**Дисципліна**

**«Моделювання та дослідження електротехнічних комплексів»**

**Змістовий модуль 1. Основні поняття, визначення і проблеми та методи моделювання та дослідження.**

Поняття моделювання. Фізичне і математичне моделювання. Поняття оптимального і раціонального. Поняття «чорного ящика», пасивного і активного експерименту. Поняття і проблеми оптимізації. Призначення дисперсійного, регресійного та кореляційного аналізів. Планування експерименту. Вибір факторного простору. Матриця планування. Обробка і аналіз експериментальних даних планованого експерименту за допомогою стандартних програм. Програма Statgraphiks. Аналіз результатів: Паретто-графік, гіперповерхні, контурні криві. Інші методи оптимізації, метод сплайн-функцій, метод крутого сходження. Моделювання складних систем. Аналітичні та статистичні моделі.

**Лекція 1.1.**

*Мета– сформувати у студента цілісне уявлення про моделювання технологічних процесів. Зокрема:*

*-фізичне моделювання*

*-математичне моделювання*

*-спеціальні методи моделювання*

*-компьютерне моделювання*

**План лекції**

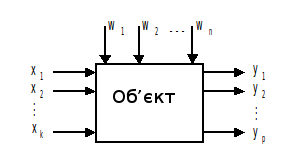
1. **Поняття «Моделювання» і «Модель». Дотичні терміни.**
2. **Різновиди моделей.**

***Моделювання*** – заміщення одного об'єкта іншим з метою отри-  
ня інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригіналу за допомогою  
об'єкта-моделі. Моделювання – метод пізнання навколишнього світу, який можна віднести до загальнонаукових методів, застосовуваним як на емпіричному, так і на теоретичному рівні пізнання.

Таким чином, базовим визначенням можна вважати таке: **моделювання – це побудова (або вибір з вже існуючих) моделі, її вивчення і використання  
з метою отримання нових знань про досліджуваний об'єкт.**

***Модель*** – це об'єкт-замінник об'єкта-оригіналу, що забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу. Аналіз досвіду використання моделей у природничих і технічних науках дозволяє зробити висновок, що модель – це наше уявлення про досліджуваний об'єкт, своєрідна форма кодування інформації про об'єкт.

**Модель** **– відтворення чи відображення об'єкту, задуму (конструкцій), опису чи розрахунків, що відображає,**[**імітує**](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%86%D0%BC%D1%96%D1%82%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F)**, відтворює принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи(та) характеристики об'єкта дослідження чи відтворення (оригіналу).**



Моделі і методи моделювання використовуються при створенні систем автоматизованого проектування, систем прийняття рішень, систем автоматизованого керування, систем штучного інтелекту. Потрібність у розв’язанні задач моделювання систем виникає не тільки у науковця, але й у проектувальника, виробника, ділової людини під час повсякденної праці. <https://www.youtube.com/watch?v=zx7LN8uHPUE&ab_channel=%D0%9B%D1%96%D0%BB%D1%96%D1%8F%D0%9C%D0%B5%D0%B4%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE> 5 хв.

Існує товариство міжнародного комп’ютерного моделювання SCS (www.scs.org), що опікується вивченням, розповсюдженням, використанням й удосконаленням методів моделювання для цілей вирішення практичних проблем. Європейське товариство моделювання EUROSIM розміщує свою інформацію на порталі www.eurosim.info. В Україні інформація з моделювання систем розповсюджується з порталу [www.simulation.org.ua](http://www.simulation.org.ua).

**РІЗНОВИДИ МОДЕЛЕЙ, СПОСОБІВ І МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ**

Розрізняють такі основні різновиди моделей, які використовуються при дослідженні процесів збагачення корисних копалин:

– *описова модель* полягає в будь-якому техніко-технологічному опису об’єкта моделювання;

Приклад – опис *факторної моделі* технологічного процесу – схеми («чорного ящика»), яка показує всі фактори (чинники), що впливають на процес, вихідні параметри та зв’язок між вхідними та вихідними характеристиками потоків речовини та енергії.

Інший приклад опис – *феноменологічної моделі* – схеми, яка відоб­ра­жає послідовність та взаємозвязок всіх еле­ментар­них фізичних та хімічних процесів (субпроцесів), які мають місце при проведенні технологічного процесу (наприклад, феноменологічна модель процесу флотації, флокуляції тощо). Вихідні величини кожного попереднього субпроцесу є вхідними для наступного. Вихідні величини останнього субпроцесу є вихідними величинами технологічного процесу в цілому.

– *евристична модель* полягає в формалізації моделей процесів, що сформувалися у людини, яка веде технологічний процес, в результаті численних особистих проб і спостережень;

– *графічна модель* представляє об’єкт моделювання у вигляді рисунків, креслень, графів, схем; Наприклад, *феноменологічна модель, факторна модель, граф* тощо;

– *фізична модель* являє собою змінений у визначеному масштабі (зменшення або збільшення) об’єкт моделювання;

– *математична модель* – опис об’єкта моделювання однією (*одноструктурна* модель) або декількома (*складноструктурна* модель) математичною залежністю; розрізняють *аналітичні, емпіричні* та змішані математичні моделі;

– *аналогова модель* використовує заміну об’єкта моделювання іншим, який відрізняється за своєю фізичною природою, але вони можуть бути описані одним й тим же диференційним рівнянням;

– *імітаційна модель* – представлення об’єкта моделювання у вигляді рекурентних співвідношень і наступна імітація роботи об’єкта на комп’ютері.

*Математична модель* – система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище.

У техніці найчастіше застосовуються два способи математичного моделювання:

* аналітичний, що передбачає можливість точного математичного опису строго детермінованих систем,
* ймовірнісний, що дозволяє отримати не однозначне рішення, а його імовірнісну характеристику (напр., параметрів шахти або яких-небудь параметрів технологічного процесу).

# <https://www.youtube.com/watch?v=jCE6J4mF6yg&ab_channel=%D0%93%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D0%A1%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%BF%D0%BA%D0%B0> Математичне моделювання фізичних задач з використанням мобільних пристроїв

Для створення математичних моделей використовують різні математичні засоби — мову диференційних або інтегральних рівнянь, [теорії множин](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%BD), [абстрактної алгебри](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BD%D0%B0_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0), [математичну логіку](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D1%96%D0%BA%D0%B0), [теорії ймовірностей](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9), [графи](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8) та інші.

Для будь якого об’єкта можна скласти велику кількість моделей, які будуть відрізнятися одна від іншої перш за все остаточною погрішністю (остаточною дисперсією), тобто будуть відтворювати реальний об’єкт з певною точністю.

Моделі бувають статичні *y = f(x)* і динамічні *y = f(x, t)*, де *y* – будь який вихідний показник процесу; *x* – фактор, що діє на вході процесу; *t* – поточний час.

Статичні моделі бувають:

– лінійні

;

, (1.3)

– нелінійні за фактором *х*

, (1.4)

– нелінійні за параметром, напр., *b*

. (1.5)

Частіше за все отримують багатомірні моделі, тобто *у* є функцією декількох факторів

**. (1.6)

***Моделювання*** – заміщення одного об'єкта іншим з метою отри-  
ня інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригіналу за допомогою  
об'єкта-моделі. Моделювання – метод пізнання навколишнього світу, який мож-  
але віднести до загальнонаукових методів, застосовуваним як на емпіричному,  
так і на теоретичному рівні пізнання.

Таким чином, базовим визначенням можна вважати таке: моделювання – це побудова (або вибір з вже існуючих) моделі, її вивчення і використання  
з метою отримання нових знань про досліджуваний об'єкт.

*Алгоритм моделювання* включає спочатку побудову особливої ідеальної конструкції, *змістовної моделі* (інші автори називають цей ідеальний об'єкт *концептуальна модель, умоглядна модель* або *передмодель*). При цьому фінальна математична конструкція називається *формальною моделлю* або просто математичною моделлю, отриманою в результаті формалізації даної змістовної моделі (передмоделі). Побудова змістовної моделі може проводитися за допомогою набору готових ідеалізацій, як у механіці, де ідеальні пружини, тверді тіла, ідеальні маятники, пружні середовища і т.п. дають готові структурні елементи для змістовного моделювання. У збагаченні корисних копалин змістовною перед моделлю може виступати згадана вище факторна і (або) феноменологічна модель технологічного процесу.

Теорія і практика моделювання оперує рядом понять: *об'єкт, процес, система, апріорна інформація, дослід, експеримент, фактор,* *область експериментування, цільова функція*, *похибка дослідів, обмеження та ін*.

