Лекція 8

2.4 Принципи і методи прогнозування

Відомий ряд методів прогнозування за критерієм зносу, які умовно можна розділити на дві основні групи: методи, що базуються на обробці статистичних даних, отриманих шляхом пасивних спостережень (пасивні методи), і методи, що базуються на цілеспрямованих експериментах (активні методи).

Перші методи, природньо, можна використовувати лише для експлуатуємих об'єктів. Другі методи застосовують для об'єктів, що перебувають на стадії розробки. Проте усі методи засновані на тому самому принципі, що може бути пояснений графічно (рис. 4.5).

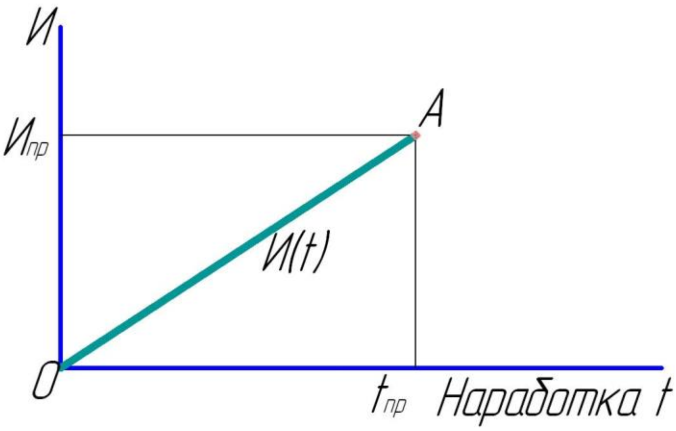

Рисунок 4.5

Відповідно до рисунка в будь-якому випадку необхідно знати характер зношування об'єкта, що виражається залежністю $И = f(t)$. У деяких випадках для спрощення рішення задачі може бути прийнята ідеалізована модель процесу зносу, яка припускає, що криві зносу являють собою прямі лінії. Це спрощення може внести істотні погрішності. Граничну величину наробітку об'єкта $t_{пр}$ визначають шляхом перетинання горизонталі, що проходить через граничне значення зносу $И_{пр}$, і кривої залежності зносу $И(t)$ (точка А). В той же час у зв'язку з наявністю статистичного розкиду і випадкових помилок необхідно установлювати вірогідність отриманих результатів шляхом обчислення імовірності безвідмовної роботи чи визначення довірчих інтервалів при заданій величині довірчої імовірності.

2.5 Метод Міхліна-Волкова

Метод припускає, що в загальному випадку залежність зносу деталі як випадкової функції наробітка може бути подана у вигляді

$$И(t) = a_И \cdot t^{\beta} + b_И, \tag{4.1}$$

де $a_И$ – випадкова величина, що залежить від властивостей поверхні деталей, умов роботи і т.д.;

t – час наробітку;

β – коефіцієнт рівняння динаміки зносу (детермінована величина для визначеного виду сполучення) (табл. 4.1);

$b_И$ - величина зносу деталі по закінченні приробляння.

У зв'язку з відносно невеликими значеннями величиною $b_И$ зневажають. Тоді

$$И(t) = a_И \cdot t^{\beta}. \tag{4.2}$$

З урахуванням цього вираз залежності для визначення ресурсу деталі має вигляд

$$R = \left(\frac{И_{пр}}{a_И}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Наближені значення математичного ждання m_R і дисперсії D_R ресурсів визначають з виразів:

$$m_R \approx \left(\frac{И_{пр}}{m_{aИ}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left[1 + \frac{(\beta+1)\cdot D_{aИ}}{(2\beta^2)\cdot m_{aИ}{}^2}\right], \tag{4.3}$$

$$D_R \approx \frac{И_{пр}{}^{\frac{2}{\beta}} \cdot D_{aИ}}{\beta^2 \cdot (m_{aИ})^{\left(\frac{2}{\beta}\right)+2}} \cdot \left[1 + \frac{(\beta+1)^2 \cdot D_{aИ}}{(2\beta^2)\cdot m_{aИ}{}^2}\right], \tag{4.4}$$

де $m_{aИ}$ - середнє значення коефіцієнта $a_И$ (математичне ждання швидкості зношування);

$D_{aИ}$ - дисперсія коефіцієнта $a_И$.

