Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

М. І. Клименко, Є. В. Панасенко, І. Г. Ткаченко

# МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Конспект лекцій
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 4
від 28. 11. 2023 р.

Запоріжжя
2023

УДК 330.4 ( 075.8)
К 492.

Клименко М. І., Панасенко Є. В., Ткаченко І. Г. Математична економіка : конспект лекцій для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2023. 114 с.

Конспект лекцій спрямований на засвоєння студентами теоретичними основами математичної економіки та методами її застосування у наукових та прикладних досліджень економічних систем різних рівнів.

У навчальному виданні надано стислий та доступний виклад основних понять та методів сучасної математичної економіки, відповідно до робочої програми цієї дисципліни. У кінці кожної лекції наведено достатню кількість питань та завдань з матеріалу лекції для самопідготовки студентів, що спрямовані на успішне оволодіння студентами основами математичної економіки.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика».

Рецензент

*О. В. Кудін*, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск

*С.М. Гребенюк*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Математична економіка є важливою математичною дисципліною, у межах якої здійснюється кількісна оцінка економічних процесів, що відбуваються у межах деякої економічної системи. Ця наука орієнтована на системне вивчення економіки на різних рівнях з допомогою апарату математичного моделювання. Об'єктом дослідження тут є різноманітні економічні системи, предмет дослідження – математичні моделі реальних економічних об'єктів. Під економічною системою далі будемо розуміти сукупність взаємопов'язаних елементів, у межах якої здійснюються процеси виробництва, обміну, розподілу, споживання матеріальних та інших благ. Економічні системи відносять до кібернетичних, тобто керованих систем.

Метою викладання навчальної дисципліни «Математична економіка» є оволодіння студентами науковими основами та методикою математичного моделювання економічних систем та процесів. Основними завданнями вивчення дисципліни «Математична економіка» є формування у студентів уявлення про задачі розробки економіко-математичних моделей, надання їм знань про особливості застосування математичних моделей у економічних дослідженнях на мікро- та макрорівнях, навчання студентів ефективного застосування апарату сучасного економіко-математичного моделювання до розв'язання прикладних економічних задач; створення бази для подальшого вивчення курсів математичного моделювання та дослідження операцій.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати**:** предмет, об'єкт дослідження, основні принципи побудови моделей математичної економіки, сутність балансових економічних моделей, призначення і методику побудови та аналізу виробничих функцій, будувати та досліджувати моделі поведінки споживачів, моделі економічної динаміки з дискретним та неперервним часом.

До основних вмінь, які студент повинен набути в результаті вивчення курсу «Математична економіка», слід віднести вміння будувати та аналізувати математичні моделі економічних об'єктів та процесів у мікро- та макроекономіці, моделювати процес виробництва за допомогою виробничих функцій, використовувати їх для розв'язання практичних задач управління виробництвом, використовувати середні та граничні величини для економічного планування, застосовувати диференціальні та різницеві моделі економічних процесів для практичних економічних досліджень.

Мета та завдання курсу «Математична економіка» визначають зміст даного навчально-методичного видання – конспекту лекцій. У ньому розглянуто наступні основні теми: виробничі функції, оптимізація виробничих витрат, теорія діяльності комерційного підприємства, моделі виробничої діяльності за різних типів конкуренції, теорія споживчого вибору, статична та динамічна модель міжгалузевого балансу, динамічні моделі математичної економіки, моделі аналізу, прогнозування та регулювання економіки. Таким чином, висвітлено основні види методів та моделей математичної економіки.

У посібнику наведено короткий виклад лекційного матеріалу курсу, наведено питання для самопідготовки та завдання за розділами курсу.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких результатів навчання та компетентностей: розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленими задачами та відомими моделями, розвиток математичної інтуїції, формування математичної культури мислення, здатність створювати математичну модель об'єкта дослідження та здійснювати її верифікацію, здатність формулювати складні задачі оптимізації та інтерпретувати їхні розв'язки у практичному контексті цих задач, здатність визначати межі припустимого використання економіко-математичних моделей.

Основою для вивчення дисципліни «Математична економіка» є оволодіння студентами дисциплінами «Диференціальні рівняння», «Лінійна алгебра» та «Математичний аналіз». Вивчення цієї дисципліни формує основу для вивчення дисциплін «Дослідження операцій та математична економіка», «Математичне моделювання».

## Розділ 1. Предмет та сутність математичної економіки

### Лекція 1. Предмет, задачі та генезис математичної економіки

**Мета лекції:** визначити предмет та задачі математичної економіки, надати характеристику її становлення як науки.

**План**

1. Предмет та задачі математичної економіки.
2. Сутність та призначення економіко-математичного моделювання.
3. Розвиток математичної економіки як науки.

**Ключові терміни та поняття:** математична економіка, модель, економіко-математична модель, детермінована модель, стохастична модель, оптимізаційна модель, адекватність моделі.

#### 1.1 Предмет та задачі математичної економіки

У економіці діють стійкі кількісні закономірності, тому є можливим їх строге математичне описання. *Об'єктом дослідження* математичної економіки є різноманітні економічні системи. *Предмет* математичної економіки – математичні моделі реальних економічних об'єктів. Об'єкт дослідження та предмет математичної економіки визначають *методи наукового дослідження* математичної економіки. Основні її методи – це економіко-математичне моделювання та системний аналіз економіки як складної динамічної системи. Моделювання – це універсальний спосіб вивчення процесів та явищ реального світу. Особливе значення моделювання має при вивченні об'єктів, що повністю чи частково недоступних для прямого спостереження та дослідження. До таких об'єктів відносяться і соціально-економічні явища та процеси. До задач управління економічними системами, в яких ефективно застосовують математичні методи та моделі, відносять задачі аналізу результатів господарської діяльності, прогнозування, планування, проектування виробництва та підготовки управлінських рішень [1].

*Модель* – це об'єкт, який у дослідженні заміняє оригінал, відтворює найбільш важливі для даного дослідження риси та властивості оригіналу. Математична модель є сукупністю математичних співвідношень, здебільшого рівнянь та нерівностей.

Сучасна економічна теорія на мікро-та на макрорівні включає як природний необхідний елемент математичні моделі економічних процесів та систем. Використання математики у економіці дозволяє виділити та описати найважливіші зв'язки між економічними змінними та об'єктами. Вивчення такого складного об'єкта як економічної системи передбачає високий рівень узагальнення, що досягається шляхом використання математичного апарату. Застосування математичного апарату передбачає чітко сформульовані вихідні дані та співвідношення, з яких можна отримати висновки, адекватні об'єкту дослідження. Використання математичних та статистичних методів дозволяє індуктивним методом отримувати нові знання про об'єкт дослідження, оцінювати форму та параметри залежностей його змінних, що відповідають наявним спостереженням. Використання мови математики дозволяє точно та компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття та висновки [2].

Будь-яке економічне дослідження завжди передбачає об'єднання економічної теорії (наявних економічних моделей) та практики (статистичних даних). Дослідники використовують теоретичні економічні моделі для описання та пояснення процесів, що спостерігаються, а також збирають статистичні дані. На їх основі здійснюють емпіричну побудову математичних моделей, що кількісно відображають сутність економічних моделей (гіпотез) та їх обґрунтовують. Для вивчення різних економічних явищ фахівці з економіки використовують їх спрощені формальні описання, тобто економічні моделі. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного зростання, моделі рівноваги для товарних та фінансових ринків та інші концептуальні моделі економічних процесів, що є основою для побудови їх математичних моделей. У процесі побудови економічної моделі визначають суттєві фактори, що визначають поведінку об'єкта дослідження та відкидають несуттєві елементи для розв'язання поставлених проблем. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки певного впливу на них та використати ці оцінки в керуванні цими об'єктами.

Математичну економіку можна визначити як розділ економічної науки, що займається аналізом властивостей та розв'язків математичних моделей економічних процесів [2]. У деяких випадках ці моделі розглядаються як частина математичної теорії на стику з економічною наукою. Основу для побудови математичних моделей, які вивчає математична економіка, створює економетрика, що займається статистичною оцінкою та аналізом залежностей між економічними величинами на основі вивчення емпіричних даних. Економетрика досліджує кількісні закономірності та взаємозв'язки у економіці за допомогою методів математичної статистики, зокрема, кореляційно-регресійного аналізу.

У математичній економіці досліджуються теоретичні моделі, що ґрунтуються на певних формальних передумовах (лінійність, опуклість, монотонність, конкретні форми взаємозв'язку тощо). Математична економіка не займається вивченням рівня обґрунтованості вигляду певної залежності, це завдання економетрики [1]. Задачею математичної економіки є вивчення питання про існування розв'язку математичної моделі, умови його невід'ємності, стаціонарності, наявності інших властивостей. Це, звичайно, здійснюється, як і у математиці, шляхом дедуктивного отримання наслідків у вигляді теорем з апріорно зроблених передумов (аксіом).

Методологія та апарат сучасної економічної науки не вичерпуються підходами математичної економіки та економетрики, звичайно в економічних дослідженнях використовуються також методи якісного аналізу, індуктивні евристичні підходи, що поєднуються з методами математичної економіки та економетрики. Таким чином, математична економіка є одночасно і самостійним розділом економічної науки, і її інструментом. При цьому розділи математичної економіки, все в більшою мірою становляться теоретичною основою для прикладних досліджень.

## 1.2 Сутність та призначення економіко-математичного моделювання

*Економіко-математична модель* – це математичний опис економічного об'єкту чи процесу з метою дослідження та керування [2]. У співвідношеннях, що утворюють математичну модель, зокрема економіко-математичну модель, розрізняють два типи змінних: екзогенні та ендогенні. *Екзогенні змінні* визначаються поза моделлю, а *ендогенні змінні* визначають у ході розрахунків за моделлю [1]. Математичні моделі різних об'єктів можуть мати однакову математичну структуру, але різні змістовні інтерпретації, тобто одну й ту ж математичну модель можна використати для дослідження різних об'єктів.

Поряд з експериментом, математичне моделювання є основним способом дослідження. Активне застосування математичного моделювання у математичній економіці обумовлене наступними причинами [2]:

- неможливість здійснення експериментів у більшості випадках;
- значні витрати на проведення експериментів;
- ускладнення типів задач, що розв'язуються у ході досліджень;
- скорочення термінів дослідження та отримання результатів;
- можливість багаторазового повторення дослідження на математичній моделі.

З точки зору зміни стану системи у часі розрізняють динамічні та статичні моделі. У *статичних моделях* розглядають стан системи у конкретний момент часу і змінні характеристики моделі не залежать від часу. В *динамічних моделях* вони є функціями часу.

З точки зору врахування випадкових факторів розрізняють детерміновані та стохастичні моделі. *Детерміновані моделі* передбачають наявність жорстких функціональних зв'язків між змінними моделі. *Стохастичні моделі* допускають наявність дії випадкових факторів на систему – об'єкт дослідження. Вони використовують для моделювання системи апарат теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів. За виглядом співвідношень між змінними розрізняють *лінійні* та *нелінійні* моделі.

*Оптимізаційні моделі* передбачають побудову цільової функції, що відображає результати функціонування системи та подальше дослідження її на екстремум з врахуванням обмежень на систему.

За методами аналізу моделі розрізняють моделі, що досліджуються аналітично та чисельно. Результатом аналітичного дослідження є отримання формул, що задають шукані величини у явному вигляді, тут можуть бути також отримані висновки про стійкість розв'язку, наявність у нього особливих точок, його асимптотику тощо. У більшості реальних випадків математичну модель неможливо звести до вигляду, для якого можливо отримати аналітичний розв'язок за умови збереження адекватності моделі. Тому для дослідження моделі використовують чисельні методи. Проблемами при використанні чисельного аналізу можуть бути некоректність або нестійкість побудованої математичної моделі. У некоректно поставленої задачі відсутній єдиний розв'язок (його немає або розв'язків декілька). Нестійкість моделі означає, що малі похибки у визначенні її вихідних даних спричиняють великі відхилення у отриманих результатах. У таких випадках застосування чисельних методів здебільшого не має сенсу.

До основних властивостей математичних моделей відносять їх скінченність, спрощеність, наближеність, повноту, адекватність та істинність [3].

*Скінченність моделі* означає, що вона відображає лише деякі з характеристик, притаманних оригіналу. Вона обумовлена обмеженістю часу, потрібного для розробки та аналізу моделі.

*Спрощеність моделі* означає, що при її побудові були відкинуті характеристики оригіналу, несуттєві для дослідника.

*Наближеність* означає, що модель лише наближено відображає характеристики системи та співвідношення у ній. Типовими прикладами наближень, що використовуються при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервними та навпаки, заміна нелінійних залежностей лінійними, установлення обмежень на точність обчислення результатів тощо. З скінченності та наближеності моделі випливає, що вона відображає оригінал неповно. Ступінь *повноти моделі* залежить від мети та задач моделювання.

*Адекватність моделі* характеризує можливість реалізації мети моделювання, а її і*стинність* відображає відповідність моделі існуючим знанням про об'єкт моделювання. Критеріями адекватності є відображення всіх суттєвих властивостей об'єкта дослідження, вірне відображення існуючих взаємозв'язків між окремими елементами складної системи. При кількісному дослідженні показником адекватності моделі є величина відхилення результатів моделювання від існуючих емпіричних даних. Істинність моделі не є гарантією її адекватності. Це може бути обумовлено накопиченням обчислювальних похибок при розрахунках по моделі. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Прикладом є регресійні моделі для прогнозування поведінки системи, що досліджується, у деякому діапазоні зміни вхідних параметрів, не відображаючи при цьому відомі дані щодо структури системи та взаємозв'язків між її елементами.

### 1.3 Розвиток математичної економіки як науки

Математичне моделювання як кількісний метод дослідження економіки має давню історію. Становлення та розвиток математики та економіки як наук на протязі багатьох століть відбувалось за власними законами, але одночасно дотикались між собою. Вже у часи античності з розвитком товарно-грошових відносин з'являються кількісні величини як міри якості. Застосування арифметики у вирішенні питань товарно-грошових відносин розглядались у трактатах Арістотеля, Ксенофонта та інших давньогрецьких вчених. Систематизація та обробка кількісних результатів господарських досліджень привела до створення статистики та статистичних методів обробки кількісної інформації, що й зараз відіграє важливу роль у математичній економіці. Практично до 18-го століття основою математичного апарату в економічних дослідженнях були арифметика та статистика [1]. На цьому етапі розвитку математичної економіки варто виділити дослідження відомого англійського економіста У. Петті. Він обґрунтував застосування основні принципи статистики в економічних дослідженнях. Історично першою математичною моделлю національної економіки створена у 18-му столітті французьким економістом Ф. Кене, яка отримала назву «Економічна таблиця Кене», у якій містились початкові ідеї економічної динаміки. Крім того, праці Ф. Кене містили початки сучасної теорії ринку, модель мультиплікатора тощо. Він спробував виявив тенденції у розвитку економіки Франції.

Подальші успіхи застосування математичних методів у економіці пов'язані зі створенням та розвитку математичного аналізу, зокрема, диференціального числення. Математизація економіки була закономірним та природним процесом, оскільки у науках, де сформувалися стабільні поняття, актуальне завдання є установлення зв'язку між ними. У економіці це можливе за допомогою вивчення кількісного виразу такого зв'язку, у зв'язку з цим виникає необхідність застосування математичного апарату. Математичне моделювання – це дійовий інструмент, що дозволяє не лише пояснювати, а й прогнозувати поведінку об'єкту дослідження.

На ранньому етапі розвитку математичної економіки у 18-19 століттях основним математичним апаратом було диференціальне та інтегральне числення [4]. Використання похідної дозволило ввести в економічні дослідження поняття еластичності. У сфері математичної економіки тут відзначити роботи Бернуллі, Лапласа, Курно, Паскаля, Вальраса. Швейцарський економіст Л. Вальрас побудував узагальнену тематичну модель економіки країни. Граничні економічні теорії – граничної корисності, граничної дохідності, граничної продуктивної праці запропонували У. С. Джевонс, К. Д. Бейтс. Видатний економіст Д. М. Кейнс створив модель загальної економічної рівноваги, модель грошового обігу, модель інфляції [4].

У 20-му столітті для розв’язання економічних задач математичними методами, зокрема, задач оптимізації, створена математична дисципліна – дослідження операцій та теорія ігор. Тут слід відзначити праці Д. Данціга, Л. Канторовича, В. Леонтьєва, В. Парето, А. Вальда та інших дослідників. У роботах фахівців зі статистики Р. Фішера та Р. Фріша створено фундамент важливого засобу моделювання причинно-наслідкових зв’язків у економіці – економетрики [2]. Економетрика дозволяє встановити зв’язки у кількісній формі між економічними явищами, окремими елементами економічних систем. Подальший розвиток економетрики як методу пізнання у економічних дослідженнях ґрунтується на сучасних методах теорії ймовірностей та математичної статистики, зокрема, кластерному аналізу, стохастичних диференціальних рівнянь.

На нинішньому етапі розвитку математичну економіку розглядають як математичну теорію економіки. Аксіоми – з економіки, решта – математика. Математичне моделювання економіки – це створення математичних моделей економічних систем та їх аналіз. Прикладами сучасних математичних моделей економіки є моделі виробничих процесів, моделі співробітництва та конкуренції, моделі ринку, глобальні моделі міжгалузевих балансів, моделі Солоу, Неймана та багато інших математичних моделей, отриманих з використанні сучасних математичних підходів: теорему про нерухому точку, багатозначні відображення, теорію графів, фрактальні структури тощо [4].

Незважаючи на великий часовий період розвитку математичної економіки проблема побудови економіко-математичних моделей складних економічних систем є далекою від остаточного вирішеного, існують різні моделі одного й того ж економічного об’єкту, використання яких приводить до отримання суперечливих результатів. Математична модель економічного об’єкту є ефективною для застосування на практиці, якщо вона спирається на адекватну реальності змістову модель чи концепцію. У сучасній економічній науці існує багато різних напрямків, всі вони в певній мірі використовують кількісні співвідношення між досліджуваними величинами, тому всі вони використовують математичне моделювання. Математик, що займається моделюванням економічних об’єктів чи процесів, повинен мати чітку уяву про предмет моделювання та орієнтуватися у різноманітних сучасних наукових підходах та концепціях у економіці. У цьому він зможе побудувати модель, що є змістовною та актуальною з точки зору практики економічної діяльності.

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 1**

1. Поясніть, що є предметом та об’єктом дослідження математичної економіки.
2. Вкажіть об’єкт дослідження математичної економіки.

3. Поясніть призначення математичної економіки як науки.
4. Поясніть різницю між математичною економікою та економетрикою.
5. Охарактеризуйте основні етапи розвитку математичної економіки.
6. Поясніть зміст економіко-математичної моделі.
7. Надайте означення оптимізаційної моделі.
8. Поясніть призначення та необхідність математичних моделей в економічних дослідженнях.
9. Поясніть, яку математичну модель економічного об’єкта можна вважати ефективною.
10. Вкажіть основні риси сучасного етапу розвитку математичної економіки.

У наведених тестових завданнях вкажіть вірну відповідь.

1. Об’єктом дослідження математичної економіки є а) будь-які системи; б) економічні системи; в) математичні моделі економічних систем; г) закони економіки.
2. У статичних моделях змінні моделі а) залежать від часу; б) залежать від суб’єкта керування; в) не залежать від часу; г) не залежать від зовнішнього середовища.
3. Стохастичні моделі допускають а) наявність жорстких функціональних зв’язків між змінними моделями; б) відсутність керування; в) врахування дії випадкових факторів; г) адаптивність до зовнішнього середовища.
4. Детермінові моделі допускають а) наявність жорстких функціональних зв’язків між змінними моделями; б) відсутність керування; в) врахування дії випадкових факторів; г) адаптивність до зовнішнього середовища.
5. При прогнозуванні економічних процесів неможливо використовувати а) математичні моделі; б) моделі подібності; в) статистичні дані; г) сучасні інформаційні технології.

## Розділ 2. Системний підхід у математичній економіці

### Лекція 2. Системний підхід до моделювання економічних об’єктів та процесів

**Мета лекції:** надати студентам знання про сутність системного підходу у економіко-математичному моделюванні.

**План**

1. Системний підхід при моделюванні економічних об’єктів.
2. Сутність математичного моделювання економічних систем.
3. Поняття динамічної економічної системи.

**Ключові терміни та поняття:** системний підхід, принципи системного підходу, підсистема, емереджентність, синергія, соціально-економічна система.

## 2.1 Системний підхід при моделюванні економічних об’єктів

*Системний підхід* – це методологія дослідження об’єкта та побудови його математичної моделі, коли об’єкт розглядається як цілісний комплекс взаємопов’язаних компонентів, що має єдність з зовнішнім середовищем, що є підсистемою вищого порядку по відношенню до об’єкту моделювання [5]. Єдність економічної системи з її зовнішнім середовищем визначається дією об’єктивних економічних законів.

При моделюванні об’єктів та подання їх у вигляді системи необхідно враховувати наступні властивостей систем:

1) цілісність – стійкі відношення між елементами системи, коли стан любого її елементу залежить від стану систему і навпаки;
2) подільність – систему як цілісний об’єкт можна зобразити поділеним на окремі елементи;
3) ізольованість – комплекс об’єктів, що утворюють систему та зв’язки між ними можна виділити з їх оточення і розглядати ізольовано (ізольованість системи є відносною, оскільки відкрита система пов’язана з середовищем через деякі елементи, що є входами та виходами);
4) стійкість – система повинна нормально функціонувати за наявності зовнішніх впливів;
5) різноманіття – кожний елемент системи має власну поведінку та стан, відмінний від поведінки та стану інших елементів та системи як цілісності;
6) ідентифікованість – кожен елемент системи можна відрізнити від інших її складових;
7) стабілізація – система може здійснювати відновлення своїх елементів;
8) спостережність – всі входи та виходи можна спостерігати дослідниками;
9) адаптивність – система зберігає стан рухомої рівноваги зі своїм зовнішнім середовищем та стійкість до зовнішніх збурень.

Системний підхід до моделювання економічних об’єктів ґрунтується на принципах інтегратизму, невизначеності, інваріантності та принцип головних видів діяльності. Принцип інтегратизму полягає в тому, що взаємовідносини частини та цілого характеризуються трьома елементами: 1) виникнення взаємодії та зв’язків між елементами системи як частинами цілого; 2) втратою деяких властивостей частини при входження до складу цілого; 3) появі нових властивостей у цілого, обумовлених властивостей окремих складових частин. При цьому обов’язковою є впорядкованість частин системи, детермінованість їх просторових та функціональних взаємовідношень, коли частина становиться компонентом інтегрального цілого [4].

Принцип невизначеності полягає, що на початку та в кінці економічні процеси є значною мірю невизначеними. У часі вони постійно змінюються, тому, якщо вдалось з'ясувати деяку властивість процесу, то вона є істинною лише у цей момент часу і у даній ситуації. Економічні процеси потрібно розглядати з врахуванні дії випадкових факторів. Принцип невизначеності стверджує, що існує рівень факторів, коли їх малі відхилення ведуть до зміни стану системи. Чим складніша модель системи, тим більш невизначеними є результати, отримані внаслідок її дослідження.

Принцип інваріантності полягає у тому, що модель системи повинна бути інваріантною для любих організаційних форм її діяльності і їх зміна не повинна змінити сутність моделі. Принцип головних видів діяльності полягає, що у різних систем існують стандартні однотипні види діяльності.

При побудові економіко-математичної моделі  потрібно враховувати такі особливості моделювання економічних систем: зростання кількості міждисциплінарних проблем, комплексність проблем та необхідність їх вирішення з врахуванням єдності економічних, соціальних, психологічних та технічних аспектів, ускладнення економічних об'єктів, зростанням кількості зв'язків між елементами у системі, динамічність економічних процесів, можливості застосування сучасних інформаційних технологій.

### 2.2 Сутність математичного моделювання економічних систем

*Система* – це сукупність взаємопов'язаних елементів, що спільно діє для досягнення певних цілей. Підсистемою називають підмножину елементів системи, що діють для досягнення певних цілей, узгоджених з цілями системи. Надсистема – це зовнішнє середовище, у якому функціонує система. Основною метою економіки є забезпечення суспільства предметами споживання, у тому числі й ті, що створюють умови для безпеки суспільства. Економіка складається з елементів – одиниць господарювання (підприємств, домашніх господарств). Надсистемою національної економіки є природа, світова економіка та суспільство, її основні підсистеми – виробнича, фінансово-кредитна та сфера обміну [3].

Економіка як об'єкт моделювання має наступні дві основні особливості. По-перше, при моделювання економіки неможливо використовувати моделі подібності, тобто побудувати її зменшені копії і над ними проводити дослідження. По-друге, у економіці значною мірою обмежені можливості локальних економічних експериментів, оскільки всі її частини взаємопов'язані, тому експеримент над однією у «чистому» вигляді неможливий. Прямі експерименти з економікою мають як позитивний, так і негативний аспект. Позитивний аспект полягає в тому, тут зразу помітні короткотермінові результати економічної політики, що здійснюється. Негативна сторона експериментів над економікою полягає у тому, що неможливо передбачити середньо-та довготермінові наслідки рішень, що прийняті у порядку експерименту.

Реальні економічні об'єкти є досить складними, тому для їх вивчення створюють їх моделі. Моделі повинні бути доступними для вивчення, тому вони не повинні дуже складними, тобто вони спрощують реальний об'єкт. При цьому вони повинні відображати найважливіші для дослідження риси реального об'єкта.

Прогнозувати результати можливо з використанні моделі. Спочатку будується концептуальна модель розвитку економічної системи чи її підсистеми, що ґрунтується на аналізі минулого досвіду. У свою чергу, концептуальні економічні моделі складають фундамент для побудови математичних моделей. Розробка математичних моделей, що адекватно відображають реальність, є досить складним завданням. Проте використання математичних моделей надає можливості прийняття обґрунтованих рішень відносно об'єкта моделювання і досить точно прогнозувати їх наслідки.

Розглянемо структуру економіки як об'єкта математичного моделювання. При виконанні своєї основної функції економічна система виконує наступні дії: розміщує ресурси, виробляє продукцію та надає послуги, розподіляє предмети споживання та здійснює накопичення. Вона використовує трудові та природні ресурси, у ній здійснюється виробництво товарів та надання послуг, які у сукупності утворюють валовий внутрішній продукт, потім здійснюється його розподіл та споживання.

Економічна система, в свою чергу, є підсистемою людського суспільства. Вона є складною системою, що складається з виробничих та невиробничих одиниць, що знаходяться між собою у виробничо-технологічних та організаційно-господарських зв'язках. По відношенню до економічної системи кожний член суспільства виступає у двох ролях: з одного боку, він є працівник, з іншого, – споживач.

У виробничому процесі, крім природних та трудових ресурсів, задіяні засоби виробництва [5]. Засоби виробництва поділяють на засоби праці та предмети праці. Засоби праці беруть участь у кількох виробничих циклах до їх заміни внаслідок їхнього фізичного чи морального зносу. Предмети праці (сировина, матеріали) беруть участь у одному виробничому циклі. Накопичені засоби виробництва складають виробничі фонди. Вони складаються з основних виробничих фондів (накоплених засобів виробництва) та основних оборотних фондів (накоплених предметів праці).

Основні виробничі фонди на протязі довгого періоду часу обслуговують виробничий процес, зберігаючи при цьому свою натуральну форму і частково в процесі зносу приймають участь у створенні вартості виробленого продукту. Відновлення основних виробничих фондів здійснюється за рахунок амортизаційних відрахувань, збільшення основних виробничих фондів – за рахунок капітальних вкладень у вигляді інвестицій. Оборотні фонди складаються з предметів праці, що знаходяться у виробництві. Сюди відносяться предмети праці, що входять у незавершену продукцію та виробничі запаси.

Внаслідок діяльності національної економіки за рік всі галузі матеріального виробництва створюють валовий внутрішній продукт (ВВП). У натурально-речовій формі ВВП розпадається на засоби праці та предмети споживання, у вартісній формі – на амортизаційний фонд (фонд заміщення вибуття основних фондів) та нову створену вартість (національний доход) [4].

У процесі створення ВВП виробнича підсистема економіки виробляє та знову споживає проміжний продукт, тобто предмети праці, використання для поточного виробничого споживання, їх вартість повністю переходить у вартість предметів праці чи предметів споживання, що входять у ВВП. У якості розрахункового допоміжного показника часто застосують валове виробництво, що є сумарною вартістю ВВП та проміжного продукту [5].

Задачею виробничої підсистеми національної економіки є перетворення предметів праці у товари. Основна функція фінансово-кредитної підсистеми є регулювання фінансових потоків, щоб забезпечити стабільний та справедливий обмін товарів та послугами між елементами економічної системи.

Основою економічної системи є виробничі господарські одиниці (виробничі підприємства), що мають господарську самостійність. Кожна така виробнича одиниця має засоби праці, які дозволяють здійснювати один чи кілька виробничих процесів. У курсі математичної економіки об’єктом моделювання є як економіка в цілому, так і її окремі господарські одиниці.