*Об'єкт* (від лат. *оbjectum* – предмет) – все, на що спрямована діяльність людини. Будь-який об'єкт дослідження є нескінченно складним і характеризується нескінченним числом станів і параметрів.

*Процес* – послідовна зміна станів об'єкту в часі, а також певна сукупність ряду послідовних дій, спрямованих на досягнення певного результату.

*Система* – [множина](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%BD%D0%B0) взаємопов'язаних [елементів](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82), відокремлена від [середовища](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%89%D0%B5) і яка [взаємодіє](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B7%D0%B0%D1%94%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D1%96%D1%8F) з ним, як [ціле](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A6%D1%96%D0%BB%D0%B5&action=edit&redlink=1). Система має конкретну структуру і цілком конкретне цільове призначення. [Підсистемою](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%96%D0%B4%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0) називають складову частину системи, у якій можна виокремити інші складові.

[*Елементом*](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82) *системи* називають найпростішу складову частину системи, яку умовно розглядають як неподільну.

[*Зв'язком*](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B2%27%D1%8F%D0%B7%D0%BE%D0%BA_(%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F))називають [співвідношення](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D0%BF%D1%96%D0%B2%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F&action=edit&redlink=1) між компонентами системи, основані на взаємозалежності і взаємообумовленості.

*Зовнішнє середовище* – множина існуючих поза системою (об'єктом) елементів будь-якої природи, що впливають на систему (об'єкт) або знаходяться під її (його) впливом.

*Гіпотеза* – наукове припущення, що висувається для пояснення будь-якого [явища](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D0%B2%D0%B8%D1%89%D0%B5) і потребує перевірки на [досліді](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D1%81%D0%BB%D1%96%D0%B4) та теоретичного обґрунтування, для того щоб стати достовірною [науковою теорією](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%83%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F).

*Аналогія* – подібність, схожість у цілому відмінних предметів, явищ за певними властивостями, ознаками або відношеннями.

*Адекватність моделі* – збіг властивостей (функцій / параметрів / характеристик і т. п) [моделі](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C) і відповідних властивостей модельованого об'єкта.

**Коефіцієнт детермінації** (позначається як *R*2 — *R-квадрат*) — статистичний показник, що використовується в статистичних моделях як міра залежності варіації залежної змінної від варіації незалежних змінних. Іншими словами, чисельно показує, яка частина варіації [залежної](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D0%B0_%D1%96_%D0%BD%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D0%B0_%D0%B7%D0%BC%D1%96%D0%BD%D0%BD%D1%96) змінної пояснена моделлю. Вказує, наскільки отримані спостереження підтверджують модель.

В умовах класичної лінійної множинної регресії, коефіцієнт приймає значення від 0 до 1. Вважається, що чим ближче коефіцієнт до 1, тим кращою є модель.

*Дослідом* називають однократне виконання усіх необхідних операцій для отримання одного експериментального результату. В результаті досліду отримують одне число або сукупність чисел, які характеризують декілька різнорідних даних [2, 3]. Дослід по суті – здійснення визначеного [діяння](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%94%D1%96%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D1%8F&action=edit&redlink=1) на [об'єкт](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%27%D1%94%D0%BA%D1%82) і [реєстрування](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A0%D0%B5%D1%94%D1%81%D1%82%D1%80%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F&action=edit&redlink=1) одержаного результату. Дослід – це відтворення якого-небудь [явища](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D0%B2%D0%B8%D1%89%D0%B5) або [спостереження](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F) за новим явищем у певних умовах з метою вивчення, дослідження.

*Експериментом* називають сукупність дослідів, об’єднаних однією системою їх постановки, взаємозв’язком результатів і способом їх обробки. В результаті експерименту отримують сукупність результатів, які допускають їхню сумісну обробку і зіставлення.

*Фактором (чинником)* називають умови, рушійну силу будь-якого процесу, явища. У нашому випадку фактор – [незалежна змінна](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9D%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D0%B0_%D0%B7%D0%BC%D1%96%D0%BD%D0%BD%D0%B0&action=edit&redlink=1), яка може приймати в деякому інтервалі часу визначені значення. Звичайно, у процесах збагачення корисних копалин змінюють деякі конкретні величини, напр., масу навіски, витрати води і реагентів, тривалість досліду. Фактор звичайно позначають літерою *х*. Фактор повинний задовольняти визначеним вимогам:

– *первинність*, тобто як фактор доцільніше приймати таку величину, яка залежить тільки від експериментатора і не є функцією декількох, у тому числі невідомих, величин. Вторинні фактори звичайно із достовірністю можна встановити на початку досліду, що й слід враховувати при інтерпретації результатів;

– *можливість управління* пов’язана з первинністю і полягає у тому, що фактор повинен встановлюватись на необхідному рівні, інакше план експерименту не буде реалізований у деякому досліді, в результаті чого робота не буде виконана або потребуватиме серйозного коректування;

– *операційність* і *вимірність* – це вимоги до однозначності (однотиповості) встановлення одного й того ж фактора на одному і тому ж рівні, а також до вказівок щодо послідовності операцій по максимально точному встановленню і контролю значення фактора.

– *незалежність* полягає у тому, що при плануванні експериментів звичайно передбачається вивчення впливу різних комбінацій факторів, кожна з яких повинна бути реалізована;

– *безпека експерименту* вимагає передбачити і виключити до початку дослідів такі комбінації факторів, які можуть привести до вибуху, виділенню токсичних компонентів, аварії на експериментальному пристрої.

*Область експериментування* – це сукупність запланованих значень факторів, яка охоплює деяку область гіперпростору. Усі результати і висновки на їх основі з відомою точністю належать саме до цієї області гіперпростору факторів. Інтерполяція значень і висновків усередині області експериментування є допустимою. Екстраполяція результатів і висновків за межами області експериментування можлива, але гарантувати визначену точність при цьому не можна.

*Цільова функція* – функція, що зв'язує мету (змінну, що оптимізується *у*) з керованими змінними. Цільова функція може містити:

– *безпосередньо виміряні величини*, напр., витрати рідини *γ*:

*γ → γmax*; (1.1)

– *деякий обчислювальний показник*, який об’єднує декілька вихідних, без­посередньо вимірюваних показників досліду, напр., ККД електричної машини <https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/feeem/4lagutin_vyprobuv_elektrmashin_transformatoriv/p9.htm> :

Коефіцієнт корисної дії *(efficiency)* (ККД) електричної машини визначається відношенням корисної потужності до підведеної та виражається у відсотках:

η   = 100∙Р2/Р1 ;    η = 100∙(Р1 - ∑Р)/Р1           (1.2)

де Р1 – потужність, яка підводиться до електричної мережі;

    Р2 – корисна потужність (*operating power; useful power*) електричної машини;

∑Р = Р1 – Р2 – сумарні втрати в електричній машині.

Важливою особливістю цільової функції є неможливість забезпечення в рамках одного процесу, при одному і тому ж наборі факторів управління, максимального (мінімального) значення двох і більше показників.

Формулюючи оптимізуючий показник слід виділити і додати до нього **усі** необхідні обмеження і отримати тим самим доцільну цільову функцію.

*Обмеження* – це будь які умови, які накладаються на можливість зміни факторів, вихідних показників, вхідних збуджуючих впливів, ресурсів і часу. Обмеження бувають принципові (умови фізичного здійснення), технічні, екологічні, економічні та умови техніки безпеки.

*Регресія* – форма зв’язку між випадковими величинами. Закон зміни математичного очікування однієї випадкової величини залежно від значень іншої. Розрізняють прямолінійну, криволінійну, ортогональну, параболічну та ін. регресії, а також лінію і площину регресії.

*Локальний екстремум* – екстремум в деякому довільно малому [околі](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%96%D0%BB) (області) гіперпростору.

*Глобальний екстремум* – екстремум в усій розглядуваній області гіперпростору. Передбачається, що глобальний екстремум один, а локальних екстремумів може бути багато.

**Зада́ча оптиміза́ції** — задача знаходження точки (точок) [екстремуму](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%BC%D1%83%D0%BC), або декількох екстремумів заданої функції.

*Апріорна інформація* – це інформація, якою володіє дослідник до початку експерименту. Апріорна інформація дозволяє: сформулювати цільову функцію; вибрати номенклатуру факторів, центр експерименту (номінальні або початкові значення факторів), інтервали варіювання; методично правильно виконати збір інформації.

