**Лекція 1.2.**

**Моделювання із застосуванням «активних» і «пасивних»**

**методів експерименту**

У практиці досліджень, основаних на плануванні експерименту і математичній обробці їх результатів одержали широке розповсюдження «пасивні» і «активні» методи експерименту.

Під «пасивним» експериментом звичайно розуміють одержання інформації про процес або об’єкти в умовах поточної експлуатації, при якій реєструються випадкові вхідні і вихідні параметри. Експериментатор знаходиться в становищі пасивного спостерігача. Завдання планування в цьому випадку зводиться до оптимальної організації збору інформації та вирішення таких питань, як вибір кількості та частоти вимірювань, вибір методу обробки результатів вимірювань. Методи обробки результатів «пасивного» експерименту базуються на класичних дисперсійному, кореляційному і регресійному аналізах.

На відміну від «пасивного» «активний» експеримент передбачає наперед заплановану зміну вхідних параметрів, що дозволяє значно скоротити кількість дослідів. Методи планування оптимальних експериментів базуються на так званій «активній статистиці» або «активному експерименті», які використовують методи крутого сходження, симплексного, еволюційного і ротатабельного ценрально-композиційного планування.

Існує два методи планування експерименту: класичний (метод Зайделя-Гауса) і статистичний.

При *класичному методі* почергово змінюється кожний фактор до визначення часткового максимуму при постійному значенні усіх інших факторів. Число дослідів необхідне для знаходження оптимальних умов процесу, залежить від числа факторів, взаємного впливу факторів і числа варіацій кожного з них. Мінімальне число дослідів буде відповідати припущенню, що взаємодія факторів відсутня, а максимальне число дослідів буде відповідати припущенню, що оптимальне значення будь-якого фактора буде суттєво змінюватись залежно від поєднання інших. Наприклад, при чотирьох факторах і п’яти варіаціях мінімально необхідне число дослідів буде *54 = 625*.

При дослідженні комплексних руд роблять вибіркову постановку окремих серій дослідів. При цьому у більшості випадків удається підібрати не оптимальний режим збагачення, а тільки деяке приближення до нього. Постановка ж повного експерименту для урахування взаємодії факторів, якщо й можлива, то малокорисна, тому що до часу закінчення експериментів результати перших виявляться непорівнянні з останніми, тому що відбуваються неконтрольовані зміни властивостей вихідних матеріалів, обладнання і т.д. Крім того, більшість результатів, що отримані у таких громіздких експериментах, не являють інтересу, тому що немає необхідності знати залежність параметра оптимізації в області, яка знаходиться далеко від оптимальних умов досліджуваного процесу.

Область застосування класичного методу обмежується знаходженням часткових залежностей між двома-трьома параметрами. Ці залежності являють інтерес, головним чином для теоретичної інтерпретації, особливо у випадку наявності двох або декількох екстремумів. У цьому випадку необхідно отримати експериментальні точки в усьому діапазоні зміни параметра.

Якщо метою дослідження є встановлення оптимальних умов процесу, класичний метод неефективний. Крім того, складні системи, наприклад флотаційні, часто взагалі не допускають зміни одного фактора внаслідок їхнього внутрішнього взаємозв’язку. Зміна одного фактора може служити причиною зміни інших.

Методи *статистичного планування експериментів* основані на одночасній зміні багатьох факторів, при цьому плани експериментів допускають таку наступну статистичну обробку даних, яка дозволяє виділити вплив кожного окремого фактора і їхньої сукупності на зміну вихідних параметрів процесу. Метод статистичного планування можна застосовувати при таких обмежуючих умовах:

– існує вихідний параметр (цільова функція, функція відгуку) процесу, що кількісно і однозначно визначає його ефективність (можливо при обмеженнях, що накладаються на інші вихідні параметри);

– функція відгуку безперервна, тобто при зміні значень факторів ця функція змінюється безперервно;

– функція відгуку має один екстремум, тобто існує одне оптимальне співвідношення факторів, при якому цільова функція має максимальне (мінімальне) значення;

– відомі усі фактори, що суттєво впливають на процес, а фактори, що плануються у експерименті, управляються, тобто можна змінювати їхнє значення за раніше складеним планом;

– результати експериментів відтворювані. Похибка відтворюваності суттєво менше зміни вихідного параметра під впливом заданої зміни значень вхідних факторів.

Експериментально-статистичні методи дозволяють навіть при низькому рівні теоретичних знань про механізм процесу одержати математичну модель, яка включає усі суттєві фактори незалежно від їхнього фізичного смислу. Ці методи дозволяють при значному скороченні кількості дослідів отримати більшу інформацію, ніж при класичному методі. Статистика дозволяє оцінити надійність отриманих результатів розрахувати довірчі інтервали окремих дослідів, екстремальних точок і коефіцієнтів рівнянь.

Припустимо, що на процес впливає тільки один фактор, тоді зміна параметра оптимізації *у* в залежності від фактора *х* може бути представлена графічно у вигляді кривої *ab* (рис. 3.3) і аналітично:

. (3.23)

Така функція називається функцією відгуку, екстремум якої має координати ***хопт***  і ***уопт*** . при плануванні першої серії дослідів рівень фактора ***х0*** називається нульовим рівнем, ***Δх*** – інтервал варіювання, ***xн*** – нижній рівень (кодується «***-***»), ***xв*** – верхній рівень (кодується «***+***»). В результаті перших двох дослідів можна зробити висновок, що значення ***x***необхідно збільшувати.

***Δх***

***d***

***c***

# **Рис. 3.3– Одномірна функція**

# **відгуку**.

***уопт***

***Y***

***b***

***а***

***х0***

***xв***

***xн***

***X***

***хопт***

При двох факторах функція відгуку графічно може бути представлена як поверхня у тримірному просторі або рівнянням:

. (3.24)

На рис. 3.4 нанесені криві рівного значення параметра оптимізації для двох змінних *Х1*і *Х2* .

При класичному методі спочатку дослідник фіксує змінну *Х1,*рухається з точки *О* в напрямку змінної *Х2* і визначає точку *Р*, що відповідає екстремальному значенню параметра оптимізації. В точці *Р* фіксується змінна *Х2* і починається рух у напрямку осі *Х1*. Що дозволяє знайти точку *Q*. Знову фіксується *Х1* і продовжується рух по *Х2* і т.д. до досягнення оптимуму. Очевидно, що більш ефективним є план, за яким первісно визначається напрямок *Q*, а докладніше вивчення поверхні відгуку здійснюється в оптимальній області.

☻

☻

☻

☻

**Рис. 3.4 – рух до максимуму поверхні відгуку методами однофакторного експерименту і крутого сходження.**

***●***

***R***

***Р***

***О***

***●***

***●***

***●***

***●***

***●***

***●***

***●***

***Х2***

***Х1***

***70 %***

***80 %***

***Q***

***60 %***

***90 %***

***●***

***●***

***●***

***Q***

***Р***

***●***

У випадку великого числа факторів графічне представлення функції неможливе, а загальний вигляд аналітичного рівняння, яке її описує:

. (3.25)

Ефективність планування особливо відчутна при вивченні і моделюванні багатофакторних процесів.

Досліди повинні бути рандомізовані, тобто виконуватися у послідовності, яка встановлюється за допомогою таблиці випадкових чисел, або будь-якої процедури, що забезпечує випадковий характер проведення дослідів. Рандомізація дозволяє нівелювати систематичні (напр., періодичні) впливи факторів, що не контролюються.

**3.2.1 «Пасивні» методи моделювання із застосуванням дисперсійного, регресійного і кореляційного аналізів**

Обробка експериментальних даних при «пасивному» експерименті здійснюється з використанням дисперсійного, кореляційного і регресійного аналізів.