### 2.3 Поняття динамічної економічної системи

Під *системою* розуміють сукупність взаємопов’язаних елементів. Соціально-економічні системи спрямовані на досягнення певної мети. Підсистема – це частина системи, що реалізує певну мету, узгоджену з метою системи. Надсистема – це зовнішнє середовище, у якому функціонує система. Будь-яка система має властивості *емереджентності*, тобто наявні системні властивості, що не притаманні їх складовим елементам [4]. *Економічна система* – це сукупність господарських одиниць (галузей, підприємств чи підрозділів підприємства), що знаходяться у виробничо-технологічних та організаційно-господарських зв’язках. Будь-яка система, що спрямована на досягнення певної мети, складається з органу керування та об’єкту керування [6].

У своїй діяльності системи та їх елементи перетворюють входи на виходи. Для економічними системами входи є ресурси, а виходи – результати їх діяльність, наприклад, товар чи послуги. Елементи, з яких складаються системи, можуть бути статичними чи динамічними. Відповідно розрізняють статичні та динамічні моделі економічних систем та їх елементів. Статична модель система передбачає миттєве перетворення входу $x$ у вихід $F(x)$.

Статична модель систему розглядає як «чорну скриню», внутрішня структура якої у дослідженні не враховується, а предметом дослідження є перетворення входів у виходи. Для такої моделі час $t$ однаковий для входу та виходу. Розглянуті у розділі 1 макроекономічні виробничі функції є прикладами статичних моделей виробничих систем. Динамічна модель системи чи її елемента характеризується тим, що вихід системи у момент часу $t$ залежить не лише від значень входів у нинішній момент часу $t$, але й від значень входів та виходів у попередні моменти часу. У динамічній системі та відповідній моделі причина переходить у наслідок не миттєво, а з деяким запізненням. Модель є динамічною, якщо у її складі є змінні, що залежать від часу, тобто змінюються з часом.

Розрізняють динамічні економічні моделі з дискретним та неперервним часом [4]. У багатьох секторах економіки господарський цикл триває рік, тому підсумки господарської діяльності підбивають за рік, тобто змінна часу розглядається як дискретна величина, що змінюється з кроком у рік. Крок зміни часу може бути і іншим проміжком часу (місяць, квартал, тощо). Динамічні моделі з дискретним часом подають звичайно у вигляді скінченно-різницевих рівнянь, наприклад, $Y_{t+1} = Y_{t-1} + 2Y_t$, де $Y_t$ – значення економічного показника $Y$ в момент часу $t$ [2]. При дослідженнях багатьох економічних процесів, наприклад, короткотермінових перехідних процесів доцільно розглядати економічні показники як функції неперервного аргументу часу. Для побудови та дослідження динамічних моделей з неперервним часом використовують апарат диференціальних рівнянь.

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 2**

1. Поясніть сутність системного підходу в економічних досліджень.
2. Поясніть, чому підприємства є відкритими економічними системами.
3. Назвіть основні принципи, на яких ґрунтується системний підхід дослідження економічних процесів та поясніть ці принципи.
4. Наведіть приклади економічних систем.
5. Охарактеризуйте особливості національної економіки як об’єкта моделювання.
6. Назвіть основні підсистеми національної економіки та вкажіть їх функції.
7. Поясніть, у чому різниця між динамічними системами з неперервним та дискретним часом.
8. Вкажіть, які елементи входять до виробничого процесу.
9. Охарактеризуйте структуру національної економіки як об’єкта математичного моделювання.

У наведених тестових завданнях вкажіть вірну відповідь.

1. Під системою розуміють а) будь-яку непусту множину; б) множину взаємопов’язаних елементів; в) відкриту множину; г) замкнену множину.
2. Властивість системи передбачає а) її замкненість; б) збереження стану рухомої рівноваги з її зовнішнім середовищем; в) досягнення її мети; г) ізольованості системи.
3. Показником, що кількісно характеризує діяльність національної економіки є а) прибуток; б) рівень інновації; в) валовий внутрішній продукт; г) середня заробітна платня.
4. Властивість системи, що полягає у тому, що вона має властивості, не притаманні окремим її складових, називають а) динамічністю; б) емерджентністю; в) адиптивністю; г) відкритістю.

5. Динамічні системи з дискретним часом моделюються з допомогою а) різницевих рівнянь; б) диференціальних рівнянь; в) інтегральних рівнянь; г) нелінійних рівнянь.
6. Динамічні системи з неперервним часом моделюються з допомогою а) різницевих рівнянь; б) диференціальних рівнянь; в) інтегральних рівнянь; г) нелінійних рівнянь.

## Розділ 3. Виробничі функції

### Лекція 3. Моделювання виробничої діяльності за допомогою виробничих функцій

**Мета лекції:** сформулювати у студентів уявлення про сутність та використання виробничих функцій, особливості моделюванні виробничого процесу на основі апарату виробничих функцій

**План**

1. Основні поняття та допущення при моделюванні виробничої діяльності. Виробнича функція
2. Види виробничих функцій
3. Побудова виробничих функцій

**Ключові терміни та поняття**: виробнича діяльність, виробнича функція, функція Кобба-Дугласа, рівняння регресії, метод найменших квадратів.

### 3.1 Основні поняття та допущення при моделюванні виробничої діяльності

Розглянемо основні поняття та допущення, що використовуються при моделюванні *виробничої діяльності*, тобто діяльності з виробництва товарів. У ході операційної діяльності створюють нові товари та послуги, що мають додану вартість та беруть участь у наступних процесах обміну та споживання. Виробництво товарів пов’язане з одночасним споживанням інших товарів – сировини, праці та капіталу. Отже, процес виробництва пов’язаний з процесом споживання, а розвиток виробничих процесів значною мірою визначається поведінкою споживачів.

Розглянемо основні економічні поняття, які будемо використовувати надалі при моделюванні виробничих процесів. *Виробничий процес* – це процес створення доданої вартості шляхом цілеспрямованого перетворення одного набору товару у інші набори товарів. Економічна система, у якій організовано і здійснений виробничий процес, називаємо *виробничою системою* або виробництвом. Розміру виробничих систем можуть зміняться у дуже широких межах – від домашнього господарства до світової економіки, у залежності від масштабів досліджуваних економічних проблем. Будь-яка економічна система є одним цілим і є суб’єктом господарювання.

Всі види економічних продуктів, що є результатами діяльності виробничих економічних систем, узагальнено називають товаром чи продуктом. Всі товари мають властивості корисливості та рідкості, що створюють можливості процесів економічного обміну ними. Тому всі вироблені товари беруть участь у операціях обміну та споживаються іншими виробничими системами або кінцевими споживачами. Будь-яка виробнича система використовує працю людей, у тому числі і для управління цієї системою. Виробнича система одночасно виробляє і споживає різноманітні товари. Тому вона у процесі обміну одночасно виступає у двох протилежних ролях – як покупець сировини, праці та капіталу так і як продавець виробленого продукту (товару). Товари, що споживаються у процесі виробництва, називають факторами виробництва або ресурсами. Дії виробничих систем визначають попит на ринках ресурсів та пропозиції на ринках вироблених ними товарами [2].

Дослідження економічних процесів у сучасному великомасштабному виробництві вимагає отримання великих обсягів статистичної інформації для побудови математичних моделей, що описують взаємозв'язок між витратами та обсягом виробництва – моделями типу «витрати – результати», оскільки такі моделі повинні враховувати внутрішню структуру витрат на підприємстві. Отримання достатньо статистичних даних про всі внутрішні виробничі витрати є достатньо складною задачею. Значно простіше отримати дані про загальні показники, такі як вартість виробленого товару, вартість основних фондів підприємства, кількість виробничого персоналу, фонд оплати праці тощо. Аналізуючи ці показники і розглядаючи підприємство як «чорний ящик», тобто досліджуючи взаємозв'язок між величиною витрачених ресурсів та величину виробленого продукту, можна зробити певних висновків щодо виробничої діяльності цієї системи.

Вперше функціональний взаємозв'язок між обсягом виробництва та величиною витрачених ресурсів був визначений та використаний у 1928 р. у статті американських вчених економіста Поля Дугласа та математика Чарльза Кобба «Теорія виробництва». У цьому дослідженні зроблена спроба визначити вплив величини витраченого капіталу та праці на величину виготовленої продукції у обробній промисловості США. Для цього були використані статистичні дані за 1899-1922 рр. і поставлені наступні завдання [4]:

1) визначити вигляд функції, що найбільше точно відображає кількісні співвідношення між трьома характеристиками виробничого процесу – обсягом виробництва, витратами капіталу та витратами праці;
2) знайти значення коефіцієнтів цієї функції;
3) перевірити достовірність побудови функції, порівнюючи розраховані за нею значення з фактичними даними.

Ч. Коббом [5] запропонована функція виду $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, де $Q$ – обсяг виробленої продукції, $K$ – величина основного капіталу, $L$ – витрати праці, $A$, $\alpha$, $\beta$ – коефіцієнти, що задовольняють умови A>0, $\alpha, \beta$ – невід'ємні, причому $\alpha + \beta = 1$. Коефіцієнт $A$ використовують для переводу одиниці виміру праці і капіталу в одиниці виміру виробленої продукції, коефіцієнти $\alpha, \beta$ відображають внесок праці та капітал у виробництво продукції. Значення цих коефіцієнтів знаходять з використанням методу найменших квадратів (МНК) [3], згідно з яким вони визначаються з умови:

$$\sum_{t=1899}^{1922} (lnQ_t - lnA - \alpha lnK_t - \beta lnL_t)^2.$$

У результаті отримані наступні значення коефіцієнтів $\text{A} = 1{,}01$; $\alpha = 0{,}25$; $\beta = 0{,}75$, тобто отримали виробничу функцію $Q = 1{,}01K^{0{,}25}L^{0{,}75}$.

*Виробничою функцією (ВФ)* виробничого процесу називають відображення $Q: D \to U$, що моделює виробництво продукцію у цьому процесі [6]. Область визначення $D$ виробничої функції – це множина виробничих ресурсів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ у вартісному чи у натуральному вигляді. Множина значень $U$ включає множину кількісних оцінок результатів виробництва, наприклад, річний обсяг виробництва за кожною позицією асортименту продукції підприємства або відповідні вартісні показники $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$.

Найбільшими вивченими виробничими функціями при $m = 1$, тобто у них визначається одна кількісна оцінка результату виробництва, тобто у цьому випадку ВФ-функція – це звичайна функція кількох змінних. Отже, ВФ-функція встановлює залежність між кількостями витрачених виробничих ресурсів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, та обсягом $Q$ виробленої продукції, тобто вона має вигляд $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тут значення обсягу виробленої продукції вважається максимально можливим при даних витратах виробничих ресурсів, тобто витрати ресурсів не для забезпечення виробництва продукції відсутні.

ВФ-функція, що моделює реальний виробничий процес, має наступні властивості:

1. При збільшення обсягів витрат одного з ресурсів та сталому обсягу витрат інших ресурсів обсяг виробництва продукції зростає, тобто виконується нерівність $\frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0, i = 1,2, \dots, n$.

Ця властивість випливає з гіпотези про раціональний вибір ресурсу виробництва – ресурси, що не збільшують обсяги виробництва, не застосовують у виробничому процесі.

2. При сталих обсягах витрат всіх ресурсів, крім одного виду, послідовне збільшення цього ресурсу забезпечує постійне зменшення приросту виробленої продукції, тобто

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial {x_i}^2} < 0, i = 1,2, \dots, n.$$

Ця властивість обумовлена необхідністю збалансованості витрат у конкретному технологічному процесу: збільшення витрат одного виду ресурсів без відповідного збільшення витрат інших ресурсів не забезпечує застосовану виробничу технологію повноцінним потоком ресурсів, тобто додатковий ефект від збільшення витрат ресурсів зменшується [7].

Залежність величини обсягу виробництва від величини витрат одного ресурсу при фіксованих витратах інших ресурсів, називають *кривою випуску*.

Перша умова означає, що дотична до кривої випуску при всіх можливих значень витрат ресурсу має додатний нахил:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = tg\alpha > 0.$$

Друга умова, яку можна записати у вигляді $\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right) < 0$. Це свідчить, що приріст продукції у розрахунку на додаткові витрати одиниці ресурсу зменшується при зростанні витрат цього ресурсу [7].

### 3.2 Види виробничих функцій

Розглянемо основні типи ВФ, що застосовуються у практиці економічного аналізу виробничого процесу, на прикладі функцій двох ресурсів , які допускають наочну геометричну інтерпретацію [4].

*Лінійна ВФ* має вигляд: $Q = a_1x_1 + a_1x_1$. Її коефіцієнти дорівнює значенням граничних приростів виробництва продукції, оскільки $MQ_i == \frac{\partial Q_i}{\partial x_i}, i = 1{,}2$.

Це означає, що приріст обсягу виробництва внаслідок одиничного збільшення обсягу витраченого ресурсу є сталим і не залежить від вихідних величин витрат факторів. Гранична норма заміни виробничих факторів для лінійної ВФ є сталою та дорівнює $S_{x_1x_2} = \frac{a_1}{a_2}$. Еластичність заміщення факторів є нескінченною.

Лінійні виробничі функції звичайно застосовуються при моделюванні великих систем (велика галузь, економіка країни в цілому), у яких виробництво продукції є результатом одночасного використання багатьох різноманітних технологій. При цьому повинно виконуватися допущення про сталості граничної продуктивності ресурсів та можливого їх необмеженого заміщення.

ВФ Кобба-Дугласа має вигляд [1]:

$$Q = Ax_1^\alpha \cdot x_2^\beta, \alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Коефіцієнт *A* використовуються для переводу одиниць виміру у правій частині до одиниць виміру обсягу виробництва продукції у лівій частині, $\alpha, \beta$ – коефіцієнти еластичності виробництва за ресурсами. Гранична продукція факторів пропорційна їх середній продукції:

$$MQ_{x_1} = \alpha\frac{Q}{x_1}, MQ_{x_2} = \beta\frac{Q}{x_2}.$$

Гранична норма зміни дорівнює

$$S_{x_1x_2} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1}$$

З цього випливає, що еластичність заміни складає

$$\sigma_{x_1x_2} = \frac{\partial\left(x_2/x_1\right)}{\partial S_{x_1x_2}}\cdot\frac{S_{x_1x_2}}{x_2/x_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1}}{x_2/x_1} = 1.$$

Це свідчить, що заміщення одного фактору виробництва іншим завжди відбувається у пропорції 1:1. У цьому полягає важливий недолік ВФ Кобба-Дугласа, оскільки вона не завжди вірно відображає реальні економічні процеси, оскільки не завжди один фактор виробництва можна замінити еквівалентною кількістю іншого фактору [1].

Функцію Кобба-Дугласа найчастіше використовують для описання виробничої діяльності середніх за масштабом виробничої діяльності суб'єктів господарства (корпорація, невелика галузь), які характеризуються стійким стабільним функціонуванням, коли залучення додаткової одиниці ресурсу дає ефект, пропорційний середній продуктивності наявного ресурсу.

Розглянемо *ВФ з фіксованими пропорціями (функція Леонтьєва):*

$$Q = \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\}$$

Коефіцієнти $C_i$ виражають кількість i-го ресурсу, необхідного для виробництва одиниці продукції. Функція відображає розв'язок задачі лінійного програмування, що виникає у моделі «витрати–випуск»: $c_i Q \le x_i, Q \to \max$, оскільки фактор, що обмежує обсяг виробництва, визначається умовою мінімальності. Еластичність заміни факторів по довільному ресурсу $\sigma = 0$ для цієї ВФ [2] . Для неї гранична продукція є кусково-сталою дворівневою функцією відношення $\frac{x_1}{x_2}$ (фондоозброєння):

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\}}{\partial\left(\frac{x_1}{c_1}\right)} \cdot \frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_1} \cdot \begin{cases} 1, \frac{x_1}{x_2} < \frac{c_1}{c_2}; \\ 0, \frac{x_1}{x_2} \ge \frac{c_1}{c_2}. \end{cases}$$

Функція Леонтьєва використається для моделювання виробничого процесу з строго детерміновими технологіями, що не допускають відхилення від технологічних норм використання ресурсів на виготовлення одиниці продукції, звичайно для описання незначного за масштабом виробництва або повністю автоматизованого виробництва.

### 3.3 Побудова виробничих функцій

Для побудови виробничих функцій використовують статистичні дані про обсяги та фактори виробництва. Розглянемо найпростіший випадок, коли виробнича функція визначає залежність обсягу виробництва $y$ лише від одного фактору виробництва $x$, тобто вона має вигляд $y = y(x)$. Допустимо, що між змінними $y$ та $x$ існує зв'язок, на який накладається дія випадкових факторів, тобто між цим змінними існує статистичний зв'язок. Наявність такого зв'язку проявляється у тому, що зміна значень однієї змінної приводить до зміни математичного сподівання іншої змінної. Формулу $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, що встановлює статистичний зв'язок між змінними $y$ та $x$, називають *рівнянням регресії*. Найбільш простою є лінійна регресія, що описується рівнянням $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$.

Основним методом побудови рівнянь регресії є *метод найменших квадратів* (МНК) [2]. Спочатку встановлюється критерій близькості між точками $(x_i, y_i)$, встановленими у результаті спостереження, та точками $(x_i, a_0 + a_1 x_i)$, ординати яких обчислюються за рівнянням лінійної регресії $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - a_1 x_i \right)^2 \to \min. \tag{3.1}$$

У (3.1) $a_0$ та $a_1$ – невідомі параметри рівняння лінійної регресії, тобто досліджуємо на мінімум функцію (3.1) двох змінних $a_0$ та $a_1$. Застосування необхідної умови екстремуму цієї функції – рівності нулю її частинних похідних – дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів регресії $a_0$ та $a_1$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - n a_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Введемо позначення: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$. Розв'язавши систему (3.2), отримаємо значення параметрів регресії:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\left(\bar{x}\right)^2}, \; a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}. \tag{3.3}$$

Для моделювання зв'язку між змінними $x$ та $y$ можна використовувати нелінійні залежності, наприклад, параболу другого порядку $\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, *гіперболу* $\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}$, показникову функцію $\tilde{y} = a_0 \cdot a_1^x$, логарифмічну функцію $\tilde{y} = a_0 + a_1 \ln x$, логістичну криву $\tilde{y} = \frac{b}{1 + e^{a_0 + a_1 x}}$ тощо. Всі наведені тут залежності є лінійними за своїми параметрами або такими, що зводяться до лінійних. Для залежностей, що є лінійними за своїми параметрами, можна безпосередньо застосувати МНК та мінімізувати суму квадратів відхилень:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - \tilde{y}\left( x_i, a_0, a_1, ..., a_k \right) \right)^2 \to \min. \tag{3.4}$$

Параметри регресії $a_0$, $a_1$, …, $a_k$ знаходимо з необхідної умови екстремуму функції $Q\left(a_0, a_1, ..., a_k\right)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0, i = 1, 2, ..., k. \tag{3.5}$$

Для визначення коефіцієнтів $a_0$, $a_1$, $a_2$ параболи $\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ з (3.6) отримуємо систему лінійних рівнянь МНК [7]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - n a_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Рівняння МНК для отримання коефіцієнтів $a_0$, $a_1$ гіперболічної регресійної залежності $\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}$ знайдемо, замінивши у системі рівнянь (3.8) для коефіцієнтів лінійної регресії $x$ на $\frac{1}{x}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - n a_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} - a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Для визначення параметрів $a_0$, $a_1$ показникової залежності $\tilde{y} = a_0 \cdot a_1^x$ її попередньо логарифмують: $\ln \tilde{y} = \ln a_0 + x \cdot \ln a_1$. Ввівши позначення $\alpha_0 = \ln a_0$, $\alpha_1 = \ln a_1$, $z = \ln \tilde{y}$, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих параметрів $\alpha_0$ та $\alpha_1$:

$$\begin{cases} n\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} z_i, \\ \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i. \end{cases} \tag{3.10}$$

Тут $z_i = \ln y_i$. З (1.10) знаходимо $\alpha_0$ та $\alpha_1$, далі $a_0 = e^{\alpha_0}$, $a_1 = e^{\alpha_1}$.

Зв'язок між змінними $x$ та $y$ вимірюється через їх кореляцію. Виміряти кореляцію між змінними $x$ та $y$ означає визначити, наскільки зміна $y$ залежить від зміни $x$. Для кількісної оцінки кореляції між показниками $x$ та $y$ використовують *лінійний коефіцієнт кореляції*:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left( n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) \left( n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right)}}.$$

Лінійний коефіцієнт кореляції $r \in [-1;1]$. При $r = 0$ лінійна залежність між змінними $x$ та $y$ відсутня. При наближенні $|r|$ до 1 залежність $y(x)$ стає близькою до лінійної. При $r > 0$ збільшення значень $x$ супроводжується збільшенням $y$, при $r < 0$ характер залежності є протилежним: зростання $x$ супроводжується спаданням $y$.

Значення економічних величин здебільшого визначаються впливом не одного, а кількох факторів, тобто розглядається модель деякої економічної величини $y$ у вигляді функції $m$ незалежних змінних $x_1, x_2, ..., x_m$: $\tilde{y} = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Розглянемо модель лінійної залежності $\tilde{y} = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_m x_m$, тобто *лінійну множинну регресію*. Відхилення значення $y_i$ залежної змінної у $i$-му спостереженні, $i = 1, 2, ..., n$. від значення $\tilde{y}_i$, знайденого при значеннях $x_{i1}$, $x_{i2}$ ,…, $x_{im}$, позначимо $\varepsilon_i$:

$$\varepsilon_i = y_i - a_0 - a_1 x_{i1} - a_2 x_{i2} - ... - a_m x_{im} = y_i - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} .$$

У відповідності з МНК параметри $a_0$, $a_1, \ldots, a_m$ лінійної моделі знаходять так, щоб сума $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = Q \to \min$, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \right)^2 \to \min . \qquad (3.11)$$

Функція $Q$, що мінімізується, є квадратичною відносно величин $a_j$, $j = 0, 1, 2, ..., n$. Необхідною умовою її мінімуму є рівність нулю всіх її частинних похідних за $a_j$. Частинні похідні квадратичної функції є лінійними функціями, тому, прирівнюючи їх до нуля, отримуємо систему $m+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $m+1$ невідомими $a_0$, $a_1, \ldots, a_m$. Розглянемо задачу визначення цих коефіцієнтів у матричній формі [6].

Суму квадратів відхилень $\varepsilon_i$ можна записати у вигляді добутку вектора-рядка $\varepsilon^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ на вектор-стовпчик $\varepsilon$. Цей вектор-стовпчик можна записати у вигляді: $\varepsilon = y - X \cdot a$, де $y$ – вектор-стовпчик значень $y$, $y^T = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $a$ – вектор-стовпчик коефіцієнтів моделі, $a^T = (a_0, a_1, .., a_m)$, $X$ – матриця розмірності $n \times (m+1)$, у якій кожен з $n$ рядків – це значення спостереження вектора значень незалежної змінної:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & ... & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & ... & x_{2m} \\ . & . & . & . \\ 1 & x_{n1} & ... & x_{nm} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Q = \varepsilon^T \cdot \varepsilon = \left(y - Xa\right)^T \left(y - Xa\right) = \left(y^T - a^T X^T\right)\left(y - Xa\right) = y^T y -$$

$$- a^T X^T y - y^T Xa + a^T X^T Xa = y^T y - 2a^T X^T y + a^T X^T Xa.$$

Тут при перетвореннях було використано рівність $a^T X^T y = y^T Xa$.

Тоді з рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2X^T y + 2\left(X^T X\right)a = 0$$

знаходимо невідомий вектор коефіцієнтів множинної лінійної регресії у вигляді [8]:

$$a = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y. \qquad (3.12)$$

Формулу (3.12) використовують для розрахунку коефіцієнтів лінійної множинної регресії.

## Питання та завдання для самоконтроля до розділу 3

1. Поясніть призначення виробничої функції.
2. Вкажіть, що є аргументами виробничої функції.
3. Назвіть види виробничих функцій.
4. Вкажіть основні допущення, що використовуються при побудові виробничої функції.
5. Поясніть зміст коефіцієнтів виробничої функції Кобба-Дугласа.
6. Поясніть, що є об'єктом моделювання для виробничої функції Кобба-Дугласа.
7. Розкрийте математичну сутність методу найменших квадратів.

Розв'яжіть наведені нижче завдання.

1. На фабриці, що виготовляє взуття, 5 працівників працюють на 5 верстатів та виготовляє 1000 пар взуття за тиждень. Були найняті ще 5 працівників, внаслідок чого обсяг виробництва взуття збільшиться до 1500 пар взуття на тиждень. Знайти, як зміниться продуктивність праці робітників та величина виробничих фондів підприємства.

2. Для фабрики з попередньої задачі обсяг виробництва виробничою функцією Кобба-Дугласа з коефіцієнтом β=0,75. Як збільшиться обсяг виробленої продукції (гранична продуктивність праці), якщо підприємство найме додаткового працівника при наявності 5 працівників. Як зміниться ця величина, якщо найме 1 працівника при наявній численності виробничого персоналу 10 працівників?

3. Фабрика з попередніх прикладів з еластичністю продукції по праці β=0,75, планує збільшити персонал на 10%. На скільки процентів зросте обсяг виробленої продукції? На скільки процентів потрібно збільшити персонал, якщо потрібно збільшити обсяг виробництва на 15%?

4. На целюлозо-паперовому комбінаті обсяг виробництва залежить від витрат використаної целюлози ($x_1$) та кількості верстатів ($x_2$) при виробничій функції $Q = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$, α=0,5; β=0,1. При плановому завантаженні у місяць потреба в ресурсах складає 20т целюлози та 10 верстатів. Знайти, чому дорівнює плановий обсяг виробництва продукції та граничну продукцію для другого ресурсу $x_2$. Якщо комбінат придбає додатково 100 верстатів, не забезпечивши при цьому збільшення поставок целюлози, то чому дорівнює ефект від останнього придбаного верстата? Знайти, на скільки збільшиться обсяг виробленої продукції при збільшенні обсягів використання обох ресурсів на 1%?

## Розділ 4. Характеристики виробничих функцій

### Лекція 4. Основні характеристики виробничих функцій та їх економічний зміст

**Мета лекції:** висвітлити основні характеристики виробничі функції

**План**

1. Поняття еластичності.
2. Економіко-математичні параметри виробничої функції.
3. Ефекти розширення масштабу виробництва та заміщення ресурсів.
4. Ізокванти виробничої функції.

**Ключові терміни та поняття:** еластичність, середня продуктивність праці, середня фондовіддача, гранична продуктивність праці, гранична фондовіддача, гранична норма заміщення, ефект масштабу, ізокванти.

#### 4.1 Поняття еластичності

*Еластичність* характеризує відносну зміну економічного показника під дією одиничної відносної зміни фактору, від якого він залежить, за умови незмінності решти факторів, що впливають на досліджуваний показник. Іншими словами, еластичність показує, на скільки процентів зміниться досліджуваний показник, якщо фактор, від якого він залежить, збільшиться на 1% [2].

Нехай досліджується залежність економічного показника $y$ від зміни фактору $x$, значення якого впливають на значення $y$. Розглянемо випадок, коли спостерігається функціональна залежність $y = y(x)$. Швидкість зміни величини $y$ відносно зміни величини $x$ визначається похідною $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, проте її застосування у економічних дослідженнях здебільшого є незручним, оскільки величина похідної залежить від обраних одиниць виміру $x$ та $y$. Тому для вивчення впливу зміни величини $x$ на величину $y$ у економіці застосовують не абсолютні, а відносні (процентні) зміни величин, що досліджуються. Зв'язок між змінами відносних величин оцінюють за допомогою еластичності.

*Еластичністю функції* $y = y(x)$ відносно змінної $x$ називають границю відношення відносних змін величин $y$ та $x$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) \tag{4.1}$$

Формулу (4.1) можна записати у вигляді:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \tag{4.2}$$

Якщо еластичність визначають наближено за дискретним набором даних, наприклад, заданих у вигляді таблиці, то замість (4.1) та (4.2) для обчислення еластичності у точці $(x_1, y_1)$ використовують формулу:

$$E_x(y) = \frac{y_2 - y_1}{y_1} : \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{\Delta y_1}{y_1} : \frac{\Delta x_1}{x_1}. \tag{4.3}$$

Еластичність, обчислену за формулою (4.3), називають *кінцевою еластичністю*.

У економічних дослідженнях використовують також середню (дугову) еластичність:

$$E_x(y) = \frac{y_2 - y_1}{(y_1 + y_2)/2} : \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)/2}, \tag{4.4}$$

а також логарифмічну еластичність

$$E_x(y) = \frac{\Delta(\ln y)}{\Delta(\ln x)} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) : \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \tag{4.5}$$

З означення еластичності (4.1) випливають основні властивості цього показника [5]:

1) $E_{ax}(by) = E_x(y)$, тобто еластичність не залежить від одиниць виміру показників $x$ та $y$;

2) еластичності взаємно обернених функцій є взаємно оберненими величинами: $E_x(y) = \dfrac{1}{E_y(x)}$;

3) еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі їх еластичностей: $E_x(u \cdot v) = E_x u + E_x v$;

4) еластичність частки функцій дорівнює різниці їх еластичностей: $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = E_x u - E_x v$;

5) Еластичність суми двох функцій знаходять за формулою:

$$E_x(u+v)=\frac{d(u+v)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v}=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v}=\frac{u\cdot E_x u+v\cdot E_x v}{u+v}.$$

Розглянемо основні показники еластичності, що використовуються у математичній економіці.

