Лекція 9

2.7 Метод на базі планованого експерименту

2.7.1 Загальні відомості

Цей метод застосовують у тому випадку, якщо на процес зношування впливають два і більше факторів. Метою планування є визначення таких умов і правил проведення експерименту, при яких вдається одержати найбільшу інформацію – надійну і достовірну – з найменшою витратою праці і подати цю інформацію в компактній і зручній для користування формі з кількісною оцінкою її точності.

У багатьох випадках, приступаючи до рішення задачі, дослідник не має вичерпних відомостей про механізм обстежуваного об'єкта, але він може назвати тільки параметри, що визначають умови функціонування даного об'єкта. У таких випадках використовують кібернетичний підхід, в основі якого лежить припущена Н. Вінером ідея «чорної шухляди». «Чорна шухляда» – це об'єкт дослідження (рис. 4.6).

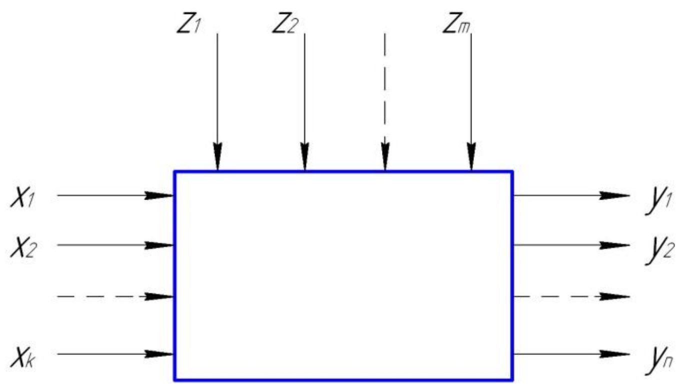


Рисунок 4.6

Стрілками, що входять в об'єкт, показані вхідні параметри, які можуть бути керованими (x) і некерованими (z). Роботу об'єкта характеризують одним чи декількома вхідними параметрами, що на рисунку позначені стрілками, які виходять із прямокутника.

Вхідні параметри прийнято називати факторами, а вихідні – відгуками. Фактор є незалежною перемінною, а відгук – залежною, тобто між відгуком і фактором існує така залежність:

$$У = f(x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad (4.14)$$

яку називають функцією відгуку.

Відгук – це результат дослідження у відповідних умовах. Його також називають функцією мети, критерієм ефективності, параметром оптимізації. Однак у нашому випадку відгук, насамперед, є функцією мети і критерієм ефективності, тому що наше завдання полягає в прогнозуванні довговічності деталей при різних умовах роботи.

Якщо досліджують дію на *У* усього лише однієї незалежної перемінної, то задача досить проста: потрібно, задавшись декількома значеннями *х*, одержати залежність $y = f(x)$ і ціль буде досягнута.

Якщо ж незалежних дві, то задача ускладнюється не сильно: необхідно зняти і побудувати сімейство кривих $y = f(x_1)$ при $x_2 = \text{const}$ і $y = f(x_2)$ при $x_1 = \text{const}$

Задача ускладнюється, якщо незалежних перемінних три і більш. Звичайно, можна побудувати багато кривих, але інформація про функцію $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в такому вигляді буде практично марна.

У найпростішому випадку, коли досліджують залежність відгуку від одного фактора, поверхня відгуку являє собою лінію на площині, тобто в двомірному просторі. У загальному випадку, коли розглядається *k* факторів, рівняння $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ описує поверхню відгуку в $(k+1)$- мірному просторі.

Якщо знання про об'єкт обмежене і математичний опис функції відгуку невідомий, то розглядають не саму функцію, а її розкладання в який-небудь ряд, наприклад, у степіневий ряд:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_k \cdot x_k + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \ldots + b_{k-1,k} \cdot x_{n-1} \cdot x_n + b_{nn} \cdot x_n^2 + \ldots, \qquad (4.15)$$

де $b_0, b_1, b_{12}, b_{k-1,k}, b_{nn}$ - вибіркові коефіцієнти регресії, які можна одержати за результатами експерименту.

На практиці обмежуються кінцевим числом членів розкладання (4.15), апроксимуючи тим самим невідому функцію (4.14) поліномом деякого степіня.

Тому що степінь полінома заздалегідь завбачити не можна, то використовують ідею крокового пошуку, тобто спочатку прагнуть описати досліджуваний об'єкт найпростішою лінійною моделлю. Оцінюють її якість і, якщо вона незадовільна, то збільшують число членів полінома. Цей процес продовжують доти, поки не буде отримана модель, що адекватно описує результати експерименту. Модель адекватна, отже, придатна.