* + - 1. **дисперсійний аналіз**

В основу дисперсійного аналізу покладено принцип: якщо на випадкову величину діють взаємно незалежні фактори A, B, …, то загальна дисперсія дорівнює сумі дисперсій, зумовлених дією окремо кожного з факторів: Описание: \sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \ldots Таким чином, дисперсійний аналіз використовує властивість адитивності дисперсії випадкової величини, що обумовлено дією незалежних факторів.

Похибка відтворюваності технологічних експериментів, яка оцінюється за допомогою дисперсії, може бути наслідком не однієї, а декількох причин або операцій. Так, наприклад, при дослідженні якості корисних копалин і продуктів їх збагачення дисперсія результатів може складатися з ряду компонентів: хімічного аналізу, відбору проби та збагачувального експерименту. Якщо відома величина компонентів дисперсії, удосконалюють відповідні операції, щоб найбільш ефективно знизити сумарну помилку експерименту.

При напівпромислових та промислових дослідженнях важливість роздільної оцінки дисперсій, пов’язаних з варіацією сортності корисної копалини, точністю підтримки режиму збагачення і помилкою аналізу, визначається необхідністю підбору такого режиму збагачення, який одночасно з високими середніми показниками забезпечує високу стабільність результатів при зміні якості корисної копалини.

Рішення подібних задач складає предмет дисперсійного аналізу. За допомогою дисперсійного аналізу визначаються дисперсії, що обумовлені дією кожного фактора окремо і їх взаємодією, і оцінюється статистична значимість цих величин з урахуванням похибки відтворюваності.

Дисперсійний аналіз можна виконувати тільки при наступних умовах:

– серії вимірювань можна розглядати як випадкові вибірки з генеральних сукупностей, які підпорядковані нормальному розподілу;

– дисперсії, що обумовлені похибками відтворюваності, для усіх серій вимірювань однорідні. Якщо такої упевненості немає, необхідно перевірити однорідність дисперсій з використанням критеріїв кохрена або Фішера.

***Однофакторний дисперсійний аналіз***

У випадку дії на процес одного фактора (найпростіший випадок), задачу можна сформулювати таким чином: нехай спостерігають *т* незалежних нормально розподілених величин *х1, х2, …, хт*, та при цьому припускають, що усі вони мають одне й теж середнє квадратичне відхилення *S*. На кожному рівні (значенні) змінного вхідного фактора виконується *п* спостережень (табл. 3.6).

Таблиця 3.6 – Результати спостережень

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ випробування,**  ***і*** | **№ приладу (рівні фактора), *j*** | | | |
| **1** | **2** | **3** | ***т*** |
| **1**  **2**  **…**  ***п*** | ***х11***  ***х21***  ***…***  ***хn1*** | ***х12***  ***х22***  ***…***  ***хn2*** | ***…***  ***…***  ***…***  ***…*** | ***х1m***  ***х2m***  ***…***  ***хnm*** |
| **Групова середня,** |  |  | **…** |  |

У задачі необхідно на рівні значимості *α* перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх при допущенні, що групові генеральні дисперсії хоча й невідомі, але однакові.

Для рішення цієї задачі вводяться:

– *спільна сума* квадратів відхилень спостережених значень ознаки від спільної середньої:

; (3.26)

– *факторна сума* квадратів відхилень групових середніх від спільної середньої (характеризує розсіювання між групами):

; (3.27)

– *залишкова сума* квадратів відхилень спостережених значень групи від своєї групової середньої (характеризує розсіювання всередині груп):

. (3.28)

Для обчислення спільної і факторної сум більше зручні такі формули:

, (3.29)

, (3.30)

де  – сума квадратів спостережених значень ознаки на рівні *mj*; – сума спостережених значень ознаки на рівні *mj*.

Якщо спостережені значення ознаки є порівняно великими числами, то для спрощення обчислень віднімають з кожного значення одне й теж число *С*, яке приблизно дорівнює спільній середній. Якщо зменшені значення , то

, (3.31)

, (3.32)

де  – сума квадратів зменшених значень ознаки на рівні *mj*; – сума зменшених значень ознаки на рівні *mj*.

Факторну і залишкову суми ділять на відповідне число ступенів свободи і знаходять факторну і залишкову дисперсії:

, (3.33)

 . (3.34)

Після цього порівнюють факторну і залишкову дисперсії по критерію Фішера:

. (3.35)

Якщо  – розходження групових середніх незначиме.

Якщо  – розходження групових середніх значиме.

Якщо факторна дисперсія виявиться меншою залишкової, то звідси випливає справедливість нульовій гіпотези про рівність групових середніх, тому подальші обчислення (порівняння дисперсій за допомогою критерію *F*) зайві.

Однофакторний аналіз вимагає не менше трьох градацій фактора і не менше двох випробовувань у кожній градації.

***Приклад 3.7.*** *При сумісному аналізі точності групи вимірювальних приладів (потенціометрів) вирішується питання: чи можна вважати їхні систематичні похибки однаковими. Число потенціометрів – т (т = 3) і кожний з них вимірює рН однієї і тієї ж пульпи п раз (п = 4). Результати досліджень наведені у табл. 3.7.*

*Таблиця 3.7 – Результати досліджень*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Число вимірювань n** | **Число рівнів фактора (число потенціометрів) m** | | |
| **1** | **2** | **3** |
| **1**  **2**  **3**  **4** | **13,5**  **13,2**  **13,1**  **13,0** | **13,0**  **12,4**  **12,6**  **12,0** | **12,1**  **12,2**  **13,4**  **13,1** |
| **Σ** | **58,2** | **50,0** | **50,8** |
| **Середнє** | **13,2** | **12,5** | **12,7** |

*для спрощення обчислень віднімаємо з кожного спостереженого значення спільну середню і переходимо до зменшених величин, напр., у11 = х11 – 12,8 = 13,5 – 12,8 = 0,7 і т.д.*

*Складають розрахункову таблицю (табл. 3.8) та з використанням підсумкового стовпця обчислюють спільну, факторну і залишкову суми квадратів відхилень при числі рівнів фактора т = 3 і числі вимірювань на кожному рівні п = 4.*

*Таблиця 3.8 – розрахункова таблиця*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ досліду** | **Рівні фактора** | | | | | | **Підсум-ковий стовпець** |
| ***т1*** | | ***т2*** | | ***т3*** | |
|  |  |  |  |  |  |
| **1**  **2**  **3**  **4** | **0,7**  **0,4**  **0,3**  **0,3** | **0,49**  **0,16**  **0,09**  **0,04** | **0,2**  **- 0,4**  **- 0,2**  **- 0,8** | **0,04**  **0,16**  **0,04**  **0,64** | **- 0,7**  **- 0,6**  **0,6**  **0,3** | **0,49**  **0,36**  **0,36**  **0,09** |  |
| ***Qj*** |  | **0,78** |  | **0,88** |  | **1,30** | ***ΣQj=*2,96** |
| ***Tj*** | **1,6** |  | **- 1,2** |  | **- 0,4** |  | ***ΣTj*=0** |
| ***Tj2*** | **2,56** |  | **1,44** |  | **1,69** |  | ***ΣTj2=*5,69** |

*Виконуємо розрахунок наступних параметрів:*

*\*спільна сума квадратів відхилень:*

* .*

*\*факторна сума квадратів відхилень:*

*.*

*\*Залишкова сума квадратів відхилень:*

*.*

*\*Факторна дисперсія:*



*\* Залишкова дисперсія:*

**

*Порівняння факторної і залишкової дисперсії за допомогою критерію Фішера:*

*.*

*По таблиці значень критерію Фішера (додаток Б) при числі ступенів свободи чисельника f1 = 2 , а знаменника f2 = 9 знаходимо F(0,95; 2; 9) = 4,26.*

*Тому, що  немає підстав для відкидання нуль-гіпотези і, відповідно, розходження між груповими середніми незначиме, тобто усі групи спостережень вилучені з однієї генеральної сукупності.*

***Двофакторний дисперсійний аналіз***

При збільшенні числа факторів, що впливають на результати дослідження, процедура дисперсійного аналізу принципово не змінюється, однак розрахунки ускладнюються.