*Точкові оцінки* – числа, які використовують для характеристики результатів дослідів. При цьому використовують не тільки безпосередньо виміряні дані, але й при необхідності деякі розраховують. Найважливіші з них:

– *середнє арифметичне*, або середнє, яке позначається рисою над літерою:

, (1.7)

де *уі* – результат, отриманий в *і*-тому досліді; *п* – число дослідів;  – середнє арифметичне результатів *п* дослідів;

– середнє квадратичне відхилення

; (1.8)

– дисперсія – квадрат середнього квадратичного відхилення

. (1.9)

*Похибка дослідів* – це відхилення у результатах, які породжені усілякими відхиленнями умов дослідів від заданих.

*Випадкова похибка* – складова загальної похибки [вимірювання](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%BC%D1%96%D1%80%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F), яка змінюється випадковим чином (як за знаком, так і за величиною) під час повторних вимірювань однієї і тієї ж величини. Випадкові похибки з’являються внаслідок невеликих, але численних відхилень при виконанні досліду (їх причини – конструктивні та технологічні недосконалості вузлів та деталей приладів; випадкові коливання зовнішніх впливів — температури, вологості повітря, атмосферного тиску, напруженості зовнішніх електричних та магнітних полів тощо; нестабільність живлення електронних приладів; суб'єктивні помилки оператора; вібрації; теплові шуми в електронних приладах; просторова неоднорідність та часова нестабільність об'єкта вимірювання). Ці похибки обчислюють за формулою: e=\mathcal {4} -M(\mathcal {4})\,, де \mathcal {4}\, — похибка вимірювання, M(\mathcal {4})\, — математичне сподівання похибки.

*Систематична похибка* – складова загальної [похибки вимірювання](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%85%D0%B8%D0%B1%D0%BA%D0%B0_%D0%B2%D0%B8%D0%BC%D1%96%D1%80%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F), яка залишається постійною або закономірно змінюється під час повторних вимірювань однієї і тієї ж величини. Причинами виникнення систематичних похибок є: відхилення параметрів реальних засобів вимірювань від розрахункових значень, передбачених схемою; неврівноваженість деяких деталей засобів вимірювань відносно їх осі обертання; пружна деформація деталей засобів вимірювань, які мають малу жорсткість, що призводить до додаткових переміщень; похибки градуювання чи невеликий зсув шкали приладу; неточність мір фізичних величин; старіння матеріалів, із яких виготовлені засоби вимірювань; відхилення значень впливних величин (температури, вологості повітря, напруженості зовнішніх електричних та магнітних полів тощо) під час вимірювання від їх значень під час градуювання засобів вимірювання. Виявити наявність систематичної похибки можна тільки порівнянням результату досліду з еталонним, тобто результатом, який не містить систематичної похибки. Більшість систематичних похибок може бути виявлена та оцінена шляхом теоретичного аналізу властивостей об'єкта, умов вимірювання, особливостей методу, характеристик застосовуваних засобів вимірювань тощо. Після встановлення наявності систематичної похибки визначають причину її виникнення і усувають цю причину. Якщо причину встановити або усунути не можна, вводять поправки, що враховують вплив цієї систематичної похибки, яку не можна усунути.

*Число ступенів свободи* ƒ – кількість незалежних значень результатів дослідів, які використовуються для обчислення коефіцієнтів моделі, похибки відтворення, остаточної дисперсії і т.п. Чисельно ƒ дорівнює різниці між кількістю даних, що є, і обчисленими за цими даними показниками.

*Похибка відтворення* – це випадкова похибка, яка звичайно обчислюється у вигляді середнього квадратичного відхилення від середнього паралельних дослідів

, (1.10)

де *k* – число паралельних дослідів; ** – середнє значення результатів *k* паралельних дослідів (дослідів виконаних при одних і тих же значеннях факторів); *yi* – результат *і*-того досліду;  – похибка відтворення результатів будь якого окремого досліду.

Похибка відтворення середнього значення результату *k* дослідів буде менше і визначається за формулою

. (1.11)

Ця властивість зниження похибки широко використовується для підвищення точності результатів експерименту.

Звичайно припускають, що похибка відтворення є результатом деякої неточності виконання усіх операцій досліду, у зв’язку з чим вона повинна бути розподілена за нормальним законом. Відповідно до нормального закону вважають, що в межах  міститься 68 % похибки усіх дослідів; в межах – 95,5 % і в межах – 99,7 % усіх похибок. При обмеженій кількості дослідів використовують розподіл Ст’юдента, що враховує можливі похибки у визначенні при малому числі даних. Таким чином, якщо задана довірча імовірність *р* (%) і відоме число ступенів свободи обчисленої похибки відтворення (звичайно *fB = k - 1*), можна знайти довірчі інтервали для похибки результатів.

*Довірчі інтервали* похибки результатів – це діапазон значень, в якому з прийнятою довірчою імовірністю може знаходитися конкретне значення похибки окремого досліду (або інших характеристик дослідів, напр., середніх результатів паралельних дослідів),

, (1.12)

де  – граничні значення похибок (максимальні позитивні і негативні) або довірчий інтервал;  – критерій Ст’юдента.

Із збільшенням довірчої імовірності довірчий інтервал розширюється, тобто при більшій довірчій імовірності гарантувати появу дослідних результатів можна тільки в більш широкому діапазоні.

*Промахи* – це випадкові похибки, які перевищують довірчі інтервали. Промахи виникають внаслідок грубого порушення умов досліду або особливо несприятливими обставинами. Як правило, їх відкидають, а дослід, якщо це можливо повторюють.

Промахи можуть бути як у гірший, так і у кращий бік, тому при появі дуже гарного результату, який розглядається як промах, необхідно проаналізувати умови його появи. В такому випадку промах може дати цінну інформацію для покращення результатів роботи.

Для виключення промахів з великої вибірки можна користуватися правилом 2σ або 3σ. Для промаху х\* розраховується абсолютне значення різниці |х\* - х′|. При довірчій імовірності Р = 0,95 х\* відкидається, якщо |х\* - х′|> 2σ, а при Р = 0,997, якщо |х\* - х′| > 3σ.

Тут – середнє квадратичне відхилення. σ = Sy

*Похибка зведеного показника* виконується при необхідності визначення похибки відтворюваності будь якого обчисленого (зведеного) показника вигляду  з використанням формули:

. (1.13)

Вважають, що похибки  і  не залежать одна від одної. Нульові індекси при похідних означають, що конкретні чисельні значення похідних знаходяться при деяких номінальних значеннях *х0* і *у0* .

Для похибок відтворюваності, що спричиняються випадково, звичайно припускається, що коефіцієнт кореляцій дорівнює нулю. Якщо необхідно розглянути відхилення показника , які спричиняються відхиленнями його складових факторів *х* і *у*, то слід використовувати формулу:

, (1.14)

де  – коефіцієнт кореляції між *х* і *у*.

*Встановлення різниці*. В результаті обробки даних експерименту робляться висновки, які формально зводяться до відповіді на одне з трьох питань:

– чи значимо відрізняються два (або більше) результатів?

– чи значимо відрізняються дві (або більше) похибки відтворюваності однорідних результатів?

– чи значимо відрізняються кількості спостережених величин?

Відповіді на ці питання отримують в результаті наступних дій:

– визначають розрахункове значення спеціального критерію *Кр*;

– задаються довірчою імовірністю *р* висновку;

– знаходять у відповідних таблицях значення критерію *К*т при заданій *р* і знайдених ступенях свободи ƒ;

– порівнюють *Кр* і *К*т;

– якщо *Кр >К*т стверджують, що існуюча різниця між результатами не випадкова, тобто значима.

Для підтвердження значимості різниці звичайно задаються високою довірчою імовірністю більше 90 % (звичайно *р* = 95 %). Якщо з прийнятою імовірністю *р* різниці не встановлено, стверджувати що її взагалі не існує не можна, тобто зворотний висновок невірний. Якщо необхідно встановити ідентичність (відсутність різниці) показників, задаються довірчою імовірністю менше 10 % (звичайно *р* = 5 %).

**фізичне моделювання процесів**

***Мета розділу:*** *розкриття суті і змісту фізичного моделювання технологічних процесів*

**Фізичне моделювання** ([рос.](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B9%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0) *физическое моделирование;* [англ.](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D1%96%D0%B9%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0) *physical simulation*, [нім.](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D1%96%D0%BC%D0%B5%D1%86%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0) *physikalische Modellierung f*) –

* 1) Створення [матеріальної моделі](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%96%D0%B7%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C), що має таку саму фізичну природу (такий самий фізичний зміст), як і дійсне явище, що вивчається на основі критеріїв геометричного, кінематичного й динамічного моделювання.
* 2) Відтворення на моделі й дослідження процесів, що якісно однакові з процесами у реальному об’єкті. Під час фізичного моделювання процесу необхідно забезпечити геометричну, часову та фізичну подібності.

