Лекція 1.5.

Оптимізація ЕНЕРГЕТИЧНИХ об’єктів

Альтернативні способи і ресурси оптимізації

технічних, зокрема, енергетичних об’єктів

Основні поняття

***Оптимізація***([англ.](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D1%96%D0%B9%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0) optimization, optimisation) — [процес](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81) надання будь-чому найвигідніших характеристик, співвідношень (наприклад, оптимізація виробничих процесів і виробництва, енерговикористання тощо).

[***Задача оптимізації***](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D1%96%D0%B7%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%97) – задача знаходження точки (точок) екстремуму, або декількох екстремумів заданої функції.

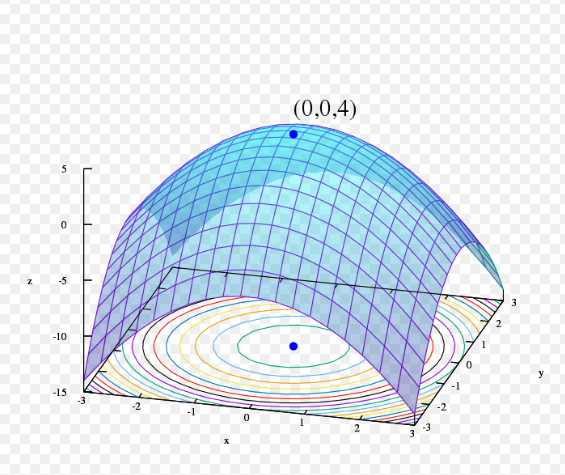
***Оптимальний*** (від лат. optimus) — найкращий з можливих варіантів чогось, найвідповідніший певному завданню, умовам. Наприклад, максимальна продуктивність устаткування чи відповідний мінімуму витрат по закінченому виробничому циклу. Оптимальні розрізи — значення розмірів чи конструкції технологічного елемента, зумовлені спеціальним розрахунком для досягнення максимального виробничого ефекту, мінімальних трудових чи грошових витрат та ін. критерію.

***Критерій оптимальності*** — основний показник якості робо­ти [сис­теми](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0), фундаментальне поняття системи оптимального функціо­нування об'єктів ([машин](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%88%D0%B8%D0%BD%D0%B0), [процесів](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81),  [підприємства](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%96%D0%B4%D0%BF%D1%80%D0%B8%D1%94%D0%BC%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE),  [галузі](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D0%BB%D1%83%D0%B7%D1%8C),  [економіки](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D1%96%D0%BA%D0%B0) загалом). В еко­номіці, наприклад, критерієм оптимальності може бути максимум [при­бутку](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%B1%D1%83%D1%82%D0%BE%D0%BA), мінімум трудових затрат, мінімальний час досягнення мети тощо.

***Математичною оптимізацією***  або математичним про­грамуванням в [математиці](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0),  [інфор­матиці](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%86%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) та [дослідженні операцій](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D1%81%D0%BB%D1%96%D0%B4%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D1%96%D0%B9)  називають відбір най­кращого елементу (за певним критерієм) з множини доступних альтернатив. У най­простішому випадку [задача опти­міза­ції](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D1%96%D0%B7%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%97) полягає у знаходженні  [екстремуму](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%BC%D1%83%D0%BC)  ([мінімуму](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%BC%D1%83%D0%BC)  або [максимуму](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%BC%D1%83%D0%BC))  [дійсної](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%96%D0%B9%D1%81%D0%BD%D1%96_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0)  [функції](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) шляхом систематичного вибору [вхідних значень](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%B3%D1%83%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97) з дозволеного набору та обчислення значення функції.

Подальші узагальнення теорії та методів оптимізації до інших формулювань становлять велику область [прикладної математики](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D0%B0_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0).

Оптимізація охоплює знаходження «найкращих можливих» значень деякої [цільової функції](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F) в межах [області визначення](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%B2%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F), включаючи різні типи цільових функцій та різні типи областей значення (Рис. 5.1).