Таблиця 4.1 – Орієнтовні значення β

Найменування вузлів і деталей	β
Радіальний знос у підшипниках кочення	1,5
Знос посадкових гнізд корпусних деталей	1,0
Знос зубців шестерень (по товщині) і зірочок	1,5
Знос шліців валів	1,1
Знос втулочно - роликових ланцюгів (збільшення кроку)	1,0
Знос плунжерних пар	1,1
Знос валиків, пальців, осей	1,4
Абразивний знос підшипників ковзання	0,5…0,7
Знос накладок гальм і дисків муфт зчеплення	1,0

Для прикладу розрахунків параметрів взято 100 однотипних деталей, швидкості зносу яких складають:

- 0,6 мкм/год (5 деталей);
- 0,5 мкм/год (10 деталей);
- 0,4 мкм/год (30 деталей);
- 0,3 мкм/год (50 деталей);
- 0,2 мкм/год (5 деталей).

Визначаємо математичне ждання швидкості зношування

$$m_{a\,И} = V_0 = \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot f_i = \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot \frac{n_i}{N},$$

де $f = \frac{n_i}{N}$ - щільність розподілу;

n_i - кількість деталей, що мають однакову швидкість зношування;

N - загальна кількість деталей.

$$m_{a\,И} = 0{,}6 \cdot \frac{5}{100} + 0{,}5 \cdot \frac{10}{100} + 0{,}4 \cdot \frac{30}{100} + 0{,}3 \cdot \frac{50}{100} + 0{,}2 \cdot \frac{5}{100} = 0{,}36 \text{ мкм/год.}$$

Тоді дисперсія коефіцієнта $a_И$ складе :

$$D_{a\,И} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n(V_i - m_{a\,И})^2}{N} = \frac{5(0{,}6-0{,}36)^2 + 10(0{,}5-0{,}36)^2 + 30(0{,}4-0{,}36)^2}{100} +$$

$$+ \frac{50(0{,}3-0{,}36)^2 + 5(0{,}2-0{,}36)^2}{100} = 0{,}0084 \text{ мкм}^2/\text{год}^2.$$

Прийнявши $\beta = 1$ і підставивши відповідні значення величин у (4.3, 4.4), одержимо:

$$m_R = \frac{1200}{0{,}36} \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot 0{,}0084}{2 \cdot 0{,}1236}\right] = 3560 \text{ год;}$$

$$D_R = \frac{1200^2 \cdot 0{,}0084}{0{,}36^4} \cdot \left[1 + \frac{4 \cdot 0{,}0084}{4 \cdot 0{,}1236}\right] = 817920 \text{ год}^2.$$

Середньоквадратичне відхилення m_R складе:

$$\overline{\sigma_R} = \sqrt{m_R} = \sqrt{817920} = 904 \text{ год.}$$

Тоді величина часу наробітку (ресурс деталі) складе:

$$R = 3560 \pm 904 \text{ год.}$$

2.6 Експериментальний метод з використанням методу найменших квадратів

Принцип цього методу полягає в тім, що експериментатор проводить прискорені дослідження на знос декількох однотипних деталей на спеціальному стенді, який створює умови, що максимально відповідають виробничим умовам. Через визначені проміжки часу визначають величину зносу (не менш 5-ти вимірів для кожної деталі). Число проміжків часу (серій вимірів), через яке виконують виміри, повинне бути не менше трьох, тому що тільки, мінімум, три точки дозволяють установити наближений характер залежності $И = f(t)$ (прямолінійна чи криволінійна), як це показано на рис. 4.4.

У загальному випадку величина зносу описується залежністю

$$И = a \cdot t^m, \tag{4.5}$$

де a – постійний коефіцієнт;

m – показник степеня.

