**Лекція 1.3.**

**Ротатабельне центрально-композиційне**

**планування експериментів**

Для одержання статистичної моделі при плануванні експерименту в області оптимальних значень параметрів необхідно детально вивчити функцію відгуку. З цією метою її звичайно задають у вигляді полінома другого, а іноді й більшого ступеня. На основі поліноміальної моделі можна вирішувати різні задачі:

– інтерполяційні – прогнозування значення функції відгуку у середині досліджуваного факторного простору у будь-якій його точці;

– екстраполяційні – прогнозування функції відгуку для точки, розташованої поза факторним простором;

– оптимізаційні – визначення оптимальних значень параметрів на основі максимізації або мінімізації цільової функції.

Поліноміальна модель дозволяє оцінити ступінь впливу на функцію відгуку різних факторів, мінімізувати ресурси і побудувати різні графіки і діаграми. Математична модель майже стаціонарної області допомагає образно представити і досліджувати більш точно екстремальну поверхню відгуку. У більшості випадків екстремальну область можна описати поліномами другого порядку.

Розглянуте раніше факторне планування типу ПФЕ *2n* не дозволяє оцінити коефіцієнти при квадратичних членах моделі. Потрібно використовувати планування типу 3n, але воно складне і потребує великого числа дослідів. Для досягнення цієї мети існує декілька методів планування експериментів – ортогональне центрально-композиційне, ротатабельне центрально-композиційне й ін. Останнє має більше переваг, тому що дозволяє одержати однакову точність моделі у всіх напрямках. В основі цих методів лежить факторне планування типу ПФЕ *2n*, матриця якого доповнюється, так званими, «зоряними точками» (*α*) і нульовими (центральними) точками. Метод дозволяє одержати модель у вигляді:

 (3.98)

де *b0*– вільний член, *bi* – коефіцієнти при лінійних членах, bij – коефіцієнти при взаємодіях, *bii*– коефіцієнти при квадратичних членах моделі, *Хi* – фактори.

Новий план експериментів розбивається як би на 2 частини, перша з яких (ПФЕ) дозволяє знайти коефіцієнти *bo ,bj* і *bj*i, друга – при квадратичних членах.

Характеристика ротатабельного центрально-композиційного планування наведена у табл. 3.24.

Таблиця 3.24 – Характеристика ротатабельного центрально-композиційного планування

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Число факторів** | **Число точок** | *α* |
| **ПФЕ** | **зоряних** | **центральних** | **загальне** |
| **2** | **4** | **4** | **5** | **13** | **1,414** |
| **3** | **8** | **6** | **6** | **20** | **1,682** |
| **4** | **16** | **8** | **7** | **31** | **2,000** |
| **5** | **32** | **10** | **10** | **52** | **2,378** |

Величина плеча зоряних точок розраховується за формулою:

α = 2n/4,

де *n* – число факторів.

 Центральний ротатабельний композиційний план другого порядку для трьох факторів наведений у табл. 3.25.

У першій частині матриці представлений план ПФЕ 23, у другій – зоряні точки, а у третій частині – нульові центральні точки.

Розрахунок коефіцієнтів моделі виконується за формулами:

 (3.99)

 (3.100)

 (3.101)

 (3.102)

 де   

# Таблиця 3.25 - Ротатабельний центрально-композиційний план

#  для трьох факторів

|  |  |
| --- | --- |
| **Матриця** **планування** | **Матриця обчислення** |
| Х1 | Х2 | Х3 | Х12 | Х22 | Х32 | Х1Х2 | Х1Х3 | Х2Х3 |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **-1** | **-1** | **-1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| **+1** | **-1** | **-1** | **1** | **1** | **1** | **-1** | **-1** | **1** |
| **-1** | **+1** | **-1** | **1** | **1** | **1** | **-1** | **1** | **-1** |
| **+1** | **+1** | **-1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **-1** | **-1** |
| **-1** | **-1** | **+1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **-1** | **-1** |
| **+1** | **-1** | **+1** | **1** | **1** | **1** | **-1** | **1** | **-1** |
| **-1** | **+1** | **+1** | **1** | **1** | **1** | **-1** | **-1** | **1** |
| **+1** | **+1** | **+1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **-1,682** | **0** | **0** | **2,828** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **+1,682** | **0** | **0** | **2,828** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **-1,682** | **0** | **0** | **2,828** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **+1,682** | **0** | **0** | **2,828** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **0** | **-1,682** | **0** | **0** | **2,828** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **0** | **+1,682** | **0** | **0** | **2,828** | **0** | **0** | **0** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |

Регресійний аналіз моделі здійснюється аналогічно плануванню ПФЕ *2n*, але дисперсії коефіцієнтів моделі розраховуються за іншими формулами:

; (3.103)

; ; (3.104)

; ; ; (3.105)

 (3.106)

; (3.107)

; (3.108)

. (3.109)

Ротатабельне центрально-композиційне планування експериментів раціонально використовувати тільки за умови отримання однорідної дисперсії оцінки цільової функції.

Приклад моделювання

 Таблиця 1 - Основні рівні, інтервали варіювання факторів

та межі області дослідження

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Фактор | Позна-чення | Код | Одини-ця виміру | Інтер-валзміни | Основні рівні |
| +2 | +1 | 0 | -1 | -2 |
| Концентрація твердої фази в пульпі | *C* | Х1 | %, мас. | 5,00 | 30,0 | 25,0 | 20,0 | 15,0 | 10,0 |
| Витрати розріджу- вальної води  | *Qв* | Х2 | л/хв | 50 | 400 | 350 | 300 | 250 | 200 |
| Витрати пульпи | *Qп* | Х3 | м3/год | 1000 | 6000 | 5000 | 4000 | 3000 | 2000 |
| Частота обертання  | *n* | Х4 | хв-1 | 50 | 500 | 450 | 400 | 350 | 300 |
| Крупність зерен (вміст класу - 0,071мм) | *d* | Х5 | % | 20 | 100 | 80 | 60 | 40 | 20 |

 Область зміни незалежних факторів відповідає діапазону змін технічних параметрів. В табл.2 наведена матриця планування та результати її реалізації.