Перевірку адекватності виконують за допомогою критерію Фішера:

$$F = \frac{\Delta S_{ad}^2}{\Delta S_y^2}, \tag{4.16}$$

де ΔS_{ad}^2 - дисперсія адекватності;

ΔS_y^2 - дисперсія, що характеризує похибку експерименту.

Модель вважають адекватною, якщо значення, розраховане за формулою (4.16), не буде перевищувати відповідного табличного при деякому рівні значимості. Звичайно рівень значимості приймають рівним 5...10%.

Разом з тим варто помітити, що планування за такою схемою можливе в тому випадку, якщо витримані відповідні вимоги до функції і факторів. При цьому функція повинна бути неперервною і досить «гладкою» (при прогнозуванні процесу зношування ця умова виконується). Найважливішими вимогами до факторів повинні бути сумісність і некорреляційність.

Сумісність означає, що в середині заданої області визначення практично здійснені будь-які сполучення рівнів усіх розглянутих факторів при збереженні досліджуваного процесу. Якщо, наприклад, досліджуючи вплив питомого тиску на знос ми задамо його величину такою, що порушиться умова міцності об'єкта, то це сполучення факторів буде несумісним.

Вимоги до некорреловання полягає в тому, щоб була можливість змінювати значення кожного з розглянутих факторів незалежно один від іншого. Наприклад, зміна величини питомого тиску в парі тертя не викликає зміни швидкості відносного ковзання в цій парі.

Важливим також є і те, щоб фактори були значимими, тобто впливали на функцію відгуку.

Існують різні види планування (планування на основі факторного експерименту, симплексно- решітчасте планування і симплекс-планування). Ми ж зупинимося на висвітленні факторного експерименту, який може бути повним чи дробовим в залежності від властивостей досліджуваного об'єкта.

На початку експерименту збирають, вивчають і аналізують всі наявні дані про об'єкт. Складають список факторів, задають орієнтовні межі зміни факторів, вибирають параметри оптимізації Далі здійснюють такі операції:

- кодування факторів;
- складання плану-матриці;
- рандомизація дослідів;
- реалізація плану експерименту;
- перевірка відтворюваності досліджень;
- перевірка адекватності лінійної моделі;
- оцінка значимості коефіцієнтів регресії.

2.7.2 Кодування факторів

Кодування факторів здійснюють для переведення натуральних факторів (тиск, швидкість, час і т.д.) у безрозмірні величини, щоб мати можливість побудувати стандартну план-матрицю експерименту.

Для цього насамперед вибирають вихідну область дослідження, тобто задають верхні і нижні межі виміру кожного фактора в ході експерименту $X_{i\max}$, $X_{i\min}$. Тоді задачу кодування зводять до переносу початку координат факторного простору в точку з координатами X_{1cp}, X_{2cp}, …, X_{ncp} (точка 0′, рис. 4.7), де

$$X_{icp} = \frac{X_{i\min} + X_{i\min}}{2}, \qquad (4.17)$$

і вибору для кожного фактора нового масштабу, причому, так, щоб значення $X_{i\min}$ відповідало «-1», а $X_{i\max}$ - «+1».

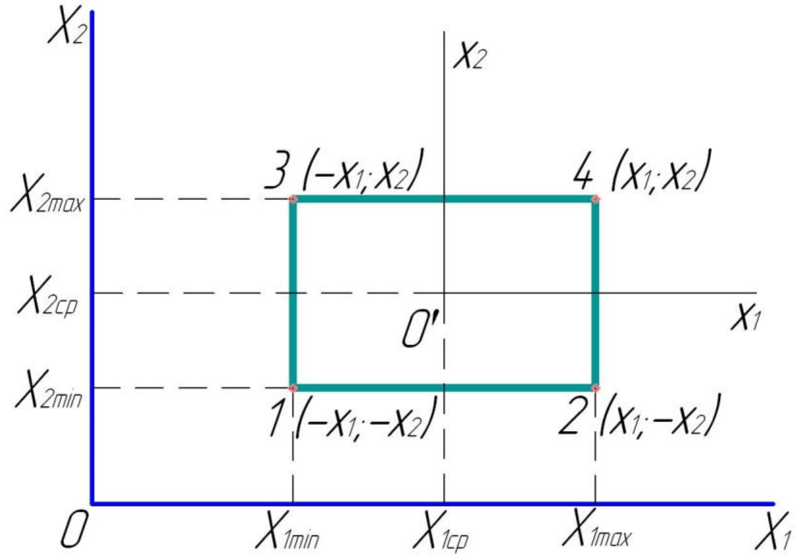


Рисунок 4.7 – Область визначення двох перемінних у дійсних і кодованих значеннях факторів і розташування замірів

Фактори в новому масштабі пов'язані з факторами у вихідному натуральному масштабі (дійсними значеннями) співвідношеннями:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i\,cp}}{X_{i\,cp} - X_{i\,min}} = \frac{X_i - X_{i\,cp}}{X_{i\,max} - X_{i\,cp}} = \frac{2X_i - X_{i\,max} - X_{i\,min}}{X_{i\,max} - X_{i\,min}} \qquad (4.18)$$

Значення $X_{i\,cp} - X_{i\,min} = X_{i\,max} - X_{i\,cp}$ $=\delta$ називають інтервалом варіювання, вибору величини якого приділяють особливу увагу. Його вибирають таким, щоб проявилася значимість кожного з факторів.