*Рис. 1. Графік*[*параболоїду*](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D1%97%D0%B4)*, заданого рівнянням z = f(x, y) = −(x² + y²) + 4.*

*Глобальний*[*максимум*](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%BC%D1%83%D0%BC)*в точці (x, y, z) = (0, 0, 4).*

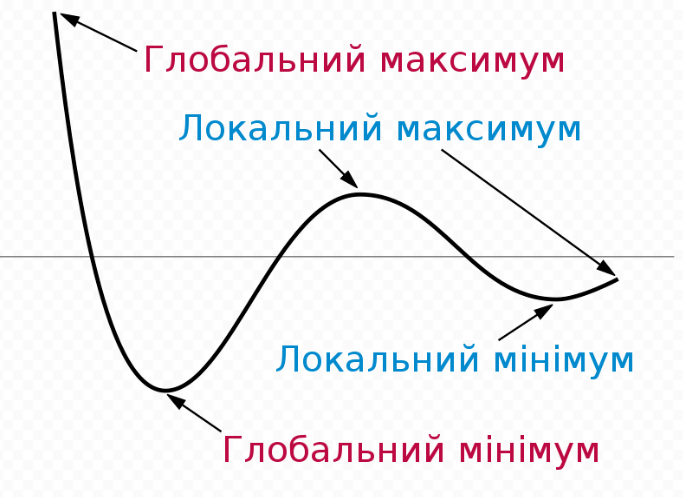
***Методи оптимізації*** класифікують відповідно до задач оптимізації:

* *Локальні методи:* сходяться до якого-небудь локального екстремуму цільової функції. У разі унімодальної цільової функції, цей екстремум єдиний, і буде глобальним максимумом/мінімумом.
* *Глобальні методи:* мають справу з багатоекстремальними цільовими функціями. При глобальному пошуку основною задачею є виявлення тенденцій глобальної поведінки цільової функції.

Існуючі в цей час методи пошуку можна розбити на три великі групи:

1. детерміновані;
2. випадкові (стохастичні);
3. комбіновані.

За критерієм вимірності допустимої множини, методи оптимізації поділяють на методи *одномірної оптимізації* і методи *багатомірної оптимізації*.



За видом [цільової функції](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F) й [допустимої множини](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%BF%D1%83%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BC%D0%B0_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%BD%D0%B0), задачі оптимізації й методи їхнього розв'язання можна розділити на такі класи:

* Задачі оптимізації, у яких цільова функція �(�→)f (x) і [обмеження](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%BC%D0%B5%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) ��(�→),�=1,…,� є лінійними функціями, розв'язуються так званими методами [*лінійного програмування*](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F).
* В іншому разі мають справу із задачею [*нелінійного програмування*](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BB%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F) і застосовують відповідні методи.

За вимогами до гладкості й наявності в цільової функції частинних похідних, їх також можна розділити на:

* прямі методи, що вимагають тільки обчислень цільової функції в точках наближень;
* [методи першого порядку](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B4%D1%96%D1%94%D0%BD%D1%82%D0%BD%D1%96_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8): вимагають обчислення перших частинних похідних функції;
* методи другого порядку: вимагають обчислення других частинних похідних.

Крім того, оптимізаційні методи поділяються на такі групи:

* [аналітичні методи](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%96%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%96_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8);
* [чисельні методи](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8);
* [графічні методи](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D1%87%D0%BD%D1%96_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8&action=edit&redlink=1).

Крім того, розділами [математичного програмування](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F) є [параметричне програмування](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F), [динамічне програмування](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D1%96%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F) і [стохастичне програмування](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D1%82%D0%BE%D1%85%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F&action=edit&redlink=1). Математичне програмування використовується при розв'язанні оптимізаційних задач [дослідження операцій](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D1%81%D0%BB%D1%96%D0%B4%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D1%96%D0%B9).

Спосіб знаходження екстремуму повністю обумовлюється класом задачі. Але перед тим, як отримати математичну модель, потрібно виконати 4 етапи моделювання:

* Визначення меж системи оптимізації (факторний простір)
* Вибір змінних проєктування (керованих змінних)
* Визначення обмежень на керовані змінні
* Вибір числового критерію оптимізації (цільової функції)

Оптимізація технічних об’єктів із застосуванням

планування експерименту

Планування експерименту – сучасна поширена процедура вибору числа та умов проведення дослідів, необхідних та достатніх для вирішення задачі досліджень, зокрема, задач оптимізації із заданою точністю.