1. *Еластичність попиту за ціною* (*пряма еластичність*) визначається за формулою

$$E_p(q)=\frac{dq/q}{dp/p}=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q},$$

де $p$ – ціна одиниці товару, $q$ – величина попиту на нього. Вона показує відносну зміну у відсотках величини попиту на товар при зміні ціни цього товару на 1% та характеризує реакцію споживачів на зміну ціни товару.

2. *Перехресну еластичність попиту за ціною* знаходять за формулою

$$E_{p_j}(q_i)=\frac{dq_i/q_i}{dp_j/p_j}=\frac{dq_i}{dp_j}\cdot\frac{p_j}{q_i}.$$

Вона показує відносну процентну зміну величини $q_i$ попиту на $i$-й товар при зміні ціни $p_j$ на $j$-й товар, що заміщує чи доповнює $i$-й товар у споживанні, на 1%.

3. *Еластичність попиту за доходом* обчислюють за формулою:

$$E_l(q)=\frac{dq/q}{dl/l}=\frac{dq}{dl}\cdot\frac{l}{q},$$

де $l$ – середня величина доходу споживачів. Вона характеризує відносну процентну зміну величини попиту на товар при збільшенні доходу споживачів на 1%. Додатна еластичність попиту за доходом спостерігається для нормальних (якісних) товарів, від'ємна – для малоцінних (низькоякісних).

4. *Цінова еластичність ресурсів*

$$E_p(R)=\frac{dR/R}{dp/p}=\frac{dR}{dp}\cdot\frac{p}{R}$$

характеризує відносну зміну у відсотках величини $R$ попиту на певний ресурс при зміні ціни цього ресурсу на 1%.

5. *Еластичність заміщення при виробництві одного ресурсу іншим*

$$E_{R_j}(R_i)=\frac{dR_i}{dR_j}\cdot\frac{R_j}{R_i}$$

показує, на скільки процентів зміниться кількість $R_i$ $i$-го ресурсу при збільшенні кількості $R_j$ $j$-го ресурсу на 1% так, що при цьому загальний обсяг виробництва не змінюється.

## 4.2 Економіко-математичні параметри виробничої функції

Основні характеристики ВФ-функції розглянемо для функції виду $Q = Q(K, L)$. Розглянемо середні величини, пов'язані з ВФ. Вони значною мірою характеризують ефективність використання у виробничому процесі підприємства. *Середня продуктивність праці* – це відношення обсягу виробленої продукції за певний проміжок часу до кількості витраченої праці:

$$AQ_L = \frac{Q}{L}.$$

*Середня фондовіддача* – це відношення обсягу виробленої продукції до вартості основних виробничих фондів:

$$AQ_K = \frac{Q}{K}$$

Для ВФ Кобба-Дугласа середня продуктивність праці

$$AQ_L = \frac{Q}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = AK^{\alpha}L^{\beta-1},$$

середня фондовіддача

$$AQ_K = \frac{Q}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = AK^{\alpha-1}L^{\beta}.$$

Оскільки $\beta < 1$, то середня продуктивність праці є спадною функцією аргументу $L$, тобто зі збільшенням витрати праці середня продуктивність праці зменшується. Оскільки при цьому величина другого ресурсу *K* залишається незмінною, то залучена додаткова робоча сила не забезпечується додатковими засобами виробництва. Фондоозброєність $\frac{K}{L}$ при цьому зменшується . Аналогічно середня фондовіддача є спадна функція аргументу *K*, оскільки зі зростанням цього аргументу, тобто зі збільшенням вартості основних фондів, тобто при залученням додатковим виробничих фондів, не підкріпленням збільшенням відповідної кількості працюючих, або збільшенням виплат на оплати праці.

Граничні величини продукції, тобто *граничні продукти* характеризують ефект у вигляді обсягу продукції, якого отримують зі збільшенням витрат ресурсів. *Гранична продуктивність праці* характеризує величину додаткового ефекту від кожної додатково витраченої праці при даної комбінації ресурсів (*R,L):*

$$MQ_L = \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Виходячи з означення ВФ при збільшенні витрат праці, гранична продуктивність праці зменшується. Для ВФ Кобба-Дугласа гранична продуктивність праці дорівнює

$$MQ_L = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \beta\frac{Q}{L},$$

тобто гранична продуктивність пропорційна середній продуктивність і завжди менша за неї, оскільки $\beta < 1$.

*Гранична фондовіддача* визначається аналогічно:

$$MQ_K = \frac{\partial Q}{\partial K}.$$

Розглянемо коефіцієнти еластичності, що використовують для аналізу ВФ. Це безрозмірні коефіцієнти, що характеризують процент приросту обсягу продукції, що виробляється, при збільшення витрат ресурсу на 1%. *Коефіцієнт еластичності продукції за фондами* визначається за формулою

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q}.$$

Оскільки при незмінному обсязі витрат праці відносному збільшенню обсязі основних фондів на $\frac{\Delta К}{К}$ відповідає відносне збільшення виробництва продукції на $\frac{\Delta Q}{Q}$, то відносний приріст випуску продукції складе $\frac{\partial Q / Q}{\partial L / L}$, перейшовши тут до границі при $\Delta К \to 0,$ отримаємо вираз для еластичності продукції по фондам.

*Еластичність продукції за працею* визначається за формулою:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q}.$$

Для ВФ Кобба-Дугласа її параметри $\alpha, \beta$ є коефіцієнтами еластичності і не залежать від величини факторів $K, L$, а саме $\mathrm{E}_K = \alpha, E_L = \beta$. Тому для цієї ВФ коефіцієнти $\alpha, \beta$ є сталими і не залежать від $K$,$L$.

Крім умов, включених у означення виробничих функцій, на ВФ залежно від її виду накладають додаткові обмеження.

*Властивість однорідності* полягає у тому, що при збільшенні витрат всіх ресурсів в однакову кількість разів *w* обсяг виробленої продукції зростає у кратну *w* кількість разів:

$$Q(wK, wL) = w^r Q(K, L)$$

для довільного *w*>1. Показник степеню $r$ називають *степенем однорідності функції* $Q$, він характеризує ефект розширення масштабу виробництва: якщо виконується умова $r > 1$, то збільшення всіх ресурсів у *w* разів приводить до зростання обсягу виробництва більше, ніж у *w* разів, тобто ефект масштабу є позитивним. Якщо $r < 1$, то приріст факторів у *w* разів забезпечує менше ніж *w*-кратне зростання обсягу виробництва, тобто ефект масштабу є негативним.

Часто на практиці спостерігаються лінійно-однорідні виробничі функції. для яких $r = 1$, тобто $Q(wK, wL) = wQ(K, L)$. У цьому випадку ефекту збільшення масштабу виробництва не спостерігається.

Властивість необхідності всіх ресурсів полягає у тому, що при відсутності хоча б одного ресурсу виробництва продукції відсутнє, тобто

$Q(0, L) = Q(K, 0) = 0.$

Властивість обмеженого зростання означає полягає у тому, що при зростання величини ресурсу від 0 до деякого скінченного значення відбувається стрімке зростання обсягу виробництва, який з подальшим зростанням ресурсу поступово зменшується до нуля, тобто можна записати наступні умови: $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0,$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial Q}{\partial x} = \infty.$ Ця умова виражає неефективність резервування ресурсів.

Розглянемо властивість еластичності ресурсів. Лінійно-однорідні ВФ можна подати у вигляді:

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial Q}{\partial L} L. \quad (4.6)$$

Економічно цю рівність можна пояснити наступним чином. Нехай власник підприємства інвестує капітал у виробництво до тих пір, доти додатковий дохід $\frac{\partial Q}{\partial K}$ не досягне прийнятої у даній економічній системи норми прибутку, а величина добутку норми прибутку $\frac{\partial Q}{\partial K}$ на вкладений капітал $K$ – це доход власника підприємства. Аналогічно, наймаючи робітників, він збільшує їх чисельність доти, дока додатковий дохід $\frac{\partial Q}{\partial L}$, що приносить новий робітник, не досягне величини його заробітної плати, тобто величина $\frac{\partial Q}{\partial L} L$ – це дохід працівників, загальна численність яких дорівнює $L$.

Для теорії виробництва рівняння (4.1) означає, що обсяг виробленої продукції складається з частин, вироблених за рахунок використання кожного ресурсу окремо. Поділивши обидві частини рівності (4.6) на $Q$, отримаємо:

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} + \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = E_K + E_L,$$

тобто для лінійно однорідної функції коефіцієнти еластичності лежать у межах від 0 до 1, якщо хоча б один з них більший нуля. Для однорідної функції $E_K + {}$ ${}+E_L = r$, тобто сума коефіцієнтів еластичності дорівнює степені однорідності функції. Отже, отримана важлива властивість ВФ Кобба-Дугласа [6]: сума її коефіцієнтів еластичності дорівнює показнику ефекту розширення масштабу: $E_K + E_L = r$.

### 4.3 Ефекти розширення масштабу виробництва та заміщення ресурсів

Вище було показано, що ефект розширення масштабу виробництва визначається множником $w^r$, для однорідної функції при $r > 1$ ефект масштабу позитивний, при $r < 1$ він є негативним.

Середню числову характеристику ефекту масштабу можна визначити аналогічно коефіцієнтам еластичності обсягу виробництва за виробничими факторами [8]:

$$\frac{\partial Q(wx)}{\partial w} \cdot \frac{w}{Q(wx)},$$

а, перейшовши до границь, отримаємо вираз для коефіцієнта еластичності виробництва:

$$E_w = \lim_{w \to 1} \frac{\partial Q(wx)}{\partial w} \cdot \frac{w}{Q(wx)}. \quad (4.7)$$

Еластичність виробництва характеризує приріст продукції при деяких значеннях витрат ресурсів (локальний ефект масштабу), оскільки зміни структури ресурсів вважаються нескінченно малими ($w \to 1$) [2]. Диференціюючи вираз $Q(wx) = Q(wx_{1,}wx_2, \dots, wx_n)$, як складену функцію змінної $w$, отримаємо:

$$\frac{\partial Q(wx)}{\partial w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(wx)}{\partial (wx_i)} x_i. \quad (4.8)$$

Підставивши (4.4) у (4.3), отримуємо:

$$E_w = \lim_{w\to 1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q(wx)}{\partial(wx_i)}\right)x_i\right]\frac{w}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{Q} = \sum_{i=1}^{n}E_{x_i}.$$

Таким чином, коефіцієнт еластичності виробництва дорівнює сумі коефіцієнтів еластичності обсягу виробництва за ресурсами виробництва. З врахуванням рівності (4.8) приходимо до наступного висновку: коефіцієнт еластичності виробництва дорівнює показнику ефекту розширення масштабу виробництва [7] .

Розглянемо ефект заміни ресурсів. Особливість реальних виробничих процесів полягає у теоретичній можливості заміщення одним фактором іншим. Наприклад, існує абстрактна можливість замінити одиницю виробничого обладнання еквівалентним за величиною фондовіддачі кількістю одиниць праці. Проте дуже часто на практиці це неможливе. Для випадку двофакторної ВФ числова характеристика ефекту заміни показує, на яку величину $dx_2$ зменшиться витрата другого ресурсу, якщо збільшити обсягів витрат першого ресурсу на $dx_1$, щоб при цьому об'єм виробництва $Q$ залишився незмінним.

*Граничною нормою заміщення* $S_{x_1x_2}$ одного ресурсу іншим називають величину [8]

$$S_{x_1x_2 = -\frac{dx_2}{dx_1}},$$

яка показує, який обсяг ресурсу звільнюється при збільшенні ресурсу-замінника на одиницю. З умови незмінності обсягу виробництва продукції при заміщенні факторів випливає:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}dx_2 = 0.$$

Отже, гранична норма дорівнює відношенню граничних продуктів факторів, тобто

$$S_{x_1x_2,} == \frac{\partial Q/_{\partial x_1}}{\partial Q/_{\partial x_2}} = \frac{MQ_1}{MQ_2}. \qquad (4.9)$$

У цьому випадку $x_2$ – це фактор, що заміщують, $x_1$ – фактор, який заміщує. З рівності (4.9) випливають, що обсяг $x_2$ ресурсу, що вивільняється, у розрахунку на одиницю ресурсу $x_1$ є тим більше, чим більша гранична продукція фактору що заміщує, у порівнянні з граничною продукцією фактору, якого заміщують. У протилежній ситуації норма заміщення визначається аналогічно, з врахуванням співвідношення:

$$S_{x_1x_2}\cdot S_{x_2x_1} = 1.$$

Для ВФ Кобба-Дугласа отримуємо граничну норму заміщення за формулою (4.9). Маємо:

$$\text{К}\frac{\partial Q}{\partial L} = \beta\,\frac{Q}{L};\ \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha\,\frac{Q}{K},\ S_{Lk} = \frac{\partial Q/_{\partial L}}{\partial Q/_{\partial K}} = \frac{\beta}{\alpha\cdot}\frac{K}{L}.$$

Можливість заміщення ресурсів один одного характеризує ВФ з точки зору різних комбінацій витрат ресурсів, що забезпечує рівні обсяги виробництва продукції. Кількісною характеристикою темпу зміни граничної норми заміщення у просторі ресурсів є *еластичність заміни ресурсів* [6]:

$$\sigma_{x_1x_2} = \frac{\partial\left({}^{x_1}/_{x_2}\right)}{\partial S_{x_1x_2}} \cdot \frac{S_{x_1x_2}}{{}^{x_2}/_{x_1}}. \qquad (4.10)$$

Еластичність заміни показує, на скільки процентів повинне змінитися співвідношення ресурсів при сталому обсязі виробництва при зміні граничної норми заміни на 1%. Відповідно до характеру зміни коефіцієнту еластичності заміни розрізняють два класи виробничої функції:

1) ВФ зі змінною еластичністю заміни;
2) ВФ зі сталою еластичністю заміни.

Найбільшою практичною значимістю має ВФ зі сталою еластичністю заміни [6]. Для неї можливі два характерні випадки: $\sigma_{x_1x_2}=\infty$, тобто границі взаємозаміни ресурсів відсутні, $\sigma_{x_1x_2}=0$, тобто ресурси взаємно доповняють один одного та використовуються у строго визначеному співвідношенні.

## 4.4 Ізокванти виробничої функції

*Ізолінії* виробничої функції – це криві, у всіх точках якої функція має стале значення , тобто це лінії рівня функції [7]. Розглянемо координатну площину *KOL*, положення точки *(K,L)* відповідає певному рівню забезпечення виробництва ресурсами: капіталом *K* та працею *L*.

*Ізоквантою* називають геометричне місце точок плоскості *KOL* ресурсів, для якої обсяг виробництва продукції є сталою величиною:

$Q(K,L) = Q_C = const.$

Рівняння ізокванти можна записати і у явному вигляді: $L = f(K, Q_C)$. Наприклад, для ВФ Кобба-Дугласа у явному вигляді: $L = \sqrt[\beta]{\frac{Q_C}{AK^\alpha}} = \sqrt[\beta]{\frac{Q_C}{A}} \cdot \frac{1}{K^{\alpha/\beta}}$. Економічний зміст ізокванти полягає у тому, що крива показує обсяг трудових ресурсів, необхідних для отримання продукції $Q_C$ у залежності від наявного капіталу. Наведемо основні властивості ізокванти.

1. Якщо всі ресурси є необхідними для виробництва, то нема такого значення обсягу виробництва $Q_C$, для якого ізокванта має спільні точки з осями координат. Ця властивості випливає з умови необхідної всіх ресурсів для виробництва.
2. Більшому значенню обсягу виробництва відповідає більша віддалена від початку координат ізокванта, що випливає з умови однорідності.
3. Ізокванти, що відповідають різним значенням $Q_C$, не перетинаються.

*Ізокліною* називають множину точок площини ресурсів, у яких нахил ізокванта при різних значеннях обсягу виробництва продукції залишається сталим, оскільки нахил графіка функції виражає її похідна, то ізокліна – це множина точок, у яких

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = S_{x_1x_2} = const = S_C.$$

Тут використали позначення ресурсів $x_1, x_2$. Отже, звідси випливає, що геометричний зміст норми заміщення полягає в тому, що вона дорівнює тангенсу кута, що утворює дотична до ізокванти з додатним напрямом осі абсцис.

Для ВФ Кобба-Дугласа, як було показано вище, гранична норма заміщення є пропорційною значенню коефіцієнту фондоозброєності $K/L$:

$$S_{LK} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L},$$

тобто чим більшою є величину основного капіталу (фондів) у розрахунку на одного працівника має підприємство, тим більша частина капіталу може бути звільнена та інвестована в інший проєкт при збільшенні персоналу на одного працівника [8].

Отже, рівняння ізокліни ВФ Кобба-Дугласа визначається наступним кутовим коефіцієнтом:

$$S_{LK} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L} = S_C.$$

Аналогічним чином можна здійснити аналіз інших типів виробничих функцій.

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 4**

1. Розкрийте на конкретних прикладах зміст поняття еластичності.
2. Поясніть призначення та роль у економічних дослідженнях показника еластичності.
3. Наведіть формули для обчислення коефіцієнтів еластичності обсягів виробництва за факторами виробництва.
4. Поясніть зміст граничних показників.
5. Поясніть, що така еластичність заміни ресурсів.
6. Назвіть основні середні показники, пов'язані з виробничою функцією та розкрийте їх зміст.
7. Поясніть, у чому полягають ефекти розширення масштабу виробництва та заміщення ресурсів та як можна застосувати на підприємстві ці ефекти.
8. Розкрийте зміст понять ізоклін та ізоквант.

Розв'яжіть наступні завдання.

**1.** На фабриці, що виробляє взуття, 5 працівників працюють на 5 верстатів і виробляють 1000 пар взуття за місяць. Якщо коефіцієнти еластичності ресурсів дорівнюють α=0,25; β=0,75, знайти норму заміни на цьому підприємстві, тобто скільки можна скоротити працівників при придбанні додатково 1 верстату, щоб обсяг виробництва залишився незмінним.

**2.** Перевірити, що для виробничої функції $F_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_2\left(2x_1^2 + x_2^2\right)}{3x_1^2 + x_2^2}$ граничний продукт $MP_2$ спадає, а середній продукт $AP_2$ не спадає.

**3.** На конвейєрі збирають телевізори шляхом з'єднання корпусу та кінескопа, тобто маємо фіксовані пропорції використання ресурсів ($c_1$=$c_2$=1). Виробничою функцією підприємства є функція Леонтьєва. Якщо на конвеєр надійшло 200 корпусів та 500 кінескопів у місяць, то буде зібрано 200 телевізорів. Знайдіть у цьому випадку граничну продукцію першого ресурсу (корпуса) та граничну продукцію другого ресурсу (кінескопу). Побудувати криву виробництва (залежності обсягу виробництва) від кількості корпусів, що надійшло, при фіксованій кількості кінескопів (500 штук).

**4.** Для лінійної виробничої функції $X = a \cdot K + b \cdot L$, $a > 0$, $b > 0$, побудувати ізокванти та ізокліналі. Знайти норми заміщення праці капіталом та капіталу працею.

**5.** Визначити граничну фондовіддачу та граничну продуктивність праці у економічній системі, функціонування якої описується виробничою функцією $X = F\left(K, L\right) = 1500 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,7}$, якщо вартість основних виробничих фондів $K = 3200$ у.г.о., витрати на оплату праці $L = 1000$ у.г.о.

**6.** Для виробничої функції $X = 1200 \cdot K^{0,4} \cdot L^{0,6}$ визначити еластичність виробництва за працею та за капіталом.

**7.** Виробнича функція має вигляд: $X = 0,931 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594}$. За деякий період часу обсяг виробництва збільшився у 4,08 рази, основні виробничі фонди – у 6,62 рази, кількість працівників – у 1,79 рази. Яка частина зростання обсягу виробництва пояснюється зростанням його масштабу, а яка – зростанням його ефективності?

**8.** Записати рівняння ізокліналей для виробничої функції з попереднього завдання.

**9.** Виробнича функція Леонтьєва визначається рівністю $X = \min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\}$, де $a$ та $b$ – відповідна кількість одиниць капіталу та одиниць праці, необхідних для виробництва одиниці продукції. Побудувати ізокванти та ізокліналі виробничої функції Леонтьєва при $a = 5,\ b = 3$.

**10.** Підприємство за останні 3 роки показало наступні результати, наведені у таблиці.

| Рік | Кількість метала, тис. т | Кількість Верстатів, од. | Персонал, тис. людей |
|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 10 | 0,8 |
| 2 | 30 | 20 | 1,8 |
| 3 | 50 | 30 | 2,8 |

Визначити коефіцієнти виробничої функції, якщо відомо, що вона є лінійною. Об’яснити економічний зміст її коефіцієнтів. Спрогнозувати обсяг виробництва металу на 4-й рік, якщо кількість верстатів планується довести до 40 одиниць, а чисельність працівників – до 3,5 тис. людей.

## Розділ 5. Оптимізація виробничих витрат

### Лекція 5. Моделювання виробничих витрат у довготерміновому періоді

**Мета лекції:** надати студентам знання про основні принципи та методи моделювання виробничих витрат у довготерміновому періоді

**План**

1. Витрати підприємства.
2. Функції витрат у довготерміновому періоді
3. Довготермінові витрати та розширення масштабу виробництва
4. Функція витрат у короткотерміновому періоді
5. Функція витрат при змінному ефекті розширення обсягу виробництва

**Ключові терміни та поняття:** функція витрат, ізокоста, змінні витрати, сталі витрати, функція попиту на ресурси, довготермінові витрати, короткотермінові витрати.

### 5.1 Витрати підприємства

Витрати *C* підприємства залежать від кількості $x_i$ $i$=1, 2,…, $n$ ресурсів, що воно використовує, та цін на них, $p_i$, $i=1, 2,..., n$ .Вони є вартісними оцінками витрат всіх ресурсів, тобто $x_i p_i$ , $i$=1, 2,…, $n$, що використовують для виробництва даного виду продукції за умови, що невиробничі витрати відсутні, тобто вибрана технологія мінімальних можливих витрат:

$$\min_x C(x_1, x_2) = \min_x (p_1 x_1 + p_2 x_2),$$
$$A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q, x_i \geq 0, i = 1,2.$$

Функцію $C(x, p)$, що задовольняє ці умови, називають *функцію витрат*. Функція витрат характеризує мінімальну суму витрат як функцію обсягу виробництва та цін ресурсів, тобто функція витрат характеризує мінімальну суму витрат на виробництво фіксованого обсягу виробництва Q за умови, що підприємство використовує оптимальні комбінації ресурсів $C(Q) = \sum_i p_i x_i^*$, де символом $^*$ позначені витрати ресурсів при найбільш економічному способі виробництва.

Множину точок площини ресурсів при сталому сумі витрат підприємства *C* називають *ізокостою:* $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$.

У явному вигляді рівняння *ізокости* можна записати у вигляді:

$$x_2 = \frac{C}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

Збільшення суми витрат приводить до паралельного зсуву ізокости у напряму вгору та вправо від початку координат. Вплив цін на ресурси на положення ізокости проявляється у тому [9], що змінюються кутовий коефіцієнт нахилу ізокости, наприклад, при незмінній ціні другого ресурсу зниження ціни першого ресурсу спричиняє зменшення нахилу ізокости відносно осі першого ресурсу. Це означає, що при незмінному обсязі витрат другого ресурсу перший ресурс буде витрачатиметься тим більше, чим нижчою є його ціна. У подальшому будемо вважати, що для виробництва продукції будуть використовувати лише два види ресурси: $x_1 = L$ – трудові ресурси та $x_2 == K$ – основні виробничі фонди.

Розглянемо класифікацію витрат. З точки зору тривалості періоду часу розрізняють витрати у довгостроковому періоді (*довгострокові витрати*), що позначають $C_L$, та витрати у короткостроковому періоді чи *короткострокові витрати* $C_S$. У довгостроковому періоді всі ресурси є змінними. У короткостроковому періоді частина ресурсів є сталими, тобто їх кількість не може бути змінено на протязі цього періоді. У короткостроковому періоді витрати можна розділити на два види: *змінні витрати* $C_V$, що змінюються при зміні обсязі виробництва, а також *сталі витрати* $C_F$, що не залежать від величини обсягу виробництва. До змінних витрат відносять витрати на сировину, матеріали, оплату праці виробничого персоналу, до сталих витрат – витрати на утримання споруди, обладнання, адміністративні витрати, орендна плата, податки.

Отже, у короткому періоді часу витрати є сумою сталою та змінними витратами:

$$C_s(Q) = C_F + C_V(Q). \quad (5.1)$$

Для аналізу витрат використовують такі показники як граничні та середні витрати.

*Граничні витрати* $MC$ характеризують зміну витрат, викликану зміною обсягу виробництва на одиницю продукцію, і визначаються рівністю:

$$MC(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ} \approx \frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}.$$

Тут символ $\Delta$ використають для позначення приросту величини. Цей показник $MC$ застосовують при аналізі витрат і в довготерміновому періоді, і у короткотерміновому періоді. Оскільки сталі витрати не залежать від обсягу виробництва, то короткотермінові граничні витрати з врахуванням (5.1)можна подати у вигляді:

$$MC_s(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}[C_F + C_V(Q)] = \frac{dC_V(Q)}{dQ}.$$

З цієї рівності зрозуміло, що короткотермінові граничні витрати характеризують приріст змінних витрат при одиничному приросту обсягу виробництва продукції.

*Середні витрати* $AC$ показують витрати на одиницю виробленої продукції:

$$AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$

З врахуванням (5.1) короткотермінові середні витрати можна подати у вигляді:

$$AC_S(Q) = \frac{C_S(Q)}{Q} = \frac{C_F + C_V(Q)}{Q} = \frac{C_F}{Q} + c_v.$$

Тут $c_v$ – питомі змінні витрати, тобто змінні витрати на одиницю продукцію.

Звідси випливає, що короткотермінові витрати зменшуються зі збільшенням обсягу виробництва продукції, тобто спостерігається економія на розширенні виробництва у короткостроковому періоду.

## 5.2 Функції витрат у довготерміновому періоді

Функція витрат визначається у результаті розв'язання задачі мінімізації витрат на виробництво фіксованого сталого обсягу виробництва продукції $Q$. Цю задачу подаємо у вигляді [9]:

$$\min_x C(x_1, x_2) = \min_x (p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

Для ВФ Кобба-Дугласа за умови $Q = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta},\ x_i \geq 0, i = 1, 2$. У загальному вигляді мінімізація здійснюється при наявності обмеження у вигляді виразу для відповідної виробничої функції, де обсяг виробництва $Q$ є сталим.

Ця задача має наглядну геометричну інтерпретацію. Якщо переміщувати ізокосту у напрямі до початку координат доти, доки вона має спільні точки з ізоквантою, що відповідає фіксованому обсягу виробництва $Q_1$, то розв'язком задачі мінімізації є точка перетину $A$ ізокости та ізокванти. Множина всіх таких точок при різних значень обсягу виробництва Q утворюють *лінію довготермінового розвитку підприємства*. Точки, що знаходяться на цій лінії, характеризують мінімальні витрати виробництва, що відповідають фіксованим сталим обсягам виробництва продукції [9]. Можна довести, що для лінії довготермінового розвитку підприємства, утвореної точками комбінацій ресурсів, відношення граничних продуктів при даному виді виробничої функції дорівнює відношенню їх цін, тобто для цих точок виконується рівністю:

$$\frac{MQ_1}{MQ_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{5.2}$$

Виразимо відомий фіксований обсяг виробництва $Q$ у точці ринкової рівноваги через оптимальні обсяги використаних ресурсів. Розглянемо виробництво, що моделюється ВФ Кобба-Дугласа. Тоді

$$Q = A(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{\beta}. \tag{5.3}$$

Підставимо вирази граничних продуктів $MQ_1$та $MQ_2$ в умови мінімальності витрат (5.2) і знайдемо $x_2^*$. Отримаємо:

$$\frac{A\alpha(x_1^*)^{\alpha-1}(x_2^*)^{\beta}}{A(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2} \to x_2^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} x_1^* = h x_1^*, \tag{5.4}$$

де $h = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}$. Підставивши $x_2^*$ з (5.4) у ВФ (5.3), знаходимо $x_1^*$ як функцію обсягу виробництва:

$$Q = A\left(x_1^*\right)^{\alpha}\left(hx_1^*\right)^{\beta} \Rightarrow x_1^* = \left(\frac{Q}{h^{\beta} A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \tag{5.5}$$

Вираз для $x_2^*(Q)$ знайдемо, використовуючи (5.4):

$$x_2^* = h \cdot x_1^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \cdot \left( \frac{Q}{h^\beta A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \qquad (5.6)$$

Знайдені значення $x_1^*(Q)$, $x_2^*(Q)$ є *функціями попиту* на ресурси. Вони дозволяють при відомому обсязі виробництва Q визначити необхідні кількості ресурси, при яких досягаються мінімальні витрати.

Знайдемо функцію витрат як функцію Q. Для цього підставимо вирази для $x_1^*(Q)$, $x_2^*(Q)$ у вираз для функції витрат: $C(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$:

$$C(Q) = p_1 \left( \frac{Q}{h^\beta A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + p_2 \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \cdot \left( \frac{Q}{h^\beta A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

$$C(Q) = p_1 \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left[ A \left( \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = D Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \qquad (5.7)$$

$$D = p_1 \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left[ A \left( \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Вираз (5.7) – це функція витрат, що є функцією обсягу виробництва, а не функцією витрачених ресурсів. Отримана функція відповідає великому терміну планування, тобто $C(Q) = C_L(Q)$.

