задачі треба знайти певний відрізок (кут), то його корисно розглянути як сторону (кут) одного з двох рівних трикутників.

Подібні трикутники

Подібні трикутники використовуються під час доведення рівностей, які містять добутки довжин двох пар відрізків.

Задача. Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Доведіть.



Мал. 15

Розв'язання. Проведемо аналіз (мал. 15). Припустимо, що рівність, яку треба довести, справджується. Запишемо її у вигляді пропорції $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. З пропорції випливає, що трикутники із сторонами AM і CM, DM і BM мають бути подібними. Справді, у них $\angle AMC = \angle DMB$ як вертикальні, $\angle ACM = \angle DBM$ як вписані, що спираються на дугу AD. Отже, $\Delta AMC \backsim \Delta DMB$ за двома кутами.

Міркуючи у зворотному напрямі, дістанемо, що $\Delta AMC \backsim \Delta DMB$. З подібності цих трикутників випливає пропорційність їх сторін: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. Звідси $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Пам'ятайте:

– щоб довести рівність добутків двох пар відрізків:

1) припустіть правильність рівності, яку доводите;

2) запишіть її у вигляді пропорції;

3) відшукайте на малюнку (або побудуйте) трикутники, довжини сторін яких є членами утвореної пропорції;

4) обґрунтуйте подібність цих трикутників.

– якщо в задачі треба знайти певний відрізок, то його корисно розглянути як сторону одного з двох подібних трикутників і скласти відповідну пропорцію.

Розв'язуючи задачі на побудову методом подібності:

1) виділіть з умови задачі ті дані, які визначають форму шуканого трикутника (відношення відрізків і кути);

2) побудуйте за цими даними допоміжний трикутник, подібний шуканому;

3) побудуйте шуканий трикутник, використавши ті дані умови, які визначають його розміри (довжини відрізків).

Розв'язуючи задачі методом геометричних місць:

1) проаналізуйте умову задачі та виділіть шукану точку;

2) з'ясуйте, які дві вимоги вона задовольняє;

3) знайдіть геометричне місце точок, що задовольняють: першу вимогу; другу вимогу;

4) зробіть висновок: шукана точка – точка перетину знайдених геометричних місць.

Розв'язуючи задачу координатним методом, виконайте три кроки:

1) запишіть геометричну задачу мовою координат;

2) перетворіть алгебраїчний вираз;

3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

Розв'язуючи задачі алгебраїчним методом, дотримуйтесь таких етапів:

1) введіть позначення (буквами x, y, z … найчастіше позначаємо шукані величини);

2) складіть рівняння або систему рівнянь, використовуючи відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними величинами;

3) розв'яжіть складене рівняння або систему рівнянь. Якщо є потреба, то дослідіть знайдені розв'язки.

Щоб застосувати вектори до розв'язування задачі, виконайте три кроки:

1) сформулюйте задачу мовою векторів. Для цього спочатку розгляньте деякі дані у задачі відрізки як вектори. Потім складіть векторну рівність;

2) перетворіть векторну рівність, користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями;

3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навчальний. К.: Вища школа, 1989. 367 с.
2. **Електронний навчальний курс** «Методика навчання математики» URL: https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=6090
3. Кезля Т. Віднімання натуральних чисел. 5 клас. *Математика*. 2002. №33 (189). С.2.
4. Красницький М.П. Методи та прийоми навчальної діяльності: Довідник для вчителя математики. *Математика*. 2001. №23 -24.
5. Критерії оцінки проведеного уроку. *Все для вчителя*. 2000. № 1-2. С. 5.
6. Литвиненко Г.М. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з шкільного курсу математики. *Математика*. 2000. №34 (94). С.2
7. **Лов'янова І.В.** Методика сучасного уроку математики: Методична розробка для студентів заочників фізико-математичних факультетів педуніверситетів. Кривий Ріг, 2002. 42с.
8. **Лов'янова І. В.** Вибранні питання елементарної математики. Ч. 1 Планіметричні задачі. Кривий Ріг: Кафедра математики КДПУ, 2003. 34 с.
9. **Лов'янова І.В.** Дидактичні основи навчання математики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Кривий Ріг: КДПУ, 2009. 192 с.
10. **Лов'янова І. В.** Підготовка до державного екзамену з МНМ : Методичні рекомендації. Кривий Ріг, 2010. 76 с.
11. **Лов'янова І. В.** Діагностика математичної підготовки учнів основної школи у допрофільному навчанні. Черкаси: видавець Чабаненко Ю. А. 2013. 60 с.
12. **Лов'янова І. В.** Вибрані методи і прийоми розв'язування геометричних задач (матеріали для факультативних занять та курсів за вибором). 10 клас. Черкаси: видавець Чабаненко Ю. А. 2014. 64 с.
13. **Лов'янова І. В.,** Шиперко С. Г. Математика: довідник-тренажер. Частина 1. Арифметика. Алгебра. Черкаси: Видавець Ю.Чабаненко. 2014. 150 с.
14. **Лов'янова І. В.** Методика навчання математиики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до державної атестації. Кривий Ріг: ДВНЗ «Криворізький державний педагогічний університет». 2016. 124 с.
15. **Лов'янова І. В.** Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет. 2-ге видання, доповнене і перероблене 2020. 156 с.
16. Ляшенко Н. І., Тристан В.М. Технологія оцінювання знань учнів з математики за 12-бальною системою. *Математика*. 2000. №35 (95). С. 2-4.
17. Макаренко В.Г. Шляхи підвищення ефективності уроку. *Математика*. 2000. №15 (75). С. 2.
18. Морозова Є.В., Сухіна Л.Є. Про роботу за експериментальним підручником «Математика- 5». *Математика* . 2000. №9 (69), №10 (70).
19. Пархомець О. В. Чотирикутники. 8 клас. *Математика*. 2002. №38 (194). С. 20 – 22.
20. Пойа Д. Как решать задачу. М., 1956. 216 с.
21. Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 448 с.
22. Прус А.В., Швець В.О. Збірник задач з методики навчання математики. Житомир: Рута, 2011. 388 с.
23. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
24. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Методическое пособие. К.: Рад. шк., 1983. 192 с.
25. Шарко В.Д. Сучасний урок: технологічний аспект. Посібник для вчителів і студентів. К.: СПД Богданова А.М., 2007. 220 с.
26. Чайка Володимир Основи дидактики: Тексти лекцій і завдання для самоконтролю. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів. Тернопіль: Астон, 2002. 244с.

Методика навчання математики у запитаннях і відповідях

навчальне видання.