**Підходи до планування експерименту, експериментальні плани**

Розрізняють два підходи планування експерименту:

* **класичний,** при якому по черзі змінюється кожен [фактор](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%83)) до визначення часткового максимуму при постійних значеннях інших факторів,
* **статистичний**, де одночасно змінюють багато [факторів](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%83)).

При цьому суттєвим є:

* мінімізація числа дослідів;
* одночасне варіювання всіма параметрами;
* використання математичного апарата, який формалізує дії експериментатора;
* вибір чіткої стратегії, що дозволяє ухвалювати обґрунтовані рішення після кожної серії експериментів.

Загалом розрізняють такі експериментальні плани:

* дисперсійного аналізу;
* відбору суттєвих [факторів](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%83));
* багатофакторного аналізу;
* отримання поверхні відгуку;
* динамічних задач планування;
* вивчення механізмів явищ;
* побудови діаграм «склад — властивість»,
* побудови діаграм «склад — стан».

Для складання математичних моделей, що описують область високої кривизни поверхні відгуку, використовуються плани другого порядку. У цьому випадку застосовується ортогональне центральне композиційне планування і ротатабельне планування.

При цьому ротатабельне планування дозволяє отримати більш точний математичний опис у порівнянні з ортогональним центральним композиційним плануванням. Це досягається завдяки збільшенню дослідів в центрі плану та спеціальному вибору величини зоряного плеча.

Англійськими хіміками Боксом і Вілсоном запропоновано [метод крутого сходження](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%BA%D1%80%D1%83%D1%82%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D1%81%D1%85%D0%BE%D0%B4%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F) (рух по градієнту), що дозволяє найкоротшим шляхом визначити координати екстремуму досліджуваного процесу. Для математичного опису екстремальної області застосовують різні методи планування експерименту, в основі яких лежить представлення екстремальної області (рис. 5.1) поліномами другого порядку, що адекватно описують досліджуваний процес.

До таких планів належить [план Бокса — Бенкена](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B8_%D0%91%D0%BE%D0%BA%D1%81%D0%B0%E2%80%93%D0%91%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%B5%D0%BD%D0%B0) — один з різновидів статистичних планів, що застосовуються при плануванні наукових та, особливо, промислових експериментів. Ці плани дозволяють отримувати максимальну кількість об'єктивної інформації про вплив чинників, що вивчаються, на виробничий процес за допомогою найменшого числа спостережень (дослідів). Вони належать до симетричних некомпозиційних трирівневих планів другого порядку і являють собою поєднання дворівневого (-1, +1) повного факторного експерименту з неповноблочним збалансованим планом. Область планування — [гіперкуб](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D1%81%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82), причому кожен із чинників набуває значення на трьох рівнях: −1, 0 і +1. Плани Бокса — Бенкена за рядом статистичних характеристик перевершують центрально-композиційні ортогональні і ротатабельні плани, що широко застосовуються в промисловому експерименті.

Для вивчення промислового процесу застосовують еволюційні планування експерименту, де дослідник повинен весь час пристосовуватися до умов виробництва, що змінюються. Специфічним є планування з відсіюванням [експериментів](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82).

Сучасна [теорія планування експерименту](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%83&action=edit&redlink=1) склалася у 1960-х роках. Її методи тісно пов'язані з теорією наближення функцій та математичним програмуванням. Розроблено оптимальні плани і досліджено їхні властивості для широкого класу моделей.

Планування експерименту та обробка даних здійснюється за допомогою комп'ютерних програм: [Mathcad](https://uk.wikipedia.org/wiki/Mathcad), [Statistica](https://uk.wikipedia.org/wiki/Statistica), Axum7, [Statgraphics](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=Statgraphics_Plus&action=edit&redlink=1), [Simulink](https://uk.wikipedia.org/wiki/Simulink) та ін.