Задача двофакторного дисперсійного аналізу (двоступінчастої класифікації, крос-класифікації) пов’язана з експериментом, у якому одночасно діють два фактори *А* і *В*, що варіюють на *к* і *т* рівнях відповідно.

Оцінку відтворюваності результатів досліджень за допомогою двофакторного дисперсійного аналізу розглянемо на прикладі.

**3.2.1.2 Кореляційний і регресійний аналізи**

Дисперсійний аналіз дозволяє підтвердити вплив тих або інших факторів на досліджувану результативну ознаку, але він не дає можливості визначити ні ступінь їхнього впливу (тісноти зв’язку), ні форму залежності. Для вирішення цих питань використовують кореляційний аналіз. Щоб вивчити характер впливу однієї величини *х* на іншу *у*, виконують експеримент, при якому вимірюють значення величини *у* при різних значеннях величини *х*. Якщо дві змінні величини *х* і *у* залежать одна від одної так, що кожному значенню однієї з них відповідає цілком визначене значення іншої, то між ними є функціональний зв’язок. Цей зв’язок може бути виражений рівняннями, вид яких визначається характером існуючого зв'язку.

Кореляційний аналіз дозволяє оцінювати тісноту зв’язку різних параметрів і факторів, що впливають на процес. Цей метод широко застосовується при дослідженнях промислових процесів. При визначенні коефіцієнту кореляції, якщо він достатньо високий, можна одержати інформацію, яка дозволяє вибрати основні регулювальні впливи на процес, точки і методи вимірювання факторів і установити мінімально необхідне число параметрів, що вимірюються. Якщо коефіцієнт лінійної кореляції за абсолютною величиною малий, це свідчить про більш складну (нелінійну) залежність між вимірюваними параметрами або про суттєвий вплив на них інших параметрів. У цьому випадку необхідно обчислення більш складної залежності у вигляді нелінійного рівняння. Одержання таких рівнянь методом найменших квадратів є основою регресійного аналізу.

Для кореляційного і регресійного аналізів, як правило, використовуються дані промислового процесу (записи у робочих журналах) і дані спеціального опробування та спеціальних досліджень.

Регресійні моделі можна використовувати, головним чином, для аналізу впливу окремих факторів або їхньої взаємодії. Крім того, на регресійному аналізі основане планування експериментів для об’єктів, статична характеристика яких за певними каналами має екстремум.

***Метод найменших квадратів***

Метод найменших квадратів застосовується у тих випадках, коли шукані величини не можна вимірити безпосередньо або представити у вигляді функцій вимірюваних величин. Для знаходження *п* невідомих величин достатньо виконати *т* серій спостережень (*т > п*), щоб скласти число рівнянь, необхідне для визначення невідомих величин.

При експериментальному вивченні залежності однієї величини *у* від іншої величини *х* виконують ряд вимірювань величини *у* при різних значеннях величини *х*. Наприклад, на збагачувальній фабриці отримані різні вилучення при різної тривалості флотації *t*. Результати дослідження, що представлені точками в координатах *ε* – *t* , створюють кореляційне поле (рис. 3.5).

# **Рис. 3.5 – Кореляційний зв’язок між тривалістю процесу і його ефективністю.**

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***•***

***t***

***ε***

*ε = φ(t)*

Через це поле можна провести криву і підібрати формулу, що описує існуючу стохастичну залежність таким чином, щоб параметри цієї кривої були найкращими (з усіх інших кривих). Наявність випадкових похибок вимірювання вказує на недоцільність підбору формули, яка точно би описувала усі дослідні значення, тобто графік шуканої функції не повинен проходити через усі точки (рис. 7.3), а повинен згладжувати випадкові похибки.

Аналітичні вирази, що вибираються на основі теоретичних уявлень, мають вигляд:

; (3.36)

; (3.37)

; (3.38)

 і т.д. (3.39)

У загальному вигляді:

. (3.40)

Оцінка параметрів  визначається з умови, щоб сума квадратів відхилень вимірюваних значень *уп* від розрахункових , тобто величина

, (3.41)

приймає найменше значення.

Величина *S2* називається залишковою дисперсією і являє собою суму квадратів відстаней від кожної точки кореляційного поля до лінії регресії по вертикалі. Знаходження значень параметрів , при яких функція набуває найменшого значення

, (3.42)

полягає в рішенні системи рівнянь:

; ; …; . (3.43)

Система рівнянь (3.40) вирішується залежно від виду функцій (3.33) – (3.37). Найбільш вдалим є той вид формули, для якого мінімальна залишкова дисперсія  (дисперсія адекватності) є мінімальною.

Точність апроксимації оцінюється залишковою дисперсією , яка визначається помилкою вимірювання величини *у* при кожному значенні *х* і, відповідно, не повинна суттєво відрізнятися від дисперсії відтворюваності *у* . Порівняння за критерієм Фішера

 (3.44)

вказує на адекватність регресійної моделі.

Як міра оцінки інформативності рівняння регресії прийнято відношення дисперсій:

, (3.45)

де  – розсіювання відносно середньоарифметичного;

 – середній квадрат відхилень (по ординаті) точок кореляційного поля від лінії ;

 – середній квадрат відхилень (по ординаті) точок кореляційного поля від емпіричної лінії регресії.

При оцінці практичної цінності рівняння регресії важливий не так статистичний рівень значимості, тобто перевищення *Fm* , як числове значення *F*. Не має смислу користуватися рівнянням регресії, для якого *F* = 1,4, навіть якщо воно формально значимо. Справді, якщо квадратична похибка, яка визначає розсіювання результатів спостережень відносно рівняння регресії, менше, ніж похибка, яка характеризує розсіювання результатів відносно середнього, усього в  рази, то зрозуміло, що переваги рівняння регресії у порівнянні з рівнянням  несуттєві.

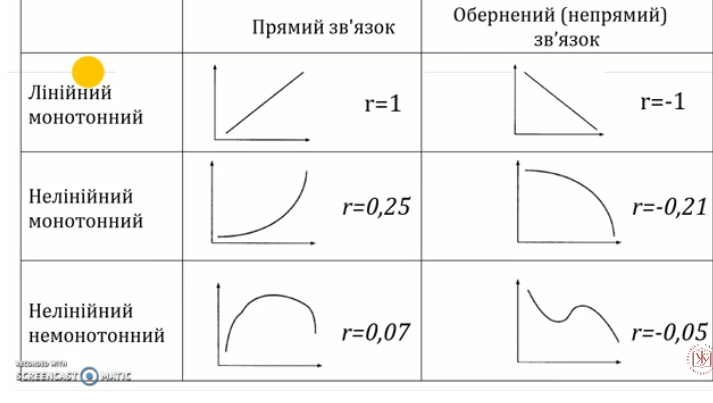
Регресійні моделі технологічних процесів, що отримані як в результаті активного експерименту, так і в результаті пасивної обробки даних, можуть служити для розрахунку оптимальних значень параметрів. Математичні моделі містять також суттєву інформацію про вплив окремих факторів і ефектів взаємодії факторів. Величина коефіцієнтів рівняння оцінює ступінь впливу даного параметра або їхньої взаємодії. Суттєву інформацію дає знак, якій показує напрям зміни параметра оптимізації (його зменшення «–» або збільшення «+»).

***Кореляція***

[***https://www.youtube.com/watch?v=pQlXbbwV3iA&ab\_channel=IrynaKryvenko***](https://www.youtube.com/watch?v=pQlXbbwV3iA&ab_channel=IrynaKryvenko) ***13 хв***

Про наявність або відсутність зв’язку між двома випадковими величинами у першому наближенні судять по кореляційному полю [2, 5, 8, 11, 12].