Зробивши операцію кодування факторів з урахуванням обраних меж їхньої зміни в експерименті, уникають тим самим можливості ускладнень, пов'язаних з розходженнями в їх розмірностях. Рівняння з використанням кодованих факторів може бути записане у вигляді

$$\begin{aligned} Y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_n \cdot x_n + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \ldots + \\ + b_{n-1,n} \cdot x_{n-1} \cdot x_n + b_{11} \cdot x_n^2 + \ldots + b_{nn} \cdot x_n^2 + \ldots \end{aligned}, \qquad (4.19)$$

чи, якщо застосувати більш короткий запис,

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot x_i^2 + \ldots , \qquad (4.20)$$

При цьому варто врахувати, що коефіцієнти в цих рівняннях будуть інші, ніж у рівнянні (4.15).

Розглянемо процес кодування факторів на прикладі. Нехай маємо: $X_{1\min} = 145$, $X_{1\max} = 215$; $X_{2\min} = 120$, $X_{2\max} = 180$; $X_{3\min} = 15$, $X_{3\max} = 25$.

Тоді крайні межі x_1, x_2, x_3 в кодованому значенні будуть:

$$x_{1\max} = \frac{2 \cdot 215 - 215 - 145}{215 - 145} = +1 \text{ (верхня межа);}$$

$$x_{1\min} = \frac{2 \cdot 145 - 215 - 145}{215 - 145} = -1 \text{ (нижня межа);}$$

$$x_{2\max} = \frac{2 \cdot 180 - 180 - 120}{180 - 120} = +1 \text{ (верхня межа);}$$

$$x_{2\min} = \frac{2 \cdot 120 - 180 - 120}{180 - 120} = -1 \text{ (нижня межа);}$$

$$x_{3\max} = \frac{2 \cdot 25 - 25 - 15}{25 - 15} = +1 \text{ (верхня межа);}$$

$$x_{3\min} = \frac{2 \cdot 15 - 25 - 15}{25 - 15} = -1 \text{ (нижня межа).}$$

На рис. 4.8 представлена область експериментування в кодованому позначенні для 3-х факторного експерименту відповідно до наведеного приклада. Цифрами 1...8 показано сполучення факторів, яке має прийматись при виконанні експерименту. Наприклад, у точці 1 зазначено, що експеримент має бути проведеним при нижніх межах усіх факторів x_1, x_2, x_3, а в точці, наприклад, 8 – при верхніх межах усіх факторів x_1, x_2, x_3.

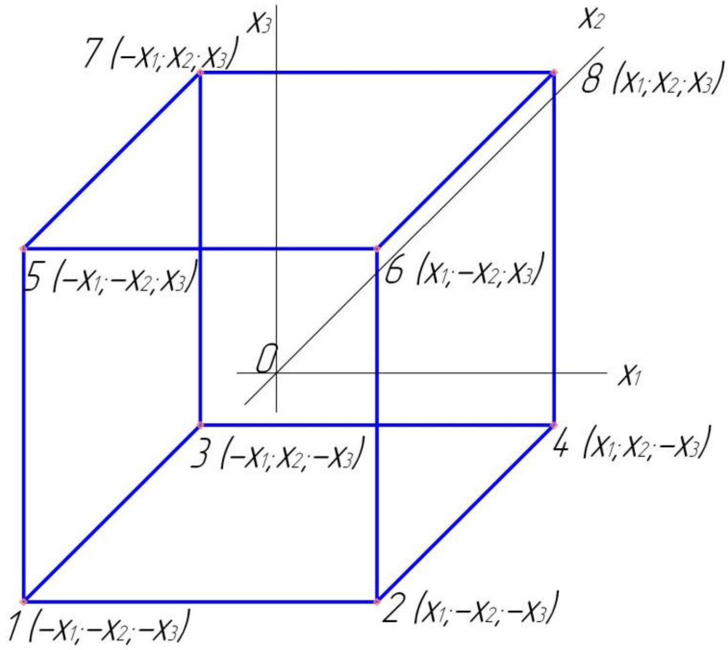


Рисунок 4.8 – Розташування замірів експерименту типу 2^3 у системі координат кодових перемінних