**Планування і оптимізація технологічних об’єктів на основі системи планування експерименту STATGRAPHICS**

Комп'ютерна система планування експерименту, зокрема, така як STATGRAPHICS Plus for Windows, істотно змінила практику моделювання. Якщо раніше це вважалося сферою обмеженого кола кваліфікованих професіоналів в математичній статистиці, які володіють у досить повному обсязі її тонкощами, то сьогодні планування стало доступне широкому колу фахівців в інших галузях знань, зокрема, у електротехніці. Працюючи з модулем планування експерименту Design of Experiment (DOE), дослідник отримує повну впевненість в тому, що проведений ним статистичний аналіз даних здійснюється найбільш коректним чином. Модуль DOE автоматично проводить дослідника через весь цикл планування експерименту. DOE допомагає сформулювати критерій оптимальності плану експерименту, пропонує ряд оптимальних планів і наводить всі необхідні табличні та графічні викладки на кожному етапі проведення експерименту.

У всіх видах експериментів результати та висновки залежать від кількості різнорідних даних. Тому перша послуга, яку надає модуль DOE – допомога в організації збору інформації про досліджуваний об’єкт, для чого передбачена можливість генерації великої кількості як стан­дартних, так і нестандартних робочих таблиць, їх редагування і роздрук (рис. 5.2).

У плануванні експерименту значна увага приділяється способам відображення експериментальної інформації. У STATGRAPHICS включений весь спектр графічних процедур, які дозволяють підбирати, а також ясно і точно «простежувати» особливості аналізованого матеріалу, починаючи від карт Парето і до тривимірних поверхонь відгуку різного виду і контурних кривих, на яких можна простежити факторні координати оптимуму. При цьому всі графічні відображення є інтерактивними. Можна (як в автоматичному, так і ручному режимах) підібрати найбільш ілюстративні рисунки та графіки експериментальних планів, у супроводі відповідних чисельних результатів.