Для характеристики тісноти зв’язку між величинами *Х* і *Y* використовують безрозмірну величину – коефіцієнт кореляції *rxy*, що змінюється у межах –1 < *rxy* < +1. Позитивна кореляція між випадковими величинами характеризує таку імовірнісну залежність між ними, коли при зростанні однієї друга у середньому теж буде зростати.



Негативна кореляція характеризує залежність, коли при зростанні однієї випадкової величини друга у середньому зменшуватиметься. Величина коефіцієнта кореляції визначає тісноту зв’язку між випадковими величинами: чим більше значення *rxy*, тим тісніше статистичний зв’язок. Близьке до нуля значення *rxy* свідчить про відсутність лінійного зв’язку.

Коефіцієнт парної кореляції визначається за формулами:

, (3.46)

, (3.47)

. (3.48)

де *п* – число вимірювань;  і – середньоквадратичні відхилення:

 і  . (3.49)

Надійність статистичних характеристик слабшає зі зменшенням обсягу вибірки. Принципово можливі випадки, коли відхилення отриманої величини коефіцієнта кореляції від нуля виявляється статистично незначимим. Зв’язок можна вважати достовірним, якщо:

, (3.50)

де – *r* абсолютне значення коефіцієнта кореляції; – *t* критерій Ст’юдента; – *Sr* середньоквадратична похибка коефіцієнта кореляції:

 . (3.51)

Критерій надійності коефіцієнта кореляції:

. (3.52)

Якщо *μ > 2,6*, зв’язок між змінними вважається значимим.

Практично в усіх випадках статистичного дослідження реального процесу коефіцієнт кореляції є досить грубою оцінкою тісноти зв’язку, який має смисл тільки при лінійній залежності між параметрами.

***Приклад 3.9.*** *На переробку надходить продукт, що містить два корисних компоненти –Х і Y. При цьому в партіях сировини з підвищеним вмістом Х звичайно спостерігається й більш високий вміст Y, тому є підстави очікувати, що ці величини знаходяться у зв’язку між собою. Аналізи 10 проб руди наведені у стовпцях 2 і 3 розрахункової таблиці 3.12.*

*Таблиця 3.12 – Вихідні дані і результати розрахунку*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *п* | *хі* | *уі* | *хі 2* | *уі 2* | *хіуі* | *уобч* |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **1**  **2**  **3**  **4**  **5**  **6**  **7**  **8**  **9**  **10** | **6,7**  **5,4**  **7,2**  **6,4**  **3,9**  **2,2**  **5,8**  **4,3**  **4,6**  **3,4** | **2,4**  **1,5**  **2,3**  **1,9**  **1,6**  **1,1**  **2,0**  **1,6**  **1,7**  **1,3** | **44,89**  **29,16**  **51,84**  **40,96**  **15.21**  **4,84**  **33,64**  **18,49**  **21,16**  **11,56** | **5,76**  **2,25**  **5,29**  **3,61**  **2,56**  **1,21**  **4,00**  **2,56**  **2,89**  **1,69** | **16,08**  **8,10**  **16,56**  **12,16**  **6,24**  **2,42**  **11,60**  **6,88**  **7,82**  **4,42** | **2,15**  **1,84**  **2,27**  **2,07**  **1,48**  **1,07**  **1,93**  **1,57**  **1,64**  **1,36** |
| Σ | **49,9** | **17,4** | **271,75** | **31,82** | **92,28** | **17,38** |
| **Середнє** | **4,99** | **1,74** | **-** | **-** | **-** | **1,74** |

*Виконуємо розрахунок наступних параметрів:*

*\*середні квадратичні відхилення:*

**

**

*\*коефіцієнт кореляції:*

*.*

*Одержаний коефіцієнт кореляції достатньо високий, що вказує на наявність тісного зв’язку між вмістом мінералів Х і Y. Знайдемо рівняння регресії, яке дозволяє обчислити найбільш імовірний вміст одного з мінералів, якщо відомий вміст іншого.*

*\*Коефіцієнт регресії:*

*.*

*\*Рівняння регресії Y по Х:*

*.*

*З використанням рівняння регресії обчислюють значення уобч і порівнюють з заданими значеннями уі. У даному випадку результат порівняння задовільний.*

***Множинна регресія***

При вивченні множинної регресії аналітичні вирази у загальному вигляді, що вибираються на основі теоретичних уявлень про процес, мають вигляд:

. (3.53)

наприклад, при вивченні зв’язку між трьома змінними, дві з яких (*х1*і *х2*) приймаються за незалежні, третя (*у*) – за функцію, їхня лінійна регресія визначається залежністю:

. (3.54)

З геометричної точки зору це рівняння визначає площину у просторі змінних *х1, х2*, *у*. Для визначення параметрів  використовують спосіб найменших квадратів. Сума квадратів відхилень фактичних аплікат  від обчислених  повинна мати найменше значення:

. (3.55)

Функція  буде мати мінімум, якщо  задовольняють системі рівнянь:

; ; . (3.56)

Диференціювання функції  по змінних  дозволяє одержати рівняння множинної регресії:

, (3.57)

де коефіцієнти  визначають із застосуванням системи рівнянь:

 (3.58)

Для оцінки тісноти зв’язку застосовують коефіцієнт множинної кореляції, який визначається через суми квадратів відхилень :

 (3.59)

або через парні коефіцієнти кореляції:

, (3.60)

де парні коефіцієнти кореляції:

; (3.61)

; (3.62)

. (3.63)

Зв’язок можна вважати достовірним, якщо:

, (3.64)

де – *r* абсолютне значення коефіцієнта кореляції; – *t* критерій Ст’юдента; – *SR* середньоквадратична похибка коефіцієнта кореляції:

 . (3.65)

Критерій надійності коефіцієнта кореляції:

. (3.66)

**«Активний» метод оптимального планування експериментів**

Існує декілька методів оптимального планування експериментів, які дозволяють при мінімальній кількості дослідів отримати максимальну інформацію про досліджуваний об’єкт.

**3.2.2.1 Техніка постановки «активного» експерименту**

***Термінологія і основні поняття***

Далі ми будемо мати справу з деяким абстрактним об’єктом, на яко­му здійснюється експеримент. В процесі експерименту дослідник ставить досліди.

*Дослід* – здійснення визначеної [дії](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%96%D1%8F) на [об'єкт](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%27%D1%94%D0%BA%D1%82) і [реєстрація](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D1%94%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F) одержаного результату.

На об’єкт діють *фактори.*Фактором називається вхідна незалежна змінна, яка може приймати в деякому інтервалі часу визначені значен­ня. Кожний фактор має область визначення (або існування). Ця область може бути безперервною або дискретною, а сам фактор кількісним або якісним.

Приклад кількісного фактора – вміст твердого в пульпі, а якісного фактора – сорт руди, тип реагенту і т.п.

До кожного фактора в активному експерименті висувають такі вимоги:

– фактор повинен бути *керованим*;

– фактор повинен бути *операційним*, тобто повинні бути вказані послідовність і спосіб його установки і контролю;

– фактор повинен бути  *первинним,* тобто безпосередньо діяти на об’єкт, а не бути функцією інших, більш елементарних діянь;

– фактор повинен бути *незалежним* від інших факторів;

– фактор повинен бути *вимірним* достатньо точно.

До сукупності факторів висувається вимога сумісності, тобто всі їхні комбінації здійснимі, безпечні і незалежні.

Важливим поняттям є *область визначення фактора*.Ця область визначається обмеженнями. Обмеженнями можуть бути:

– *принципові*, напр., температура не може бути менше абсолютного нуля, для конкретного апарата може бути неможливою подача негативної кількості води, вміст компонента не може бути менше нуля і т.п. (це умови фізичної здійсненності);

– *технічні*, пов’язані з можливостями апаратури, дозаторів і т.п.