При $m = 1$ залежність $И = f(t)$ буде лінійною, при $m \neq 1$ – нелінійною. Для визначення a і m зручно використовувати регресійний аналіз на основі методу найменших квадратів. Відповідно до цього методу сума квадратів відхилень обмірюваних величин від обчислених повинна бути найменшою. Для надання виразу (4.5) універсальної форми зробимо його вирівнювання шляхом логарифмування

$$\lg И = \lg a + \lg t$$

і, позначивши $\lg И = U$, $\lg a = A$, $\lg t = T$, одержимо

$$U = A + m \cdot T \ . \qquad (4.6)$$

Для цього виразу на основі методу найменших квадратів можна записати

$$\sum_{i=1}^{N} \left(U_i - A - m \cdot T_i\right)^2 = \min$$

Після диференціювання по *A* і *m* одержимо два рівняння:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \left(U_i - A - m \cdot T_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \left(U_i - A - m \cdot T_i\right) \cdot T_i = 0 \end{aligned}\right\}$$

чи

$$\left.\begin{aligned} N \cdot A + m \cdot \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} U_i \\ A \cdot \sum_{i=1}^{N} U_i + m \cdot \sum_{i=1}^{N} {T_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} U_i \cdot T_i \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Тут N – кількість серій вимірів (тобто при трьох групах вимірів $N = 3$, при чотирьох - $N = 4$ і т.д.) чи кількість усереднених точок, по яких будується крива залежності (за винятком нульової точки на початку координат).

Підставивши в ці рівняння значення експериментальних даних, знаходять величини *A* і *m*. Після цього визначають натуральне значення коефіцієнта $a = 10^A$.

У процесі вимірів не виключена поява промахів (випадкових похибок), що явно відрізняються своєю величиною від величин іншої серії вимірів. Якщо серія з невеликого числа вимірів містить грубу погрішність – промах, то наявність його може сильно спотворити як середнє значення вимірюваної величини, так і границі довірчого інтервалу. Тому з цієї серії необхідно виключити промах.

Для виключення промахів користаються формулами:

$$\nu_{(n)} = \frac{И_{max} - \overline{И}}{\sqrt{\frac{n-1}{n} \cdot \sigma_n^2}} \le \nu_{max}, \qquad \nu_{(n)} = \frac{\overline{И} - И_{min}}{\sqrt{\frac{n-1}{n} \cdot \sigma_n^2}} \le \nu_{max}, \tag{4.8}$$

де

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta И_i^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\left(\overline{И} - И_1\right)^2 + \left(\overline{И} - И_2\right)^2 + \ldots + \left(\overline{И} - И_n\right)^2 \right] \tag{4.9}$$

$И_{max}$ – найбільше значення вимірів у серії *n* вимірів;

$И_{min}$ – найменше значення вимірів у серії *n* вимірів;

У таблиці Д.4.1 приведені значення ν_{max} - максимально можливі значення $\nu_{(n)}$, що виникають внаслідок статистичного розкиду і відповідають заданій надійності β і кількості вимірів *n.* Це означає, що дане значення $И_{max}$ несумісне з вихідним припущенням про закон нормального розподілу і його можна розглядати як промах. Такий вимір варто виключити і визначити нове значення $\overline{И}$. Якщо ж величина $\nu_{(n)}$ менше ν_{max} для цієї ж кількості вимірів при заданій точності β, то цей вимір, що *виділяється,* $И_{мах}$ ($И_{мin}$) є наслідком статистичного розкиду і немає підстави вважати його промахом.

Після виключення промахів, якщо вони є, приступають до побудови графіка вирівнювання для того, щоб переконатися в правильності вибору залежності $И = f(t)$. З (4.6) виходить, що графік повинен являти пряму похилу лінію, яка не проходить через початок координат. Тобто на графіку відкладають логарифми усереднених значень серій вимірів для кожного проміжку часу. Якщо ці значення лежать на прямій чи близько до неї розташовуються, то можна вважати, що залежність обрана правильно.

Визначивши з (4.7) чисельні значення *a* і *m*, і задавшись граничним значенням зносу $И_{пр}$, з (4.5) знаходять час наробітку деталі

$$t_H = \sqrt[m]{\frac{И_{пр}}{a}} \; .$$

Оскільки даний експеримент, як і будь-який інший, містить випадкові похибки, то варто оцінити степінь надійності отриманого результату шляхом побудови довірчого інтервалу.