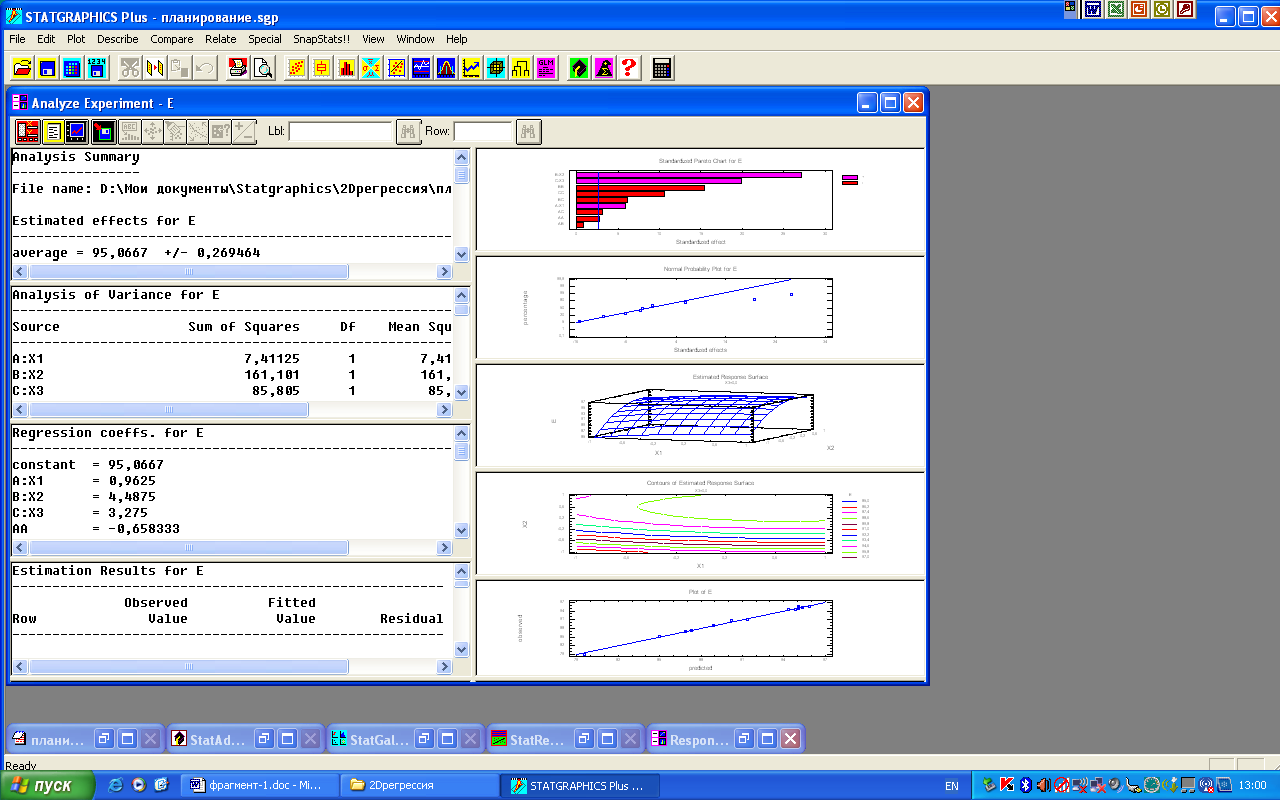


Рис.2 – Робочий інтерфейс програми Statgraphics при роботі в модулі DOE

Модуль планування експерименту програми STATGRAPHICS Plus for Windows надає повний набір різних типів планів аж до тих, в яких враховуються взаємодії аналізованих факторів по восьмий порядок включно. Крім того, за бажанням експериментатора можуть бути розглянуті взаємодії більш високого порядку. Все це разом узяте, включаючи експертну консультаційну систему StatAdvisor, що допомагає інтерпретувати результати і виявляти вади в проведеному аналізі, дозволяє говорити про модуль DOE, як про високорозвинений інструмент, що суттєво підвищує ефективність планування експерименту.

Модуль DOE програмного пакету STATGRAPHICS широко використовується при дослідженні технологічних процесів. Більшість з цих процесів носять масовий статистичний характер і їхній опис неможливий без застосування методів математичної статистики. У більшості випадків завдання дослідника зводиться до розробки статистичної регресійної моделі процесу у вигляді поліноміальної залежності вихідного параметра (параметрів), а саме цільової функції або параметра оптимізації від ряду вхідних.

Моделювання і оптимізація електричних агрегатів із застосуванням сплайн-функцій

Сплайн ([англ.](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D1%96%D0%B9%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0) spline — планка, рейка) — [функція](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)), [область визначення](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%B2%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F) якої розбита на шматки, на кожному зі шматків функція є деяким [поліномом](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%96%D0%BD%D0%BE%D0%BC) (многочленом).

В задачах [інтерполяції](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%86%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%86%D1%96%D1%8F), інтерполяція сплайном краща, ніж інтерполяція многочленом, оскільки дає схожі результати навіть при менших [степенях](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B5%D0%BF%D1%96%D0%BD%D1%8C) поліномів.



Рис. 1. Кубічний параметричний поліноміальний сплайн. Складається з трьох сегментів (виділені кольором), що описуються окремими кубічними поліномами.

Кубічний сплайн — гладка функція, область визначення якої розбито на скінченне число відрізків, на кожному з яких вона збігається з деяким кубічним многочленом.

Застосування сплайнів

Однак потенційні можливості сплайнів значно ширші ніж просто опис деяких кривих. В реальному світі велика кількість фізичних процесів за самою своєю природою є сплайнами. В механіці це деформація гнучкої пластини чи стержня, зафіксованих в окремих точках; траєкторія руху тіла, якщо сила, що діє на нього змінюється ступінчато (траєкторія штучного космічного об'єкта з активними та інерційними відрізками руху, траєкторія руху літака при ступінчатій зміні тяги двигунів та зміні профілю крила тощо.). В [термодинаміці](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D1%96%D0%BA%D0%B0) це теплообмін в стрижні складеному з фрагментів з різною теплопередачею. В хімії — дифузія через шари різних речовин. В електриці — поширення електромагнітних полів через різнорідні середовища. Тобто сплайн в багатьох випадках є розв'язанням диференційних рівнянь, які описують фізичні процеси.

На рис 2 показано сплайн-функцію коефіцієнта корисної дії

радіально-осьової турбіни (Гідроенергетика: курс лекцій. В.І. Будько та ін. КПІ. 2023).

Сплайн-функція визначає залежність ККД турбіни від зведених витрат і частот обертання.



Рис 2. Сплайн-функція ККД радіально-осьової турбіни.

Проведення порівняльного аналізу властивостей різних типів турбін часто виконується шляхом представлення їх характеристик у відносних одиницях стосовно номінальних значень (η/ηnom , Q/Qnom , n/nnom , інші) – див. рис. 3.