Таблиця 2 - Матриця планування і результати її реалізації

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ досліду** | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **Еекс.** | **Ерозрах.** |
| 1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 44,21 | 44,547 |
| 2 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | 46,62 | 46,627 |
| 3 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 43,76 | 43,742 |
| 4 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 44,24 | 44,8061 |
| 5 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | 50,20 | 49,7803 |
| 6 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | 43,80 | 43,9645 |
| 7 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | 41,12 | 41,2595 |
| 8 | -1 | -1 | -1 | +1 | -1 | 64,29 | 64,0995 |
| 9 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 40,95 | 41,3095 |
| 10 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | 46,92 | 47,8636 |
| 11 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 44,03 | 44,9486 |
| 12 | -1 | -1 | +1 | -1 | -1 | 43,96 | 44,5486 |
| 13 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | 38,48 | 38,997 |
| 14 | -1 | +1 | -1 | -1 | -1 | 45,53 | 45,717 |
| 15 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 40,86 | 41,022 |
| 16 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | 46.80 | 47,5461 |
| 17 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35,90 | 35,5281 |
| 18 | +2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 46,30 | 45,4198 |
| 19 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 46.10 | 45,6781 |
| 20 | 0 | +2 | 0 | 0 | 0 | 49,80 | 48,9698 |
| 21 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 57,50 | 56,2748 |
| 22 | 0 | 0 | +2 | 0 | 0 | 59,80 | 59,7731 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | 46,00 | 46,3331 |
| 24 | 0 | 0 | 0 | +2 | 0 | 41,20 | 39,6148 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | 81,90 | 82,1881 |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | +2 | 78,00 | 76,4598 |
| 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 85,00 | 85,4253 |
| 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 84,40 | 85,4253 |
| 29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 84,60 | 85,4253 |
| 30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 86,00 | 85,4253 |
| 31 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 85,60 | 85,4253 |
| 32 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 85,70 | 85,4253 |

Функція відгуків апроксимована поліномом другого порядку виду:

Y = b0 + ∑biXi + ∑bilXiXl + ∑biiXi2,

 1≤i≤k ≤i,l≤k 1≤i≤k

 де *k* – число незалежних змінних.

 Обробка результатів експерименту та аналіз регресійної моделі здійснено за допомогою модуля „Планування експерименту” статистичної програми Statgraphics 5.0 Plus.

 Рівняння регресії з урахуванням значущості коефіцієнтів отримало вигляд:

 E = 85,43 + 2,473X1 + 0,823X2 + 0,875X3 – 1,68X4 – 1,43X5 –

 11,238X1**2** + 1,28X1X2 + 1,31X1X3 – 0,669X1X5 –

 9,525X2**2** + 1,11X2X3 – 6,85X3**2** – 1,548X3X4 – 2,174X3X5 –

 10,613X4**2** + 2,277X4X5 – 1,525X5**2  (1)**

 Коефіцієнти моделі наведено у нормованому (кодованому) вигляді.

 Адекватність одержаної регресійної моделі підтверджується великим значенням коефіцієнта детермінації R2-квадрат, який складав 99,85 %.

 Значимість коефіцієнтів моделі визначалася за допомогою *Р*-рівня і наведено на стандартизованому Парето-графіку (рис. 1). Вертикальна лінія на рис. 1 відповідає 95 % статистичній значущості коефіцієнтів.

Рис. 1. Значимість коефіцієнтів моделі (1)

 Аналіз отриманої моделі показав, що залежність ступеню вилучення пірохлору від досліджуваних факторів у вибраному діапазоні їх зміни є екстремальною. Найвище вилучення – 86,5 %, – досягається при наведених нижче значеннях факторів:

Factor Low High Optimum

-----------------------------------------------------------------------

X1 -2,0 2,0 0,153893

X2 -2,0 2,0 0,0885945

X3 -2,0 2,0 0,237942

X4 -2,0 2,0 -0,186524

X5 -2,0 2,0 -0,824019

 На рис. 2-5 наведені найбільш характерні тривимірні перетини поверхні цільової функції та контурні криві цих поверхонь. Зупинимось на них докладніше.

 Залежність *Е = f (X1,X2)* має екстремальний характер з екстремумом-максимумом в області Х1 = 0,150...0,154; Х2 = 0,088...0,090.

Рис. 2. Поверхня Е = f (X1,X2) та її контурні криві*.*

Рис. 3. Поверхня Е = f (X1,X5) та її контурні криві*.*

 Аналіз залежності *Е = f (X1,X5)* (рис. 3 *а,б*) показує, що у відцентрових сепараторах, як і в гідроциклонах, існує оптимальна область розрідження пульпи, яка залежить від крупності збагачуваного матеріалу.

 На рис. 4 наведено тривимірні перетини поверхні цільової функції Е = f (X3,X5) та контурні криві цих поверхонь.



 Рис. 4. Графік поверхні Е = f (X3,X5) та її контурні криві.

В результаті проведених досліджень розроблено регресійну математичну модель, яка адекватна процесу сепарації мінеральних зерен рідкіснометалічних руд Мазурівського родовища у відцентровому полі.

 Рис. 5. Графік поверхні Е = f (X4,X5) та її контурні криві.