У випадку відсутності ефекту збільшення масштабу $r = \alpha + \beta = 1$ функція витрат є лінійною функцію обсягу виробництва, що випливає з (5.7). Графік функції затрат є опуклою вгору при $r > 1$. Це означає, що при збільшенню обсягу виробництва відбувається відносне зменшення витрат, тобто спостерігається позитивний ефект розширення масштабу виробництва. У випадку $r < 1$ графік функція витрат є опуклий вниз, що відповідає швидшому зростанню темпу зростання витрат у порівнянні зі зростанням обсягу виробництва.

### 5.3 Довготермінові витрати та розширення масштабу виробництва

Найважливішим фактором, що визначає конфігурацію кривої $C_L(Q)$, є величина ефекту від масштабу виробництва. Для виробничої функції Кобба-Дугласа ця величина визначається значенням показника $r = \alpha + \beta$. У випадку $r = 1$, то крива витрат$C_L(Q)$ має вид променю, що виходить з початку координат, тобто довготермінові витрати зі збільшенням обсягу виробництва збільшуються у тій же пропорції, у якій зростає обсяг виробництва [6].

Розширення масштабу виробництва пов’язане з кратним збільшенням ресурсів, що використовує. Тому

$$(wx_1, wx_2) \Rightarrow \begin{cases} p_1(w_1 x_1^*) + p_2(w x_2^*) = wC_L, \\ Q\left(wx_1^*, wx_2^*\right) = wQ\left(x_1^*, x_2^*\right). \end{cases}$$

Сума витрат, та обсяг виробництва продукції збільшується у $w$ разів.

При зростанні віддачі від витрат, тобто при $r > 1$:

$$\left(wx_1, wx_2\right) \Rightarrow \begin{cases} p_1(w_1 x_1^*) + p_2(w x_2^*) = wC_L, \\ Q\left(wx_1^*, wx_2^*\right) = w^r Q\left(x_1^*, x_2^*\right). \end{cases}$$

Оскільки у цьому випадку $w^r > w$, то зростання обсягу виробництва випереджує зростання витрат. Зауважимо, що витрати зі збільшенням виробництва і у цьому випадку теж зростають, але зростають повільніше.

При $r < 1$ спостерігаємо зменшення віддачі від масштабу виробництва у цьому випадку $w^r < w$, тобто при незмінних цінах витрати зростають швидше, ніж обсяг виробництва [6].

Розглянемо довготермінові середні та граничні витрати. Довготермінові середні витрати визначається наступним чином:

$$AC_L(Q) = \frac{C_L(Q)}{Q} = DQ^{\frac{1}{r}-1}. \tag{5.8}$$

Довготермінові витрати визначаються за означенням граничних витрат:

$$MC_L(Q)=\frac{\partial C_L(Q)}{\partial Q} = \frac{1}{r} DQ^{\frac{1}{r}-1} = \frac{1}{r} AC_L(Q). \tag{5.9}$$

З порівняння формул (5.8) та (5.9) видно, що форми графіків довготермінових граничних та середніх витрат однакові, відрізняються розташуванням з-за множника $1/r$. Якщо $\frac{1}{r} = 1$, то ці графіки співпадають, при $\frac{1}{r} > 1$, крива $MC_L(Q)$ розташована вище кривої середній витрат $AC_L(Q)$, у випадку $\frac{1}{r} < 1$, графік $MC_L(Q)$ знаходиться під графіком $AC_L(Q)$.

Позитивний ефект масштабу виробництва полягає у тому, що величини середніх та граничних витрат зменшуються зі збільшенням обсягу виробництва, причому зменшення граничних витрат відбувається з випередженням.

### 5.4 Функція витрат у короткотерміновому періоді

У короткотерміновому періоді кількості деяких ресурсів не може бути змінено. Будемо вважати, що у двофакторній моделі виробництва кількість другого ресурсу залишається сталою: $x_2 = b_2 = const$. Тоді задача мінімізації короткотермінових витрат при сталому фіксованому обсязі $Q$ виробництва має вигляд:

$$\min_{x_1} C\left(x_{1,}, x_2\right) = \min_{x_1}(p_1 x_1 + p_2 x_2),$$
$$Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q, x_1 \geq 0, x_2 = b.$$

Ця задача має просту геометричну інтерпретацію. Якщо переміщати ізокости у напрямі до початку координат, пока ізокоста не перетне ізокванту, що відповідає обсягу виробництво Q, у точці її перетину з лініями сталого ресурсу, то розв'язком задачі мінімізації витрат буде спільна точка ізокости $C_3$, фіксованої ізокванти $Q$ та лінії сталого ресурсу. Довготермінові витрати $C_3$ при том же обсязі виробництва Q визначаються точкою дотику ізокости $C_3$ та фіксованої ізокванти $Q$ у точці з координатами $(x_1^*,\ x_2^*)$, при цьому довготермінові витрати не перевищують суми короткотермінових витрат, оскільки ізокоста $C_3$ розташована не вище ізокости $C_2$. Таким чином, витрати на випуск одного й того ж обсягу виробництва у довготерміновому періоді не більше, ніж у короткотерміновому періоду. Ці виробничі витрати можуть бути і рівними між собою. Можна показати, що сума витрат у довготерміновому періоді не більше, ніж у короткотерміновому періоді при необмеженому збільшенні наявного обсягу ресурсу.

Розглянемо аналітичне розв’язання задачі мінімізації короткотермінових витрат при сталому обсязі виробництва. Для визначення величини ресурсів $x_1$ потрібно розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q; \\ x_2 = b_2. \end{cases}$$

Перше рівняння цієї системи характеризує фіксовану ізокванту Q, а другу – лінію сталого ресурсу. Шукане значення $x_1$ дорівнює:

$$x_1^{\alpha} = \frac{Q}{Ab_2^{\beta}} \to x_1(Q) = \left(\frac{Q}{Ab_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{Ab_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Q^{\frac{1}{\alpha}} = gQ^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (5.10)$$

Тут $g = \left(\frac{1}{Ab_2^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Формула (5.10) дозволяє розрахувати потрібну кількість змінного ресурсу $x_1(Q)$, що забезпечує зі сталим ресурсом $x_2$ обсяг виробництва $Q$. При цьому кількісті ресурсів $x_1(Q)$, $x_2 = b$ дозволяють підприємству виробляти обсяг $Q$ з мінімальними витратами. Визначим ці витрати:

$$C_S(Q) = p_1 x_1(Q) + p_2 b_2 = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha}} + p_2 b_2. \qquad (5.11)$$

Перший доданок у функції короткотермінових витрат є сумою змінних витрат, а другий – відображає внесок сталих короткотермінових витрат.

### 5.5 Функція витрат при змінному ефекті розширення обсягу виробництва

Перед цим ми вважали, що показник ефекту масштабу $r$ не залежить від обсягу виробництва. Проте у багатьох виробничих процесах зростаюча віддача від розширення масштабу виробництва $(r > 1)$ змінюється при досягненні певного обсягу виробництва спочатку сталою віддачою $(r = 1)$, а потім спадною $(r < 1)$. Виробничій функції зі змінним типом віддачі від розширення масштабу виробництва відповідає зміна форми кривих витрат [9] .

Знайдемо аналітичний вираз функції довготермінових витрат з врахуванням формули (5.7):

$$C_L(Q) = DQ^{\frac{1}{r(Q)}}. \qquad (5.12)$$

Для випадку, коли показник степеню однорідності є лінійно спадною функцією обсягу виробництва. Його максимальне значення $r_{max}$ при обсязі виробництва $Q_{min}$.спадає до мінімального значення $r_{min}$ при $Q_{max}$. Можна показати, що графік функції сукупних витрат при значенні $Q$, що відповідає значення $r = 1$, має точку перегину. До цього значення аргументу, графік є опуклим вгору, після нього він стає опуклим вниз [9]. Тому криву довготермінових витрат при змінному ефекті розширення масштабу виробництва називають «S-подібною» кривою у зв'язку з її виглядом.

Розглянемо функцію витрат у короткотерміновому періоді. З врахуванням формули (5.11) вираз суми таких витрат можна перетворити до вигляду:

$$C_S(Q) = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha(Q)}} + p_2 b_2.$$

Середні значення довготермінових витрат отримаємо, поділивши функцію витрат (5.12) на $Q$. Отже, розрахункова формула для довготермінових середніх витрат має вигляд:

$$AC_L(Q) = \frac{1}{Q} C_L(Q) = DQ^{\frac{1}{r(Q)}-1}.$$

Аналогічно, отримуємо формулу для розрахунку середніх короткотермінових витрат:

$$AC_S(Q) = \frac{C_S(Q)}{Q} = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha(Q)}-1} + \frac{p_2 b_2}{Q}.$$

У цьому виразі перший доданок характеризує середні змінні витрати $AC_V$, а другий доданок – середні сталі витрати $AC_F$. Показник степеню $\frac{1}{r(Q)} - 1$ у формулі для середніх довготермінових витрат визначає поведінку графіка функції довготермінових середніх витрат: якщо $\frac{1}{r(Q)} - 1 < 0$, тобто при значеннях $r(Q) > 1$, крива довготермінових середніх витрат є спадною. При $r(Q) = 1$, тобто виконується рівність $\frac{1}{r(Q)} - 1 = 0$, функція довготермінових середніх витрат є сталою, при всіх значеннях аргументу її значення дорівнює $D$. При $r(Q) < 1$ маємо $\frac{1}{r(Q)} - 1 > 0$, тому крива середніх довготермінових витрат є зростаючою.

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 5**

1. Наведіть класифікацію витрат підприємства.
2. Поясніть, що таке функція витрат і як її побудувати. Яка інформація для цього потрібна?
3. Наведіть геометричну інтерпретацію функції витрат у довготерміновому періоді.
4. Поясніть, як визначають довготермінові середні та граничні витрати.
5. Розкрийте зміст та призначення лінії довготермінового розвитку підприємства.
6. Вкажіть математичні методи розв'язання задач мінімізації витрат.
7. Поясніть, чим функція витрат при змінному ефекті розширення обсягу виробництва відрізняється від аналогічної функції для сталого ефекту розширення виробництва.
8. Запишіть функції витрат у довготерміновому та короткотермінових періодах.

Розв'яжіть наступні завдання.

**1.** Підприємство, що займається виробництвом тканини, використається 2 видами ресурсами: пряжею за ціною 10 г.о./кг та робочу силу, оплата праці щомісячно 1 працівника складає 2000 г.о. у місяць. Побудуйте ізокости для щомісячних витрат 100 тис. г.о., 200 тис. г.о. Визначте, для щомісячних затрат 100 тис. г.о. при споживанні 5 тон пряжі, скільки потрібно бути працівників? Якщо підприємство готове збільшити щомісячні витрати до 200 тис. г.о., скільки працівників воно може найняти?

**2.** Завод, що виробляє скло, покупає сировину для виробництва: пісок по ціні 4 тис. г.о./т та паливо по ціні 7 тис. г.о./т. Визначити характер кривих довготермінових витрат$C_L(Q)$при різних типах ефекту розширення масштабів виробництва: відсутній ефект розширення масштабу виробництва($\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; зростаюча віддача від розширення масштаба ($\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}8$; спадна віддача від розширення масштабу виробництва ($\alpha = 0{,}2$; $\beta = 0{,}6$). Значення коефіцієнту $\mathrm{A} = 1$, Використовуючи побудований графік, визначити величину витрат заводу, що працює в економному режимі при виробництві 4 тон скла у місяць, якщо ефект розширення масштабу відсутній.

**3.** В умовах попередньої задачі побудувати та проаналізувати графіки $AC_L(Q), MC_L(Q)$. Розглянути випадки сталої віддачі від розширення масштабу виробництва $(r = 1)$ , зростаючої віддачі від розширення масштабу виробництва $(r > 1)$ та спадної віддачі від розширення масштабу виробництва $(r < 1)$.

**4.** Для підприємства з попереднього прикладу, визначити витрати у випадку, коли поставки палива обмежені 2 тони на місяць при відсутності ефекту розширення масштабу $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$, якщо обсяг виробництва скла склав 4 тони.

**5.** На підприємстві для виробництва продукції використовують сировину $A_1$ по ціні 20 г.о. за 1кг та сировину $A_2$, ціна якої складає 30 г.о.за 1 кг. Коефіцієнти еластичності виробництва по ресурсам складають відповідно $\frac{1}{7}$ та $\frac{1}{6}$. 1) Визначити функції попиту на ресурсу та функцію витрат, якщо споживання ресурсів не обмежене, а технологія виробництва моделюється ВФ Кобба-Дугласа. Побудувати графіки цих функцій. 2) Розв'яжіть цю задачу, якщо за умовами договором з постачальником постачання сировини $A_2$, обмежене 500 кг на місяць. Визначити функції середніх витрат для випадку 1) та 2).

## Розділ 6. Теорія діяльності комерційного підприємства

### Лекція 6. Моделювання раціональної комерційної діяльності

**Мета лекції:** з'ясувати мету та задачі моделювання раціональної комерційної діяльності

**План**

1. Раціональна комерційна діяльність
2. Раціональна діяльність підприємства в умовах досконалої конкуренції
3. Аналіз беззбитковості

**Ключові терміни та поняття:** комерційне підприємство, ізопрофіта, досконала конкуренція, беззбитковість, критичний обсяг виробництва

## 6.1 Раціональна комерційна діяльність

*Комерційне підприємство* – це самостійно суб'єкт господарської діяльності, створений для виробництва продукції, виконання робіт, надання послуг з метою отримання прибутку. В процесі комерційної діяльності підприємство витрачає економічні фактори (придбані ресурси) і реалізує створені товари, виконані роботи чи надані послуги.

Перед підприємством стоїть задача вибору раціонального (найвигіднішого) способу здійснення комерційної діяльності. В умови цієї задачі входять [10]: 1) вектор цін на фактори виробництва $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, що визначаються ринковою рівновагою, а не самим підприємством; 2) номенклатура ресурсів виробництва $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_п)$, 3) виробнича функція $Q = Q(\bar{x})$, 4) рівень ціни продукції підприємства, що визначається ринковою рівновагою, 5) характеристики ринка, що визначають формування цін на товар та ресурси: ринок досконалої конкуренції при великій кількості взаємно незалежних підприємств, що виробляють стандартизовану продукцію, не впливаючи на рівень цін на неї; недоскональна конкуренція (монополістична конкуренція, олігополія, монополія); 6) тривалість періоду: довготерміновий період на протязі якого підприємство має можливість вибирати будь-який невід'ємний вектор витрат $\bar{x} \geq 0$; короткостроковий період, у межах можливий вибір вектора витрат, обмежений $\bar{x} \leq \bar{b}$.

Основна задача комерційного підприємства (надалі говорячи про підприємство, маємо на увазі комерційне підприємство) полягає у виборі: а) асортименту та обсязі виробництва, тобто, що виробляти та у якій кількості; б) ВФ та суми витрат, тобто яким технологічним способом здійснювати виробництво та з якими витратами, щоб максимізувати прибуток [10].

Підприємство формує фінансовий результат (прибуток чи збиток) продажу як різницю періодичного доходу $R$ та витрат виробництва та реалізації $C$: $P = R - C$. Доход за період визначається як добуток обсягу реалізації продукції на її ціну: $R = p_0 Q(\bar{x})$. Витрати виробництва складають з витратам на придбання всіх необхідних ресурсів, використаних у виробничому процесі: $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

Підприємство повинно вибрати вектор ресурсів , при якому прибуток підприємства максимальний:

$$P = (p_0 Q - p_1 x_1 - p_2 x_{2)} \ \rightarrow max.$$

Якщо залежність суми прибутку від обсягів витрат факторів виробництва подана у вигляді

$$P(x_1, x_2) = p_0 Q(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_{2)},$$

то, виразивши з цього співвідношення об'єм виробництва продукції

$$Q(x_1, x_2) = \frac{P}{p_0} + \frac{p_1}{p_0} x_1 + \frac{p_2}{p_0} x_2,$$

отримаємо залежність обсягу виробництва $Q$ від величини витрачених ресурсів при деякому значенні прибутку $P$, яку називають *ізопрофітою* (ізопрофітною поверхню) [9]. Якщо один з факторів виробництва (наприклад, $x_{2)}$, , то ізопрофіта є прямою лінією з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює співвідношенням цін змінного фактору та продукту, оскільки граничний продукт дорівнює кутовому дотичної до кривої виробництва: $MQ_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = \frac{P_1}{p_0}$.

Отже, у деякій точці ізопрофіта дотикається до кривої виробництва [9]. Абсциса точки дотику $x_1^*$ – це оптимальна витрата ресурсу $x_1$, що забезпечує максимальну суму прибутку при конкретному вигляді виробничої функції.

## 6.2 Раціональна діяльність підприємства в умовах досконалої конкуренції

Досконала конкуренція як одна з моделей ринку має наступні особливості:

1) наявність великої кількості підприємств, що реалізують стандартизовані товари чи послуги;
2) доступ на ринок є вільним, тому здійснюється вільне переміщення ресурсів;
3) обсяг продукції окремого підприємства незначний у порівнянні з обсягом реалізації цієї продукції на всьому ринку, тому кожне підприємство продає продукцію за ціною, що склалась у результаті ринкової рівноваги і не може впливати на цю ціну.

В цих умовах функція пропозиції, тобто залежність ціни пропозиції від її обсягу, має графік, який зі зростанням обсягу пропозиції, асимптотично наближається до горизонтальної прямої, тобто ціна пропозиції не залежить від величини пропозиції з боку підприємства. Таким чином, умова досконалої конкуренції математично має вигляд:

$$\frac{\partial p_0}{\partial Q} = 0, \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

З'ясуємо умови оптимальності діяльності у довготерміновому перспективі. Розглянемо його діяльність у довготерміновому періоді при необмежених факторах виробництва. В умовах досконалої конкуренції основна задача підприємства

$$P = (p_0 Q - p_1 x_1 - p_2 x_{2)} \; \to max.$$

Її можна розв'язати у відповідності з необхідними умовами екстремуму функції однієї змінної. Згадаємо ці умови:

1) умова першого порядку $\frac{dP(Q^*)}{dQ} = 0;$ (6.1)

2) умова другого порядку $\frac{d^2P(Q^*)}{dQ^2} < 0;$ (6.2)

Тут $Q^*$ – оптимальне значення обсягу виробництва продукції.

З умови першого порядку випливає, що

$$\frac{dP(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}[p_0 Q - C(Q)] = 0 \to p_0 = \frac{dC(Q)}{dQ} = MC(Q).$$

Оскільки ціна пропозиції продукту – це граничний дохід $MR$, тобто приріст доходу підприємства у розрахунок на кожну додаткову одиницю продукції, отже

$$p_0 = \frac{d}{dQ}(p_0 Q) = \frac{dR}{dQ} = MR,$$

тобто з умови першого порядку випливає необхідна умова рівності граничного доходу граничним витратам при оптимальному обсягу виробництва:

$$MC(Q^*) = MR(Q^*). \qquad (6.3)$$

Умова другого порядку зводиться до нерівності:

$$\frac{d^2P(Q)}{DQ^2} = \frac{d}{dQ}[p_0 - MC(Q)] = -\frac{dMC(Q^*)}{dQ} < 0 \ \rightarrow \frac{dMC(Q^*)}{dQ} > 0,$$

тобто при оптимальному обсягу виробництва граничні витрати повинні зростати.

Умова рівності граничного доходу граничним витратам $MR = MC$ є орієнтиром оптимальності обсягу виробництва з точки зору прибутку і для інших моделей ринку, але лише при досконалій конкуренції можна замінити граничним доходом ціною, тобто умова $p_0 = MC$ є окремим випадком умови $MR = MC$.

Отже, при планування виробничої програми підприємства тип моделі, що використовується, залежить від періоду часу планування.

### 6.3 Аналіз беззбитковості

Розглянута методика планування, розглянута вище, знайшла застосуванні при аналізі беззбитковості виробничої діяльності підприємства. *Беззбитковість* – це такий фінансово-господарський стан підприємства, при якому його дохід дорівнює його витратам. Обсяг виробництва, при якому досягається стан беззбитковості, називають *критичним*.

Зробимо наступні припущення:

1) розглядається модель досконалої конкуренції, тобто, значення граничного доходу є стале і дорівнює ціні продукту, тому лінія доходу є пряма;
2) віддача від розширення виробництва вважається сталим, тому функція витрат є лінійною функцією обсягу виробництва;
3) розглядається короткостроковий термін планування, внаслідок чого функція витрат подається у вигляді суми сталих та змінних витрат

З врахуванням зроблених припущень використовують наступні підходи до проблеми оцінки рентабельності і плану виробництва [9].

1. Здійснюється порівняння валового доходу підприємства з його валовими витратами та відокремлення зони прибутковості від зони збитковості виробничої діяльності підприємства. Вираз для критичного обсягу виробництва, що розділяє ці зони, отримуємо з умови рівності доходів та витрат:

   $$p_0 Q = C_F + C_v Q \ \rightarrow \ Q_k = \frac{C_F}{p_0 - c_v}.$$

   Тут $c_v$ – середні змінні витрати. Значення обсягу виробництва, при якому досягається беззбитковість в умовах покриття змінних витрат ціною реалізації продукції, називають *критичним значенням* [8].

2. Співставлення середнього доходу $AR(Q) = p_0$ та середніх витрат $AC(Q)$ визначає зони прибутку та збитку.

3. Порівняння граничного доходу $MR(Q)$ та граничних витрат $MC(Q)$ дозволяє визначити можливості подальшої діяльності підприємства, оскільки для моделі досконалої конкуренції

$$MR = \frac{\partial R}{\partial Q} = p_0,$$

В умовах короткотермінового періоду середні граничні витрати дорівнюють середнім змінним витратам $MC = \frac{\partial C}{\partial Q} = AC_v = c_v$, то у цьому випадку потрібно порівняти значення ціни продукту і величину питомих середніх витрат. Якщо $p_0 < c_v$, то виробництво потрібно припиняти.

Визначення точки беззбитковості є необхідним важливим етапом розробки виробничої програми підприємства.

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 6**

1. Поясніть, яку комерційну діяльність вважають раціональною.
2. Вкажіть фактори, що впливають на величину прибутку підприємства.
3. Яку криву називають ізопрофітою?
4. Вкажіть основні риси ринку досконалої конкуренції.
5. Назвіть необхідні та достатні умови функції однієї змінної.
6. Вкажіть критерій оптимальності обсягу виробництва.
7. Розкрийте зміст аналізу беззбитковості.
8. Наведіть формулу для розрахунку точки беззбитковості.

Розв'яжіть наведені нижче завдання.

**1**. Млин купляє зерно за ціною 200 г.о. за тону і електроенергію по ціні 300 г.о. за кіловат-годину і реалізує борошно за ціною 10 тис. грн. за 1 тону. Визначити для нього оптимальний обсяг виробництва при різних типах ефекту розширення масштабів виробництва: а) зростаюча віддача від розширення масштабу виробництва $\alpha = 0{,}8$; $\beta = 0{,}6$; б) спадна віддача від розширення масштабу виробництва $\alpha = 0{,}2$; $\beta = 0{,}6$; в) відсутність ефекту масштабу $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$.

**2.** Розв'язати завдання 1, якщо поставки зерна обмежені обсягом 400 т на рік.

**3.** Підприємство з виробництва меблі за місяць складає 100 стільців, ціна продукції 5 г.о. Змінні витрати складає 2 г.о. на одиницю продукції, сума сталих витрат 110 г.о. Оцінити програму підприємства з точки зору беззбитковості.

**4.** Нехай млин (описаний у завданні 1), що купляє зерно за ціну 200 г.о. за тону і енергію за 300 г.о. за кіловат-годину є монополістом, то ціна його продукцію знижується зі збільшенням обсягу реалізації $p_0 = 10000 - 2Q$ г.о. за тону. Визначити оптимальний обсяг виробництва: а) при спадній віддачі від розширення масштабу $(r = 0{,}5)$, $\alpha = 0{,}2$; $\beta = 0{,}3$; б) при відсутності ефекту розширення виробництва $(r = 1)$ $\alpha = 0{,}2$; $\beta = 0{,}7$.

**5.** Підприємство з виготовлення лінолеуму використовує наступну сировину: пластмасу вартістю 5 г.о. за 1 кг та барвник вартістю 8 г.о. за 1 кг та продає лінолеум по 100 г.о. за 1 м$^2$. Коефіцієнти виробничої функції α=0,5; β=0,5, A=1. Підприємство діє на ринку досконалої конкуренції. Визначити функцію попиту на ресурсу, оптимальний обсяг виробництва та максимальне значення прибутку у довготерміновому періоді.

**6.** Розв'язати задачу 1 для наступних випадків: а) зростаючої віддачі від розширення масштабу при α=0,8; β=0,6; б) спадної віддачі від розширення масштабу при α=0,2; β=0,6; в) відсутності ефекту розширення масштабу виробництва при α=0,3; β=0,7.

**7.** Розв'яжіть задачі 1 та 2 в умовах короткотермінового періоду, якщо обсяг витрат першого ресурсу зафіксований, закупівлі пластмаси обмежені 10 кг в день.

**8.** Знайдіть точку беззбитковості виробничої програми підприємства у короткотерміновому періоді, якщо в умовах задачі 1 ціна лінолеуму дорівнює 100 г.о. за 1 м$^2$, сталі витрати – 2 млн. г.о., змінні витрати – 80 г.о. за 1 м$^2$.

**9.** Підприємство, що діє на ринку послуг зв'язку, в умовах недосконалої конкуренції, платить за користування частотами (1-й ресурс) 300 г.о. за 1 год, праця операторів – 2-й ресурс, фонд оплати праці на 1 оператора 0,06 г.о. за 1 год. Ціна послуги зв'язку у підприємства $p_0 = 1000 - 0{,}1Q$ (г.о. за 1 годину послуг зв'язку). Знайти оптимальний обсяг виробництва (надавання послуг) при $A$=1 та спадного ефекту від розширення масштабу при α=0,1; β=0,4 та при відсутності ефекту розширення масштабу виробництва при α=0,4; β=0,6. Знайти оптимальний з точку зору максимуму прибутку обсяг послуг. Визначити максимальний прибуток та попит на ресурси.

**10.** Два підприємства зв'язку працюють в умовах дуполії Курно, функції витрат за рік подаються виразом $\mathrm{C}_i = cQ_i + d, i = 1{,}2; c = 2$ (г.о. за хв), $d = 2$ (тис. г.о.), функції попиту мають вигляд: $p_0 = a - b(Q_1 + Q_2), a = 100$ г.о. (за хвилину), $b = 0{,}05$ г.о. за хвилину. Визначити рівноважний обсяг виробництва та величину прибутку кожного підприємства при цьому обсязі. Знайдіть ці величини, якщо перше підприємство вважає, що конкурент реагує у відповідності з гіпотезою Курно.

## Розділ 7. Оптимізація виробничої діяльності в умовах конкурентного середовища

### Лекція 7. Розробка виробничої програми для різних умов конкуренції

**Мета лекції:** оволодіння студентами знаннями про розробку виробничої програми підприємства для різних умов конкуренції

**План**

1. Планування за конкурентною моделлю
2. Раціональна комерційна діяльність в умовах монополістичної конкуренції
3. Раціональна комерційна діяльність в умовах олігополії та олігопсонії

**Ключові терміни та поняття:** функція пропозиції підприємства, монополістична конкуренція, олігополія, олігопсонія, дуполія

## 7.1 Планування за конкурентною моделлю

Отримані у попередньому розділі необхідні умови оптимальності виробничої програми підприємства отримані без врахування обмежень, що мають місце в зв’язку з обмеженістю ресурсів підприємства. Розглянута вище модель є схемою визначення оптимального обсягу виробництва у довготерміновому періоді часу [8]. У довготерміновому періоді задача раціональної комерційної діяльності підприємства є задачею безумовної оптимізації.

Розглянемо модель довготермінового планування

$$\max P = max[p_0 Q(\bar{x}) - p_1 x_1 - p_2 x_2]$$

у випадку двохфакторної виробничої функції Кобба-Дугласа.

$$Q = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}. \tag{7.1}$$

Умови оптимальності першого порядку дозволяють визначити величину витрат кожного фактору виробництва, що забезпечують максимальне значення прибутку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} - p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} - p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} = p_1, \\ p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} = p_2. \end{cases} \tag{7.2}$$

Умови (7.2) є необхідними умовами умовами оптимальності у довготерміновому періоді. Диференціюючи вираз виробничої функції (7.1) і підставивши похідні у (7.4), отримуємо:

$$\begin{cases} p_0 \alpha \dfrac{Q}{x_1^*} = p_1, \\ p_0 \beta \dfrac{Q}{x_2^*} = p_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \alpha Q \dfrac{p_0}{p_1}, \\ x_2^* = \beta Q \dfrac{p_0}{p_2}. \end{cases} \tag{7.3}$$

Рівності (7.3) значать, що витрати ресурси пропорційні планованому обсягу $Q$ виробництва продукції і обернені пропорційні цінам придбання відповідних ресурсів. Вирази (7.3) – це функції попиту на ресурсів у довгостроковому періоді при досконалій конкуренції. З рівнянь (7.3) випливає, що виконується рівність:

$$x_2^* = \frac{\beta}{\alpha} \frac{p_1 x_1^*}{p_2},$$

тобто залежність витрат одного ресурсу від іншого є лінійною функцією.