У нашому випадку математичний опис довірчого інтервалу для окремо взятої точки імовірності виражають у такий спосіб:

$$P \cdot \left(\overline{И} - \Delta И < И < \overline{И} + \Delta И\right) = \beta \ , \qquad (4.10)$$

де $И$ – дійсне значення вимірюваної величини;

$\overline{И}$ – середнє арифметичне значення, отримане в результаті вимірів;

$\Delta И$ – погрішність виміру *И*.

Інтервал значень від $\left(\overline{И} + \Delta И\right)$ до $\left(\overline{И} - \Delta И\right)$ називають довірчим інтервалом, тобто інтервалом, в який попадає дійсне значення *И* з заданою імовірністю *β*.

З урахуванням коефіцієнта Стьюдента t_β («Стьюдент» - студент – псевдонім англійського математика і хіміка B.C. Госсета, що запропонував цей коефіцієнт у 1908 році) вираз (4.10) прийме вигляд:

$$P \cdot \left(\overline{И} - t_\beta \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} < И < \overline{И} + t_\beta \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right) = \beta \qquad (4.11)$$

При розгляді залежностей, як це має місце у нашому випадку, оцінку довірчого інтервалу варто робити за мірою відхилення коефіцієнтів, тобто необхідно визначати довірчі інтервали для цих коефіцієнтів.

Технологію цього методу розглянемо на конкретному прикладі. Для цього поставлено п'ять серій вимірів, кожна з яких включає до десяти вимірів, тобто, вимір зносу виконували п'ять разів через 1000 годин. Результати експерименту занесені в табл. 4.2, де також приведені середні значення $\overline{И}$ для кожної серії і максимальні відхилення $И_{max}$ від середнього значення.

Першим кроком обробки результатів є виявлення і виключення промахів. Для цього скористаємося виразами (4.8, 4.9). Визначаємо середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_и^2 = \frac{1}{10-1} \cdot [(408-430)^2 + (408-372)^2 + (408-448)^2 + (408-384)^2 + (408-412)^2 +$$
$$+ (408-396)^2 + (408-388)^2 + (408-424)^2 + (408-410)^2 + (408-416)^2] = 573$$

Таблиця 4.2 – Результати вимірів зносу *И*

n	Серія вимірювань(N_1) 1		Серія вимірювань(N_2) 2		Серія вимірювань(N_3) 3		Серія вимірювань(N_4) 4		Серія вимірювань(N_5) 5	
	t, ч	*I*	*t*, ч	*I*	*t*, ч	*I*	*t*, ч	*I*	*t*, ч	*I*
1		161		280		430		530		692
2		148		218		372		510		685
3		156		248		448		526		673
4		168		212		384		422		666
5	1000	132	2000	252	3000	412	4000	520	5000	665
6		138		256		396		554		658
7		156		240		388		502		655
8		144		228		424		534		652
9		143		242		410		506		641
10		134		234		416		516		633
Середнє значення $\overline{\grave{E}}$		148		242		408		518		662
$\grave{E}_{max} - \overline{\grave{E}}$,		+0,20		+38		+40		+36		+30

Тоді $\nu = \dfrac{448-408}{\sqrt{\dfrac{10-1}{1}\cdot 573}} = 1{,}76$

З таблиці Д.4.1 додатка для $n = 10$ і $\beta = 0{,}9$ - $\nu_{max} = 2{,}15$. Таким чином, $\nu < \nu_{max}$ і, отже, немає підстави вважати величину $И = 448$ мкм промахом.

Для визначення коефіцієнтів *A* і *m* рівняння (4.6) використовуємо систему рівнянь (4.7). При цьому доцільно результати експерименту оформити у вигляді спеціальної таблиці 4.3, що істотно спрощує процес обчислення, тому що суми вертикальних стовпців безпосередньо надають чисельні значення цих рівнянь.