– *економічні*, пов’язані з дефіцитністю компонентів, тривалістю експерименту і т.п.

Зміна вхідних факторів приводить до зміни прийнятого критерію досліджуваного процесу (*критерій ефективності*, *параметр оптиміза­ції, цільова функція).*

Критерій ефективності процесу – це вихідна величина, зміна якої цікавить експериментатора. Звичайно прагнуть досягти екстремального значення цього критерію. У багатьох випадках екстремум може бути технічно недосяжний, тоді знаходять найбільше (або найменше) значення критерію.

Між параметрами оптимізації і факторами звичайно існує деякий функціональний зв’язок, напр.: *Y = f (X1, X2 ….Xn)*.

Геометрично, функція для *Y* може бути представлена у вигляді по­верхні, розташованої у багатомірному факторному просторі. Така, по­верх­ня називається *гіперповерхнею*, а якщо функція *f –* лінійна, то *гіперпло­щиною.* Геометричне трактування функцій виявляється корисним, тому що у цьому випадку процес руху до екстремуму може бути ототож­нений з підйомом (або спуском) на гору, правда, теж багатомірну.

Якщо залежність *Y = f (Xn)* достатньо точно описує досліджуваний процес в області, яка цікавить експериментатора, то ця залежність називається *статичною* *моделлю процесу*.

Якщо у залежність включений час, тобто *Y = f (Xn, τ)* , то така залежність назива­ється *динамічною* моделлю процесу. Модель – це приблизний мате­ма­ти­ч­ний опис процесу. Якість цього наближення оцінюється *помилками*.

Результат якого-небудь досліду часто називають *відгуком*, а гіперповерхню – *функцією відгуку.*

У відповідності з цим на відміну від фізичного закону модель може бути доброю або поганою. Більше того, очевидно, існує багато моделей, які описують об’єкт. Різниця між ними буде проявлятися тільки у величині помилки. Крім того, одній і тій же помилці (якщо вона не наближається до нуля) може також відповідати деяка множина моделей.

*Порівняльні експерименти.* Метою багатьох робіт не є встановлення деяких абсолютних констант, а тільки встановлення того факту, що деякий набір факторів краще іншого. У цьому випадку, якщо постійно спостерігається різниця між наборами вихідних факторів (тобто рейтинг їх впливу близький або змінюється), можна не вимагати точних вимірювань, а з використанням методів статистики, тільки з необхід­ною імовірністю встановити факт, що нас цікавить.

***Етапи планування експерименту***

розглянуті раніше методи регресійного аналізу базуються на обробці результатів «пасивного експерименту», напр., даних опробування промис­лового процесу, при цьому математичні методи застосовують тільки на останньому етапі – при обробці результатів спостережень.

планування експерименту передбачає постановку дослідів за деякою раніше складеною схемою (*матрицею*), *яка володіє спеціальними властивостями.* планування експерименту передбачає застосування математичних методів на усіх етапах: при аналізі апріорної інформації, плануванні експерименту, обробці його результатів і прийнятті рішень на проміжних етапах (для вибору стратегії досліджень) і у кінці роботи (для інтерпретації даних).

З ускладненням об’єктів досліджень ефективність традиційного підхо­ду до здійснення активного експерименту, відповідно до якого варіювався один фактор, а інші підтримувались на постійному рівні, різко знизилася. У традиційному підході не враховувався взаємний вплив факторів, вплив середо­вища та наявність зворотних зв’язків. Крім того, при традицій­ному підході було потрібно проведення великого числа дослідів.

При активному плануванні експерименту усі фактори, що визначають процес, змінюють (варіюють) одночасно у відповідності з правилами плану­вання, а результати експерименту подають у вигляді математичної моделі. Виділяють такі етапи планування:

– збір і аналіз апріорної інформації;

– обґрунтування критерію ефективності досліджуваного процесу;

– вибір залежних і незалежних змінних, області зміни незалежних змінних (факторного простору);

– визначення методів контролю параметрів;

– вибір типу математичної моделі;

– розробка методики і плану (послідовність проведення) експери­ментів;

– розробка схеми і методики випробування;

– визначення методу аналізу експериментальних даних;

– здійснення експерименту та перевірка статистичних передумов для отримання даних;

– обробка результатів отримання математичної моделі та її інтерпретація;

– видача рекомендацій.Розглянемо докладніше деякі етапи експериментування.

**3.2.2.2 Визначення критерію процесу та незалежних факторів**

***Вибір критерію ефективності процесу***

Критерій ефективності, оптимізації, цільова функція, вихідний параметр – усе це формалізований зміст наших прагнень і ступінь розуміння, що добре, а що погано у конкретному технологічному процесі. У будь-яких дослідженнях вибір критерію визначає їхній успіх.

Вибір критерію ефективності – складна і важлива задача. Будь-який збагачувальний процес характеризується рядом вихідних показників. Серед них:

– безпосередньо вимірювані, такі як вихід продуктів, вміст корисного компонента в продуктах, обсяги переробки, зольність вугілля тощо,

– технологічні критерії, що обчислюються: вилучення, коефіцієнт селективності і ряд інших,

– техніко-економічні, що обчислюються з використанням перших двох груп, цін і витрат: собівартість переробки, рентабельність, прибуток, продуктивність праці і т.д.

Проф. Барський Л.А. сформулював вимоги до критеріїв ефективності процесу:

а) критерій повинен бути чисельним і однозначним,

б) критерій має враховувати кінцеву мету виробництва,

в) критерій має бути максимально простим і, за можливістю, мати фізичний сенс.

Сьогодні існує понад 100 критеріїв і жоден з них не задовольняє повністю сформульованим вимогам.

У кожному конкретному випадку залежно від поставленої мети приймають найбільш універсальний критерій.

При плануванні екстремальних експериментів часто як критерій приймається два показники. Один з них – основний, за яким відшукується раціональний режим (екстремум), і додатковий, котрий враховує, як правило, які-небудь обмеження.

***Визначення незалежних факторів***

При дослідженні процесів дуже важливо виявити усі фактори, що впливають на процес, а також оцінити ступінь їхнього впливу. Якщо який-небудь із значимих факторів не включений у розгляд, але має випадкові відхилення у деякому діапазоні значень, то погрішності резуль­татів експерименту різко зростають. З одного боку, включення до плану досліджень усіх факторів, що суттєво впливають на процес, дуже важливе, тому що експеримент, направлений на відшукання оптимальних умов, може втратити сенс, якщо один або декілька важливих (значимих) факторів не враховані. З іншого боку, включення до програми досліджень усіх факторів, що суттєво впливають на процес, ускладнює задачу – збільшує кількість експериментів і утруднює одержання адекватної моделі.

Ступінь впливу різних факторів на процес неоднакова; звичайно тіль­ки декілька факторів суттєво впливають на кінцеву величину, а інші впливають на неї значно менше. Задача полягає у виявленні й ідентифікації суттєвих факторів на «нульовому» фоні усіх інших, при цьому необхідно ураховувати як якісні, так і кількісні характеристики суттєвих факторів. Виділити суттєві фактори можна на основі аналізу, публікацій і опитування думок спеціалістів (експертна оцінка). Для аналізу такої апріорної інформації застосовують різні методи: дисперсійний аналіз, використання дробових і повних насичених планів експерименту, методи випадкового балансу і розгалуженої стратегії. При виборі факторів необхідно витримувати наступні умови:

– діапазони зміни факторів повинні бути технологічні і «розумні», не можна допускати таких значень, при яких можливі випуск браку або аварія;

– фактори в середині діапазону повинні підпорядковуватися усім передумовам методу найменших квадратів;

– при дуже вузькому діапазоні модель може бути неінформативною.