Розглянемо задачу визначення обсягу виробництва продукції $Q^*$, що забезпечує максимальний прибуток, якщо виробничий процес подається ВФ Кобба-Дугласа [10]. Підставимо функції попиту (3.7) на фактори виробництва у ВФ Кобба-Дугласа (7.2):

$$Q^* = A\left(\frac{p_0\alpha}{p_1}Q^*\right)^{\alpha}\left(\frac{p_0\beta}{p_2}Q^*\right)^{\beta} = A\left(\frac{p_0\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_0\beta}{p_2}\right)^{\beta}\left(Q^*\right)^{\alpha+\beta}.$$

Отримали рівняння, з якого визначимо обсяг виробництва продукції $Q^*$, що забезпечує максимальний прибуток:

$$\frac{Q^*}{\left(Q^*\right)^{\alpha+\beta}} = \left(Q^*\right)^{1-(\alpha+\beta)} = A\left(\frac{p_0\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_0\beta}{p_2}\right)^{\beta},$$

$$\left(Q^*\right) = A^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}\left(\frac{p_0\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}}\left(\frac{p_0\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}}. \tag{7.4}$$

Отже, у випадку позитивного ефекту розширення масштабу виробництва $(\alpha+\beta) > 1$, якщо показники степеню $\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)} < 0, \frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)} < 0.$

Оптимальне значення обсягу виробництва продукції тим більше, чим нижча ціна продукту у порівнянні з цінами ресурсів. При негативному ефекті розширенні масштабу виробництва спостерігається зворотна ситуація: чим більше ціна продукту перевищує ціни ресурсів, тим більше значення досягає оптимальний обсяг виробництва.

Отриманий вираз (7.4) оптимального обсягу виробництва продукції як функції ціни продукції та ціни ресурсів називають *функцію пропозиції* підприємства з ВФ Кобба-Дугласа: $Q^* = Q^*(p_0, p_1, p_2)$. Цю функцію можна використати для побудови кривої пропозиції, що відображає залежність ціни пропозиції від обсягу пропозиції підприємства:

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}}\left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} p_0^{\frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}} \Rightarrow \left(Q^*\right)^{\frac{1-r}{r}} = Zp_0,$$

де $Z = A^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ – це стала величина, що не залежить від ціни продукту: $r = \alpha + \beta$ – це ступінь однорідності виробничої функції. Тому отримуємо рівняння кривої пропозиції у вигляді:

$$p_0 = \frac{1}{Z}(Q^*)^{\frac{1-r}{r}}.$$

При віддачі, що збільшується з розширенням виробництва, коли витрати підприємства зростають сповільненими темпами у порівнянням зі зростання виробництва, тобто середня собівартість продукції зменшується, у підприємства є можливість продавати більший обсяг продукції за зниженій ціні, продовжуючи отримати максимальний прибуток. Ця ситуація використовуємо підприємство при виході на новий ринок [10].

Стала віддача від розширення виробництва проявляється в тому, що середня собівартість продукції не змінюється, що створює можливість підприємству зберігати ціну продукції незмінною. Така ситуація є характерною для стратегії стабільного розвитку підприємства, що діє у режимі планового завантаження.

Спадна віддача від розширення виробництва, пов’язана зі зростанням собівартості продукції, обумовлює необхідність підвищення ціни при збільшенні пропозиції з метою збереження прибутку. Це знижує конкурентоздатність продукції і зменшує ринок її збуту.

У межах короткотермінового періоду обмеження на ресурсу приводить до обмеження на обсяг виробництва $Q \leq \bar{Q}$ і відповідному обмеженню величини прибутку, яка може в цьому випадку не досягати оптимального значення, у цьому випадку $\bar{Q} \leq Q^*$, тобто значення $\bar{Q}$, що визначається обмеженням на витрату ресурсів $g(\bar{x}) \leq \bar{b}$у, слід розглядати як оптимальний обсяг виробництві у короткотерміновому періоді.

Отже, якщо у довготерміновому періоді задача раціоналізації комерційної діяльності сформулювалась як задача безумовної оптимізації, то при короткотерміновому плануванні виникає задача визначення умовного екстремуму.

При короткотерміновому плануванні нехай перший ресурс обмежений величиною запасу $b_1$, а другий ресурс є у необмеженій кількості. Для розв’язування задачі на умовний екстремум використаємо метод Лагранжа. Згідно з алгоритмом цього методу, потрібно скласти функцію Лагранжа. У випадків двох факторів виробництва та одного обмеження вона має вигляд:

$$L = p_0 Q(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) + \lambda(b_1 - x_1). \tag{7.5}$$

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа набувають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} - p_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} - p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b_1 - x_1 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial b_1} = \lambda = 0. \end{cases} \tag{7.6}$$

З врахуванням виду виробничої функції Кобба-Дугласа з необхідних умов оптимальності випливає:

$$\begin{cases} p_0 \alpha \dfrac{Q}{x_1} - p_1 - \lambda = 0, \\ p_0 \beta \dfrac{Q}{x_2} - p_2 = 0, \\ (b_1 - x_1)\lambda = 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Вирази (7.7) є об’єднанням умов $b_1 - x_1 = 0$ та $\lambda = 0$. Ці умови не можуть виконуватися сумісно.

Якщо $b_1 - x_1 > 0$, тобто $x_1 < b_1$. множник Лагранжа $\lambda$ показує величину приросту доходу, який можна отримати з одиниці невикористовуваного ресурсу

$x_1$, то $\lambda = 0$. Якщо $b_1 - x_1 = 0$, тобто ресурс $x_1$ використовують у повному обсязі, то значення $\lambda$ може бути будь-яким, $\lambda \neq 0$. Якщо $b_1 - x_1 < 0$, тобто $x_1 > b_1$, то множник Лагранжа у цьому випадку є сумою зниження доходу з одиниці перевищення запасу ресурсу, перевищення вважається неможливим, то тут $\lambda = 0$.

Отже, при короткотерміновому плануванні можливі два випадки [9].

1) Зміни обсягу виробництва до деякої величини, обмеженої умовою $x_1 < b_1$, тобто з першого рівняння (7.7) при $\lambda = 0$ та $x_1 = b_1$:

$$0 < Q < \tilde{Q} = \frac{p_1 x_1}{p_0 \alpha} = \frac{p_1 b_1}{p_0 \alpha}$$

У цьому випадку оптимальні значення факторів розрахуються так само, як і у довготерміновому періоді (оскільки $\lambda = 0$):

$$x_1^* = \alpha Q \frac{p_0}{p_1}, x_2^* = \beta Q \frac{p_0}{p_2}.$$

2) Більша зміна обсягу виробництва відповідає повному вичерпанню обмеженого ресурсу, у цьому випадку оптимальні значення дорівнюють

$$x_1^* = b_1, x_2^* = \beta Q \frac{p_0}{p_2}. \qquad (7.8)$$

Обсяг витрат другого ресурсу для оптимального плану виробництва з врахуванням виду виробничої функції:

$$x_2^* = \beta A (x_1^*)^{\alpha} (x_2^*)^{\beta} \frac{p_0}{p_2} \rightarrow x_2^* = \left(\beta A b_1^{\alpha} \frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}. \qquad (7.9)$$

Оскільки показник степені $\frac{1}{1-\beta} > 1$, то величина витрат змінного ресурсу зростає нелінійно зі збільшенні співвідношення цін $\frac{p_0}{p_2}$, тобто чим дешевший ресурс, що зміниться. тим у більшому обсязі він буде витрачатися для забезпечення оптимального обсягу виробництва. Більшого значення $b_1$ відповідають більші витрати змінного ресурсу.

Оптимальний обсяг виробленої продукції визначається з виразу виробничої функції Кобба-Дугласа з врахуванням співвідношення (7.8):

$$Q^* = A b_1^{\alpha} \left(\beta Q^* \frac{p_0}{p_2}\right)^{\beta} \rightarrow Q^* = A^{\frac{1}{1-\beta}} b_1^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \left(\beta \frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \qquad (7.10)$$

Оскільки в реальних виробничих процесах, як було показано в дослідженнях Д. Кобба та П. Дугласа, значень показників еластичності $\alpha = 0{,}25$; $\beta = 0{,}75$, то з виразу (7.10) випливає: 1) оптимальний обсяг виробництва зростає пропорційно запасу фіксованого ресурсу, оскільки $\frac{\alpha}{1-\beta} \approx 1$; 2) оптимальний обсяг виробництва зростає прискореними темпами зі збільшенням співвідношення цін продукту та змінного ресурсу, оскільки співвідношення $\frac{\beta}{1-\beta} < 1$; 3) значення оптимального обсягу виробництва не залежить від ціни фіксованого ресурсу.

## 7.2 Раціональна комерційна діяльність в умовах монополістичної конкуренції

Багато виробників, що спеціалізуються на виробництва слабко стандартизованих товарів, зустрічаються з умовами *монополістичної конкуренції* . На відміну, від досконалої конкуренції, для монополістичної конкуренції має місце залежність ціни товару від обсягу ринку, тобто крива попиту на товар такого ринку має вигляд: $p_0 = p_0(Q)$. Попит на такий товар не є нескінченно еластичним, у цьому випадку крива попиту є спадна [9].

В умовах монополії виробник має можливість впливати на ціну товару, змінюючи обсяг пропозиції, враховуючи, що $\frac{\partial p_0}{\partial Q} < 0$, тобто для збільшення обсягу продажу необхідно знижати ціну товару, або для збільшення ціни товару потрібно зменшувати обсяг пропозиції.

Здебільшого підприємство, що займається виробництвом специфічного продукції, є основним покупцем у власних постачальників. Вони змушені виробляти матеріали, комплектуючі та напівфабрикати у відповідності до вимог свого замовника. В таких умовах продукція постачальника також є спеціалізованою. Ситуація, при якій існує тісний взаємозв'язок між постачальником та покупцем, є оберненою стороною монополістичної конкуренції і називається *монопсонією* (наявністю одного покупця). В умовах монопсонії покупець має можливість впливати на ціну ресурсів, які він закупляє у постачальників зміною обсягів закупівлі, тобто існує залежність виду $p_i = p_i(x_i)$. Ця функція характеризує суму витрат покупця при монопсонії на придбання $\mathrm{x_i}$ ресурсу [8]. У загальному випадку покупець може придбати більшу кількість ресурсу, запропонувавши за нього більш високу плату, тобто

$$\frac{\partial \mathrm{p_i}}{\partial \mathrm{x_i}} > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Оскільки валовий дохід підприємства визначається як $R(Q) = p_0(Q)Q$, а сума витрат дорівнює

$$C(Q) = p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2)x_2,$$

то в умовах недосконалої конкуренції (комбінації монополії та монопсонії) задача раціональної комерційної діяльності має вигляд:

$$\max_{Q,\, x_1, x_2} \Pi = \max_{Q, x_1, x_2} [p_0(Q)Q - p_1x_1 - p_2x_2],$$

за умови $Q = Q(x_1, x_2)$.

На відміну від досконалої конкуренції, у цьому випадку граничний доход не дорівнює сталій ціні товару, а також залежить від обсягу виробництва:

$$MR(Q) = \frac{\partial R(Q)}{\partial Q} = p_0 + 2\frac{\partial p_0}{\partial Q}Q, \tag{7.11}$$

де похідна $\frac{\partial p_0}{\partial Q} = \overline{\mathrm{p_0}} < 0$ показує, на скільки грошових одиниць ціна продукції від свого початкового значення $\mathrm{p_0}$ зменшиться при збільшенні обсягу пропозиції підприємства на одиницю продукції. Граничні витрати також залежать від обсягу ресурсів, що споживаються:

$$MC_i(Q) = p_i(x_i) + 2\frac{\partial p_i}{\partial x_i}\mathrm{x_i}, i = 1{,}2,$$

тут $\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \bar{p}_i$– зростання ціни ресурсу при збільшенні його придбання на одиницю.

Розв'язування задачі комерційної організації може бути здійснено методом Лагранжа як задачі оптимізації за наявності обмежень [9]. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x_1, x_2, Q, \lambda) = p_0 Q - p_1 x_1 - p_2 x_2 + \lambda(Q(x_1, x_2) - Q).$$

Необхідні умови екстремуму визначаються, прирівнюючи до нуля всі частинні похідні функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q} = p_0 - \frac{\partial p_0}{\partial Q} - \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = -p_i - \frac{\partial p_i}{\partial x_i} x_i + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0, i = 1,2; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = Q(x_1, x_2) - Q = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = p_0 + \frac{\partial p_0}{\partial Q} Q^*, \\ \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_i} = p_i + \frac{\partial p_i}{\partial x_i} x_i^*, i = 1,2, \\ Q^* = Q(x_1^*, x_2^*). \end{cases}$$

Перша умова показує, що при оптимальних значеннях $(Q^*, x_i^*)$ множник Лагранжа дорівнює граничному доходу $\lambda = MR(Q^*)$.

Друга група умов свідчить, що добуток граничного доходу та граничного фактору дорівнює граничним витратам цього фактору:

$$MR(Q^*) \cdot MQ_i(x_i^*) = MC_i(x_i^*), i = 1,2. \quad (7.12)$$

У останній умові підставляється виробнича функція:

$$Q^* = Q(x_1^*, x_2^*) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}. \quad (7.13)$$

Рівняння (7.12) та (7.13) є основними рівняннями, що визначають обсяг виробництва та комбінації витрати ресурсів, що максимізують прибуток. Крім того, необхідно враховувати, що раніше отримана умова рівності граничного доходу граничним витратам повинна виконуватися і за умов монополії-монопсонії:

$$\frac{\partial \Pi(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial R(Q)}{\partial Q} - \frac{\partial C(Q)}{\partial Q} = 0,\ MR(Q^*) = MC(Q^*). \quad (7.14)$$

Використаємо вираз (7.14) для отримання формули оптимального обсягу виробництва у межах монополії (ситуації монопсонії не враховується, тобто граничні витрати залежать лише від обсягу виробництва). Розглянемо два окремих випадки [10]:

а) негативний ефект розширення масштабу виробництва при $r = 0,5$, підставимо в (7.14) вираз граничного доходу (7.11) та граничних витрат (7.9):

$$p_0 + 2\bar{p}Q = \frac{1}{r} D Q^{\frac{1}{r}-1} \rightarrow Q^* = \frac{p_0}{2D - 2\bar{p}}; \quad (7.15)$$

б) відсутнє ефекту розширення виробництва при $r = 1$; аналогічно попередньому випадку отримуємо:

$$p_0 + 2\bar{p}Q = \frac{1}{r} D Q^{\frac{1}{r}-1} \rightarrow Q^* = \frac{D - p_0}{2\bar{p}}. \quad (7.16)$$

Функції попиту на ресурсу можемо отримати з умов (7.12), (7.13), вирази для граничних продуктів мають вигляд:

$$MQ_1 = \frac{\alpha Q}{x_1},\ MQ_2 = \frac{\beta Q}{x_2}.$$

Вирази для граничних витрат знайдемо, продиференціювавши рівність $C = = p_1x_1 + p_2x_2$: $MC_1 = p_1, MC_2 = p_2$. Підставивши ці вирази у (7.12), отримаємо:

$$\frac{(p_0+2\bar{p}Q^*)\alpha Q^*}{x_1^*}=p_1,\ \frac{(p_0+2\bar{p}Q^*)\beta Q^*}{x_2^*}=p_2.$$

З цих рівнянь знаходимо попит на ресурси:

$$x_1^*(Q^*) = \frac{\alpha(p_0+2\bar{p}Q^*)Q^*}{p_1},\ x_2^*(Q^*) = \frac{\beta(p_0+2\bar{p}Q^*)Q^*}{p_2}. \qquad (7.17)$$

Визначивши оптимальний обсяг виробництва за формулам (7.15), (7.16), потім можливо розрахувати попит на ресурси за формулами (7.17).

При досконалій конкуренції оптимальне значення прибутку досягається при незмінній ціні продукції $p_0 = MR$ навіть при мінімальному обсязі виробництва [9], то в умовах монополії оптимальна величина прибутку не перевищує суму прибутку при досконалої конкуренції. Максимум прибутку в умовах монополії досягається при обсязі виробництві, що є не більшим оптимального обсягу виробництва в умовах досконалої конкуренції.

## 7.3 Раціональна комерційна діяльність в умовах олігополії та олігопсонії

Структура ринку є такою, що на ньому діє обмежена кількість підприємств, тобто має місце конкуренція серед небагатьох. Ринок, на яку однорідну продукцію, пропонують кілька продавців, називають *олігополією*. Ринок, на якому продукція певного виду, придбає кілька покупців, називають *олігопсонією*.

Головна особливість конкуренції серед небагатьох полягає у тому, що всі конкуруючі підприємства можуть впливати на ціни продукції, що пропонують, у випадку олігополії чи ресурсів, що придбають. Тому прибуток кожного підприємства залежить від стратегії конкурентів. Оптимальна стратегія комерційного підприємства визначається не лише, виходячи з прямого впливу цього підприємства на стан ринку ресурсів та товару, але й з врахуванням побічного впливу, – через вплив на дії інших конкурентів. Отже, стратегія підприємства, що діє в умовах олігополістичної конкуренції має багато спільної з грою, оскільки виграш кожного гравця залежить від дій інших гравців. Тому при розробці такої стратегії можна використовувати підходи теорії ігор.

Розглянемо характерний варіант олігополістичної конкуренції, у котрій два конкуренти (ринок дуполії) виробляють продукцію з наступними виробничими функціями:

$$Q_1 = f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), Q_2 = f_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}),$$

де $Q_1$ – обсяг виробництва першого підприємства, $Q_2$ – обсяг виробництва другого підприємства, $x_{1i}$ – обсяг $i$-го ресурсу, витраченого першим підприємством, $x_{2i}$ – обсяг $i$-го ресурсу, витраченого другим підприємством.

Ціна продукції на ринку визначається загальним обсягом виробництва: $p_0 = p_0(Q_1, Q_2)$, тобто одночасне збільшення обсягів виробництва приведе до зниження ринкової ціни продукції: $\frac{\partial p_0}{\partial Q_1} < 0, \frac{\partial p_0}{\partial Q_2} < 0$.

Ціни факторів виробництва визначаються обсягами закупівлі відповідних факторів обома підприємствами: $p_i = p_i(x_{1i}, x_{2i})$, $i = 1,2, \dots, n$, тобто, якщо обидва підприємства збільшують обсяги придбання ресурсів, то ціни на них зростають: $\frac{\partial p_i}{\partial x_{1i}} > 0, \frac{\partial p_i}{\partial x_{2i}} > 0, i = 1,2, \dots, n$.

Основна задача підприємств, що конкурують, полягає у максимізації прибутку шляху змінювання обсягу виробництва продукції та відповідних витрат ресурсів:

$$\max_{Q_1, x_{1i}} \Pi_1 = p_0(Q_1, Q_2)Q_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i(x_{1i}, x_{2i})x_{1i}$$

за умовою $Q = f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$.

У цьому випадку розглядається формулювання задачі першого підприємства, що діє в умовах олігополістичної конкуренції [8]. Розглянемо аналітичне розв'язування цієї задачі.

Запишемо функцію Лагранжа для цієї задачі визначення умовного екстремуму. Вона має наступний вигляд: $L(Q, x, \lambda) = p_0(Q_1, Q_2)Q_1 - - \sum_{i=1}^{n} p_i(x_{1i}, x_{2i})x_{1i} - -\lambda[f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) - Q_1]$.

Запишемо умови оптимальності функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_1} = p_0(Q_1, Q_2) + Q_1 \frac{\partial p_0}{\partial Q_1} + Q_1 \frac{\partial p_0}{\partial Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_{1i}} = -p_i(x_{1i}, x_{2i}) - x_{1i} \frac{\partial p_i}{\partial x_{1i}} - x_{1i} \frac{\partial p_i}{\partial x_{2i}} \frac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1i}} - \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x_{1i}} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) - Q_1 = 0. \end{cases} \quad (7.18)$$

Виразимо множник Лагранжа з першого рівняння системи (7.18) і підставимо його у друге рівняння системи (7.18). В результаті отримаємо:

$$\begin{cases} \left[ p_0 + Q_1 \left( \frac{\partial p_0}{\partial Q_1} + \frac{\partial p_0}{\partial Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial x_{1i}} = p_i + x_{1i} \frac{\partial p_i}{\partial x_{1i}} + x_{1i} \frac{\partial p_i}{\partial x_{2i}} \frac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1i}}, i = 1,2, \dots, n, \\ Q_1 = f_1(x_{11}, x_{12}, \dots x_{1i}). \end{cases}$$

Отримані необхідні умови оптимальності містять компоненти $\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}$, та $\frac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1i}}$, які називають *можливими варіаціями*. Вони виражають припущення першого підприємства щодо можливої реакції конкурента на вибрану ним стратегію. Вираз $\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}$, – це зміна обсягу виробництва продукції другого конкурента при збільшенні обсягу виробництва продукції першого конкурента. Похідні $\frac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1i}}$ відображають витрати ресурсу $i$-го виду другого підприємства при збільшенні витрат першим підприємством обсягу даного ресурсу.

Розглянемо найпростіший випадок олігополії. В умовах якої діють два виробника однорідного товару (дуополія), виробничий процес характеризує сталим рівнем граничних витрат, а реалізація продукції здійснюється за моделлю лінійного попиту. У цьому випадку функції витрат виробників мають вигляд

$$C_1 = cQ_1 + d, \qquad C_2 = cQ_2 + d, c > 0, d > 0,$$

де $d$– сума сталих витрат, $c$ – величина граничних витрат. Функція пропозиції товару є адитивною: $Q = Q_1 + Q_2$, а функцію попиту можна подати у вигляді: $p_0 = a - b(Q_1 + Q_2), a > 0, b > 0$.

Функція прибутку одного з дуполістів можна записати наступним чином:

$$\Pi_1 = [a - b(Q_1 + Q_2)]Q_1 - cQ_1 - d \qquad (7.19)$$

Тому можемо записати умову максимізації прибутку у вигляді:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial Q_1} = [a - b(Q_1 + Q_2)] - bQ_1 - b\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}Q_1 - c = 0.$$

Аналіз дуполії, виконаний французьким математиком та економістом Антуаном Курно, ґрунтується на передумові, що кожний з дуполістів вважає, що зміни обсягу виробництва його продукції не вплине на обсяг виробництва конкурентом [9]. Рівновага Курно для обох підприємств визначається умовами $\left(\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = 0, \frac{\partial Q_1}{\partial Q_2} = 0\right)$:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial Q_1} = 0, \frac{\partial \Pi_2}{\partial Q_2} = 0.$$

З цих рівнянь маємо:

$$\begin{cases} a - b\left(Q_1 + Q_2\right) - bQ_1 - c = 0; \\ a - b\left(Q_1 + Q_2\right) - bQ_2 - c = 0. \end{cases} \qquad (7.20)$$

Звідси визначаємо, що $Q_1 = Q_2 = \frac{a-c}{3b}$. Отже, відповідна ринкова ціна складе $p_0 = \frac{a+2c}{3}$. Тоді сукупний обсяг пропозиції дорівнює:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{2(a-c)}{3b}.$$

Отримані результати можна узагальнити на випадок, коли олігополістична конкуренція має місце між N підприємствами, тоді отримуємо вирази:

$$Q_J = \frac{a - c}{(N+1)b}, j = 1,2, \ldots, N, p_0 = \frac{a + Nc}{N + 1}, Q = \frac{N}{N+1}\frac{a-c}{b}.$$

В умовах необмеженого зростання кількості підприємств рівновага Курно прямує до рівноваги, характерної для досконалої конкуренції [8], тобто:

1) індивідуальні обсяги виробництва $Q_j \to 0$, оскільки окреме підприємство виробляє відносну малу кількість продукцію;
2) ціна продукції $p_0 \to c$, оскільки окреме підприємство не впливає на рівноважну ціну, що дорівнює граничним витратам.

Рівняння (3.24) можна записати у вигляді

$$Q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_2}{2}, \qquad (7.21)$$

$$Q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_1}{2}. \qquad (7.22)$$

Вирази (7.21), (7.22) називають лініями реакції дуполістів на їх поведінку. Рівновага досягається на основі взаємодії реакцій дуполістів [10]. Якщо у початковий момент часу перша фірма є монополістом, виробляє $Q_1'$ продукції, то появи на ринку фірми з обсягом виробництва $Q_2'$ одиниць продукції змусить першу знизити обсяг пропозиції до $Q''$ одиниць продукції і так далі. Сам процес досягне рівноваги, що суперечить гіпотезі Курно про фіксування обсягу виробництва у конкурента, тобто модель Курно не є аутентичною. Сума прибутку одного дуполіста у моделі Курно дорівнює сумі прибутку іншого дуполіста, що випливає з формули (7.19).

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 7**

1. Поясніть основні задачі та призначення процесу планування на підприємстві.
2. Розкрийте зміст та сутність моделі довготермінового планування.
3. Поясніть різницю між ринками досконалої та монополістичної конкуренції.
4. Поясніть, що визначає попит на ресурси при різних типах конкуренції.
5. Поясніть різницю між олігополією та олігопсонією.
6. У чому полягає метод Лагранжа для розв'язування задачі умовної оптимізації?
7. Поясніть, від чого залежить сукупний обсяг пропозиції на ринках різного типу.
8. Поясніть зміст концепції Курно.
9. 

Розв'яжіть наведені нижче завдання.

1. Підприємство, що виробляє лінолеум, використовує пластмасу за ціною 6 г.о. за кілограм та барвник за ціною 9 г.о. за кілограм. Підприємство продає свій товар за ціною 101 г.о. за 1 кв.м. Коефіцієнти виробничої функції $\alpha == 0{,}5$; $\beta = 0{,}5$; $\mathrm{A} = 1$. Визначити функції попиту на ресурси, оптимальний обсяг виробництва та максимальний прибуток у довготерміновому періоді.
2. Підприємство для виробництва свого товару використовують 2 види ресурсів $A_1$ та $A_2$ по ціною відповідно 800 г.о. та 600 г.о. за одиницю Витрата ресурсу $A_2$ умовами контракту з постачальником обмежена 1000 одиниць у місяць. Коефіцієнти еластичності виробництва за ресурсами $A_1$ та $A_2$ відповідно дорівнюють 0,5 та 0,7, Коефіцієнт $\mathrm{A} = 1$. Визначити функції середніх витрат у короткотермінових періодах. Побудувати їх графіки.
3. Два підприємства працюють в умовах дуполії Курно. Функції їх витрат (за рік) визначаються виразом $C_i = cQ_i + d$. Тут індекси $\mathrm{i} = 1{,}2$ відносяться відповідно до першого та другого підприємств, значення сталих $\mathrm{c} = 2, d = 2000$. Функції попиту мають вигляд $p_0 = 100 - 0{,}05(Q_1 + Q_2)$. Побудувати криві реакції підприємств, визначити рівноважний обсяг виробництва продукції та величину прибутку кожного підприємства для цього обсягу виробництва. а) розв'язати задачу, якщо перше підприємство вважає, що конкурент реагує згідно з гіпотезою Курно; б) розв'язати задачу, якщо обидва підприємства помилково вважають, що конкурент реагує відповідно до гіпотези Курно; в) розв'язати цю задачу в умовах кооперативної дуполії.

## Розділ 8. Теорія споживчого вибору

### Лекція 8. Функції корисності та їх застосування у теорії споживчого вибору

**Мета лекції:** сформувати у студентів систему знань про функції корисності та їх застосування при дослідженні поведінки споживачів.

**План**

1. Функція корисності.
2. Бюджетні лінії, криві корисності та криві байдужості.
3. Види функції корисності.

**Ключові терміни та поняття:** функція корисності, модель споживчого вибору, відношення переваги, гранична корисність, гранична норма заміни, бюджетні лінії, криві корисності, криві байдужості, функція Аллена.

#### 8.1. Функція корисності

*Функцією корисності* називають залежність між кількісно вираженим рівнем задоволення споживача використаними благами (товарами чи послугами) та обсягами спожитих цих благ: $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тут $U$ – корисність набору благ, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги споживання цих благ [4].

Нехай споживач має дохід $J$, який він повністю витрачає на придбання деяких товарів чи послуг (благ). Ціни цих товарів вважаються заданими. Враховуючи структуру цін, величину доходу та власні уподобання, споживач придбає певну кількість товарів (послуг). Математичну модель поведінки споживача називають *моделлю споживчого вибору*.

Розглянемо модель з двома видами товарів, тобто будемо вважати, що кількість товарів, придбаних споживачем, визначається вектором $(x_1, x_2)$, де $x_i$ – кількість одиниць $i$-го товару, придбаних споживачем, $i = 1, 2$.

Вибір споживача характеризують *відношенням переваги*, суть якого полягає у наступному. Вважається, що споживач може вибрати з двох наборів товарів $A = (a_1, a_2)$ та $B = (b_1, b_2)$, більш бажаний або споживач не бачить між ними різниці. Якщо набір товарів $A = (a_1, a_2)$ є більш бажаним порівняно з набором $B = (b_1, b_2)$, то використовують позначення $A \succ B$. Якщо $A \prec B$, то набір $B$ є більш бажаним, ніж $A$. Якщо $A \sim B$, то набори є рівноцінними для споживача.