Таблиця 4.3

i	$\overline{И}_i$	t_i	$U_i = \lg И_i$	$T_i = \lg t_i$	$U_i \cdot T_i$	T_i^2
1	148	1000	2,17	3,000	6,510	9,000
2	242	2000	2,384	3,301	7,869	10,897
3	408	3000	2,611	3,477	9,078	12,090
4	518	4000	2,714	3,602	9,776	12,975
5	662	5000	2,821	3,699	10,434	13,682
Сума:			12,700	17,079	43,667	58,644

Оскільки задачу вирішують на цій стадії в логарифмічній формі, то визначити коефіцієнти A і m слід безпосередньо з цих двох рівнянь, підставивши в них дані табл. 4.3.

$$5 \cdot A + m \cdot 17{,}079 = 12{,}7$$

$$17{,}079 \cdot A + m \cdot 58{,}644 = 43{,}667$$

Для можливості рішення цих рівнянь помножимо перше з них на $\left(\frac{-17{,}079}{5}\right)$.

Тоді одержимо

$$-17{,}079 \cdot A - m \cdot 58{,}338 = -43{,}381$$

Після додавання двох рівнянь (нижнього системи і перетвореного) одержимо

$$m \cdot 0{,}306 = 0{,}286 \text{ чи } m = 0{,}935$$

Отримане значення $m < 1$ говорить про те, що процес зношування має уповільнено зростаючий характер (рис. 4.4). Однак величина відхилення тут від прямолінійної залежності незначна. Тому приймаємо $m = 1$. Тим більш що при прямолінійній залежності буде мати місце гірший випадок, коли прогнозований час наробітку буде трохи меншим, чим при $m = 0{,}935$.

Підставивши $m = 1$ в одне з рівнянь, одержимо

$$A = -0{,}876 \text{ , відкіля } a = 10^{-0{,}876} = 0{,}133$$

Тоді
$$И = 0{,}133 \cdot t \qquad (4.12)$$

З цього виразу можна визначити середній граничний час роботи деталі, задавшись граничною величиною зносу $И_{пр}$

$$\overline{t_{пр}} = \frac{И_{пр}}{0{,}133} \qquad (4.13)$$

Границі довірчого інтервалу визначаємо з виразу

$$\overline{t_{пр}} - t_{qк} \cdot \sigma_{и} t_{пр} < \overline{t_{пр}} + t_{qк} \cdot \sigma_{и} \ ,$$

де $t_{qк}$ - коефіцієнт, що відзеркалює розподіл Стьюдента;

$q = 1 - \beta$ - імовірнісний інтервал (рівень значимості);

$k = N - 2$ - число степенів вільності;

N – число серій вимірів;

$$\sigma_{И} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta И_i^2}{N-1}} \ ;$$

$$\Delta И = И_{Эi} - И_{Тi} \ ;$$

$И_{Эi}$ - експериментальні значення величини зносу для п'яти серій вимірів;

$И_{Тi}$ - теоретичні значення величини зносу для тих же серій вимірів.

На підставі (4.12) одержуємо:

$$И_{Т1} = 133; \quad И_{Т2} = 266; \quad И_{Т3} = 399; \quad И_{Т4} = 532; \quad И_{Т5} = 665 \, мкм.$$

Тоді

$$\sigma_{И} = \sqrt{\frac{(148-133)^2 + (242-266)^2 + (408-399)^2 + (518-532)^2 + (662-665)^2}{5-1}} =$$
$$= 16{,}48 \, мкм.$$

З таблиці Д.2 додатка при $q = 100 - 90 = 10\%$, $k = 5 - 2 = 3$ знаходимо $t_{qk} = 2{,}35$.

Задавшись величиною граничного зносу $И_{пр} = 1200$ мкм, визначаємо середню величину граничного часу:

$$\overline{t_{пр}} = \frac{1200}{0{,}133} = 9022{,}56 \ год.$$

Тоді можна записати

$$9022{,}56 - 2{,}35 \cdot 16{,}48 < t_{пр} < 9022{,}56 + 2{,}35 \cdot 16{,}48$$

чи, округливши числа, остаточно одержимо

$$8980 < t_{пр} < 9060 \ годин.$$

Таким чином, нижня і верхня межі довговічності деталі відповідно складуть:

$$t_H = 8980 \text{ год.}; \quad t_B = 9060 \text{ год.}$$