При експериментах на обладнанні, що працює у безперервному режимі, необхідно визначити *тривалість перехідного процесу* після зміни значення будь-якого фактора. Відбір проб, зняття показань можна робити тільки в сталому режимі. Опробування слід робити тільки після закінчення часу *t*.

При дослідженні необхідно вибрати залежну змінну, відгук (функцію відгуку) на вплив факторів. Відгук залежить від мети і специфіки дослід­жень. Він може бути технологічним (вилучення корисного компоненту у концентрат, індекс селективності і т.п.), економічним (прибуток, рента­бельність і т.п.), статистичним і т.д. Відгук повинен бути чутливим до зміни факторів, легко обчислюваним, виражатися одним числом, мати фізичний смисл тощо.

Структуру моделі дослідник вибирає на основі апріорних знань та інтуїції, при цьому вибір моделі залежить також від знань про об’єкт досліджень, математичного апарату і мети досліджень. Якщо вигляд функції відгуку невідомий, її розкладають у степеневі ряди і подають у вигляді поліному. Поліноміальні моделі дуже ефективні, за певних умов розкладення у степеневі ряди можливе для усіх функцій. З вико­ристанням експериментальних даних отримують оцінки параметрів моделі:

 , (3.67)

де – оцінка відгуку; – оцінки коефіцієнтів.

Для визначення оцінок коефіцієнтів застосовують метод найменших квадратів. Щоб переконатися у правильності оцінки, здійснюють статис­тичний аналіз, при якому перевіряють значимість коефіцієнтів і адекват­ність моделі. Під перевіркою значимості коефіцієнту мають на увазі перевірку гіпотези про рівність його нулю, під адекватністю розуміють відповідність моделі дослідним даним.

**3.2.2.3 Вибір структури моделі і плану експерименту**

Завдяки можливості використання комп᾽ютера можна вибирати структуру моделі у відповідності до концепції «віяла моделей». Традиційно при дослідженнях розглядалася одна модель або сукупність різних моделей і з них вибиралася єдина (т.зв. дискримінація). Концепція «віяла моделей» полягає у тому, що модель, яка придатна для прогнозування значень відгуку, часто виявляється непридатною для екстраполяції, а модель, яка добре описує процес у лабораторних умовах, виявляється непридатною для промислових умов. Все це й обумовило необхідність розгляду різних моделей без їхньої дискримінації .

Наприклад, спочатку розглядають достатньо просту модель, що враховує тільки лінійні ефекти:

. (3.68)

потім розглядають ефекти взаємодії факторів, тобто  при :

, (3.69)

після чого враховують квадратичні ефекти ; здійснюють перебудову незалежних змінних: ,  , ,  і т.п.

Розглянемо методи побудови моделей виду (3.69) із застосуванням ідеї активного планування експерименту.

Після вибору моделі (або їх сукупності) здійснюють експеримент, за результатами якого визначають параметри вибраної моделі. Активне планування експерименту передбачає проведення дослідів у відповідності з планом експерименту.

План експерименту визначає розташування дослідних точок у просторі незалежних змінних (факторному просторі), тобто умови проведення досліду. План експерименту задається у вигляді матриці плану, напр., у вигляді таблиці кожний рядок якої відповідає умовам досліду, а стовпчик – значенням незалежної змінної у кожному досліді. З використанням матричних позначень модель (3.69) можна записати як:

, (3.70)

де – вектор-стовпець оцінок відгуку; – матриця плану; – вектор-стовпець оцінок коефіцієнтів.

Модель (3.69) має вигляд:

, (3.71)

де – вектор-стовпець спостережених значень відгуку; – вектор-стовпець погрішностей.

Стандартний шлях визначення значень *В* – застосування методу найменших квадратів:

. (3.72)

У статистичному аналізі фундаментальну роль відіграє інформаційна матриця , а також зворотна до неї дисперсійна матриця. Вибором елементів матриці плану (матриці *Х*) можна формувати статистичні властивості моделі.

Для подання планів у стандартній формі їх звичайно центрують з переносом початку координат у центр факторного простору. Крім того, при складанні матриці плану , незалежні змінні *х* нормують і задають факторний простір:

*– 1 ≤ хі ≤ 1; і = 1, 2, …, п; ,* (3.73)

де **– значення *і*-того фактору в натуральному масштабі; ** – значення координат *і*-го фактору у центрі плану в натуральному масштабі, тобто **; ** – інтервал варіювання *і*-го фактору, тобто **.

При складанні матриці плану можна задатись умовою ротата­бельно­сті, яка полягає у тому, що дисперсія оцінки функції відгуку не залежить від відстані *r* точки *х* від центру плану. Згідно з рівнянням (3.72) ця умова може бути записана так:

;

(3.74)

.

План є насиченим, якщо число дослідів дорівнює числу коефіцієнтів моделі, і ненасиченим, якщо число дослідів більше числа коефіцієнтів.

Таким чином, планування експерименту полягає у тому, щоб до постановки дослідів забезпечити оптимізацію аналізу даних, ігнорування якої значно ускладнює обчислення та інтерпретацію даних.

Поняття оптимальності плану можна трактувати по-різному. Одну й ту ж задачу можна вирішувати за допомогою різних планів. Якщо властивості плану відомі, можна здійснити експеримент і аналіз даних з найбільшою ефективністю.

Критерії оптимальності планів пов’язані з властивостями інформацій­ної і дисперсійної матриць. Плани можна формувати з використанням кри­те­ріїв оптимальності оцінок коефіцієнтів, напр., з мінімізацією узагаль­неної дисперсії коефіцієнтів. Узагальнена дисперсія коефіцієнтів моделі визначається як дисперсія вектора коефіцієнтів, вона задається визнач­ни­ком дисперсійної матриці. Чим менше узагальнена дисперсія, тим менше визначник. Для ортогональних планів узагальнена дисперсія дорівнює добутку дисперсій коефіцієнтів моделі. подібна оптимальність називається *D*-*оптимальністю* (за першою буквою слова *Determinant* – визначник). При *D*-оптимальностіточність визначення одного коефіцієнта може бути підвищена за рахунок зниження точності визначення інших. Якщо експе­ри­ментатора не задовольняє ситуація, у якій він ризикує отримати деякі коефіцієнти з дуже великими дисперсіями оцінок, то він може застосувати інші критерії оптимальності. Наприклад, використати *А*-*оптимальні плани* (від слів *Average value* – середнє значення), для яких характерна мінімаль­на середня дисперсія оцінок коефіцієнтів. При цьому точність оцінок усіх коефіцієнтів буде однаковою. *А*-оптимальним планам відповідає мінімум сліду дисперсійної матриці, тобто мінімум суми діагональних елементів. Можна задатися вимогою, щоб дисперсії оцінок коефіцієнтів не були дуже великі. Цим вимогам відповідають *Е*-*оптимальні плани* (від слів *Eigen value* – власне значення), у яких мінімізується максимальне власне число диспер­сій­ної матриці. Використовують також інші критерії оптимальності планів. Серед критеріїв оптимальності планів, пов’язаних з прогнозними власти­вос­тями моделі, можна назвати *G*-критерій, який мінімізує максимальну дисперсію прогнозу. До планів, пов’язаних з прогнозними властивостями моделі, належать ***ротатабельні плани.***

При реалізації будь-якого експерименту природне бажання експери­мен­татора – скоротити число експериментів, спростити розрахунки, перейти від простої моделі, напр., першого порядку, до більш складних з викори­с­танням результатів попередніх дослідів (властивість композиційності пла­ну) – ці вимоги необхідно враховувати при виборі того або іншого плану.

Але є небагато планів, які одночасно задовольняють багатьом крите­ріям оптимальності. Часто критерії оптимальності суперечливі, тому слід шукати компромісні плани: оптимальний по одному критерію і квазіоп­тимальний по іншим.