Відношення переваги має властивості транзитивності та ненасиченості. Нехай $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$. Тоді:

1) $A \succ B \land B \succ C \Rightarrow A \succ C$ – властивість транзитивності;
2) $a_1 > b_1 \land a_2 > b_2 \Rightarrow A \succ B$ – властивість ненасиченості.

На множині споживчих наборів $(x_1, x_2)$ визначають функцію $u(x_1, x_2)$, яку називають *функцією корисності споживача*. Її значення $u(x_1, x_2)$ на споживчому наборі $(x_1, x_2)$ дорівнює оцінці цього набору споживачем (рівню задоволення потреб споживача даним набором). Кожний споживач має власну функцію корисності. Якщо набір товарів $A=(a_1, a_2)$ є більш бажаним для споживача, ніж набір $B=(b_1, b_2)$, то $u(a_1, a_2) > u(b_1, b_2)$, тобто $A \succ B \Rightarrow u(A) > u(B)$.

У теорії споживчого вибору вважається, що функція корисності має наступні властивості:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0, i=1,2$ – зі зростанням споживання товару його корисність зростає;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – невеликий приріст споживання товару при його початковій відсутності суттєво збільшує його корисність;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} < 0$, $i=1,2$ – зі зростанням споживання товару швидкість зростання його корисності сповільнюється;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ – при дуже високому рівню споживання товару його подальше збільшення не приводить до збільшення корисності.

Аналогічні поняття та властивості можна визначити для наборів з $n$ товарів чи послуг $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, на яких визначають функцію корисності $u(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Частинну похідну $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ називають *граничною корисністю* $i$-го товару.

Лінію рівня $u(x_1, x_2) = c = \text{const}$ на площині $Ox_1x_2$ називають <u>*лінією байдужості*</u>. Для наборів $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ $n$ товарів розглядають <u>*поверхні байдужості*</u> $u(x_1, x_2, ..., x_n) = c = \text{const}$, на яких корисність наборів товарів є сталою. Множину всіх ліній (поверхонь) байдужості називають <u>*картою байдужості*</u>.

Рівняння поверхні байдужості можна записати у диференціальній формі. Оскільки на такій поверхні функція корисності є сталою, то

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = 0. \tag{8.1}$$

Умова (8.1) означає, що дотична до поверхні байдужості ортогональна до градієнта функції корисності. З точки зору споживача наявність множини наборів товарів, що мають однакову корисність, означає можливість заміни одного набору товарів рівноцінним йому іншим набором.

Нехай у (8.1) $dx_3 = dx_4 = ... = dx_n = 0$, тоді $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$. Звідси знаходимо:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}. \tag{8.2}$$

Відношення $\frac{dx_2}{dx_1}$ називають *граничною нормою заміни* першого товару другим [5]. Вона дорівнює відношенню граничних корисностей першого та другого товарів і показує, скільки потрібно одиниць другого товару, щоб замінити одиницю першого товару.

### 8.2 Бюджетні лінії, криві корисності та криві байдужості

*Бюджетною множиною* називають множину наборів товарів, які може придбати споживач, що має певний сталий доход $J$. Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – набор товарів, $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – вектор-рядок відповідних значень цін, то бюджетна множина має вигляд: $B = \{X : P \cdot X \le J\}$.

Геометричне місце точок площини $x_1 O x_2$, де $x_1$, $x_2$ – відповідні кількості першого та другого блага, для яких сумма витрат споживача на їх придбання залишається стала та дорівнює доходу споживачу $J$, називають *бюджетною лінією*. Це пряма

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = J.$$

Ця рівність виражає умову рівності витрат та доходу споживача.

При визначенні набору благ, які він повинен придбати, споживач розв'язує наступну задачу: визначити кількість благ $(x_1, x_2)$, що будуть споживані і при яких максимізується корисність $U(x_1, x_2\ )$ за умови виконання бюджетного обмеження $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le J$. Цю задача може бути розв'язана графічно шляхом побудови сімейства ліній байдужості та бюджетної лінії. З всіх кривих байдужості вибирається та, що дотикається до бюджетної лінії. Корисність $U$, що відповідає цій кривій байдужості, є максимальною корисністю при цьому доході $J$, а координати точки дотику $(x_1^*, x_2^*)$ – визначають шуканий набір благ, що максимізує корисність. Існування та єдиність розв'язку $(x_1^*, x_2^*)$ випливає з випуклості кривої байдужості, що випливає з закону спадної граничної корисності.

Економічний зміст бюджетної лінії полягає у тому, що вона показує кількість другого товару, яку може, витратити весь доход, придбати споживач при різних значень кількості придбаного першого товару [3].

Оскільки корисність є суб'єктивним поняттям, то перед тим, як використовують функцію корисності у математичному моделюванні, потрібно спочатку визначити, що розуміємо під нульовим рівнем корисності, а також шкалою, тобто одиницею вимірювання задоволеності. Загалом, будь-яка зростаюча функція аргументу $U$ –також є функцією корисності, оскільки також виражає корисність блага.

Залежність корисності від обсягу $x_i$ споживання при фіксованих обсягах споживання інших благ називають *кривою корисності* $U(x_i)$. Вигляд залежності $U(x_i)$ від обсягу споживання $i$-го блага при сталих обсягах споживання інших благ визначає гранична корисність $i$-го блага:

$$MU_i = \frac{\partial U(x_i)}{\partial x_i}, i = 1, 2. \quad (8.3)$$

Гранична корисність виражає приріст корисності набора благ $(x_1, x_2, \ldots, x_п)$ при збільшенні споживання $i$-го блага на одиницю.

Лінії рівня (ізоліни) функції корисності (криві сталої корисності), називають *кривими байдужості*. Основна умова, якій відповідають криві байдужості, – умова сталості корисності в усіх точках цієї кривої:

$$U(x_1, x_2) = \text{const}. \quad (8.4)$$

Аналізуючи криву корисності, ми бачимо, що при сталому рівні задоволеності набором з 2 товарів для збереження цього рівня при збільшення споживання одного товару скорочується споживання іншого товару. У цьому проявляється ефект заміни.

Кількісною характеристикою інтенсивності ефекту заміни і показником, що визначає форму кривої байдужості, є *гранична норма заміщення*:

$$MRS_{x_1x_2} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=\text{const}} \quad (8.5)$$

Оскільки приріст корисності дорівнює нулю за умові $U(x_1, x_2) = \text{const}$, тому

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{MU_1}{MU_2}.$$

Підставивши цей вираз, у (8.5), знаходимо формулу для граничного норми заміщення у вигляді:

$$MRS_{x_1x_2} = \frac{MU_1}{MU_2}. \quad (8.6)$$

Оскільки гранична норма заміщення $MRS_{x_1x_2}$ свідчить, на скільки можливо скоротити споживання блага $x_2$, щоб при одиничному збільшенні споживання блага $x_1$ корисність набору благ не зміниться, то з умови (8.6) випливає наступний висновок: у скільки разів гранична корисність блага-замінника перевищує корисність блага, що заміщає, у скільки разів скорочення обсягу його споживання перевищить приріст споживання блага-замінника [6].

### 8.3 Види функції корисності

Ще у 18-му сторіччі Д. Бернуллі вперше запропонував кількісне визначення корисності блага на основі теорії гри [9]. За Бернуллі, корисність (або вигода) $U$ – це результат, що отримує споживач від володіння блага (досягнення виграшу) $x$. Діапазон зміни обсягу споживання блага x розбивається на два інтервали: 1) при $x > x_0$ благо забезпечує виграш (корисність); значення $x_0$ – це кількість блага, що відповідає нульовому рівні корисності; 2) при $0 < x < x_0$ наявний рівень блага знижає рівень задоволеності, при цьому чим менший обсяг блага, тем більш суттєвим є зниження задоволення споживача.

З точки зору теорії ігор благо розглядається як виграш. У подальших міркуваннях Д. Бернуллі використовує наступне припущення: обсяг блага $x_0$, що відповідає повній незадоволеності споживача ($U = 0$), не порівнюваний з максимально можливим обсягом споживання $x_п$, тобто $x_0 \ll x_n$. У межах своєї теорії Бернуллі отримав, що функція корисності може бути представлена логарифмічною кривою виду

$$U = a\ln\frac{x}{x_0} \tag{8.7}$$

Зауважимо, що функція (4.7) не знайшла широкого застосування у теорії корисності, оскільки на інтервалі $0 < x < x_0$ ця функція є від'ємною. Більш розповсюдженою у дослідженнях є застосування логарифмічної функції корисності у вигляді:

$$U = a\ln(x - x_0), x > x_0 \geq 0. \tag{8.8}$$

Для випадку кількох благ використовують функцію

$$U = \sum_{k=1}^{n} a_k \ln(x_k - x_{0k}). \tag{8.9}$$

**Приклад 8.1.** Переваги споживача, який придбає 10 л молока та 2 тюбики зубної пасти у місяць, виражаються логарифмічною функцію корисності, що має вигляд:

$$U = U_1 + U_2 = 2\ln(x_1 - 1) + \ln(x_2 - 1)$$

Споживач міркує, що йому корисніше придбати: додатково 1 літр молока чи 1 тюбик зубної пасти.

Для відповіді на це питання споживачу потрібно порівняти граничні корисності молока та зубної пасти при даних обсягах споживання цих товарів. Знайдемо ці граничні корисності.

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{10 - 1} \approx 0{,}22.$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{2}{x_2 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1.$$

Отже, цьому споживачу значно корисніше додатково придбати тюбик зубної пасти, ніж літр молока.

Розглянемо величину середньої корисності:

$$\overline{U} = \frac{f_1 U_1 + f_2 U_2}{f_1 + f_2},$$

де $f_j$ – частота отримання $j$ блага.

Запишемо функцію корисності (4.9) для двох благ:

$$U = U_1 + U_2 = a_1 ln(x_1 - x_{01}) + a_2 ln(x_2 - x_{02}), a_i \geq 0, x_i > x_{0i} \geq 0.$$

Прийнявши $a_1 = a_2 = a$, отримуємо формулу середньої корисності для цього випадку:

$$\overline{U} = \frac{f_1 a\ln(x_1 - x_0) + f_2 a\ln(x_2 - x_0)}{f_1 + f_2} = a \ln\left[(x_1 - x_0)\frac{f_1}{f_1 + f_2}(x_2 - x_0)\frac{f_2}{f_1 + f_2}\right].$$

Цю рівність можна записати у вигляді:

$$\overline{U} = \ln(x_1 - x_0)^{b_1} \cdot (x_2 - x_0)^{b_2}.$$

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою, то виразом під знаком логарифму у цій рівності також можна розглядати як функцію корисності:

$$U = (x_1 - x_0)^{b_1} \cdot (x_2 - x_0)^{b_2}.$$

У загальному вигляді степеневу функцію корисності можна записати у наступному вигляді:

$$U = a(x_1 - x_{01})^{b_1} \cdot (x_2 - x_{02})^{b_2}, a > 0, b_1 + b_2 = 1, x_i \geq x_{0i} > 0. \quad (8.10)$$

Сенс теорії ігор, вложений Д. Бернуллі у функцію середньої корисності, дозволив інтерпретував корисності у задачах визначення початкового обсягу благ, необхідного для досягнення певного рівня корисності та приросту задоволеності, що пов'язаний з приростом наявного блага. Тут вважається, що розглядається одне й те ж благо, що може бути у різних кількостях, тобто може забезпечувати різний рівень задоволеності.

**Приклад 8.2.** Продавець планує реалізувати товар за 10 000 г.о., проте з попереднього досвіду відомо, що зі 100 угод аналогічного типу 5 угод виявляються невдалими. Угоду можна застрахувати на 800 г.о. Визначити: а) починаючи, з якої суми капіталу продавець може, відмовитися від страхування; б) яким мінімальним капіталом повинен мати страхувальник, щоб йому були визначені такі умови страхування.

Визначимо початковий розмір капіталу $x_1$, вважаючи $x_0 = 0, x_2 = x_1 + \delta$, де $\delta$ – приріст капіталу. Прирівняємо середню корисність при відмови від страховки $(x_1 + 10000)^{0,95} \cdot x_1^{0,05}$ та при згоді застрахувати угоду, що становить $x_1 + +(10000 - 800)$.

Отримуємо рівняння:

$$(x_1 + 10000)^{0,95} \cdot x_1^{0,05} = x_1 + 9200,$$

яке має наближений розв'язок $x_1 = 5043$. Тому, якщо капітал продавця перевищує суму 5043 г.о., то приріст середньої корисності у випадку відмови від страхування вище, ніж у випадку його прийняття.

Розмір початкового капіталу страхувальника визначимо з умови рівності його середньої корисності при прийняття на себе страхування та відмови від страхування:

$$(x_1 + 800)^{0,95} \cdot (x_1 + [800 - 10000])^{0,05} = x_{1.}$$

Звідси знаходимо, що $x_1 = 14243$. Отже, якщо страхувальник має капітал, що перевищує 14243 г.о., то йому доцільніше прийняти на себе зобов'язання страхування, ніж відмовиться від них.

Отже, розглянуті приклади свідчать, що корисність товару чи послуги (рівень задоволеності нього) можна оцінити кількісно.

Британський економіст Р. Аллен запропонував вигляд функції корисності, яка отримала назву *квадратичної функції корисності* або *функції Аллена*.

Основною передумовою вибору вигляду функції є існування споживачів, для яких можливість користування певними благами обмеженими, внаслідок чого надмірне зростання обсягу одного з благ при незмінному обсягу споживання іншого блага зменшує загальну корисність [4]. У цьому випадку, корисність виражається абсолютним відхиленням обсягів споживання благ між собою, взятим з протилежним знаком: $U = -|x_1 - x_2|$. Більш зручною для використання є диференційовна функція корисності, тому модуль відхилення доцільно замінити на квадрат відхилення: $U = -(x_1 - x_2)^2$, або, у більш загальному вигляді:

$U = -(a_1x_1 - a_2x_2)^2 = 2a_1a_2x_1x_2 - a_1^2x_1^2 - a_2^2x_2^2.$

Функція Аллена є завжди від'ємною і є «функцією втрат», які несе споживач, якщо обсяги благ, що знаходяться у його розпорядженні відрізняються від заданих питомих потреб $a_1$ та $a_2$. При цьому $a_1x_1 = a_2x_2$, тобто

$$x_2 = \frac{a_1}{a_2}x_1.$$

У цьому випадку втрати дорівнюють нулю і корисність є максимальною.

Основоположниками кардиналістського (кількісного) підходу до оцінки корисності є економісти 19-го століття Джевонс та Вальрас [4]. Вони вважали, що споживач здатен оцінити товари, що споживаються з точки зору величини корисності, при цьому метою споживача є максимізація корисності. Тому спочатку корисність набору благ визначалася як сума корисностей всіх благ, що входили у цей комплект, тобто використовувалась адитивна функція корисності:

$$U = \sum_i U_i(x_i), \tag{8.11}$$

$U_i$ – корисність $i$-го благу. Тобто вважалася, що має місце незалежність корисностей окремих благ між собою [6].

У сучасній теорії багатокритеріальної теорії вибору рішень [5] використання агрегованого критерія знову широко розповсюджені, проте розрізняється корисність альтернатив шляхом введенням коефіцієнтів значимості $k_i$:

$$U=\sum_i k_iU_i(x_i). \tag{8.12}$$

При цьому $\sum_i k_i = 1$.

У періоді виникнення теорія корисності використовувалась для теоретичного обґрунтування певних економічних концепцій, зараз використовується і у прикладних дослідженнях, зокрема, у маркетингу.

## Лекція 9. Моделювання поведінки споживачів з допомогою функції корисності

**Мета лекції:** з'ясувати основні принципи моделювання поведінки споживачів на основі використання функцій корисності.

### План

1. Закони Госсена.
2. Модель поведінки споживача в умовах максимізації корисності.
3. Порядкова теорія корисності.

**Ключові терміни та поняття:** закони Госсена, закон попиту Маршалла, рівняння Слуцького, коефіцієнти Слуцького, порядкова теорія корисності, теорія визначеної переваги.

## 9.1. Закони Госсена

Мета максимізації кількості корисності знайшла відображення у закономірностях, отриманих німецьким економістом Г. Госсеном.

Перший закон Госсена: при неперервному споживанні корисність наступної одиниці блага зменшується, при повторному споживанні корисність кожної одиниці блага зменшується у порівнянні з її корисністю при початковому споживанні [7]. У математичній формі перший закон Госсена можна записати у наступному вигляді:

$$MU = \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0, \frac{\partial MU}{\partial x_i} < 0, i = 1,2, \tag{9.1}$$

тобто гранична корисність блага у процесі його споживання зменшується.

Інколи цей закон називають також «аксіомою ненасиченості» [7], оскільки при $MU > 0$ функція корисності є зростаючою, тобто насищення споживача не наступає. Цій аксіомі задовольняють розглянуті вище функції корисності.

*Перший закон Госсена* був отриманий емпіричним шляхом на основі узагальнення суб'єктивних думок споживачів про корисності споживання благ у різних кількостях [7].

*Другий закон Госсена*: максимум корисності споживаних благ за обмежений період часу досягається, якщо затрати часу на споживання кожного блага такі, що їх граничні корисності рівні [7].

Тут мова йде про задачу визначеного умовного екстремуму функції корисності $U = \sum_i U_i(x_i)$ при обмеженому часі споживання благ $\sum_i t_i x_i + T$, де $t_i$ – час споживання $i$-го блага, T – запас (фонд) часу.

Задача розв'язується методом множників Лагранжа: тут функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \sum_i U_i(x_i) - \lambda[\sum_i t_i x_i - T], \tag{9.2}$$

У (9.2) λ – множник Лагранжа. Необхідні умови оптимальності визначаються системою рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \lambda t_i = 0, i = 1, 2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_i t_i x_i - T = 0.$$

З першої рівняння цієї системи випливає, що

$$MU_i = \lambda t_i, i = 1,2. \tag{9.3}$$

Поділивши одне з рівняння (4.15) на інше, отримаємо співвідношення:

$$\frac{MU_1(x_1^*)}{MU_2(x_2^*)} = \frac{t_1}{t_2}. \tag{9.4}$$

Введемо координати $y_1 = t_1 x_1, y_2 = t_2 x_2$, що є інтервалами часу, що витрачається на споживання благ. Крива байдужості у нових координатах подається функцією корисністю $U_i(y_i) = U_i(t_i x_i), i = 1,2$.

Граничні корисності благ дорівнюють:

$$MU_i(x_i) = \frac{\partial U_i(y_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i(y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = MU_i(y_i) \cdot t_i, i = 1,2.$$

Підставивши ці вирази у (4.16), отримаємо:

$$\frac{MU_1(y_1)\cdot t_1}{MU_2(y_2)\cdot t_2}=\frac{t_1}{t_2}\rightarrow\frac{MU_1(y_1)}{MU_2(y_2)}=1,$$

Тобто у момент закінчення споживання кожного блага граничні корисності всіх благ рівні [7]. Економічний зміст множників Лагранжа $\lambda$ полягає у тому, що приріст фонду часу $T$ на одиницю приведе до збільшення корисності набора на величину $\lambda$, що випливає з рівняння (9.2). тобто $\lambda=\frac{\partial\sum_i U_i}{\partial T}$ – це гранична корисність часу.

Результатом кількісної теорії корисності є закон попиту, отриманий американським економістом А. Маршаллом. Гроші розглядають з точки зору їх функції як міри вартості [10]. Маршалл виходив з того, що гранична корисність грошей дорівнює відношення граничної корисності блага до його ціни, залишається сталою величиною: $\frac{MU_i}{p_i}=MU_p=const.$

Це пояснюється тим, що, за другим законом Госсена, споживач максимізує свою корисність шляхом споживання широкого асортименту товарів, тому зміни ціни одного товару не вплине суттєво на купівельну спроможність грошей в цілому [10]. Звідси випливає, що гранична корисність блага пропорціональна його ціні: $MU_i{\sim}p_i$, а, оскільки першому закону Гессену, гранична корисність обернена пропорційна обсягу споживання блага $MU_i{\sim}\,{}^1\!/_{x_i}$, то $p_i{\sim}\,{}^1\!/_{x_i}$, тобто крива попиту є спадною. У цьому полягає закон попиту Маршалла.

На основі законів Госсена можна довести, що при оптимальній комбінації благ, що максимізує корисність її для споживача ціна одного блага повинна перевищувати ціну іншого блага у скільки разів, у скільки перше благо корисніше другого [10], тобто:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{MU_1(x_1^*)}{MU_2(x_2^*)}.$$

З цієї рівності випливає, що у точці з координаті $(x_1^*,\ x_2^*)$ кутові коефіцієнти бюджетної лінії та кривої байдужості рівні між собою.

## 9.2 Модель поведінки споживача в умовах максимізації корисності

Споживач намагається максимізувати свою функцію корисності за умови обмеженості доходу. За умови використання всього доходу $J$ на придбання наборів товарів споживачу потрібно визначити $\max\limits_{P\cdot X=J}u(X)$. Маємо задачу на умовний екстремум за наявності обмеження $P\cdot X=J$. Вона зводиться до знаходження безумовного екстремуму функції Лагранжа

$$L(X)=u(X)+\lambda(J-P\cdot X), \tag{9.5}$$

де $\lambda=const$ – множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму функції (9.5) мають вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,...,n,\ \frac{\partial L}{\partial\lambda}=0.$$

Звідси отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = J. \end{cases} \tag{9.6}$$

Система (9.6) – це система$(n+1)$-го рівняння з $(n+1)$-ими невідомими $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda$. Можна довести, що її розв'язками є координати точки максимуму функції Лагранжа (9.5).

З системи (9.6) випливає, що споживач при фіксованому сталому рівні доходу вибирає оптимальний набір $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, що є розв'язком цієї системи, таким чином, що у точці $X^*$ відношення граничних корисностей дорівнюють відношенням цін:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : ... : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : ... : p_n .$$

Розв'язавши систему (9.6) відносно координат вектора $X^*$, отримаємо функцію індивідуального попиту у вигляді рівностей $x_i^* = x_i^*\left(p_1, p_2, ..., p_n, J\right)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Нехай $P = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ – вектор цін на набір товарів $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $J$ – дохід споживача. Функцію $D\left(P, J\right)$, що ставить у відповідність парі $\left(P, J\right)$ набір товарів $X^*$, що надає споживачу максимальну корисність при цінах $P$ та доході $J$, називають *функцією індивідуального попиту*.

Конкретна форма функції індивідуального попиту

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) = D\left(\left(p_1, p_2, ..., p_n\right), J\right)$$

визначається шляхом розв'язання задачі оптимізації функції Лагранжа (9.5) або шляхом статистичної обробки результатів опитувань споживачів [10].

Функція індивідуального попиту є неперервною та двічі диференційовною за своїми аргументами. Вона є також однорідною функцією нульового степеня, тобто $D\left(\lambda P, \lambda J\right) = D\left(P, J\right)$.

Функцію індивідуального попиту визначають як розв'язок системи (9.6). Розглянемо випадок, коли доход $J$ є змінною величиною, а ціни $p_1, p_2, ..., p_n$ є фіксованими. Тоді компоненти векторної функції $D$ індивідуального попиту $x_j^* = D_j\left(J\right)$ залежать лише від змінної $J$, а їх похідні по $J$ описують характер зміни попиту при зміні доходу. Диференціюючи рівняння (9.6)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = J \end{cases}$$

за змінною доходу $J$ та вважаючи при цьому $x_i = x_i\left(J\right)$, $i = 1, 2, ..., n$, $\lambda = \lambda\left(J\right)$, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J} - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial J} = 0,\ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial J} = 1. \end{cases} \quad (9.7)$$

Нехай $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$. Запишемо систему (9.7) у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J} - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial J} = 0,\ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial J} = 1. \end{cases} \quad (9.8)$$

Якщо функція корисності $u$ є відомою, а ціни $p_i$, $i = 1, 2, ..., n$ – задані, то система (9.8) – це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\frac{\partial x_j}{\partial J}$ функцій індивідуального попиту на $i$-й товар у точці $X^*(J)$. Запишемо цю систему у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} u_{11}\, u_{12} \dots u_{nn} - p_1 \\ u_{21}\, u_{22} \dots u_{2n} - p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n1}\, u_{n2} \dots u_{nn} - p_n \\ p_1\ p_2 \dots p_n \quad 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial J} \\ \frac{\partial x_2}{\partial J} \\ \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial J} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Якщо визначник системи (9.9) не дорівнює нулю, то її розв'язок – вектор $\left( \frac{\partial x_1}{\partial J}, \frac{\partial x_2}{\partial J}, ..., \frac{\partial x_n}{\partial J}, \frac{\partial \lambda}{\partial J} \right)$ – можна знайти за формулами Крамера. Компоненти цього вектора відображають реакцію споживача на зміну доходу [10].

Компоненти вектор-функції індивідуального попиту $D_i(P, J)$, як і у попередньому випадку, визначаються з системи рівнянь (9.6). Частинні похідні $\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$ можна знайти, якщо продиференціювати ці рівняння за змінними $p_k$. Позначивши $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$, у результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_k} \cdot p_i = \lambda \cdot \delta_{ik}, i = 1, 2, ..., n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = -p_k. \end{cases} \quad (9.10)$$

Знаходячи ці невідомі величини за формулами Крамера, маємо:

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \lambda \cdot \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} - x_k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J}, \ j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., n. \quad (9.11)$$

У формулах (9.11) $\Delta$ – визначник системи (9.10), $\Delta_{kj}$ – визначник, який отримуємо з визначника $\Delta$ викреслюванням $k$-го рядка та $j$-го стовпчика. Рівняння (9.11) називають *__рівнянням Слуцького__*. З нього випливає, що при зміні ціни $k$-го товару на малу величину зміна попиту на $j$-й товар формується як сума двох факторів: ефектів заміщення та доходу [4]. Другий доданок у правій частині (9.11), що дорівнює $-x_k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J}$, називають *ефектом доходу*. Він описує зміну доходу споживача, викликану зміною ціни $k$-го товару. Перший доданок у правій частині (9.11), що дорівнює $\lambda \cdot \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} = c_{kj}$ називають *коефіцієнтом Слуцького*. Він характеризує вплив зміни ціни на викликану цією зміною заміну товарів при придбанні. При зниженні ціни на $k$-й товар відбувається зростання доходу споживача, частина якого розподіляється на придбання інших товарів. Матриця коефіцієнтів Слуцького є симетричною: $c_{kj} = c_{jk}$. Діагональні коефіцієнти цієї матриці характеризують чистий ефект заміщення та відображають швидкість зміни попиту на $k$-й товар при малих змінах його ціни та доходу споживача. Ця зміна попиту відбувається таким чином, що корисність вибору споживачем набору товарів залишається незмінною [4]

Напрям зміни попиту на $j$-й товар при зміні ціни $k$-го товару визначається знаком коефіцієнта Слуцького $c_{kj}$. Якщо $c_{kj} > 0$, то $k$-й та $j$-й товари замінюють один одного, при $c_{kj} < 0$ доповнюють один одного, при $c_{kj} = 0$ – є незалежними.

### 9.3 Порядкова теорія корисності

*Порядкова (ординалістська) теорія корисності* виражає перехід від пошуку абсолютної величини корисності до її відносної величини. Основними передумовами переходу до порядкової теорії корисності є [5]:

а) неможливість кількісно оцінити суб'єктивно корисності блага для споживача, оскільки вимога об'єктивного вимірювання корисності не відповідає її суб'єктивним оцінкам;

б) неадекватність закону спадної граничної корисності для такого економічного явища як наявність перехресного впливу благ у наборі (коли збільшення одного блага веде до зменшення корисності іншого блага, якщо вони є товарами-замінниками тощо).

В основі порядкової теорії корисності лежить метод кривих байдужості. Він передбачає, що споживач має суб'єктивну шкалу переваг, а функція корисності визначає порядок переваг наборів благ. В результаті від невимірної граничної корисності можна перейти до граничної норми заміщення, яка виражає кількість блага $x_2$, від якого споживач згодний відмовиться у обмін на додаткову одиницю блага $x_1$.

Оскільки гранична норма заміщення дорівнює співвідношенню цін благ, то цей показник є об'єктивним і його величина $MRS_{1,2}$ може бути визначена і у тому випадку, коли сама корисність вважається невимірною. Проте підхід, що ґрунтується на використання кривих байдужості, також має суттєві недоліки. Зокрема, карта байдужості має статичний характер, при появі нових благ чи зникнення старих потрібно будувати нову таку карту. На практиці споживач не може визначити нескінченну множину рівноцінних комбінацій благ.

Розвитком порядкової теорії корисності є *теорія визначених переваг*. Її автор, американський економіст П. Самуельсон, стверджував, що споживач, придбавши певний набір благ, виражає свою перевагу і, якщо споживач діє раціонально, то виявлені переваги збережуться і при зміні структури цін [10]. В результаті при дослідження поведінки споживача можна не використовувати криву байдужості, побудова яких ґрунтується лише на дані про доходи споживача та ціни благ.

Набір благ $x$ вважається більш пріоритетним, ніж набір $y$, якщо $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i p_i$. Якщо споживач вибирає набір благ x за цінами $p_i$, якщо у той же час він міг за цими цінами придбати інший набір благ x, то тим самим він визначить свою перевагу.