Рис. 3. Сплайн-апроксимація універсальної характеристики радіально-осьової турбіни у відносних одиницях

Для побудови лінійних характеристик на основі універсальної характеристики застосовується метод просторового перетину поверхонь (рис. 4).



Рис. 4. Геометрична сплайн-інтерпретація системи рівнянь універсальної характеристики радіально-осьової турбіни за умови ni1 =1.

Залежність, отримана в результаті перетину, показана на рис. 5.



Рис. 5. Перетин двох просторових об'єктів η = fi (Q1, ni 1) за ni = 1

Порівняльний аналіз однопараметричних залежностей можна виконати графічно, використовуючи рис. 6.



Рис. 6. Сімейство перетинів двох просторових об'єктів η = fi (Q1, ni1)

за ni 1 = 0.8,0.9,...,1.4.

Моделювання і оптимізація технічних (енергетичних) об’єктів із застосуванням методу крутого сходження

(метод Бокса — Вілсона)

Метод Бокса-Вілсона ([англ.](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D1%96%D0%B9%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0) Box-Wilson method) — метод оптимізації об'єкту з використанням активного [експерименту](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82) шляхом крутого сходження поверхнею відгуку (параметрів [оптимізації](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D1%96%D0%B7%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F)) до [оптимуму](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D1%83%D0%BC), суть якого полягає в наступному: рух у напрямі [градієнта](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B4%D1%96%D1%94%D0%BD%D1%82) за наявності лінійного рівняння моделі здійснюється із центра експерименту послідовними кроками.

Припустимо, що на процес впливає тільки один фактор, тоді зміна параметра оптимізації *у* в залежності від фактора *х* може бути представлена графічно у вигляді кривої *ab* (рис. 5.37) і аналітично:

. (5)

Така функція називається *функцією відгуку*, екстремум якої має координати ***хопт***  і ***уопт***. при плануванні першої серії дослідів рівень фактора ***х0*** називається нульовим рівнем, ***Δх*** – інтервал варіювання, ***xн*** – нижній рівень (кодується «***-***»), ***xв*** – верхній рівень (кодується «***+***»). В результаті перших двох дослідів можна зробити висновок, що значення ***x***необхідно збільшувати.

***Δх***

***d***

***c***

# Рисунок 7. – Одномірна функція відгуку.

***уопт***

***Y***

***b***

***а***

***х0***

***xв***

***xн***

***X***

***хопт***

При двох факторах функція відгуку графічно може бути представлена як поверхня у тримірному просторі або рівнянням:

. (6)

На рис. 8 нанесені криві рівного значення параметра оптимізації для двох змінних *Х1*і *Х2* .

При класичному методі спочатку дослідник фіксує змінну *Х1,*рухається з точки *О* в напрямку змінної *Х2* і визначає точку *Р*, що відповідає екстремальному значенню параметра оптимізації. В точці *Р* фіксується змінна *Х2* і починається рух у напрямку осі *Х1*. Що дозволяє знайти точку *Q*. Знову фіксується *Х1* і продовжується рух по *Х2* і т.д. до досягнення оптимуму. Очевидно, що більш ефективним є план, за яким первісно визначається напрямок *Q*, а докладніше вивчення поверхні відгуку здійснюється в оптимальній області.

У випадку великого числа факторів графічне представлення функції неможливе, а загальний вигляд аналітичного рівняння, яке її описує:

.

☻

☻

☻

☻

Рисунок 8 – рух до максимуму поверхні відгуку методами однофакторного експерименту і крутого сходження.

***●***

***R***

***Р***

***О***

***●***

***●***

***●***

***●***

***●***

***●***

***●***

***Х2***

***Х1***

***70 %***

***80 %***

***Q***

***60 %***

***90 %***

***●***

***●***

***●***

***Q***

***Р***

***●***

Ефективність планування особливо відчутна при вивченні і моделюванні багатофакторних процесів.

Досліди повинні бути рандомізовані, тобто виконуватися у послідовності, яка встановлюється за допомогою таблиці випадкових чисел, або будь-якої процедури, що забезпечує випадковий характер проведення дослідів. Рандомізація дозволяє нівелювати систематичні (напр., періодичні) впливи факторів, що не контролюються.