Розглянемо декілька найбільш показових планів експерименту, які можуть бути використані при дослідженні збагачувальних процесів і апаратів.

**3.2.2.4 Факторне планування експериментів**

Факторне планування дозволяє оцінювати лінійні та нелінійні ефекти взаємодії при великому числі незалежних змінних і отримувати моделі, що зв’язують залежну і незалежні змінні.

***повний факторний експеримент***

У повному факторному експерименті (ПФЕ) для кожного фактора вибирається визначене число рівнів і потім здійснюються усі можливі їхні комбінації. У факторних експериментах варіюють одночасно усіма змінними. Недоліком ПФЕ є необхідність постановки великого числа дослідів, тому що з ростом числа факторів число дослідів зросте за ступенем показника:

, (3.75)

де  – число дослідів; – число факторів; *п* – число рівнів кожного фактора.

Усі можливі комбінації варіювання двох факторів на двох рівнях будуть вичерпані при постановці чотирьох дослідів (), а трьох факторів на двох рівнях – при постановці восьми дослідів (). Геометрична інтерпретація ПФЕ показана на рис. 3.8.

План експериментів формально представляється матрицею, де кожен рядок відповідає одному досліду і визначає його умови. При реалізації матриці кожен фактор може приймати тільки два значення – «верхнє» і «нижнє». Знаки «+1» або «–1» означають, на якому рівні знаходяться значення факторів («+1» – на верхньому рівні, «–1» – на нижньому).

***х3***

***х2***

***х2***

***● 4***

***● 3***

***2 ●***

***1 ●***

***а***

***● 8***

***● 7***

***6 ●***

***1 ●***

***● 4***

***● 3***

***2 ●***

***1 ●***

***5 ●***

***х1***

***х1***

***б***

# **Рис. 3.8 – Геометрична інтерпретація повного факторного**

# **експеримента:**

# ***а*** – **план типу** *22*; ***б*** – **план типу** *23*.

При заповненні матриці керуються правилом: частота зміни знака (рівня) кожного наступного фактора удвічі менше попереднього. Якщо в матриці перебрані всі можливі комбінації значень факторів, то матриця подає повний факторний експеримент «ПФЕ».

Наприклад: матриця повного факторного експерименту при трьох факторах наведена у табл. 3.14, відповідно число рядків матриці – *N = 23 = 8*. У матриці умовно не показані числа «1» (але вони там присутні).

Таблиця 3.14 – Повний факторний експеримент для

трьох незалежних змінних (планування типу *23*)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ досліду** | **Фактори** | | | **Параметр оптимізації** |
| **Х1** | **Х2** | **Х3** | **Y** |
| **1** | **-** | **-** | **-** | **у1** |
| **2** | **+** | **-** | **-** | **у2** |
| **3** | **-** | **+** | **-** | **у3** |
| **4** | **+** | **+** | **-** | **у4** |
| **5** | **-** | **-** | **+** | **у5** |
| **6** | **+** | **-** | **+** | **у6** |
| **7** | **-** | **+** | **+** | **у7** |
| **8** | **+** | **+** | **+** | **у8** |

Перед реалізацією матриці планування задаються основними рівнями факторів (у натуральних одиницях: %, г/л, кг/т і т.д.) та інтервалами варіювання для кожного фактора. Основний рівень позна­чають: *Xoi*, інтервал варіювання – *Δх*. Кодове позначення основного, верхнього і нижнього рівнів відповідно «0», «+1» і «–1».

Тоді для матриці (табл. 3.14) умови проведення першого, другого і третього дослідів (значення факторів):

Х1 = Хо1 – λ1 Х2 = Хо2 – λ2  Х3 = Хо3 – λ3

Х1 = Хо1 + λ1 Х2 = Хо2 – λ2  Х3 = Хо3 – λ3

Х1 = Хо1 – λ1 Х2 = Хо2 + λ2  Х3 = Хо3 – λ3 і т.д.

повний факторний експеримент для трьох факторів дозволяє окремо оцінити основні ефекти *А, В, С*, ефекти взаємодії першого порядку *АВ, АС, ВС* і ефект взаємодії другого порядку *АВС*.

Вибір нульової точки (центру експерименту) відповідає оптималь­ним значенням факторів на основі апріорної інформації, досвіду експери­мен­татора і результатів збагачення аналогічних корисних копалин. При виборі інтервалу варіювання *Δх* керуються наступним:

– усі значення факторів у матриці повинні бути реалізованими, тобто повинні знаходитись в області існування даних факторів;

– величина інтервалу від «+1» до «–1» повинна суттєво перевищувати помилку фіксування даного фактора;

– інтервал варіювання даного фактора повинен забезпечувати вплив на вихідні параметри процесу.

При постановці експерименту досліди слід рандомізувати. Рандомі­зація полягає у випадковому виборі черговості постановки дослідів. Для випадкового вибору номерів дослідів можна використовувати таблицю випадкових чисел або лотерею. Рандомізацію застосовують для виклю­чення можливої систематичної помилки дослідів.

Функція відгуку представлена поліномом першого порядку з урахуванням парних взаємодій факторів:



Завдяки ортогональності планів ПФЕ, їхньої симетричності коефіцієнти рівняння регресії визначаються за формулами:

; (3.76)

 ; ; (3.77)

 ; ; (3.78)

 ; , (3.79)

де  – елементи матриці планування (+1 або –1), в якій *ij* – номер фактора, а *u* – номер досліду.

Різні знаки при коефіцієнтах свідчать про те, що вплив одного коефіцієнту слабшає при зростанні другого. Якщо коефіцієнти мають один знак, то одночасна зміна факторів більше впливає на функцію відгуку, ніж індивідуальна зміна кожного фактора.

Гіпотезу про однорідність вибіркових дисперсій відтворюваності пе­ревіряють за критерієм Кохрена *Gтабл.* зі ступенями свободи *f1* = *т – 1* (*m* – число дослідних даних у кожній серії дослідів), *f2* = *N* і мірою ризику *α* :

при  (3.80)

гіпотеза про однорідність (рівність вибіркових дисперсій одна одній) не відкидається. розраховується оцінка дисперсії відтворюваності з ступенем свободи *f = f1 · f2*:

 . (3.81)

У випадку неприйняття гіпотези про однорідність оцінки дисперсій відтворюваності можна збільшити число паралельних дослідів для варіантів варіювання з більшими значеннями вибіркових дисперсій або визнати невідтворюваність експерименту. Для виявлення джерел неодно­рідності застосовують методи дисперсійного аналізу.

Значимість коефіцієнтів регресії перевіряють за допомогою критерію Ст’юдента. Коефіцієнт значимий, якщо:

. (3.82)

Можливі такі причини незначимості коефіцієнта регресії:

– інтервал варіювання фактора близький до оптимуму;

– інтервал варіювання вузький; чим менше інтервал варіювання, тим імовірніше, що навіть фактор з сильним впливом не виявить себе як істотний;

– параметр оптимізації процесу не залежить від варіювання фактору.

Якщо має місце перша або третя причина, значення фактора стабілізується на визначеному рівні; у другому випадку збільшують інтервал варіювання.

Після виключення незначимих коефіцієнтів перевіряють адекватність моделі – з’ясовують співвідношення між дисперсією адекватності і дисперсією відтворюваності дослідних даних . Дисперсія адекватності характеризує розсіяння результатів спостережень поблизу рівняння регресії, що оцінює істинну функцію відгуку:

, (3.83)

де *т* – число паралельних дослідів; *d* – число оцінюваних параметрів в рівнянні регресії. Дисперсія адекватності оцінюється з ступенями свободи.