Для класифікації благ (товарів чи послуг) у залежності від реакції попиту на них на зміну ціни використовують похідні $\frac{\partial x}{\partial p}$. Цей показник свідчить, на скільки одиниць зміниться попит на даний товар, якщо його ціна зросте на 1 г.о. Аналогічно, якщо $J$ – доход споживача, то похідна $\frac{\partial x}{\partial J}$ дорівнює зміні величини попиту, якщо доход споживача збільшиться на 1 г.о. У залежності від знаку цих похідних блага можна віднести до одного з наступних типів [10].

1. *Нормальні та цінні блага*, якщо $\frac{\partial x}{\partial p} < 0, \frac{\partial x}{\partial J} > 0$, тобто попит на благо зменшується при збільшенні його ціни та зростає при зростанні доходу споживача.
2. Нормальні та малоцінні блага: $\frac{\partial x}{\partial p} < 0, \frac{\partial x}{\partial J} < 0$. Для таких благ попит зменшується, як при збільшенні їх цін та при зростанні доходу. споживача. Прикладом цінного блага вважається масло, малоцінного – маргарин.
3. Товари, попит на який зростають при зростанні цін, тобто $\frac{\partial x}{\partial p} > 0$, називають *товарами Гіффіна*. Головною особливістю товарів Гіффіна є відносна

дешевизна у порівнянні з можливими аналогами.

Для класифікації благ можна використовувати коефіцієнти еластичності: коефіцієнт еластичності попиту за доходом $E_x^J = \frac{\partial x}{\partial J} \cdot \frac{J}{x}$ та коефіцієнт еластичності попиту за ціною $E_x^p = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p}{x}$. Коефіцієнт еластичності попиту за доходом показує, на скільки процентів зріс попит, якщо доход споживача зріс на 1%. У відповідності зі значеннями коефіцієнта еластичності попиту за доходом розрізняють наступні типи благ [10]:

1. Низькоякісні (малоцінні) товари, попит на які зменшується зі збільшенням дохода споживача, тобто $E_x^J < 0$.
2. Блага першої необхідності, споживання яких не залежить від зміни доходу: $E_x^J = 0$.
3. Якісні (цінні) товари, обсяг споживання яких збільшується зі зростанням доходу, тобто $E_x^J > 0$.
4. Предмети розкоші, споживання яких зростає швидше у порівнянні зі зростанням доходу.

Коефіцієнт еластичності попиту за ціною свідчить, на скільки процентів змінився попит на товар, якщо ціна збільшилися на 1%. У залежності від значення цього коефіцієнта розрізняють наступні товари (блага):

1. Нормальні блага, споживання яких зростають при зменшенні ціни, спадання яких при збільшенні цін. Для таких благ $E_x^p < 0$.
2. Незамінимі блага, зміни цін яких не впливає на обсяги споживання, тобто попит зовсім не еластичний за ціною. Тут $E_x^p = 0$.
3. Товари Гіффіна, попит на які збільшуються зі збільшення ціни. У цьому випадку $E_x^p > 0$.

Товари можуть класифікувати з використанням коефіцієнта перехресної еластичності попиту за ціною [3] . Цей коефіцієнт показує процентну зміну попиту на одне благо при зміни ціни на інше благо на 1%: $E_{x_i}^{p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}$. Тут блага можуть бути взаємозамінними ($E_{x_i}^{p_j} > 0$), взаємно доповнюваними ($E_{x_i}^{p_j} < 0$) або незалежними ($E_{x_i}^{p_j} = 0$).

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 8**

1. Поясніть зміст та призначення функції корисності.
2. Як на вашу думку, на практиці можна побудувати функцію корисності.
3. Вкажіть основні властивості функції корисності.
4. Вкажіть можливі види функції корисності.
5. Поясніть, що така гранична корисність та гранична норма заміщення.
6. Поясніть, що моделюють рівняння Слуцького.
7. Що описує функція індивідуального попиту і для чого її можна використати.
8. Розкрийте зміст порядкової теорії корисності.
9. Як класифікують товари у межах порядкової теорії корисності?

Розв'яжіть наведені нижче завдання.

**1.** Переваги споживача описуються логарифмічною функцією корисністю $U = 2\ln(x_1 - 0{,}5) + 3\ln(x_2 - 1)$. Визначити, на скільки одиниць збільшиться задоволеність, якщо за місяць він споживає 5 одиниць 1-го товару та 3 одиниці 2-го товару, якщо він придбає додаткову одиницю 2-го товару.

**2.** Переваги споживача моделюються степеневою функцією корисності $U$=$10(x_1 - 0{,}1)^{0,3}(x_2 - 0{,}2)^{0,7}$, якщо за місяць він споживає 5 одиниць 1-го товару та 3 одиниці 2-го товару і він вирішив додатково придбати одиницю 1-го товару, а 2-й товар використовується у незмінній кількісті. Визначити, як зміниться задоволеність при цьому споживача.

**3.** Для завдань 1 та 2 побудувати графік кривої корисності 1-го товару при сталому обсязі споживання 2-го товару.

**4.** Споживач в умовах задачі 1 придбає 5 одиниць 1-го товару. Визначити, скільки він повинен споживати 1-го товару, щоб його задоволеність складала 10 одиниць.

**5.** Споживач в умовах задачі 2 придбає 3 одиниць 2-го товару. Визначити, скільки він повинен споживати 2-го товару, щоб його задоволеність складала 30 одиниць.

**6.** Рівень задоволеності споживача з задачі 1 дорівнює 2 одиниці. Знайти, скільки він споживає 1-го та 2-го товару щомісячно, якщо він згоден за додаткову одиницю 1-го товару відмовитися від 4 одиниці 2-го товару. Побудувати графік кривої байдужості.

**7**. Рівень задоволеності споживача з задачі 2 дорівнює 10 одиниць. Визначити, скільки він споживає 1-го та 2-го товару щомісячно, якщо він згоден за додаткові 2 одиниць 2-го товару відмовитися від одиниці 1-го товару. Побудувати графік кривої байдужості.

**8.** Споживач з задачі 1 має дохід 300 г.о. в місяць, ціна одиниці 1-го товару дорівнює 50 г.о., ціна одиниці 2-го товару 20 г.о. Розв'язати задачу споживчого вибору.

**9.** Споживач з задачі 2 має дохід 600 г.о. в місяць, ціна одиниці 1-го товару дорівнює 100 г.о., ціна одиниці 2-го товару 30 г.о. Розв'язати задачу споживчого вибору.

**10.** Ціна 1 кг м'яса знизилась з 100 г.о. до 90 г.о.. В результаті попит на нього зріс з 2кг до 4кг в місяць. Знайти середню еластичність попиту за ціною.

**11.** Ціна на взуття зросла з 700 г.о. за пару до 1000 г.о. за пару, внаслідок цього попит зменшився з 3 пар на рік до 2 пар на рік. Знайти середню еластичність попиту за ціною.

## Розділ 9. Статистична модель міжгалузевого балансу

### Лекція 10. Статична модель Леонтьєва та її побудова

**Мета лекції:** з’ясувати сутність, призначення та метод побудови статичної міжгалузевої моделі балансу.

**План**

1. Сутність та призначення міжгалузевих моделей.
2. Побудова статичної моделі міжгалузевого балансу.
3. Статична модель галузевого балансу у натуральному виразі.
4. Існування мультиплікатора Леонтьєва. Продуктивні матриці.
5. Тотожність міжгалузевого балансу

**Ключові терміни та поняття:** модель Леонтьєва, балансові моделі, технологічна матриця, мультиплікатор Леонтьєва, продуктивність матриці.

### 10.1. Сутність та призначення міжгалузевих моделей

Економіко-математичні моделі призначаються для отримання якісної та кількісної інформації про об’єкти дослідження з метою раціонального керування цими економічними об’єктами. Одним з найбільш важливих таких об’єктів є виробничий сектор економіки країни, що діє у складній системі міжгалузевих взаємозв’язків [2].

*Міжгалузеві моделі* характеризують взаємозв’язки між галузями економіки. Міжгалузеві моделі, вперше розроблені видатним американським економістом лауреатом Нобелевської премії В.В. Леонтьєвим, призначені для отримання інформації та аналізу діяльності виробничого сектору економіки країни з метою забезпечення обґрунтованого планування міжгалузевих постачань продукції згідно з плановими чи прогнозованими обсягами кінцевого попиту на продукцію. Міжгалузеві моделі можуть бути застосовані не лише до економіки країни, але й на рівні світової чи регіональної економіки, або навіть на рівні окремої компанії.

У економічній практиці міжгалузеві моделі використовують у економічній практиці більше 80 країн світу [5]. Їх застосування дозволяє раціонально керувати виробничими секторами національних економік. За типами використаного математичного апарату міжгалузеві моделі є лінійними детерміновими моделями.

У міжгалузевих моделях вважається, що виробничий сектор економіки поділений на деяку кількість $n$ галузей. У одну галузь при цьому об’єднуються всі виробничі процеси одного продукту, так, що кожна галузь виробляє один продукт. Зі зростанням кількості галузей, на які поділений виробничий сектор національної економіки, тим більше адекватно міжгалузева модель відображає весь виробничий сектор. Найчастіше на практиці використовують міжгалузеві моделі, де виділені від 500 до 600 галузей, у Японії – 2000 галузей у міжгалузевій моделі.

## 10.2 Побудова статичної моделі міжгалузевого балансу

Нехай виробничий сектор поділений на $n$ галузей. Перенумеруємо ці галузі. Виробничий сектор працює для задоволення потреб населення у товарах та послугах. Нехай на протязі планового періоду у економіці, за винятком її виробничого сектору, потрібно $y_1$ продукції 1-ої галузі,…, $y_n$ – $n$-ої галузі. Потреби у продукції галузей економіки подано у вигляді вектору $\bar{y} = (y_1,\ y_2, \dots, y_n)^T$. Цей називають вектором кінцевого попиту. Кінцевий попит спрямований на невиробниче споживання та інвестиції. Нехай кінцевий попит відомий. При планування виробничої діяльності виникають два завдання. Перше з них – це визначення обсягів валового виробництва продукції галузей за плановий період, які представимо у вигляді вектору $\bar{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, де $x_i$ – валовий обсяг виробництва у $i$-ій галузі, щоб забезпечити кінцевий попит та функціонування самого виробничого сектору. Друге завдання – це визначення розподілу по галузям виробничого сектору валового обсягу виробництва продукції, щоб забезпечити діяльність виробничого сектору. Цей розподіл представимо у вигляді вектору $\bar{x}^p = \left(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p\right)^T$. Тут $x_i^p$ – величина валового виробництва продукції $i$-ої галузі, що повинно спрямувати на забезпечення виробництва всього виробничого сектору економіки. Вектор $\bar{x}^p$ називають вектором проміжного попиту (вектором проміжної продукції). Вирішити ці завдання дозволяє статична модель міжгалузевого балансу (СММБ).

Нехай $x_i$ – валове виробництво продукції у $i$-й галузі у вартісному виразі, $x_i^p$ – проміжна продукція $i$-ї галузі у вартісному виразі, що використовується всіма галузям у виробничому процесі. Розв'язати перше завдання – це значить отримати співвідношення, з допомогою якого для відомого кінцевого попиту можна визначити необхідні значення обсяги валового виробництва у кожній галузі [2]:

$$\begin{aligned} &x_1 = f_1\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &x_i = f_i\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &x_n = f_n\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\right) \end{aligned} \tag{10.1}$$

Розв'язати друге завдання полягає у отриманні формул, що дозволяють валовий обсяг виробництва розподілити за галузями виробництва (тут вважається, що величини $x_i$, вичислені за формулами (10.1).

Розглянемо валове виробництво $x_i$ у $i$-й галузі. Тоді проміжна продукції цієї галузі $x_i^p$ визначається рівностями

$$x_i^p = x_i - y_{i,}\ i = 1,2,\dots,n. \tag{10.2}$$

Нехай $x_{ij}$ – частина величини $x_i^p$, необхідна для забезпечення виробництва $x_j$ продукції j-ії галузі, $j = 1,2, \dots, n$. При цьому виконуються рівності:

$$x_i^p = \sum_{j=0}^{n} x_{ij}, i = 1,2, \dots, n. \quad (10.3)$$

Величина $x_{ij}$ залежить від величини $x_j$, зі зростанням $x_j$ зростає і величина $x_{ij}$. Тобто має місце залежність $x_{ij} = \varphi_i(x_j)$. Зі спостережень отримали, що тут має місце лінійна залежність:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j + b_{ij}. \quad (10.4)$$

Визначимо коефіцієнти цієї лінійної залежності. Оскільки при $x_j = 0$, маємо, що значення $x_{ij} = 0$, то коефіцієнт $b_{ij} = 0$. Отже, вираз (5.4) набуває вигляду:

$$x_{ij} = \varphi_{ij}(x_{ij}) = a_{ij}x_j, i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, n. \quad (10.5)$$

Коефіцієнти $a_{ij}$ у рівностях (10.5) називають *технологічними коефіцієнтами* або *коефіцієнтами прямих матеріальних витрат*. Величина $a_{ij}$ дорівнює кількості продукції у вартісному виразі продукції $i$-її галузі, необхідної для виробництва продукції вартістю 1 г.о. j-ї галузі у технологічному циклі j-ої галузі. Квадратну матрицю $A(n \times n)$, складену з технологічних коефіцієнтів $a_{ij}$, називають *технологічною матрицею*. Значення цих коефіцієнтів визначаються технологією виробництва, що використовуються.

Підставивши (10.5) у (10.3) отримаємо:

$$x_i^p = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \ i = 1,2, \dots, n. \quad (10.6)$$

З врахуванням (5.6) з (5.2) отримаємо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = x_i, i = 1,2, \dots, n. \quad (10.7)$$

Рівність (10.7) є математичною формою записи СММБ або моделі «витрати-випуск», розробленої В.В. Леонтьєвим [2]. Вона є системою лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомих $x_i, i = 1,2, \dots, n$. Цю модель можна записати у векторній формі з використанням технологічної матриці *A*:

$$A \cdot \bar{x} + \bar{y} = \bar{x}. \quad (10.8)$$

Рівність (10.8) називають *структурною формою* запису СММБ [2]. Можна отримати іншу форму СММБ – *приведену форму*. Рівність (10.8) можна записати у вигляді:

$$\bar{y} = (E - A) \cdot \bar{x}. \quad (10.9)$$

У (10.9) $E$ – одинична матриця розміром $n \times n$. Помножимо обидві частини цього рівняння на матрицю, обернену до $(E - A)$. Отримаємо:

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{y}. \quad (10.10)$$

Позначимо $(E - A)^{-1} = B$. Тоді отримаємо $\bar{x} = B\bar{y}$ – *приведену форму* СММБ. У скалярній формі ця рівність має вигляд:

$$x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j, i = 1,2, \dots, n. \quad (10.11)$$

Приведена форма СММБ дозволяє за екзогенними змінними (заданими поза моделі) $\bar{y}$ визначити ендогенні змінні (такі, що обчислюються у моделі) змінні $\bar{x}$. Отже, формули (10.10) та (10.11) надають розв'язання задачі про необхідні обсяги валового виробництва кожної галузі. Знаючи величини $x_i, i = 1,2, \dots, n$, за формулами (10.5), можна розв'язувати друге поставлене завдання, тобто розрахувати величини міжгалузевих постачань проміжної продукції – тобто $x_{ij}, i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, n$. Ці величини утворюють матриці $X$ з компонентами $x_{ij}$. Її називають *матрицею міжгалузевих постачань.*

Для розрахунку вектору $\bar{x}$ та матриці $X$ потрібно знати компоненти технологічної матриці $a_{ij}$ (технологічні коефіцієнти). За означенням, ці коефіцієнти є невід'ємними. Оскільки використання власної продукції на виробничі потреби цієї ж галузі не перевищують валовий випуск продукції у галузі, тому виконується нерівність $x_{ii} < a_{ii}x_i < x_i$, тому $a_{ii} < 1$.

Має місце глобальна властивість, що відноситься до всіх технологічних коефіцієнтів: $\alpha_j = \max\limits_{1 \le i \le n} a_{ij} > 0, j = 1,2, \dots, n$. Вона означає, що не існує галузь, яка при виробництві своєї продукції нічого не споживає, тобто у технологічній матриці немає нульових стовпчиків. Коефіцієнти технологічної матриці є безрозмірними величинами.

Коефіцієнти $b_{ij}$ матриці $B$ називають *коефіцієнтами повних матеріальних витрат.* Розглянемо економічний зміст цих коефіцієнтів. Для фіксованого номеру j візьмемо наступні значення кінцевого попиту: $y_i = 0, i \neq j$; $y_j = 1$. Тоді з (10.11) отримуємо, що $x_i = b_{ij}$. З цього випливає, що коефіцієнт $b_{ij}$ – це кількість валової продукції (у вартісному виразі) галузі $i$, необхідної для виробництва кінцевої продукції у вартісному виразі галузі $j$. Дійсно, оскільки кінцевий попит $y_j = 1$ на одиницю продукції галузі $j$ при нульовому кінцевому попиту на продукцію інших галузей забезпечується галузевими виробництвами $x_1 = b_{1j}, \dots, x_n = b_{nj}$ всіх галузей виробничого сектора. Матрицю $B$ називають матрицею коефіцієнтів повних матеріальних витрат або *мультиплікатором Леонтьєва*. Коефіцієнти $b_{jj}$ не менші за 1, оскільки $x_j = b_{jj} = x_j^p + 1$, а значення проміжної продукції $x_j^p$ є невід'ємними.

## 10.3 Статична модель галузевого балансу у натуральному виразі

Розглянемо структурну форму СММБ (10.8). Тут вектори $\bar{y}$ та $\bar{x}$ мають вартісний вираз. Тому цю модель називають СММБ у вартісному виразу. Від неї можна перейти до моделі у натуральному виразі, де вектори кінцевого попиту та валового виробництва задані у натуральних показниках [1]. Такий перехід здійснюється, залучивши до моделі ціни. Нехай $x_i^*$ та $y_i^*$ – це відповідно значення валової та кінцевої продукції $i$-ої галузі у натуральному виразі. Далі індекс $^*$ означає, що відповідна величина задана у натуральному виразі. Зв'язок між величинами $x_i, y_i$ та $x_i^*$, $y_i^*$ виражається рівностями:

$$x_i = p_i \cdot x_i^*, y_i = p_i \cdot y_i^*. \qquad (10.12)$$

У (10.12) $p_i$ – ціна одиниці продукції $i$-ої галузі. З цін $p_i$ сформуємо діагональну матрицю $P$, де на головній діагоналі значення цін $p_{ii} = p_i, i = 1, \dots, n$. Тоді вектори валового виробництва та кінцевого попиту можна подати у вигляді:

$$\bar{x} = P \cdot \bar{x}^*, \bar{y} = P \cdot \bar{y}^*. \qquad (10.13)$$

Підставивши ці вирази у рівність (10.8), отримаємо:

$$A \cdot \bar{x} + \bar{y} = \bar{x} \to A \cdot P \cdot \bar{x}^* + P \cdot \bar{y}^* = P \cdot \bar{x}^* . \qquad (10.14)$$

Помноживши обидві частини отриманої рівності на обернену матрицю $P$, отримаємо СММБ у натуральному виразі:

$$A^* \bar{x}^* + \bar{y}^* = \bar{x}^*. \qquad (10.15)$$

У (10.15) матриця $A^* = P^{-1}AP = \left(a_{ij}^*\right)$ – матриця технологічних коефіцієнтів у натуральному виразі. Елементи $a_{ij}^*$ цієї матриці пов'язані з елементом $a_{ij}$ наступною рівністю:

$$a_{ij}^* = \frac{p_j \cdot a_{ij}}{p_i}, i - 1, \dots, n; j = 1, \dots, n. \qquad (10.16)$$

За своїм змістом та властивостями модель (10.16) не відрізняється від моделі (10.8). Наприклад, можна отримати приведену СММБ у натуральному виразі:

$$\bar{x}^* = B^* \cdot \bar{y}^*, B^* = (E - A^*)^{-1}. \qquad (10.17)$$

Матриця $B^*$ – матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат у натуральному виразі. Зв'язок між матрицями $B^*$ та $B$ задається рівністю:

$$B^* = P^{-1} \cdot B \cdot P. \qquad (10.18)$$

Перехід від моделі у натуральному виразі до моделі у вартісному виразі здійснюються за формулами:

$$\bar{x}^* = P^{-1}\bar{x}, \bar{y}^* = P^{-1}\bar{y}, A = P \cdot A^* \cdot P^{-1}, B = P \cdot B^* \cdot P^{-1}. \qquad (10.19)$$

Звичайно, у плануванні використовують моделі і у натуральному, і у вартісному виразі.

## 10.4. Існування мультиплікатора Леонтьєва. Продуктивні матриці

Розглянемо математичне обґрунтування існування мультиплікатора Леонтьєва [1], тобто матриці $B = (E - A)^{-1}$. Навіть існування цієї матриці ще не гарантує того, що її коефіцієнти задовольняють умовам

$$b_{ij} \geq 0, b_{jj} \geq 1, i = 1, \dots, n; j = 1,2, \dots, n, \qquad (10.20)$$

що отримані з економічних міркувань.

Метою математичного дослідження СММБ є визначення математичної ознаки, з допомогою, знаючи технологічну матрицю $A$, можна гарантувати коректність СММБ, тобто можливість переходу від її структурної (10.8) до приведеної форми (10.10), за наявності властивості (10.20) коефіцієнтів матриці $B$ матриці повних матеріальних витрат. Коректність статичної моделі міжгалузевого балансу повністю визначається властивостями технологічної матриці $A$.

<u>Означення</u>. Всяку квадратну матрицю $A$ з невід'ємними коефіцієнтами називають *продуктивною*, якщо існує матриця $B = (E - A)^{-1}$ і її коефіцієнти задовольняють умови (10.20).

**<u>Приклад 12.1</u>**. Нехай складено дві моделі СММБ, у кожної якої $n = 2$. При цьому отримані наступні технологічні матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Перевірити, чи є вони продуктивними.

**Розв'язання.** Для кожної з цих матриць $0 \le a_{ij} \le 1$. При цьому матриця $B_1 = (E - \mathrm{A}_1)^{-1}$ не існує, а матриця $B_2 = (E - \mathrm{A}_2)^{-1}$ існує, проте для її коефіцієнтів не виконуються (5.20).

$$(E - A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \det(E - A_1) = 0.$$

Отже, обернена матриця для $B_1$ не існує. Знайдемо визначник матриці $B_2$.

$$(E - A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,6 & 0,5 \end{pmatrix}, \det(E - A_2) = -0,05.$$

Оскільки $\det(E - A_2) \neq 0$, то обернена матриця існує. Отримуємо:

$$B_2 = (E - A_2)^{-1} = -\frac{1}{0,05}\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ -12 & -10 \end{pmatrix}.$$

Умови (5.20) не виконуються, зокрема, всі елементи матриці $B_2$ від'ємні, тому матриця $A_2$ не є продуктивною.

Дослідження структурної форми СММБ $A \cdot \bar{x} + \bar{y} = \bar{x}$ почнемо зі з'ясування властивості технологічних коефіцієнтів:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, j = 1, \dots, . n. \tag{10.21}$$

Ця властивість має просте економічне обґрунтування. Розглянемо матрицю міжгалузевих постачань:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11\dots} & x_{1j\dots} & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1\dots} & x_{nj\dots} & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Її $j$-й стовпчик містить витрати галузей виробничого сектору на валове виробництво $x_j$ у $j$-у галузь. Очевидно, що величина $x_j$ завжди більша суми цих витрат, тобто виконується нерівність:

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} > 0, j = 1, \dots, n. \tag{10.22}$$

Величину $z_j$, що визначається у лівій частині (10.22), називають *доданою вартістю, створеною у j-ій галузі*. Вона включає в себе оплату праці в галузі, амортизаційні відрахування та прибуток підприємств галузі. Величину $z_j$ називають також *чистою продукцією j-ої галузі*. Обидві частини нерівності (10.22) поділимо на величину $x_{\mathrm{i}} > 0$ з врахуванням, що $x_{ij} = a_{ij} x_j$, отримаємо нерівність (10.21). З цієї нерівності випливає, що виконується нерівність:

$$\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \tag{10.23}$$

Наведемо основні норми матриці *A* (з врахування, що для технологічної матриці *A* коефіцієнти невід'ємні) [1].

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \|A\|_2 = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \|A\|_3 = \mathrm{n} \cdot \max_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij},$$

$$\|A\|_4 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \|A\|_5 = \max_{1 \le j \le n} |\lambda_j(A)|.$$

У $\|A\|_5$ $\lambda_j(A)$, $j = 1, \dots, n$, – власні значення матриці *A*, тобто корені її характеристичного рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$.

Сформулюємо достатню умову продуктивності технологічної матриці: якщо $\|A\| < 1$, де $\|A\| = \min_{1 \le k \le 5} \|A\|_k$, то технологічна матриця *A* є продуктивна.

З нерівності $\|A\| < 1$ випливає, що для продуктивності матриці $A$ з невід'ємними коефіцієнтами достатньо, що хоча б одна з її норм була менше 1. Нерівність $\|A\| < 1$ є не лише є достатньою, а й необхідною умовою продуктивності матриці *A*.

Зауважимо, що з продуктивності матриці *A* випливає також продуктивність матриці $A^*$ у натуральному виразі і навпаки.

## 10.5 Тотожність міжгалузевого балансу

Призначення СММБ полягає у визначення за заданому векторі $\bar{y}$ кінцевого попиту відповідно вектор $\bar{x}$ валового виробництва продукції та матриці *X* міжгалузевих постачань.

Нехай за приведеною моделлю СММБ знайдено вектор $\bar{x}$, далі матрицю *X* міжгалузевих постачань, визначені додані вартості $z_j$.

Всю цю інформацію, а також заданий вектор $\bar{y}$ наводиться у таблиці міжгалузевого балансу [2]. Таблична форма подання інформації про об'єкт моделювання – виробничий сектор економіки країни є досить корисною, оскільки наочно подає якісну та кількісну структуру міжгалузевих взаємозв'язків. Наприклад, $i$-й рядок, що відповідає і-ій галузі-виробника показує розподіл валового виробництва продукції цієї галузі, причому виконуються рівності:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, i = 1,2,\dots,n. \qquad (10.24)$$

Далі, j-й стовбець, що відповідає j-й галузі-споживачу, показує виробничі витрати цієї галузі на виробництво $x_j$ валової продукції цієї галузі. З (10.22) випливає, що виконуються рівності:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j; j = 1,2,\dots,n. \qquad (10.25)$$

Рівності (10.24) називають *балансом виробництва*, а рівності (10.25) – *балансом витрат*, тому СММБ називають також *моделлю «виробництво-витрат».*

З співвідношень (10.24) та (10.25) випливають два типи тотожностей. Перший тип випливає з (10.24) та (10.25) при $i = j$:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} + z_i, i = 1,2,\dots,n. \qquad (10.26)$$

Тотожності (10.26) означають, що виробничі витрати і-ої галузі, збільшені на додану вартість її продукції, дорівнюють вартості валового виробництва у цій галузі [2].

Склавши всі рівності (10.25) та врахувавши тотожність $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki}$, отримаємо другий тип тотожностей:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} z_i. \qquad (10.27)$$

Рівність (5.27) означає, що загальна сума кінцевих попитів дорівнює загальній сумі доданих вартостей. Рівності (10.26) та (10.27) називають *тотожностями міжгалузевого балансу*.

Розглянемо приклад розробки статичної моделі міжгалузевого балансу у найпростішому випадку для економічної системи з 2 галузей.

**<u>Приклад 10.2</u>** У таблиці 5.2 наведені дані щодо міжгалузевого балансу економічної системи, що складається з двох галузей, за останній рік у грошових одиницях. Визначити необхідний обсяг валового виробництва у кожній галузі, якщо планове споживання на наступний період часу повинне змінитися. Кінцеве споживання продукції галузі $A_1$ повинно збільшитися удвічі, а галузі $A_2$ – залишитися на попередньому рівні. Знайти додану вартість у цих галузях.

**Розв'язання.** Знайдемо елементи технологічної матриці $A$ – технологічні коефіцієнти $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$.