Фізичне моделювання — [метод](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4) експериментального вивчення фізичних явищ, який базується на їх фізичній подібності.

Метод застосовується у випадках, коли:

* відсутня математична модель явища (машини, процесу тощо), або така модель дуже складна, вимагає багато вихідних даних, одержання яких ускладнене.
* відтворення явища (машини, процесу) в реальних масштабах недоцільне.

Метод полягає у створенні лабораторної фізичної моделі явища у зменшеному масштабі і проведення експериментів на цій моделі. Висновки і результати, одержані на моделі розповсюджуються на явище у реальних масштабах.

Метод може дати надійні результати тільки у випадку наявності фізичної подібності реального явища і моделі. Подібність досягається за рахунок рівності для моделі і реального явища значень критеріїв подібності — безрозмірних чисел, що залежать від фізичних (у т.ч. геометричних) параметрів, що характеризують явище. Експериментальні дані одержані на моделі розповсюджуються на реальний об'єкт з урахуванням критеріїв подібності (на практиці - з врахуванням певних коефіцієнтів).

У широкому смислі будь-який експеримент є фізичним моделюванням процесу в певних конкретних умовах.

**Теорія подібності**

**2.1 Теорія подібності : загальні поняття**

Теорія подібності дає можливість вивчати складні процеси і теоретично, й експериментально. Але, тільки чисте експериментування, без теоретичних узагальнень, не дозволяє розповсюдити висновки, отримані таким шляхом, на інші недосліджені випадки. З іншого боку – тільки теоретичний метод не може охопити усього різноманіття умов фізичного процесу і, крім того, дуже часто приводить до складних математичних рівнянь, які важко розв'язати.

Труднощі, що зустрічаються при вирішенні багатьох задач за допомогою диференціальних рівнянь з частковими похідними, примусили шукати необхідні рішення експериментальним шляхом .

За дослідними даними, які отримані на одному апараті, робились приблизні висновки про можливу роботу іншого, – такого ж, але більшого за габаритами апарата. Це й привело до ідеї моделювання процесів і апаратів на основі теорії подібності.

Теорія подібності – наука про подібність явищ.

Основні технологічні процеси протікають, головним чином, внаслідок руху в’язких (стисливих і нестисливих) рідин, а також в результаті теплообміну і дифузії, внаслідок чого при їхньому моделюванні особливе значення мають гідродинамічна, теплова і дифузійна подібність.

Тому перш ніж перейти до розгляду теорії подібності і методу аналізу розмірностей необхідно розглянути рівняння гідродинаміки, теплообміну і дифузії.

**2.1.1 Рух в’язкої рідини**

# Розглянемо несталий рух рідини, при якому швидкості і тиски в кожній точці потоку змінюються з часом .

# Виділимо в потоці рухомої рідини елементарний паралелепіпед з ребрами *dx, dy* і *dz* (рис. 2.1).

Внаслідок нерозривності потоку, увесь об’єм виділеного паралелепіпеда буде постійно заповнений рухомою рідиною. При цьому маса стисливої рідини, яка надходить і виходить з паралелепіпеду, у загальному випадку буде різна, що обумовлене непостійністю величин швидкості *w* і густини *ρ*.

Через ліву грань *А*, паралельну площині *YOZ*, рідина рухається під впливом складової швидкості *vx*, паралельної вісі *ОХ*. Будемо вважати цю складову, а також густину *ρ* постійними в усіх точках цієї грані і рівними їхнім значенням у точці *А*:

, ,  – час.

***0***

***X***

***Z***

***Y***

***y***

***x***

***vy***

***vx***

***vz***

***A***

***дvy***

***дy***

***vy+***

***dy***

***дvz***

***дz***

***vz+***

***dz***

***дvx***

***дx***

***vx+***

***dx***

***B***

***dx***

***dy***

***dz***

***z***

**Рис. 2.1 – Елемент рідини у русі.**

# У той же момент часу для протилежної правої грані *В* ці величини будуть:

**; .**

Через площадку *dydz* лівої грані за одиницю часу витікає кількість рідини (в одиницях маси):

.

Маса рідини, що витікає через протилежну грань за цей час буде:

.

Таким чином, приріст маси рідини за одиницю часу у паралелепіпеді, є причиною різниці значень *vx* і *ρ* на лівій і правій його гранях, він дорівнює:

.

# Аналогічно отримуємо для напрямків перпендикулярних осям *OY* і *OZ* :

;

.

Повний приріст маси рідини в паралелепіпеді за одиницю часу буде:

 (2.1)

При нерозривності потоку зміна маси в об’ємі *dxdydz* спричиняється зміною густини рідини у цьому об’ємі, тобто:

. (2.2)

Після прирівнювання рівнянь (2.1) і (2.2) і ділення на *dxdydz* отримуємо:

. (2.3)

Отримане рівняння називається рівнянням нерозривності або суцільності.

У окремих випадках рівняння суцільності приймає такий вигляд:

**–** для краплинної рідини (*ρ* = сопst):

****

або у векторної формі

div= 0.

Тобто, при нерозривному русі рідини об’єм її, який втікає у деяку обмежену частину простору, дорівнює об’єму, який витікає з нього за той же час;

* для однорідного газу [*ρ = f2(t)*]:

****

або у векторної формі

*ρ*div = 0;

* для сталого руху :



або у векторної формі

div (*ρ*) = 0.

З рівняння (2.3) за умови  знаходимо, що для даного простору при сталому русі рідина не змінює своєї маси, тобто маси рідини, яка втікає і витікає, рівні між собою.

В будь якій точці рухомого потоку повинна мати місце рівновага сил, які обумовлюють рух. Такими силами є сила ваги, сили тиску (перепад тиску) і сили тертя. Для одержання рівняння руху виділимо у рідині, яка находиться в русі, елементарний паралелепіпед об’ємом *dW*  з ребрами *dx, dy* і *dz* .

Знаходимо проекції на вісь *ОХ* (рис. 2.2) сили ваги, сили тиску і сили тертя, які діють на цей елементарний об’єм.

**Рис. 2.2 – Сили, які діють на елементарний об’єм рідини.**

***dx***

***dy***

***dz***

***X***

***P***

***Y***

***Z***

***Pg***

***0***

***дх***

***P +***

***дР***

***dx***

# Для сили ваги, яка прикладена в центрі ваги елемента *dW*, маємо:

, (2.4)

де – проекція прискорення сили ваги (м/с2) на *ОХ*.

Позначимо питомий тиск рідини *р* кг/м2 , тоді сила тиску рідини на верхню грань елемента буде дорівнювати *рdydz* , а на нижню:

,

де – зміна гідростатичного тиску в напрямку осі *ОХ* по всій довжині ребра ; ця сила діє проти напрямку руху рідини.

Проекція рівнодіючої сил тиску буде:

. (2.5)

Дію сили тертя розглянемо спочатку на прикладі руху плоского ламінарного потоку, в якому проекція швидкості *vx* залежить тільки від *y*. У цьому випадку сила тертя виникає тільки на бокових гранях елемента.

Напрямки і величина сил тертя показані на рис. 2.3.

***y***

***dy***

***S***

***Y***

***X***

***0***

**Рис. 2.3 – Напрямки і величина сил тертя.**

***S+dS***

***x***

***vx***

***dx***

У перетині *у* сила тертя дорівнює – *Sdxdz* і направлена проти руху, тому що швидкість рідини тут менше, ніж у самому елементі. В перетині сила *у+dу* тертя дорівнює



і направлена у бік руху, оскільки у цьому випадку швидкість рідини більша, ніж у самому елементі.

Проекція рівнодіючих цих сил визначається як:

, (2.6)

де *S* – сила тертя на одиницю поверхні.

Але за законом стокса

, (2.7)

де – в’язкість середовища.

Після сумісного рішення рівнянь (2.6) і (2.7) маємо:

.

У загальному випадку, коли швидкість *vx* змінюється в усіх трьох напрямках, проекція сили тертя на вісь *ОХ* буде:

, (2.8)

де символ  – оператор Лапласа, який позначає суму других часткових похідних від проекції швидкості на вісь *ОХ* .