2.7.3 Складання плану-матриці

Якщо експеримент зводять до оптимізації, тобто вибирають область оптимуму, то визначальною задачею є вибір напрямку руху до цієї області. Тому тут обмежуються тільки першими членами рівняння (4.20), тобто його лінійною частиною. Можна обмежуватися лінійною частиною рівняння в тому випадку, якщо процес підкоряється лінійному закону. У цьому випадку для визначення коефіцієнтів може бути застосований метод найменших квадратів. Особливо ефективне застосування цього методу при одному факторі. Якщо ж факторів декілька, чи приходиться вводити в рівняння члени в квадраті, то обчислення коефіцієнтів ускладнюється, а в деяких випадках це може стати взагалі неможливим. Тоді може допомогти матрична алгебра, що дозволяє упорядкувати, і певною мірою формалізувати запис формул для коефіцієнтів при великому числі перемінних параметрів. У даному випадку вона дозволяє не тільки дати рішення, але і підкаже, як раціонально розташувати точки експерименту, за якими будуть обчислюватися коефіцієнти b.

Рівняння (4.20) для 3-х факторного експерименту перетворимо до більш зручної форми, прийнявши такі позначення:

$$x_0 = 1;$$

$$x_4 = x_1 \cdot x_2; \qquad b_4 = b_{12};$$

$$x_5 = x_2 \cdot x_5; \qquad b_5 = b_{23};$$

$$x_6 = x_1^2; \qquad b_6 = b_{11};$$

$$x_7 = x_2^2; \qquad b_7 = b_{22};$$

$$x_8 = x_3^2; \qquad b_8 = b_{33}.$$

Тоді

$$Y = b_0 \cdot x_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_5 \cdot x_5 + b_6 \cdot x_6 + b_7 \cdot x_7 + b_8 \cdot x_8. \qquad (4.21)$$

Такі перетворення можна виконати при будь-якому числі факторів і членів степіневого ряду.

Для визначення коефіцієнтів перейдемо до матричного запису рівняння, виходячи з умови

$$\sum_{u=1}^{N} x_{i_u} \cdot x_{j_u} = \sum_{u=1}^{N} x_{j_u} \cdot x_{i_u} = 0, \qquad (4.22)$$

де i, j – номера різних стовпців у матрицях x.

З цієї умови випливає, що будь-який добуток двох різних стовпців у матриці має дорівнювати нулю, а саму матрицю планування складають таким чином:

$$x = \begin{array}{c|c|cccccccc|c|}
 & i & 0 & 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & m & \\
u & & & & & \ldots & & \ldots & & \\
1 & & 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{i1} & \ldots & x_{m1} & \\
2 & & 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{i2} & \ldots & x_{m2} & \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
u & & 1 & x_{1u} & x_{2u} & \ldots & x_{iu} & \ldots & x_{mu} & \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
N & & 1 & x_{1N} & x_{2N} & \ldots & x_{iN} & \ldots & x_{mN} &
\end{array} \qquad (4.23)$$

Перший стовпець матриці складається з одиниць, оскільки використовуються кодовані значення факторів і $x_{0u} = 1$. Із співвідношення (4.22), якщо прийняти $i = 0$, виходить, що

$$\sum_{u=1}^{n} x_{0u} \cdot x_{j_u} = \sum_{u=1}^{n} x_{j_u} = 0 \ . \qquad (4.24)$$

Сума елементів будь-якого стовпця (крім першого) повинна дорівнювати нулю. Це правило використовують при побудові плану експерименту. Якщо кожний з *n* факторів варіюється на двох рівнях (-1 і +1), то повне число всіх можливих сполучень рівнів (чи число різних досвідів *N*) складе:

$$N = 2^n \qquad (4.25)$$

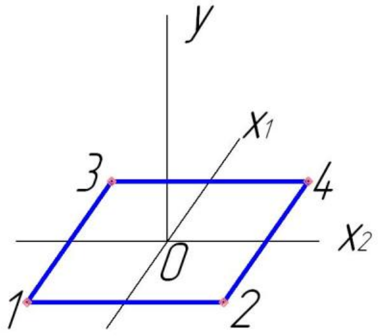
План, побудований таким чином, називають повним факторним експериментом (ПФЭ) типу 2^n.

З урахуванням цього правила на базі матриці (4.23) побудовані плани для конкретних випадків при $n = 2$ і $n = 3$ (рис. 4.9).