Якщо  не перевищує погрішності експерименту, оцінкою якої є , то вважається, що модель адекватна, а якщо , то модель не можна вважати придатною. Адекватність перевіряється за критерієм Фішера з рівнем значимості 1 – α і ступенями свободи  і :

якщо відношення , (3.84)

модель визнається адекватною. У випадку неприйняття гіпотези про адекватність моделі переходити до розгляду більш складної моделі не слід, доцільніше, якщо це можливо, провести експеримент з меншим інтервалом варіювання факторів.

Використання повного факторного експерименту не завжди доцільне, тому що з одного боку необхідне велике число дослідів, а з іншого – на першому етапі дослідження не потрібна висока точність рівнянь апроксимуючої поверхні. Тому частіше використовують дробовий факторний експеримент «ДФЕ».

***Дробовий факторний експеримент***

При збільшенні числа факторів число варіантів варіювання в ПФЕ зростає за степеневим законом, напр., для дослідження 15 факторів із застосуванням ПФЕ потрібна постановка як мінімум *215 = 32768* дослідів.

Реалізувати стільки експериментів практично неможливо, перш за все через значні витрати часу і коштів. Але якщо останні й знайдуться, то за час проведення дослідів відбудуться неконтрольовані зміни сировини, обладнання та інших факторів, внаслідок чого отримані результати виявляться непорівнянними. Крім того, при проведенні досліджень у багатьох випадках достатньо одержати тільки лінійну апроксимацію функції відгуку без оцінки деяких факторів взаємодії .

Зменшити необхідне число дослідів можна введенням у план *2п* більшої кількості факторів, ніж передбачається матрицею планування, тобто насиченням плану до числа дослідів кратного двом, напр., для трифакторного плану потрібно поставити чотири досліди (*22*). Для скорочення числа дослідів у матрицю планування слід ввести додаткові стовпці, що характеризують ефекти взаємодії, якими можна знехтувати. Наприклад, для трифакторного плану потрібно ввести фіктивний фактор *х3* і варіювати його як вектор-стовпець *х1х2*. Таким чином, можна поставити чотири досліди замість *23 = 8*.

Звичайно плани дробового факторного експерименту (ДФЕ) позна­ча­ють *2п-р*. З множини *п* факторів відбирають *р* допоміжних і *п – р* основних факторів, для яких будують повний факторний план. Цей план потім доповнюють *р* стовпцями, що відповідають факторам, що залишилися.

Спосіб утворення кожного з *р* стовпців визначається ґенераторами плану ДФЕ – добутками основних факторів. У випадку плану *2п-р* повинно бути *р* ґенераторів. У випадку плану *23-1* ґенератор плану рівний *х3 = х1х2*.

Отриманий план (табл. 3.16) є напівреплікою (половиною) повного факторного плану, при цьому усі властивості повного факторного експерименту збережені.

Таблиця 3.16 – Дробовий факторний експеримент для

трьох незалежних змінних (планування типу *23-1*)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ досліду** | **Фактори** | | | **Параметр**  **оптимізації** |
| ***х1*** | ***х2*** | ***х3 = х1х2*** | ***у*** |
| **1** | **-** | **-** | **+** | ***у1*** |
| **2** | **-** | **+** | **-** | ***у2*** |
| **3** | **+** | **+** | **+** | ***у3*** |
| **4** | **+** | **-** | **-** | ***у4*** |

Матриця ДФЕ являє собою ***1/2*** *,****1/4 , 1/8*** і т.д. репліку, у якій стовпець одного з ефектів отримують перемноженням стовпців інших ефектів.

При виборі дробових реплік необхідно визначити і проаналізувати з урахуванням апріорної інформації змішування оцінок коефіцієнтів моделі. Для цього розраховують визначний контраст ДФЕ. Пояснимо його на прикладі дробової репліки *23-1*. Для добутку трьох стовпців матриці вико­нується співвідношення *х1х2х3 = +1*– це і є визначний контраст. Таким чи­ном, контраст – це добуток лівої і правої частин рівняння, що визначає ґенератори плану. Наприклад, для плану *25-2* як ґенератори слід узяти співвід­ношення *х4 = х1х3* і *х5 = х1х2х3*. Визначні контрасти плану – *х1х3х4* і *х1х2х3х5* .

Узагальнюючий контраст плану будується з визначних контрастів та їхніх добутків у всіх можливих поєднаннях *п = 2, 3, …, р*. при перемноженні контрастів з урахуванням, що *х2 = 1*, отримують ще один контраст *х2х4х5* . Таким чином, узагальнюючий контраст рівний *х1х3х4 = х2х4х5 = х1х2х3х5* .

при перемноженні усіх складових узагальнюючого контрасту на фактори з урахуванням, що *х2 = 1*, отримують правило змішування коефіцієнтів:

;

;

;

;

;

;

,

тобто  і т.п.

Залежно від вибору ґенераторів отримують дробові факторні плани з різною вирішувальною здатністю. Число елементів у контрасті визначає вирішувальну здатність плану.

Слід віддавати перевагу дробовим факторним планам з найбільшою вирішувальною здатністю – головним дробовим факторним планам.

Для оцінок коефіцієнтів і аналізу моделей з використанням ДФЕ і ПФЕ застосовують одні й ті ж формули.

**3.2.2.5 Метод крутого сходження**

Факторне планування може успішно застосовуватись тільки тоді, коли дослідник находиться у оптимальної області. Розглянуте вище факторне планування, як правило, не дозволяє визначити раціональні технологічні режими процесу, що вивчається. Однак вибір переважних факторів і оцінка їхньої значимості за коефіцієнтами лінійної регресії дозволяє спланувати наступні експерименти для досягнення оптимальної області найкоротшим шляхом .

Найкоротша відстань до максимуму (мінімуму) безперервної однозначної функції відгуку з будь-якої точки визначається градієнтом – прямою, яка перпендикулярна ізолініям параметру оптимізації (див. рис. 3.4):

, (3.85)

де – частинна похідна функції відгуку по *і*-му фактору;  – одиничні вектори у напрямку координатних осей факторного простору.

Оцінками частинних похідних  є коефіцієнти лінійної регресії *bi* , отже, для руху по градієнту необхідно змінювати фактори пропорційно їхньому коефіцієнту регресії та у той бік, куди указує знак коефіцієнту. Цю зміну факторів називають кроком крутого сходження. У більшості випадків за крок крутого сходження кожного фактора можна приймати його коефіцієнт в моделі, виражений в одиницях вимірювання фактора. Для цього обчислюється добуток коефіцієнтів на інтервалі варіювання *biΔхi* , і фактор з максимальним добутком приймається за базовий *biБ*. Для нього вибирають крок варіювання *ΔхіБ*. Пропорційно до базового визначають кроки й по інших факторах:

, (3.86)

де – новий крок варіювання для *і*-го фактору.

Кроковий процес руху по поверхні відгуку продовжується доти, доки дослідник не потрапить в екстремальну область, де лінійне наближення вже виявляється недостатнім. Момент переходу через екстремум буде супроводжуватися погіршенням значення вихідного параметра (параметра оптимізації). Таким чином, визначається оптимальна область.

Базовий крок варіювання визначається на основі тих же уявлень, що й первинний інтервал варіювання. Для якісних факторів на двох рівнях або фіксується кращий рівень, або ґрадієнт реалізується двічі для кожного рівня окремо. Незначні фактори стабілізуються на будь-якому рівні у інтервалі *± 1*. Якщо немає спеціальних зауваг, вибирають нульовий рівень. Якщо ж, наприклад, за економічними міркуваннями доцільно підтримувати нижній рівень, то вибирають його. У русі по ґрадієнту ці фактори не беруть участь.

Рух по ґрадієнту можливий і у випадку отримання неадекватної моделі. У експеримент можуть бути включені й деякі фактори, коефіцієнти при яких виявилися незначимими, але вони важливі з технологічних міркувань. Причиною незначимості коефіцієнтів може бути невірний вибір інтервалів варіювання.