Сумуючи проекції (2.4), (2.5) і (2.8), отримуємо проекцію рівнодіючої усіх сил, прикладених до об’єму *dW* , на вісь *ОХ*:

. (2.9)

## Ця рівнодіюча дорівнює добутку маси елемента *dW* на його прискорення :

. (2.10)

Символ  називається повною або субстанціональною похідною *vx* по *t*. Цю похідну слід розуміти таким чином: швидкість зміни *vx* в даній точці характеризується частковою (або локальною) похідною *vx* по :

, , (2.11)

де *М* позначає будь яку постійну геометричну точку у просторі.

Щоб охарактеризувати зміну vx для даної частинки рідини за проміжок часу Δ, слід за приріст vx прийняти різницю між значеннями функції vx в момент t + Δ в тому положенні частинок М′, в якому вона находиться у той момент, і значенням функції vx в момент t у початковому положенні її М. Межа відношення цього прирощення до Δ при Δ→ 0 й називається субстанціональною похідною.

Зв’язок між частковою і повною похідними полягає у тому, що, коли складається повна похідна від функції *v(x, Y, Z, t)* вважають *x, y, z* функціями від *t*, тому що частинка, яка мала в момент *t* координати *x, y, z*, за час *Δ* переміститься по деякій кривій.

З використанням рівнянь (2.9) і (2.10) отримуємо:

. (2.12)

Аналогічно отримуємо рівняння для рівнодіючих проекцій сил на вісі *ОY* і *OZ*.

, (2.13)

. (2.14)

Рівняння (2.12), (2.13) і (2.14) утворюють систему диференціальних рівнянь руху нестислої рідини Навьє-Стокса; ця система справедлива як для ламінарного, так і для турбулентного руху.

Якщо *μ* постійне, рівняння (2.12), (2.13) і (2.14) можна звести до одного векторного:

 , (2.15)

де  – кінематичний коефіцієнт в’язкості, м2/с.

Рівняння Навьє-Стокса можуть бути отримані також і для стисливих рідин. Рівняння відносно вісі *ОХ* має такий вигляд:

 (2.16)

Такі ж рівняння мають місце у напрямках *OY* і *OZ*.

До цих рівнянь додаємо ще й рівняння теплового балансу. Тепло, яке надходить у одиничний об’єм при сталому стані, дорівнює такий же кількості тепла, яке видаляється з цього ж об’єму. До даного об’єму, так як і в рівнянні (2.12), тепло підводиться внаслідок теплопровідності і за допомогою матеріальних частинок, які протікають через одиничний об’єм при одночасному його охолодженні. Якщо температура *τ* цього об’єму не змінюється з часом, то спільна кількість підведеного тепла повинна дорівнюватися нулю, і якщо врахувати наявність джерела тепла з інтенсивністю *qі* (ккал/м3), то отримуємо таке рівняння:

 , (2.17)

де *с* – теплоємність, *ρ* – густина, *λ* – теплопровідність.

У лівій частині рівняння (2.17) представлена кількість тепла в одиничному об’ємі, яке використовується для нагрівання на *dτ* частинок, що протікають через паралелепіпед з ребрами *dx, dy, dz .* Це тепло покривається за рахунок підводу тепла з оточуючого середовища (перший член правої частини рівняння) і за рахунок джерела тепла *qі*. Після ділення обох частин рівняння на *сρ* отримаємо:

 (2.18)

або у векторної формі

 . (2.19)

Система з п’яти диференціальних рівнянь (2.3), (2.12), (2.13), (2.14) і (2.18) з частковими похідними сумісно з межовими і початковими умовами повністю описує процес руху в’язкої рідини.

Поблизу стінок потік є ламінарним, відповідно, передача тепла відбувається в результаті теплопровідності:

, (2.20)

де – поверхня теплообміну; *п* – нормаль до ; – температурний градієнт рідини безпосередньо біля стінки.

Кількість тепла, що передається звичайно виражають за допомогою коефіцієнта тепловіддачі *α* (ккал/м2·год·град), з використанням формули Ньютона:

, ккал (2.21)

або

, ккал/год. (2.22)

Незважаючи на те, що коефіцієнт тепловіддачі не входить у рівняння (1.3) – (2.20), він часто застосовується у теплових розрахунках. Після диференціювання рівняння (2.22) отримуємо:

, (2.23)

де  температура стінки; – температура рідини.

Таким чином, маємо:

 . (2.24)

# Ця залежність дозволяє коефіцієнт тепловіддачі *α* ввести у систему диференціальних рівнянь для конвективної теплопередачі. Оскільки температурний градієнт в формулі (2.24) залежить від температур стінки і рідини і від товщини пограничного шару, тобто від характеру (режиму) руху, то, відповідно, й коефіцієнт тепловіддачі *α* залежить від усіх величин, які містяться в рівняннях (2.3) – (2.20).

**2.1.2 Умови застосування теорії подібності**

**У випадку *геометричної подібності*** двох фігур відношення усіх відповідних розмірів цих фігур постійне. Геометричні фігури подібні між собою, якщо їхні відповідні кути рівні, а східні сторони пропорційні, тобто:

, (2.25)

де *А* – коефіцієнт пропорційності, або константа подібності.

Таким чином, умова (2.25) є математичним формулюванням геометричної подібності двох фігур (моделі і виробничого апарата).

У двох кінематичних схемах буде мати місце ***кінематична подібність****,* якщо їхні схожі частинки переміщуються по геометрично подібним шляхам в проміжки часу, що відрізняються постійним множником, тобто у цьому випадку можна говорити про подібність руху, наприклад двох потоків рідини.

При ***динамічній подібності*** багатокутники сил, побудовані для пари схожих частинок, розташованих подібним чином у просторі і часі, повинні бути подібні, тобто розрізнятися тільки масштабом. Поняття подібності можна також поширити на теплові і фізико-хімічні процеси.

З використанням цього поняття можна вирішити багато практично важливих задач. Але для використання понять про подібність необхідно знайти умови подібності явищ, які розглядаються. При цьому виникають такі питання:

– чи можна відомі експериментальні дані, наприклад, такі, що пов’язані з температурним полем, отримані шляхом вимірювання на одному апараті (на моделі), перенести на інший апарат (виробничий);

– які повинні бути умови, що допускають таке перенесення або перерахунок;

– що слід зробити, щоб отримані під час експерименту на моделі дані були правильно застосовані для виробничого апарата.

**Перенесення експериментальних даних з моделі на виробничий апарат можливе у таких випадках, де існує подібність обох процесів.** Ця подібність не повинна обмежуватися тільки геометричними формами; усі інші величини, які впливають на процес, повинні в моделі і у промисловому апараті знаходитися у визначених відношеннях.

Визначення умов подібності здійснюється таким чином: порівнюються такі два випадки, при яких потоки для усіх величин, що зустрічаються в рівняннях (2.3) – (2.24), подібні.

1. Такими є координати *x, y, z* промислового апарата, які відносно *x′, y′, z′* моделі можуть бути рівномірно збільшені. Отже порівнюються потоки, які проходять через геометрично подібні тіла або навколо них. Тоді усі відрізки потоку *l1, l2, l3 …* виробничого апарата, які відповідають *l′1, l′2, l′3 …* моделі, будуть збільшені у визначеній пропорції:

. (2.26)

Кути між відповідними відрізками залишаються незмінними.

2. Поле швидкостей у промисловому апараті і моделі повинно бути подібним. У відповідних точках з координатами *x′, y′, z′*  і *x, y, z* відношення

 (2.27)

повинно бути однаковим, і крім того, напрямок відповідних швидкостей промислового апарата і моделі повинно бути одним і тим же (рівність кутів). Отже не можна намагатися знайти подібність між ламінарним і турбулентним потоками, тому що розподіл швидкостей в обох потоках різний. Можна порівнювати тільки ламінарні потоки між собою і турбулентні потоки між собою.

3. Наступною важливою величиною є температурний градієнт . Розподіл градієнтів повинний бути подібним, тобто

. (2.28)

#### З рівнянь (2.26) і 2.28) маємо:

 (2.29)

де

. (2.30)

після інтегрування рівняння (2.29) отримуємо:

 (2.31)

або

, (2.32)

де температури  і  – довільні постійні інтегрування для відповідних, але довільно вибраних точок *x′0 , y′0 , z′0*  і *x0 , y0 , z0* . В моделі і промисловому апараті температури  і  можуть бути вибрані, наприклад, поблизу вводу в трубопровід або на великій відстані від стінки залежно від доцільності. В рівняння подібності температурних полів входять, таким чином, не власне температури, а їхні різниці по відношенню до температури вибраної точки.