Число рядків у матриці планування при $n = 2$ буде $2^2 = 4$. Число стовпців відповідає числу членів у рівнянні. Нумерують рядки ($u = 1$,…,4)і стовпці ($i = 0$, 1, …, 5), підписуючи одночасно під кожним з них позначення факторів. У перший стовпець $(i = 0)$ вписують всі одиниці з плюсом, тому що $x_{0u} = 1$. В другому стовпці (*i*=0), починаючи з «-1», чергують знаки в одиниці, так щоб сума стовпця дорівнювала нулю. Третій стовпець також починається з «-1», але так, щоб вийшли всі можливі сполучення рівнів у чотирьох вимірах. Тут знаки вже чергуються через два, тобто «-1», «-1», «+1», «+1». У сумі також виходить нуль, і мають місце всі сполучення факторів: -1; -1; +1; -1; +1; +1; +1. Останні два стовпці з перших трьох утворять план експерименту. Наступний стовпець $i = 3$ заповнюють автоматично шляхом перемножування знаків у двох попередніх стовпцях. Стовпці $i = 4$ і $i = 5$ складають тільки з «+1», тому що $x_1^2 = 1$ і $x_2^2 = 1$. Для скорочення і спрощення запису всі одиниці зі знаками «+» і «-» позначають відповідно символами «+» і «-». План, що показує якими варто вибирати величини x_i при замірах (верхня і нижня межі), виділений на малюнку рамками. Стовпці, не виділені рамкою, носять допоміжний характер і їх використовують при розрахунках коефіцієнтів апроксимуючого полінома.

Поруч з таблицями на рис. 4.9 показані геометричні образи планів. Усі точки на образах позначені цифрами, що відповідають номерам рядків у таблицях. З рисунків видно, що точки планів розташовуються на вершинах квадрата, чи куба, у загальному випадку, гіперкуба, побудованого на координатних осях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ симетрично щодо центра $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n = 0\right)$.

i	0	1	2	3	4	5
	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 \cdot x_2$	$x_4 = x_1^2$	$x_5 = x_2^2$
u						
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1



a

i	0	1	2	3	4	5	6	7
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1 \cdot x_2$	$x_5 = x_1 \cdot x_3$	$x_6 = x_2 \cdot x_3$	$x_7 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
u								
1	+	-	-	-	+	+	+	-
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	+	-	+	-	-	-
5	+	-	-	+	+	-	-	+
6	+	+	-	+	-	+	-	-
7	+	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+

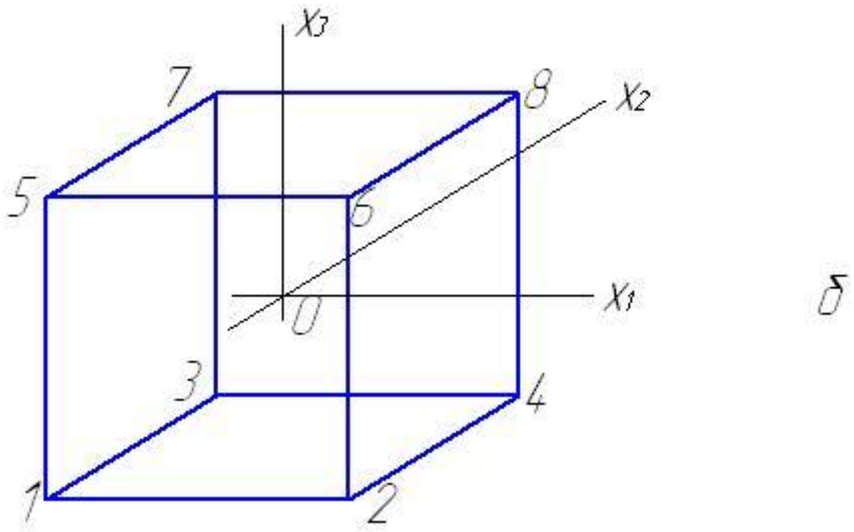


Рисунок 4.9 – Матриці планування і геометрична інтерпретація для планів ПФЕ 2^2 (а) і ПФЕ 2^3 (б).

2.7.4 Рандомізація експерименту

Цифри на вершинах квадрата чи куба не означають порядок постановки вимірів, а лише вказують на сполучення факторів, що має здійснюватися при постановці експерименту для кожної точки (1...4…4 чи 1...8…8). Якщо ж взяти план експерименту, то перший вимір можна привести для будь-якого рядка. Тим більше, що практикою доведено, що довільний вибір рядка дозволяє виключити вплив неврахованих і невідомих досліднику факторів. Тому варто внести в експеримент елемент випадковості впливу цих факторів, щоб можна було обґрунтовано використовувати апарат математичної статистики. Установлення випадкового порядку постановки експерименту в часі називають рандомізацією. Для здійснення рандомізації користаються таблицями випадкових чисел, витягом номерів і т.п.