З рівнянь (2.26), (2.28) і (2.29) випливає:

 ;  (2.33)

У багатьох випадках має значення дотримання подібності градієнтів концентрацій в матеріальних потоках, які проходять через апарати. Умови подібності концентраційних і температурних градієнтів аналогічні.

4. Статичний тиск представлений у диференціальних рівняннях зокрема у вигляді градієнтів ; за аналогією з температурним полем можна написати умови подібності для поля тиску:

. (2.34)

5. Подібність полів фізичних властивостей середовища обумовлює такі постійні співвідношення для усіх відповідних точок виробничого (промислового) апарата і моделі:

 (2.35)

Слід відмітити, що при виконанні умов подібності не всі масштабні множники (числа) (2.28) – (2.35) можуть бути довільно вибрані. Інші визначаються після вибору деяких небагатьох основних величин. Тобто число незалежних масштабних множників у порівнянні з наведеними у рівняннях (2.26) – (2.35) може суттєво скоротитися внаслідок додаткових умов.

Якщо дві системи подібні, то в межах кожної системи відношення будь-яких схожих величин, що характеризують той або інший стан, є безрозмірним і постійним для обох систем. Так, наприклад, фізичний стан однієї із систем характеризується деякими величинами *R1 , R2 ,…, Rn* , а іншої подібної системи – величинами *r1 , r2 ,…, rn .* Тоді умова подібності потребує рівності:

. (2.36)

Тобто відношення схожих величин в одній системі дорівнює їхньому відношенню в подібній системі. Ці постійні безрозмірні відношення називаються ***інваріантами подібності*** і позначаються символом *і*.

Інваріанти подібності, які є відношеннями простих однорідних величин, наприклад, лінійних розмірів *l/d*, тисків *p1/p2*, в’язкостей *μ1/μ2* і т.п., називаються ***симплексами подібності*.**

Інваріанти подібності можуть бути виражені й більш складними безрозмірними відношеннями, складеними з декількох простих параметрів, наприклад *dVρ/μ*. У цьому випадку вони називаються критеріями подібності, які можуть бути визначальними і невизначальними. визначальними критеріями є такі, у яких величини задані наперед умовами однозначності. Критерії, що містять шукану величину, називаються невизначальними.

**В основі теорії подібності лежать три теореми, які формулюються таким чином:**

***І теорема*. Якщо фізичні процеси подібні один одному, однойменні критерії подібності цих процесів мають однакову величину.**

***ІІ теорема*. Рівняння, які описують фізичні процеси, можуть бути представлені у вигляді функціонального зв’язку між критеріями подібності.**

***ІІІ теорема*. Для того щоб фізичні процеси були подібні один одному, необхідно і достатньо, щоб ці процеси були якісно однакові, а їхні однойменні визначальні критерії – чисельно однакові.**

**2.1.3 Диференціальні рівняння теплообміну для моделі**

Диференціальні рівняння теплообміну для моделі напишемо у відповідності з рівняннями п. 2.2. але у даному випадку усі вхідні величини забезпечимо штрихами, на відміну від величин для виробничого апарата [9, 11].

Вважаючи, що , отримуємо (для осі *ОХ′*):

; (2.37)

 (2.38)

# Подібні рівняння можна скласти й для проекцій на вісі *OY′* і *OZ′*. Аналогічно рівнянню (2.18) маємо:

 ; (2.39)

 . (2.40)

У ці рівняння відповідно до співвідношень (2.28) – (2.35) можна підставити , , , де величини без штриха відносяться до виробничого апарата. Таким чином, з рівняння (2.37) отримуємо:

 , (2.41)

а з рівняння (2.38) маємо:

 (2.42)

##### Аналогічні рівняння отримують і для напрямків *OY* і *OZ* . З рівняння (2.39) маємо:

 , (2.43)

а з рівняння (2.40) отримуємо:

 . (2.44)

Подібними вважать тільки такі процеси, для яких масштабні значення *Al, Av , Aτ*  та ін. є такими, що множники, які стоять перед дужками в рівняннях (2.41) – (2.44) однакові, тобто:

 ; (2.45)

 ; (2.46)

 (2.47)

Отже, якщо чисельні значення задовольняють рівнянням (2.45) – (2.47), то в рівняннях (2.41) – (2.44) масштабні множники можуть бути скорочені і для моделі залишається система диференціальних рівнянь, які повністю ідентичні рівнянням для виробничого апарата, а саме – рівнянням (2.3), (2.12), (2.13), (2.16), і (2.18).

Інтеграли диференціальних рівнянь для апарата і моделі також будуть ідентичні. Це означає, що тільки у цьому випадку поширення потоків з швидкісними і температурними полями у просторі моделі і промислового апарата відбувається однаково.

Звідси витікає наступне положення: подібними процесами теплообміну у сталому стані при відсутності джерел тепла є тільки такі, у яких масштабні множники задовольняють рівнянням (2.45) – (2.47). Таким чином, з числа масштабних множників п’ять виражаються через інші за допомогою рівнянь (2.45) – (2.47).

Далі представимо рівняння (2.45) – (2.47) в більш зручній формі – у вигляді рівнянь в критеріях подібності.

**2.1.4 Гідродинамічна подібність**

Для з'ясування умов, при дотриманні яких рівняння руху будуть подібні, або рухи подібні, розглянемо рівняння навьє-стокса (2.12) – (2.14) для випадку плоского потоку в безрозмірному вигляді. За масштаб довжини вибираємо будь-який характерний розмір тіла (напр., діаметр або радіус труби), а за масштаби швидкостей, тисків, густин, температур та ін. – їхні характерні значення (на нескінченності, середні за об’ємними, масовими витратами та ін.) [9].

Позначимо безрозмірні величини тими ж буквами, що й розмірні, але з рискою і зробимо таку заміну:

, , , , ,

, , , , .

За масштаб часу прийнятий час, характерний для даного руху, а за масштаб масових сил, віднесених до одиниці маси, – прискорення сили ваги.

Після підстановки вказаних величин у рівняння (2.12) – (2.14) одержимо рівняння плоского руху і рівняння нерозривності для нестисливої рідини у безрозмірної формі:

;

; (2.48)

.

Розділимо перші два рівнянні на  , а третє на  і опустимо для простоти риски над безрозмірними величинами, після чого отримуємо:

;

;

.

З цієї системи рівнянь витікає, що якщо два потоки подібні, тобто вони описуються однаковими рівняннями з однаковими межовими і початковими умовами, представленими в безрозмірному вигляді, то для них повинні бути однаковими за величиною такі безрозмірні величини, які мають свої власні назви:

 – ***число Струхаля*** характеризує залежність складових інерційних сил від часу;

**** – *число Фруда* відбиває відношення сил інерції до сил гравітації;

 – *число Ейлера* відбиває відношення сил тиску й сил інерції;

**** *Re*– *число Рейнольдса* відбиває відношення сил інерції й в’язкості.

Для повного моделювання необхідна повна подібність процесів, тобто рівність чисел подібності. При використанні даних, отриманих на моделі, повинні бути задоволені для усіх відповідних точок на моделі і у виробничому апараті три умови:

*Re* = idem; *Eu* = idem; *Sh* = idem. (2.49)

Однак теорія і практика показують, що при однорідних потоках в моделі і виробничому апараті встановлюються такі профілі швидкостей, які подібні між собою. Тому, для того щоб упевнитися в подібності процесів, немає необхідності перевіряти наявність умов (2.49) для усіх подібних точок. Якщо, наприклад, у трубопроводі по його осі знайдено, що *Re* = idem для виробничого апарата і моделі, то відповідно цьому *Re* = idem також для інших точок перетину потоку. Однорідними потоками називають такі, які мають подібні режими руху (турбулентний, ламінарний), початкові умови (профіль швидкостей на вході у апарат), крайові умови. Остання умова у відношенні до швидкостей завжди виконується внаслідок того, що швидкості біля стінки як в моделі, так і у виробничому апараті завжди рівні нулю.

Інші умови подібності – *геометрична подібність* (у тому числі й шорсткість поверхні) та інші повинні бути також виконані. Але виникає питання: чи можливе взагалі дотримання усіх умов подібності і якщо так, то при яких обставинах.

Якщо, наприклад, при протіканні рідини в трубопроводі (тверді межі) з’являються вільні поверхні рідини, то для їхнього врахування було б необхідно ввести додаткові умови подібності, які визначаються фізичними законами їхнього утворення. Тобто при вільних поверхнях неможливо одночасно виконати усі умови подібності. Те ж саме відбудеться, якщо властивості речовини (в’язкість, густина та ін.) не є постійними і змінюються з температурою вздовж потоку.