2.7.5 Реалізація плану експерименту

Розглянемо процес реалізації плану експерименту на конкретному прикладі. Зокрема, розглянемо вплив питомого тиску, швидкості ковзання і часу роботи на величину зносу контактуючої пари. На підставі попереднього вивчення досліджуваного об'єкта приймаємо:

	Питомий тиск *P*, МПа	Швидкість ковзання *V*, м/с	Час t, година
Верхній рівень	100	1,5	9000
Нижній рівень	40	0,5	1000
Середнє значення	70	1,0	5000

З представлених даних виходить, що ми вивчаємо області впливу факторів у межах: питомий тиск – від 40 до 100 МПа, швидкість ковзання – від 0,5 до 1,5 м/с і час – від 1000 до 9000 годин. Рандомізація дозволила установити таку послідовність вимірів: 8; 2; 4; 1; 7; 3; 5; 6; 8; 5; 4; 1; 6; 3; 2; 7. Таким чином, у цій послідовності кожне сполучення рівнів факторів зустрічається двічі, так вимір *У* прийнято робити не менш двох разів для підвищення надійності експерименту і можливості виконання перевірки на відтворюваність досліду.

1) $x_1 = 100, x_2 = 1{,}5, x_3 = 9000;$

2) $x_1 = 100, x_2 = 0{,}5, x_3 = 1000;$

3) $x_1 = 100, x_2 = 1{,}5, x_3 = 1000;$

4) $x_1 = 40, x_2 = 0{,}5, x_3 = 1000;$

5) $x_1 = 40, x_2 = 1{,}5, x_3 = 9000;$

6) $x_1 = 40, x_2 = 1{,}5, x_3 = 1000;$

7) $x_1 = 40, x_2 = 0{,}5, x_3 = 9000;$

8) $x_1 = 100, x_2 = 0{,}5, x_3 = 9000;$

9) $x_1 = 100, x_2 = 1{,}5, x_3 = 9000;$

10) $x_1 = 40, x_2 = 0{,}5, x_3 = 9000;$

11) $x_1 = 100, x_2 = 1{,}5, x_3 = 1000;$

12) $x_1 = 40, x_2 = 0{,}5, x_3 = 1000;$

13) $x_1 = 100, x_2 = 0{,}5, x_3 = 9000;$

14) $x_1 = 40, x_2 = 1{,}5, x_3 = 1000;$

15) $x_1 = 100, x_2 = 0{,}5, x_3 = 1000;$

16) $x_1 = 40, x_2 = 1{,}5, x_3 = 9000;$

Реалізація плану експерименту представлена в табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Результати вимірів

№ досліду за планом	x_1	x_2	x_3	y_{u1}	y_{u2}	$\overline{y_u} = \frac{y_{u1} + y_{u2}}{2}$
1	-	-	-	31	21	26
2	+	-	-	59	65	62
3	-	+	-	82	74	78
4	+	+	-	192	180	186
5	-	-	+	219	223	221
6	+	-	+	541	535	538
7	-	+	+	640	646	643
8	+	+	+	1612	1614	1613

2.7.6 Перевірка відтворюваності експерименту

При однаковому числі дослідів на кожнім сполученні рівнів факторів відтворюваність процесу перевіряють за критерієм Кокрена (таблиця додатка Д. 4.3).

$$G = \frac{\Delta S^2_{и\max}}{\sum_{u=1}^{n} \Delta S^2_{и}} \le G\left(0{,}05; f_n; f_y\right), \qquad (4.26)$$

де $\Delta S^2_u = \frac{\sum_{P=1}^{m}\left(y_{up} - \overline{y_u}\right)^2}{m-1}$ - дисперсія, що характеризує розсіювання результатів дослідів на *и-м* сполученні рівнів факторів;

$P = 1,2,\ldots,m$ - число рівнобіжних дослідів;

$\Delta S^2_{u\max}$ - найбільша з дисперсій у рядках плану;

$G\left(0{,}05; f_n; f_y\right)$ - табличні значення критерію Кокрена при 5%-вому рівні значимості, що достатній для інженерних експериментів;

$f_n = n$ - число незалежних оцінок операцій;

$f_y = m - 1$ - число степеня вільності кожної оцінки.

Процес вважають відтвореним, якщо виконується умова, тобто нерівність (4.26). При цьому дисперсію відтворюваності (похибка досвіду) визначають за формулою:

$$\Delta S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n} \Delta S_u}{n} . \qquad (4.27)$$

Якщо ж нерівність (4.26) не виконується, то необхідно уточнити виміри в досліді з максимальними відхиленнями.

У нашому випадку виконано по два виміри величини y_u. Тому значення оцінок дисперсії в кожній точці плану буде визначатись за формулою:

$$\Delta S_u^2 = \frac{\Delta^2}{2} ,$$

де Δ – різниця між рівнобіжними дослідами.