Для потоків, де ці труднощі не мають місця, число умов подібності можна скоротити, виходячи з наступних міркувань. Для стаціонарних процесів числа  не мають значення. Перепад тиску в потоці буде залежати від швидкісних характеристик потоку, тобто *Eu* = *f (Re)*. Таким чином, при вивченні руху рідини найбільш істотним буде число *Re*. Число *Re* здобуває вирішальне значення при визначенні структури потоків (ламінарних і турбулентних). Структура потоку визначає процес переносу маси, кількості руху, тепла.

Тобто, як правило, використовують приблизне моделювання, при якому подібність зберігається за числами найбільш характерними для даного процесу.

**2.1.5 Теплова подібність**

Аналогічно гідродинамічній подібності розглянемо умови теплової подібності. По-перше розглянемо випадок чистої теплопровідності, тобто переносу тепла молекулярним способом без конвекції [11]. У цьому випадку рівняння переносу тепла має вигляд:

, (2.50)

де *ср* – питома теплоємність рідини.

Приведемо це рівняння до безрозмірного вигляду, для чого введемо такі безрозмірні величини:

; ; ; ; ; ,

де , , , , , – безрозмірні величини; , , , , *l*, – характерні розмірні величини (масштаби).

Розглянемо одномірний рух, тобто , тоді .

Після підстановки прийнятих співвідношень у рівняння переносу тепла отримуємо:

 ,

або (2.51)

** .**

де  – коефіцієнт температуропровідності, а

 – *число Фур’є*, яке характеризує нестаціонарність процесу молекулярного переносу тепла.

Далі розглянемо випадок конвективного переносу тепла. Для випадку одномірного сталого руху відповідне рівняння буде:

 .

Після введення безрозмірних величин отримуємо:



або (2.52)

.

Тобто для подібності процесів необхідно дотримуватися рівності величини , а зворотна їй величина називається числом пекле.

 *число Пекле* характеризує конвективний перенос тепла.

Очевидно, що малі значення числа *Ре* відповідають дуже малому конвекційному переносу у загальному переносі тепла. Отже, при значеннях чисел *Ре <* 1 спостерігається тільки молекулярний перенос, тобто теплопровідність, тоді як при великих значеннях числа *Ре* роль молекулярного переносу буде незначна.

Перенос тепла з поверхні *F* при різниці температур в потоці і на стінці

*τ1* – *τw* можна представити у вигляді:

, (2.53)

де температура оточуючого середовища; –температура стінки;  коефіцієнт теплопереносу.

Для густини теплового потоку маємо:

. (2.54)

# Запишемо рівняння (2.54) в безрозмірному вигляді:

# 

і після ділення на  одержимо:

,

### звідси отримуємо число Нуссельта:

 =  *Nu* –  *число Нуссельта*, яке можна розглядати як відношення дійсного теплового потоку, який визначається величиною коефіцієнта теплопереносу *α*, до питомого теплового потоку, що мав би місце в умовах чистої теплопровідності в шарі товщиною *l*, тобто:

 .

Якщо поділити число *Ре* на число *Re*, одержимо *число Прандтля*:

. (2.55)

Число *Pr* характеризує відношення двох характеристик молекулярного переносу: кінематичної в’язкості  і коефіцієнта температуропровідності . Перенос імпульсу, пов’язаний з величиною , визначається різницею швидкостей, а перенос тепла, пов’язаний з величиною , визначається температурою. Отже, число *Pr* явно містить тільки величини, які визначають фізичні властивості середовища, і у дійсності характеризує відношення між полями швидкостей і температур. Тоді залежність можна трактувати таким чином: кількість тепла, яке переноситься (*Nu*) залежить від виду швидкісного поля (*Re*) і його зв’язку з полем температур (*Pr*).

Приведені вище рівняння дійсні тільки у тому випадку, якщо величини  та ін. по довжині потоку залишаються постійними, тому що тільки при цьому забезпечується постійність масштабних множників. Внаслідок того, що температура впливає на  точне виконання умов подібності має місце дуже рідко.

**2.1.6 Дифузійна подібність**

Числа подібності для дифузійних процесів можна одержати з рівняння дифузії речовини [9, 11]. Для одномірного руху рівняння молекулярної дифузії має вигляд:

. (2.56)

Після заміни у цьому рівнянні усіх величин безрозмірними і характерними значеннями (масштабами) отримуємо:



або (2.57)



Безрозмірне число  називається дифузійним числом Фур’є.

 – дифузійне *число Фур’є* аналогічне тепловому числу Фурьє, але характеризує нестаціонарність процесу молекулярного переносу речовини.

При конвекційному переносі речовини для одномірного руху скористаємося рівнянням:

. (2.58)

Після виконання аналогічних операцій маємо:

.

 – *дифузійне число Пекле*, яке подібно числу *Re* визначає структуру потоку.

Залежно від величини числа  у порівнянні з одиницею можна судити про характер переносу речовини. Якщо  > 1 молекулярною дифузією можна знехтувати у порівнянні з конвекційним переносом речовини. Якщо  < 1, навпаки молекулярна дифузія є визначальною.

Ділення числа  на число *Re* дозволяє отримати *дифузійне число Прандтля* *Pr∂* :

****. (2.59)

дифузійне число Прандтля характеризує відношення двох характеристик переносу: кінематичної в’язкості  і коефіцієнта дифузії .

Коефіцієнт кінематичної в’язкості у рухомих рідинах типу води складає біля 10–6 м2/с, а коефіцієнт дифузії молекул і йонів у водних розчинах має порядок  = 10–9 м2/с, макромолекул –  = 10–10 м2/с. Тому у воді і подібних до неї рідинах *Pr∂ ≈* 103. При зростанні в’язкості коефіцієнт дифузії зменшується за законом:

 , (2.60)

тому число *Pr∂* зі збільшенням в’язкості зростає пропорційно її квадрату. У в’язких рідинах число *Pr∂* досягає значення 106 і більше.

# Запишемо рівняння переносу речовини стосовно до різниці концентрацій на стінці і в оточуючому середовищі:

, (2.60)

де коефіцієнт переносу маси; концентрація речовини в оточуючому середовищі; концентрація речовини на стінці.

Після заміни у цьому рівнянні усіх величин безрозмірними і характерними значеннями (масштабами) отримуємо:

****

або (2.61)

****

З останнього рівняння отримуємо *локальне число Нуссельта*:

**. (**2.62**)**

# Аналогічно тепловому числу можна з використанням середнього коефіцієнта переносу речовини отримати середнє дифузійне число Нуссельта.

**2.1.7 подібність деяких часткових випадків переносу**

Відомо, що на тіло, занурене у рідину діє гідростатична або архімедова сила. Її величина дорівнює вазі витиснутої тілом рідини і направлена у бік протилежний напрямку сил ваги [9]. Архімедова сила має важливе значення у тих випадках коли у рідинах є частинки з густиною, яка відрізняється від густини середовища. У цьому випадку критерієм подібності буде *число Архімеда*:

**,** (2.63)

де *ρ* і *ρ1* – густини частинок і рідини.

Співвідношення між гравітаційними силами і сили в’язкості характеризує *число Галілея:*

, (2.64)

яке показує співвідношення сил гравітації і сил в’язкості.

Якщо зміна густини рідини спричинена зміною температури, то у цьому випадку критерієм подібності буде *число Грасгофа*:

**,** (2.65)

де *β* – коефіцієнт об’ємного розширення, який визначається із співвідношення:

.

Для спільності найменувань доцільно число Грасгофа називати тепловим числом Архімеда.

Гідростатична сила може виникнути й при різниці концентрації домішки у середовищі. У цьому випадку критерієм подібності буде *дифузійне число Архімеда:*

**,** (2.66)

де ****різниця концентраційречовини у середовищі і на стінці; **** коефіцієнт (аналогічний *β*), який характеризує відносну зміну густини у залежності від концентрації:

.

Динамічне, теплове і дифузійне числа Архімеда можуть бути одержані з відповідного аналізу рівняння руху у такому вигляді:

. (2.67)

Після виконання відповідних операцій з рівнянням (2.67) одержимо *динамічне число Нуссельта*:

 . (2.68)

У тих випадках, коли в рідині великі сили поверхневого натягу, основним критерієм подібності буде ***число Вебера*:**

, (2.69)

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу.