У результаті обчислень одержимо:

$$\Delta S_1^2 = \frac{(31-21)^2}{2} = 50 \ ; \ \Delta S_2^2 = \frac{(59-65)^2}{2} = 18; \ \Delta S_3^2 = \frac{(82-74)^2}{2} = 32;$$

$$\Delta S_4^2 = 72 \ ; \ \Delta S_5^2 = 8; \ \Delta S_6^2 = 18; \ \Delta S_7^2 = 18; \ \Delta S_8^2 = 2 .$$

За формулою (4.26) визначаємо коефіцієнт Кокрена:

$$G = \frac{72}{50+18+32+8+18+18+2} = 0{,}493 .$$

З таблиці Д. 4.3 при $f_n = 8$ і $f_y = 1$ знаходимо табличне значення, рівне $G = 0{,}6798$. Таким чином, процес можна вважати відтвореним, тому що розрахункова величина критерію Кокрена менше табличної й умова (4.26) витримується.

Дисперсія відтворюваності (похибка досліду) складає:

$$\Delta S_y^2 = \frac{50+18+32+72+8+18+18+2}{8} = \frac{218}{8} = 27{,}25$$

Установивши, що процес відтворюється, можна приступити до визначення коефіцієнтів рівняння. На підставі методу найменших квадратів можна записати, що

$$в_i = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot y_u}{N} .$$

Для нашого конкретного випадку вирази для визначення коефіцієнтів будуть мати вигляд:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{n} \overline{y_u}}{n};\ b_i = \frac{\sum_{u=1}^{n} x_{iu} \cdot \overline{y_u}}{n};\ b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{n} x_{iu} \cdot x_{ij} \cdot \overline{y_u}}{n} . \qquad (4.28)$$

За математичну модель, що описує процес зношування обстежуваного об'єкта, приймаємо рівняння

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_1 \cdot x_2 + b_5 \cdot x_1 \cdot x_3 + b_6 \cdot x_2 \cdot x_3 + b_7 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Таким чином, нам необхідно визначити вісім коефіцієнтів: $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$.

Спираючись на матрицю планування (рис. 4.9), одержуємо:

$$b_0 = \frac{26 + 62 + 78 + 186 + 221 + 538 + 643 + 1613}{8} = \frac{3367}{8} = 420{,}875;$$

$$b_1 = \frac{-26 + 62 - 78 + 186 - 221 + 538 - 643 + 1613}{8} = \frac{1431}{8} = 178{,}875;$$

$$b_2 = \frac{-26 - 62 + 78 + 186 - 221 - 538 + 643 + 1613}{8} = 209{,}125;$$

$$b_3 = \frac{-26 - 62 - 78 - 186 - 221 + 538 + 643 + 1613}{8} = 332{,}875;$$

$$b_4 = \frac{26 - 62 - 78 + 186 + 221 - 538 - 643 + 1613}{8} = 90{,}625;$$

$$b_5 = \frac{26 - 62 + 78 - 186 - 221 + 538 - 643 + 1613}{8} = \frac{1143}{8} = 142{,}875;$$

$$b_6 = \frac{26 + 62 - 78 - 186 - 221 - 538 + 643 + 1613}{8} = 165{,}125;$$

$$b_7 = \frac{-26 + 62 + 78 - 186 + 221 - 538 - 643 + 1613}{8} = 72{,}625.$$

Після визначення чисельних значень коефіцієнтів доцільно зробити перевірку значимості, тому що виключення незначущих коефіцієнтів дозволить прийняти більш просту форму рівняння і, отже, зменшити обсяг обчислень.

Оцінку значимості коефіцієнтів рівняння здійснюють за критерієм Стьюдента. Коефіцієнт вважається значимим, якщо виконується нерівність

$$|b_i| \geq \Delta b_i = t(0{,}05; f_y) \cdot \frac{\sqrt{\Delta S_y^2}}{\sqrt{n}} \ ,$$

де $t(0{,}05; f_y)$ - 5% точка розподілу Стьюдента, що відповідає $\beta = 0{,}95$, з *f* степінями вільності (таблиця Д. 4.2 додатка).

Для нашого випадку

$$\Delta b_i = 2{,}36 \frac{\sqrt{27{,}25}}{\sqrt{8}} = 4{,}356 \ .$$

З отриманих значень коефіцієнтів видно, що вони істотно перевищують величину Δb_i. Таким чином, можна з великою вірогідністю вважати всі коефіцієнти значимими і виключення хоча б одного з них приведе до значних погрішностей обчислень. Тому остаточно приймаємо математичну модель з повним складом коефіцієнтів, однак зробивши їхнє округлення до цілих величин. Тоді рівняння в окремому випадку отримає вигляд:

$$\begin{aligned} y_u = 420 + 178 \cdot x_1 + 210 \cdot x_2 + 332 \cdot x_3 + 90 \cdot x_1 \cdot x_2 + \\ + 142 \cdot x_1 \cdot x_3 + 165 \cdot x_2 \cdot x_3 + 72 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3. \end{aligned} \qquad (4.29)$$

2.7.7 Перевірка адекватності отриманої моделі

Адекватність моделі означає її придатність до подальшого використання і виконується за допомогою критерію Фішера. Адекватність буде забезпечена при дотриманні умови:

$$F = \frac{\Delta S_{ад}^2}{\Delta S_y^2} \le F(0{,}05; f_{ад}; f_y), \qquad (4.30)$$

де $\Delta S_{ад}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n}(\overline{y_u} - y_u)^2}{n-k-1}$ - розрахункове значення відгуку в *і-тім* досліді;

$f_{ад} = f - k - 1$ - число степінів вільності дисперсії експерименту;

f_y - число степінів вільності дисперсної відтворюваності.