###### Число виражає собою відношення сил інерції до сил поверхневого натягу. Число має суттєве значення при вивченні процесів перемішування взаємно нерозчинних рідин. Імовірність дроблення крапель у мішалках визначається у залежності від числа , представленого у вигляді:

, (2.70)

де *п* і *d* – число обертів і діаметр мішалки; *σ* – міжфазний натяг.

#### Зі збільшенням числа діаметр крапель зменшується і міжфазна поверхня росте.

**2.1.8 Узагальнення**

Легко бачити, що теплове і динамічне числа Пекле за фізичним смислом і формою аналогічні числам Рейнольдса. Отже, можна ввести три **числа Рейнольдса**: динамічне, теплове і дифузійне:

 ;

; (2.71)

.

У знаменнику цих формул знаходяться відповідно кінематична в’язкість, температуропровідність і коефіцієнт дифузії, тобто величини, які залежать від в’язкості. Тому при зменшенні в’язкості усі числа Рейнольдса будуть рости, а при наближенні величини в’язкості до нуля динамічне, теплове і дифузійне числа Рейнольдса будуть наближатися до нескінченності.

Аналогічно можна одержати динамічне, теплове і дифузійне числа Фур’є.

При вивченні теплових і дифузійних процесів суттєве значення мають **числа Прандтля**, які можна отримати, як відношення відповідних чисел Рейнольдса:



 (2.72)



Перше число Прандтля називається тепловим, друге – дифузійним, третє – змішаним.

Перше число Прандтля являє собою відношення кінематичної в’язкості (перенесення імпульсу) і коефіцієнта температуропровідності (перенесення тепла). Таким чином, теплове число Прандтля явно містить тільки величини, що визначають фізичні властивості середовища, тобто характеризують співвідношення поля швидкостей і поля температур. Це значить, такі поля будуть подібні тільки при числі *Pr* = 1.

Аналогічні міркування можна повністю перенести на дифузійне число Прандтля. Воно характеризує співвідношення між полем швидкостей і полем концентрацій. А змішане число Прандтля – відношення температурного поля до поля концентрацій.

На завершення наведемо зведену таблицю чисел подібності процесів переносу кількості руху, тепла і речовини в рідинах і газах [9].

Таблиця 2.1 – Числа подібності процесів переносу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Число подібності** | **Прандтля** | **Архімеда** | **Нуссельта** | **Фур’є** | **Рейнольдса** |
| **Динамічне** | *–* | *Ar = gl3Δρ/ν2ρ* | *–* | *Fu = νt/l2* | *Re = Vl/ν* |
| **Теплове** | *Prτ = ν/ατ* | *Arτ = gl3βΔτ/ν2* | *Nuτ = αl/λ* | *Fuτ = ατ /l2* | *Reτ = Vl/ατ* |
| **Дифузійне** | *Pr∂ = ν/D* | *Ar∂ = gl3ξΔc/ν2* | *Nu∂ = α∂l/D* | *Fu∂ = Dt/l2* | *Re∂ = Vl/D* |

**Фізичне моделювання. метод аналогій**

**2.2 Моделювання на основі методу аналогій**

**2.2.1 Методи аналогій**

Якщо два або декілька явищ, різних за своєю фізичною природою, можуть бути описані одним й тим же диференційним рівнянням із збереженням граничних умов, то ці явища називають аналогічними. Метод аналогій розширює можливості вивчення явищ і уже давно одержав широке розповсюдження .

Сьогодні у багатьох галузях технічної механіки взагалі і в механіці рідин та газів зокрема успішно використовуються електричні, газогідравлічні, акустичні, магнітні, теплові та інші аналогії. В гідродинаміці застосовують такі аналогії: електрогідродинамічна (ЕГДА), газогідравлічна (ГАГА), гідромагнітна (МАГА), мембранна, ламінарна, теплова і дифузійна.

Порівнюючи приведені граничні умови, можна легко бачити, що для здійснення аналогії повинні дотримуватися такі відповідності:

– якщо у електричному полі помістити тіло з непровідного матеріалу, то гідродинамічним величинам – потенціалу швидкості, функції течії і швидкості на нескінченості – відповідають електричний потенціал, функція течії і напруженість електричного поля на нескінченості. Будемо називати цю аналогію аналогією *А*. Очевидно, що при аналогії *А* лінії течії електричного і гідродинамічного полів збігаються, а вектори електричного струму мають той же напрямок, що й вектори швидкості;

– якщо тіло провідник, то потенціалу швидкостей у гідродинамічному полі буде відповідати функція течії у електричному полі, а функція течії відповідає електричному потенціалу. Відповідність швидкості і напруженості електричного поля на нескінченості залишається таким самим, як і у попередньому випадку. Будемо називати цю аналогію аналогією *Б*. При дотриманні її вектори електричного струму і швидкості в усьому полі ортогональні.

Таблиця 2.7 – Величини, які порівнюються в аналогії *v, j.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Поле швидкості в ідеальній рідині** | **Поле густини струму в однорідному**  **провідному середовищі** |
| **1. Швидкість течії рідини** *v* | **Густина струму** *j* **або лінійна густина**  **струму *і***  ; ,  **де** *ρ* **–питомий опір середовища;** R **– питомий поверхневий опір провідного шару.** |
| **2. Потенціал швидкості *V*.** | **Потенціал вектора** *j* **або потенціал вектора *і***  ; . |
| **3. Співвідношення між швидкістю і її потенціалом** | **Співвідношення між густиною струму і його потенціалом**  **; .** |
| **4.** | **; .** |

При побудові моделі використовують алюмінієву фольгу або провідний папір, у вигляді прямокутного аркуша з рамкою із мідного дроту діаметром:

, (2.91)

де  питомий опір дроту;  питомий поверхневий опір провідного аркуша;  діаметр робочої зони у середній частині аркуша.

Рамка міцно притискається до аркуша болтами, при цьому її присутність не буде заважати створенню в аркуші подовжнього або поперечного зовнішнього однорідного поля. Для цього лише необхідно включити відповідні сторони рамки у ланцюг паралельно провідному аркушу і досягти в них такого ж розподілення потенціалу, яке встановлюється на аркуші без рамки. При цьому живлення аркуша здійснюється за допомогою рівномірно розподілених електродів, включених через достатньо великий опір (рис. 2.7).

У подовжньому режимі роботи відношення довжини підвідних дротів до довжини сторін рамки *bc*і*da* повинно дорівнювати відношенню сумарного опору живильних каналів до опору провідного аркуша. Відповідно у поперечному режимі відношення довжини підвідних дротів до довжини сторін рамки *аb*і*cd* повинно дорівнювати відношенню сумарного опору «поперечних» каналів до опору моделі при цьому способі включення її у ланцюг.

Принципова схема пристрою для накладення зовнішнього однорідного електричного поля і вихрового електричного поля тороїдальних електромагнітів із застосуванням аркушів фольги (*Л*) розміром 200х50 см і товщиною 12 мк; *abcda* - рамка спаяна з мідного дроту діаметром 2,25 мм; l - латунні електроди, встановлені з кроком 2 см; - опір каналів; В - вимикачі; Р - перемикачі *режиму роботи; ПЗ - подвійний зонд; Е - тороїдальний електромагніт.*

***l***

***R***

***R***

***B***

***a***

***b***

***c***

***d***

***Л***

***ПЗ***

***Е***

***R***

***R***

***l***

***P***

***B***

***B***

***B***

***B***

***B***

***B***

***B***

***P***

***P***

***P***

***l***

***l***

Для того щоб відтворити це поле на прямій моделі, потрібно на листі провідного паперу заклеїти область обмежену профілем *L*. Підготовлений до роботи пристрій підключається до вторинної обмотки знижувального трансформатора. Лінійна густина струму повинна бути порядку 1 А/см. Накривши фольгу папером на ній олівцем проводять з постійним інтервалом силові лінії. Після побудови на прямій моделі ізопотенціальні лінії з потенціалом *φL*, знаходять особливі точки поля *О* і *О′*, які розділяють контур на дві частини; в одну з них струм входить, з іншої виходить. Вимірюють розподіл потенціалу вздовж контуру *L ю*

**Таким чином, описаний пристрій дає можливість імітувати поле швидкості і обтікання тіла будь-якого профілю у необмеженому рідкому середовищі (напр., частинки в робочому каналі збагачувальної машини).**

**Рис. - Пряма модель, на зовнішньому контурі якої (*abcda*) виконуються граничні умови (2.92) і (2.93), на внутрішньому (*L*) - умови (2.94) і (2.95).**

***О′***

***L***

***a***

***О***

***Р′–***

***b***

***c***

***d***

***+***