На підставі рівняння (4.29) визначаємо відгук y_{ui} для кожного досліду, керуючись при цьому знаками рядків матриці експерименту.

$$y_{1u} = 420 + 178\cdot(-1) + 210\cdot(-1) + 332\cdot(-1) + 90\cdot 1 + 142\cdot 1 + \\ +165\cdot 1 + 72\cdot(-1) = 25;$$

$$y_{2u} = 420 + 178\cdot 1 + 210\cdot(-1) + 332\cdot(-1) + 90\cdot(-1) + 142\cdot(-1) + \\ +165\cdot 1 + 72\cdot 1 = 61;$$

$$y_{3u} = 420 + 178\cdot(-1) + 210\cdot 1 + 332\cdot(-1) + 90\cdot(-1) + 142\cdot 1 + \\ +165\cdot(-1) + 72\cdot 1 = 79;$$

$$y_{4u} = 420 + 178\cdot 1 + 210\cdot 1 + 332\cdot(-1) + 90\cdot 1 + 142\cdot(-1) + \\ +165\cdot(-1) + 72\cdot(-1) = 187;$$

$$y_{5u} = 420 + 178\cdot(-1) + 210\cdot(-1) + 332\cdot 1 + 90\cdot 1 + 142\cdot(-1) + \\ +165\cdot(-1) + 72\cdot 1 = 219;$$

$$y_{6u} = 420 + 178\cdot 1 + 210\cdot(-1) + 332\cdot 1 + 90\cdot(-1) + 142\cdot 1 + \\ +165\cdot(-1) + 72\cdot(-1) = 535;$$

$$y_{7u} = 420 + 178\cdot(-1) + 210\cdot 1 + 332\cdot 1 + 90\cdot(-1) + 142\cdot(-1) + \\ +165\cdot 1 + 72\cdot(-1) = 645;$$

$$y_{8u} = 420 + 178\cdot 1 + 210\cdot 1 + 332\cdot 1 + 90\cdot 1 + 142\cdot 1 + \\ +165\cdot 1 + 72\cdot 1 = 1609$$

Тоді

$$\Delta S^2_{ад} = \frac{(26-25)^2 + (62-61)^2 + (78-79)^2 + (186-187)^2 + (221-219)^2}{8-3-1} +$$

$$+\frac{(538-535)^2 + (643-645)^2 + (1613-1609)^2}{8-3-1} = 9{,}25.$$

Критерій Фішера для цього випадку складе відповідно до (4.30) при $\Delta S^2_{y} = 27{,}25$

$$F = \frac{9{,}25}{27{,}25} = 0{,}34\ .$$

З таблиці критеріїв Фішера (таблиця Д. 4.4 додатка) при 5% рівні значимості, $f_{a_u} = 4$ і $f_y = 8$ знаходимо відповідне значення

$$F(0{,}05;4;8) = 3{,}838$$

Тому що має місце умова

$$F = 0{,}34 < F(0{,}05;4;8) = 3{,}838\ ,$$

то отриману математичну модель можна вважати адекватною.

Приведена методика постановки й обробки експерименту може бути застосована при дослідженні впливу на довговічність деталей і інших факторів (абразивного середовища, інтенсивності змащення, поверхневих характеристик контактуючих пар і т.д.). У той же час при кодованих факторах досить складно здійснювати прогнозування часу наробітку деталей при введенні постійних факторів. Тому вкрай важливо побудувати модель на основі натуральних факторів.

Контрольні запитання

1. Складовою частиною якої теорії є теорія прогнозування?
2. В чому різниця між прямим та зворотнім прогнозуванням?
3. Наведіть класифікацію основних видів зношування?
4. Назвіть найбільш розповсюджені методи виміру зносу?
5. Як класифікують методи прогнозування за критерієм зносу?
6. У якому вигляді подають залежність зносу по методу Міхліна-Волкова?
7. Навіщо, при використанні методу найменших квадратів, обчислюють середньоквадратичне відхилення?
8. В чому перевага методу прогнозування на базі планованого експерименту?
9. З якою метою кодують фактори експерименту?
10. З якою метою виконують перевірку адекватності моделі?