Таблиця 10.1. Міжгалузевий баланс виробничого сектору з 2 галузей (г.о.)

| Галузі-виробники | Галузі-споживачі | | Кінцевий продукт | Валове виробництво |
|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | | |
| $A_1$ | 7 | 21 | 72 | 100 |
| $A_2$ | 12 | 15 | 123 | 150 |

Отримаємо:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0,07;\ a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0,14;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0,12;\ a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10.$$

Технологічна матриця $A$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо її на продуктивність. Для чого використаємо норму

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}:$$

$$a_{11} + a_{21} = 0,07 + 0,12;$$

$$a_{12} + a_{22} = 0,14 + 0,10 = 0,24.$$

Отже, для отриманої технологічної матриці $A$ норма $\|A\|_1 = 0,24 < 1$, тому ця матриця є продуктивною та для довільного вектора $\bar{y}$ кінцевого попиту можна знайти вектор валового виробництва $\bar{x}$, що забезпечує цей вектор. Знайдемо $\bar{x}$ за формулою (10.10):

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{y}.$$

Запланований новий вектор $\bar{y}$ кінцевого споживання має вигляд

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 72 \cdot 2 = 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця повних витрат має вигляд $B = (E - A)^{-1}$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$$\det(E - A) = 0,93 \cdot 0,9 - (-0,14) \cdot (-0,12) = 0,8202.$$

$$B = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\bar{x}$ валового виробництва:

$$\bar{x} = BY = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти умовно чисту продукцію галузей при знайдених обсягах валового виробництва, знайдемо нові значення виробничого споживання $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, $i = 1,2$; $j = 1,2$:

$$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,07 \cdot 179 = 12,53;$$
$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,14 \cdot 160,5 = 22,47;$$
$$x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,12 \cdot 179 = 21,48;$$
$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,1 \cdot 160,5 = 16,05.$$

Додану вартість у галузях визначаємо за формулою $z_j = x_j - x_{1j} - x_{2j}$. Тут $j = 1,2$. Маємо:

$$z_1 = 179 - 12,53 - 21,48 = 144,99, \; z_2 = 160,5 - 22,47 - 16,05 = 121,98.$$

Розглянуту тут модель міжгалузевого балансу застосовують не лише для управління виробничого сектору національної економіки чи планування діяльності диверсифікованої компанії, але її можна модифікувати для планування витрат праці та основного капіталу з метою забезпечення виробничого процесу.

## Лекція 11. Баланси цін, трудових ресурсів та основних виробничих фондів

**Мета лекції:** надати студентам знання про основні типи балансових моделей у виробничій діяльності.

**План**

1. Баланс цін.
2. Баланс трудових ресурсів.
3. Баланс основних виробничих фондів.

**Ключові терміни та поняття:** баланс цін, балансове рівняння, агрегований баланс праці, коефіцієнти повних витрат праць, баланс основних виробничих фондів

### 11.1 Баланс цін

Раніше при дослідженні СММБ отримана рівність (10.25):

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j; j = 1,2, \dots, n.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на добавлену вартість $z_j$ у $j$-й галузі та ввівши позначення

$$v_j = {}^{z_j}/_{x_j}, j = 1,2, \dots, n. \quad (11.1)$$

отримаємо рівність

$$v_j = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, j = 1,2, \dots, n. \quad (11.2)$$

Величина $v_j$ дорівнює частці доданої вартості у кожній одиниці продукції $j$-й галузі чи це величина доданої вартості, що припадає на одиницю у вартісному виразі продукції галузі [2].

Розглянемо формулу (11.2). Технологічні коефіцієнти $a_{ij}$ можна подати у натуральному виразі, використавши (10.16)

$$a_{ij}^* = \frac{p_j \cdot a_{ij}}{p_i}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n.$$

Тоді отримаємо:

$$a_{ij} = \frac{p_i \cdot a_{ij}^*}{p_j}. \quad (11.3)$$

Тоді з (11.2) отримуємо:

$$v_j = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \cdot a_{ij}^*}{p_j}, j = 1, \dots, n.$$

Помножимо обидві частини рівності на $p_j$, врахувавши, що $v_j^* = p_j \cdot v_j$, отримаємо:

$$v_j^* = p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^* p_i, \ \ j = 1, \dots, n. \quad (11.4)$$

Величину $v_j^*$ називають доданою вартістю на одиницю продукції у натуральному виразі продукції $j$-ї галузі. Рівності (11.4) можна записати у матричній формі:

$$\overline{v^*} = \left(E - A^{*T}\right) \cdot \bar{p}. \quad (11.5)$$

Рівність (11.5) називають *балансом цін* або *рівнянням балансових цін*. Тут вектор $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ – вектор цін продукції галузей, $\overline{v^*} = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)^T$ – вектор доданих вартостей на одиницю у натуральному виразі продукції галузей.

Рівність (11.4) є наслідком балансу витрат (10.25). Баланс цін та баланс витрат є основою міжгалузевого балансу [6].

Нехай у балансі цін (11.4) вектор $\overline{v^*}$ відомий, а вектор $\bar{p}$ потрібно визначити. З (11.4) отримаємо:

$$\bar{p} = \left(E - A^{*^T}\right)^{-1} \cdot \overline{v^*} = B^{*T} \cdot \overline{v^*}, \quad (11.5)$$

де $B^*$ – мультиплікатор Леонтьєва у натуральному виразі, $B^{*T}$ – мультиплікатор цінового ефекту розповсюдження.

Рівність (11.5) називають *приведеною формою моделі рівноважних цін*. Її можна подати у вигляді:

$$\bar{p} = P \cdot B^T \cdot \bar{v}, \quad (11.6)$$

де $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T = P^{-1} \cdot \overline{v^*}$ – вектор доданих вартостей на одиницю продукції галузей у вартісному виразі [4].

Моделі (11.5) та (11.6) дозволяють здійснити коригування рівноважних цін продукції галузі, що обумовлена змінами доданих вартостей продукції. Нехай вектор доданих вартостей $\bar{v}$ зміниться на величину $\Delta\bar{v}$, тоді вектор цін $\bar{p}$ повинен змінити на величину $\Delta\bar{p} = P \cdot B^T \cdot \Delta\bar{v}$ згідно з (11.6).

## 11.2. Баланс трудових ресурсів

Все, що споживається в економіці країни, створене працею, зокрема, результатами праці є обсяги валового виробництва продукції галузі у виробничому секторі економіки. Тому витрати праці на виробництво продукції і загальні витрати праці у економіці країні на протязі планового періоду часу є важливим економічними змінними. Тому їх потрібно включити у СММБ, що підвище якість цієї моделі. Введемо змінну $L$ – кількість праці, вона вимірюється у людино-годинах, людино-днях. Коефіцієнт витрати праці у $j$-й галузі називають величину

$$l_j = \frac{L_j}{x_j}, \qquad (11.7)$$

що дорівнює кількості праці, що витрачається у галузі $j$ при виробництва у вартісному виразі на одиниці продукції. У (11.7) $L_j$ – кількість праці, що витрачається у $j$-й галузі на виробництво $x_j$ продукції цієї галузі [5] .

Коефіцієнти $l_j$ як і технологічні коефіцієнти $a_{ij}$ оцінюються за статистичною інформацією. Ці коефіцієнти об'єднуються у вектор $\bar{l} = (l_1, \dots, l_n)$. Його називають вектором коефіцієнтів прямих витрат праці у виробничому секторі економіки. Загальна кількість витрат праці на випуск валової продукції $\bar{x}$ визначається рівністю:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} l_j \cdot x_j = \bar{l}^T \cdot \bar{x}. \qquad (11.8)$$

Позначимо $L_y$ – кількість праці, що витрачає невиробничий сектор економіки за той же проміжок часу, L – загальна кількість праці, що витрачається у економіці, тобто $L = L(\bar{x}) + L_y$. Цю рівність називають *агрегованим балансом праці* [4]

З виразу (11.8) зрозуміло, що величина $L(\bar{x})$ та кожний її доданок $L_j$ залежить від валового виробництва $\bar{x}$, отже ці величини функції вектора $\bar{y}$ кінцевого попиту. Це значить, що величини $L(\bar{x})$ та $L_j$ є ендогенні змінні, а змінна $L_y$ є екзогенна змінна моделі.

Додавши агрегований баланс праці у СММБ (10.7) з врахуванням (11.8), отримаємо модель СММБ, розширену балансом праці:

$$A \cdot \bar{x} + \bar{y} = \bar{x}, \bar{l}^T \cdot \bar{x} + L_y = L. \qquad (11.9)$$

Від структурної форми моделі (11.9) перейдемо до приведеної формі, у якій ендогенні змінні подані у вигляді явних функцій екзогенних змінних:

$$\bar{x} = B \cdot \bar{y}, L = \bar{l}^T \cdot B \cdot \bar{y} + L_{y.} \qquad (11.10)$$

Розглянемо другу рівність у моделі (11.10). Перший доданок у правій частині цієї рівності є кількість праці у виробничому секторі. Подаймо цю величину $L(\bar{x})$ у вигляді:

$$L(\bar{x}) = \bar{l}^T \cdot B \cdot \bar{y} = \bar{m}^T \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad (11.11)$$

де символом $\bar{m}$ позначено вектор

$$B^T \cdot \bar{l} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T = \bar{m}. \qquad (11.12)$$

З'ясуємо зміст елементу $m_j$ цього вектору. Для цього у (11.12) виберемо кінцевий попит у вигляді $y_i = 0, i \neq j$; $y_j = 1$. Тоді $L(\bar{x}) = m_j$. Отже, $m_j$ – кількість праці всього виробничого сектору економіки (не лише j-ї галузі), що витрачається на випуск одиниці (у вартісному виразі) продукції j-ї галузі. Тому елементи $m_j$ називають *коефіцієнтами повних витрат праці у виробничому секторі*.

З рівності (5.40) випливає рівність

$$A^T \cdot \overline{m} + \overline{l} = \overline{m}. \qquad (11.13)$$

### 11.3. Баланс основних виробничих фондів

Таким чином, СММБ розширена шляхом включення у неї нових економічних змінних, що характеризують витрати праці. До основних виробничих факторів відносяться праця, основні виробничі фонди (ОВФ) або основний капітал, земля та природні ресурси. Розширимо СММБ шляхом включення у неї нових економічних змінних, що характеризують ОВФ.

Нехай у $j$-й галузі при виробництві $x_j$ продукції крім витрат праці $l_j$ використовують кількість у вартісному виразі $\Phi_j$ ОВФ (обладнання, верстатів, споруд виробничого призначення тощо).Коефіцієнтом прямої фондоємності чи капіталомісткості $j$-й галузі називають величину

$$f_j = \frac{\Phi_j}{x_j}, j = 1,2, \dots, n, \qquad (11.14)$$

що дорівнює кількість ОВФ цієї галузі, що витрачає на виробництво одиниці (у вартісному виразі) продукції цієї галузі. Побудуємо матрицю $F$, на головній діагоналі розташовані коефіцієнти $f_j$ прямої фондоємності, решта елементів цієї матриці є нульовими. Цю матрицю називають матрицею коефіцієнтів прямих фондоємностей. З (11.14) випливає рівність

$$F \cdot \bar{x} = \overline{\Phi}, \qquad (11.15)$$

де $\overline{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)^T$ – вектор ОВФ у вартісному виразі. Рівність (11.15) називають *балансом ОВФ*. СММБ можна розширити балансом ОВФ. Отримаємо розширений баланс СММБ у вигляді:

$$\begin{cases} A \cdot \overline{x} + \overline{y} = \overline{x}, \\ F \cdot \overline{x} = \overline{\Phi}. \end{cases} \qquad (11.16)$$

Якщо компоненти вектора $\overline{\Phi}$ розглядати як ендогенні змінні, то з структурної форми моделі (11.16) розширеного балансу отримуємо її приведену форму:

$$\begin{cases} \overline{x} = B \cdot \overline{y}, \\ \overline{\Phi} = F \cdot B \cdot \overline{y}, \end{cases} \qquad (11.17)$$

що дозволяє за екзогенною змінною $\bar{y}$ обчислити ендогенні змінні $\bar{x}$ та $\overline{\Phi}$. З економічної точки зору розглядати у моделі (11.17) векторну змінну $\overline{\Phi}$ як ендогенну недоцільно з наступних міркувань. Нехай вектор наявних на момент початку планування (у початковий момент часу) основних фондів становить $\overline{\Phi_0} = \big(\Phi_1(0), \Phi_2(0), \dots, \Phi_n(0)\big)$. Може бути так, що значення компонентів вектору $\overline{\Phi}$, обчислені за моделлю (11.17) перевищують відповідні компоненти вектору $\Phi_0$. Виникає тоді потреба у створенні додаткових основних фондів, щоб забезпечити виробництво запланованого обсягу $\bar{x}$ валової продукції.

Якщо значення компонент змінної $\overline{\Phi}$ не задовольняють умову $\overline{\Phi} \leq \overline{\Phi_0}$, що є необхідно для забезпечення потрібного обсягу валової продукції, то змінну $\overline{\Phi}$ потрібно розглядати як екзогенну змінну. У цьому випадку система (11.16) містить $2n$ рівнянь та $n$ невідомих – компонент вектору $\bar{x}$. Якщо ранг матриці системи не дорівнює рангу розширеної системи, то система не матиме розв'язку. У цьому випадку уже з математичних міркувань змінну $\overline{\Phi}$ вважати екзогенною змінною не можна, вона може бути лише ендогенною. Модель з екзогенною змінною $\bar{y}$ та ендогенними змінними $\bar{x}$ та $\overline{\Phi}$ придатна для використання на практиці, якщо розрахований за приведеній формі (11.17) моделі задовольняє умові $\overline{\Phi} \leq \overline{\Phi_0}$. У іншому випадку процес розробки міжгалузевого балансу з врахуванням наявних ОВФ вимагає іншої моделі, у якій буде враховано створення необхідних додаткових ОПФ. Така модель – динамічна модель міжгалузевого балансу [9].

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 9**

1. Поясніть, у чому зміст міжгалузевої балансової моделі.
2. Запишіть статичну модель міжгалузевого балансу.
3. Розкрийте, у чому полягає тотожність міжгалузевого балансу.
4. Наведіть означення технологічної матриці.
5. Вкажіть, як з'ясувати, чи є задана технологічна матриця продуктивною.
6. Поясніть зміст мультиплікатора Леонтьєва.
7. Поясніть, у чому полягають баланси цін, основних виробничих фондів та трудових ресурсів.
8. Поясніть різницю між екзогенними та ендогенними змінними, а також наведіть відповідні приклади з моделі Леонтьєва.

Розв'яжіть наведені нижче завдання.

1. Діяльність економічної системи, що складається з двох галузей, на протязі останнього року характеризується наступними даними, наведеними у таблиці (в умовних грошових одиницях). Знайти технологічну матрицю $A$ цієї економічної системи.

| Галузі-виробники | Галузі-споживачі | | Валовий обсяг виробництва |
|---|---|---|---|
| | $A$ | $B$ | |
| $A$ | 100 | 160 | 500 |
| $B$ | 275 | 40 | 400 |

2. З'ясувати, чи є продуктивною технологічна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

3. У таблиці наведено дані міжгалузевого балансу за звітний період у умовних грошових одиницях. Знайти необхідний обсяг валового виробництва для кожної галузі, якщо за планом кінцеве споживання у галузі $A$ повинно

збільшитися у 2 рази, а у галузі $B$ рівень кінцевого споживання повинен зрости на 20%.

| Галузі-виробники | Галузі-споживачі | | Фактичне кінцеве споживання | Валовий обсяг виробництва |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | | |
| $A$ | 100 | 160 | 240 | 500 |
| $B$ | 275 | 40 | 85 | 400 |

4. Задано технологічну матрицю (матрицю прямих витрат) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Знайти: а) вектор валового виробництва $X$, що забезпечує планове кінцеве споживання $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приріст $\Delta X$ валового виробництва, що забезпечує збільшення кінцевого споживання на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

5. На плановий період відомі наведені у таблиці коефіцієнти прямих витрат та величина кінцевого споживання у галузях $A_1, A_2, A_3$. Знайти обсяги валового виробництва продукції у цих галузях та міжгалузеві постачання.

| Галузі-виробники | Галузі-споживачі | | | Кінцеве споживання (у.г.о.) |
|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | |
| $A_1$ | 0,3 | 0,25 | 0,2 | 56 |
| $A_2$ | 0,15 | 0,12 | 0,03 | 20 |
| $A_3$ | 0,1 | 0,05 | 0,08 | 12 |

6. Чистою продукцією галузі називають різницю між її валовою продукцією та продукцією всіх галузей, витраченою на виробництво у даній галузі. В умовах попередньої задачі знайти чисту продукцію для промисловості, сільського господарства та інших галузей.

7. У таблиці наведено дані про діяльність економічної системи, що складається з двох галузей, а також план виробництва продукції для кінцевого споживання $Y_1$ у майбутньому періоді (в у.г.о.). Знайти матриці прямих та повних витрат, а також обсяг валового виробництва продукції у плановому періоді, що забезпечує виробництво продукції кінцевого споживання $Y$.

| Галузі-виробники | Галузі-споживачі | | Чиста продукція | План кінцевого споживання, $Y$ |
|---|---|---|---|---|
| | $A$ | $B$ | | |
| $A$ | 80 | 120 | 300 | 350 |
| $B$ | 70 | 30 | 200 | 300 |

## Розділ 10. Динамічна модель міжгалузевого балансу та її узагальнення

### Лекція 12. Динамічна модель міжгалузевого балансу

**Мета лекції:** ознайомити студентів з поняттям та побудовою динамічної моделі міжгалузевого балансу.

**План**

1. Повна структурна форма динамічної моделі міжгалузевого балансу.
2. Алгоритм застосування динамічної моделі міжгалузевого балансу.
3. Траєкторія виробничого сектору економіки.

**Ключові терміни та поняття:** матриця капітальних коефіцієнтів, відкритий динамічний баланс, траєкторія виробничого сектора, замкнутий динамічний баланс.

#### 12.1 Повна структурна форма динамічної моделі міжгалузевого балансу

При дослідженні розширеного моделі міжгалузевого балансу з залученням основних виробничих фондів ми зустрілися з необхідністю побудови моделі міжгалузевого балансу, у якій був відображений процес введення нових виробничих потужностей, зокрема, капітального будівництва [8]. Будь-який процес збільшення ОВФ здійснюється з часом. У зв'язку з цим змінні моделі є функціями часу $t$, тобто модель є динамічною.

Джерелом інвестицій для збільшення ОВФ є кінцева продукція $\bar{y}_t$. Частину кінцевої продукції, що спрямовується на збільшення основного капіталу, будемо позначати $\overline{I_t}$. Тоді вектор $\bar{y}_t$ можна подати у вигляді суми двох доданків:

$$\bar{y}_t = \overline{I_t} + \overline{c_t}, \qquad (12.1)$$

де $\overline{c_t}$ – вектор споживання, по сутності, цей вектор визначає кінцевий попит.

Вектор інвестицій $\overline{I_t}$, вкладених у збільшення ОВФ у момент часу $t$, дозволить збільшити фонди на деяку величину $\Delta\overline{\Phi_t}$=$\overline{\Phi_{t+1}} - \overline{\Phi_t}$ – приріст ОВФ на інтервалі часу $[t; t+1]$. Зв'язок між векторами $\overline{I_t}$ та $\Delta\overline{\Phi_t}$ вважаємо лінійними:

$$\overline{I_t} = D \cdot \Delta\overline{\Phi_t}, \qquad (12.2)$$

де $D$ – квадратна матриця розмірності $n \times n$, елементи якої $d_{ij}$. У скалярній формі рівність (12.2) набуває вигляд:

$$I_i(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \cdot \Delta\Phi_j(t),\ i = 1,2,\dots,n. \qquad (12.3)$$

Задаймо у рівності (12.2) збільшення ОВФ у вигляді

$$\Delta\Phi_1(t) = \dots = \Delta\Phi_{j-1}(t) = \dots = \Delta\Phi_{j+1}(t) = \dots \Delta\Phi_n(t) = 0,$$

при цьому $\Delta\Phi_j(t)$ =1. Тоді отримаємо $I_i(t) = d_{ij}$. Отже, коефіцієнт $d_{ij}$ матриці $D$ дорівнює кількості продукції $i$-ї галузі, необхідної для збільшення на 1 у вартісному виразі основного капіталу j-ї галузі. Коефіцієнти $d_{ij}$ називають *коефіцієнтами капіталомісткості* приростів ОВФ.

Отже, маємо модель (12.2) зв'язку інвестицій $\overline{I_t}$ з приростом $\Delta\overline{\Phi_t}$ ОВФ. З балансу ОВФ (11.15) випливає зв'язок приросту $\Delta\overline{\Phi_t}$ з приростом $\Delta\overline{X_t} = \overline{X_{t+1}} - \overline{X_t}$ валового виробництва:

$$\Delta\overline{\Phi_t} = F \cdot \Delta\overline{X_t}. \quad (12.4)$$

З співвідношень (12.2) та (12.4) отримуємо модель зв'язку інвестицій $\overline{I_t}$ з приростом валового виробництва:

$$\overline{I_t} = D \cdot F \cdot \Delta\overline{x_t} = K \cdot \Delta\overline{x_t}. \quad (12.5)$$

Матрицю $K = D \cdot F$ у (12.5) називають *матрицею коефіцієнтів капітальних витрат* або *капітальних коефіцієнтів*. Коефіцієнт капітальних витрат $k_{ij}$ – це створений у $i$-й галузі основний капітал у вартісному виразі, що використовується j-й галузі при виробництві одиниці її продукції у вартісному виразі. З виразу (12.5) капітальні коефіцієнти пов'язують приріст валового виробництва $\Delta\overline{x_t}$ з інвестиціями $\overline{I_t}$ у момент часу $t$. Підстановка правої частини цього виразу у (12.1) дозволяє встановити зв'язок між $\Delta\overline{x_t}$ з вектором $\bar{y}_t$ та вектором кінцевого попиту $\overline{c_t}$ у вигляді:

$$\bar{y}_t = K \cdot \Delta\overline{x_t} + \overline{c_t}. \quad (12.6)$$

Тепер подаймо динамічну модель міжгалузевого балансу (ДММБ) у аналітичному вигляді. Нехай у деякий початковий момент часу або базовий рік $(t = 0)$ наявні ОВФ величини $\overline{\Phi}_0$:

$$\overline{\Phi}_0 = \left(\Phi_1(0), \Phi_2(0), \dots, \Phi_n(0)\right)^T. \quad (12.7)$$

Ці $\overline{\Phi}_0$ дозволяють здійснити валове виробництво $\bar{x}_0$, тобто при $t = 0$ виконуються рівності (11.16):

$$\begin{cases} A \cdot \bar{x}_t + \bar{y}_t = \bar{x}_t, \\ F \cdot \bar{x}_t = \Phi_t. \end{cases} \quad (12.8)$$

Тут вектор $\bar{y}_t$ з одного боку відповідає у сенсі першої з рівності (12.8) вектору валового виробництва $\bar{x}_t = \bar{x}_0$, з іншого боку, має структуру (12.6):

$$\overline{y_t} = K \cdot \Delta\overline{x_t} + \overline{c_t}, \quad (12.9)$$

де $\Delta\overline{x_t}$ – пока невідомий, проте додатний приріст валового виробництва на інтервалі $[t, t+1]$, де $t = 0$, $\overline{c_t}$ – існуючий на момент $t = 0$ рівень споживання (кінцевий попит).

Підставимо праву частину рівність (12.9) замість $\bar{y}_t$ (12.8), в результаті отримаємо:

$$\bar{x}_t - A \cdot \bar{x}_t - K \cdot \Delta\bar{x}_t = \bar{c}_t. \quad (12.10)$$

Рівність (12.10) – це структурна форма ДММБ. У цій рівності для базисного року $t = 0$ змінні $\bar{x}_t$ та $\bar{c}_t$ є відомими величини, тобто екзогенними, а величину $\Delta\bar{x}_t$ потрібно визначити з моделі, тобто це є ендогенна змінна. Економіко-математичні моделі з екзогенними змінними називають відкритими моделями, тому модель (12.10) називають *відкритим динамічним міжгалузевим балансом з дискретним часом.*

Додавши до цієї моделі рівності (12.1)-(12.5), а також рівність

$$\Delta\bar{y}_t = (E - A) \cdot \Delta\bar{x}_t,$$

що випливає з статичної моделі міжгалузевого балансу. Отримаємо *повну* *структурну форму ДММБ:*

$$\begin{cases} \bar{x}_t - A\cdot\bar{x}_t - K\cdot\Delta\bar{x}_t = \bar{c}_t, \\ K\cdot\Delta\bar{x}_t = \bar{I}_t, \\ F\cdot\Delta\bar{x}_t = \Delta\bar{\Phi}_t, \\ \bar{I}_t + \bar{c}_t = \bar{y}_t, \\ (E-A)\cdot\Delta\bar{x}_t = \Delta\bar{y}_t. \end{cases} \tag{12.11}$$

У моделі (12.11) при $t = 0$ величини $\bar{x}_t$ та $\bar{c}_t$ є екзогенними, решта – ендогенними. Ця модель побудована для визначення такого обсягу валового виробництва $\bar{x}$, який був би забезпечений необхідними ОВФ і при цьому забезпечений бажаний рівень $\bar{y}_T$. Вектори $\bar{x}$ та $\bar{\Phi}$, що забезпечують $\bar{y}_T$, позначимо символами $\bar{x}_T$, $\bar{\Phi}_T$. Якщо наявні ОВФ (12.7) дозволяють визначити $\bar{x}_T$ у межах моделі (11.16), то модель (12.11) не потрібна [8]. Необхідність у використання моделі (12.11) виникає, коли система

$$\begin{cases} A\cdot\bar{x}_T + \bar{y}_T = \bar{x}_T, \\ F\cdot\bar{x}_T = \bar{\Phi}_0 \end{cases} \tag{12.12}$$

не має розв'язку. У цьому випадку модель (12.11) дозволяє визначити шуканий вектор $\bar{x}_T$, виходячи з заданих величин $\bar{x}_0, \bar{c}_0, \bar{\Phi}_0$. Наслідком використання цієї моделі є отримання послідовності

$$(\bar{x}_0, \bar{\Phi}_{0,}, \bar{c}_0), (\bar{x}_1, \bar{\Phi}_1, \bar{y}_1), \dots, (\bar{x}_T, \bar{\Phi}_T, \bar{y}_T = \bar{c}_T\ ). \tag{12.13}$$

У цій послідовності кожна трійка $(\bar{x}_t, \bar{\Phi}_t, \bar{y}_t), t = 1,2,\dots,T$ задовольняє модель (11.16), при цьому вектор $\bar{y}_T$, що входить до останньої трійки, дорівнює бажаному кінцевому попиту [8]. Таким чином, у моделі (12.11) відображається динамічний процес введення ОВФ, тому дана модель є динамічною.

## 12.2. Алгоритм застосування динамічної моделі міжгалузевого балансу

Для побудови послідовності (12.13) перейдемо від структурної форми (12.11) до приведеної форми, виразивши з (12.11) ендогенні величини через екзогенні. Отримаємо [8]:

$$\overline{\Delta x}_t = K^{-1}\cdot(\bar{x}_t - A\cdot\bar{x}_t - \bar{c}_t), \bar{I}_t = K\cdot\overline{\Delta x}_t,\ \overline{\Delta\Phi}_t = F\cdot\overline{\Delta x}_t, \bar{y}_t = \bar{I}_t + \bar{c}_t,$$
$$\overline{\Delta y}_t = (E-A)\overline{\Delta x}_t, t = 0,1,2,\dots,T.$$

У цій приведеній формі ендогенні змінні $\overline{\Delta x}_t$, $\bar{I}_t$, $\overline{\Delta\Phi}_t$, $\bar{y}_t$, $\overline{\Delta y}_t$ подані у вигляді явних функцій екзогенних змінних $\bar{x}_t$, $\bar{c}_t$.

Розглянемо порядок роботи з цією моделлю.

Нехай $t = 0$. З першої рівності цієї моделі знаходимо

$$\overline{\Delta x}_t = \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t = K^{-1}\cdot(\bar{x}_t - A\cdot\bar{x}_t - \bar{c}_t) \tag{12.14}$$

Після цього визначаємо обсяг інвестицій у момент $t = 0$. Після цього значення приріст основного капіталу, що відповідає цим інвестиціям $\overline{\Delta\Phi}_t = F\cdot\overline{\Delta x}_t$, що у момент часу $t+1$ дозволить отримати нову величину основних фондів у галузях:

$$\bar{\Phi}_{t+1} = \bar{\Phi}_t + \overline{\Delta\Phi}_t. \tag{12.15}$$

Це дає можливість у момент часу $t + 1 = 1$ здійснити валове виробництво продукції галузей

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t + \overline{\Delta x}_t. \qquad (12.16)$$

При $t = 0$ загальний вектор $\bar{y}_t$ кінцевого споживання та інвестицій $\bar{y}_t = \bar{I}_t + \bar{c}_t$. Приріст $\overline{\Delta x}_t$ валового виробництва індукує у момент часу $t + 1 = 1$ приріст

$$\overline{\Delta y}_t = (E - A)\overline{\Delta x}_t \qquad (12.17)$$

і, відповідно, нове значення

$$\bar{y}_{t+1} = \bar{y}_t + \overline{\Delta y}_t. \qquad (12.18)$$

Відзначимо, що продуктивність матриці А у ситуації прямої чи опосередкованої залежності кожної пари $(i, j)$ кожної пари виробничого сектору забезпечує виконання нерівність $\overline{\Delta y}_t \geq 0$ при $\overline{\Delta x}_t \geq 0$.

Таким чином, побудовано трійка $(\bar{x}_1, \bar{\Phi}_1, \bar{y}_1)$ у послідовності (12.13) побудована, причому $\bar{y}_1 > \bar{y}_0$. Перевіримо виконання нерівності

$$\bar{y}_{t+1} \geq \bar{c}_T, \qquad (12.19)$$

де $t + 1 = 1, \bar{c}_T$ – потрібний рівень споживання. Якщо нерівність (12.19) виконується, то задача розв'язана вже при $t + 1 = 1$. Інакше, то вважаємо, що $t = t + 1 = 1$ і виділимо у векторі $\bar{y}_t$ деяку його частину $\bar{I}_t$ на інвестиції. Це можна зробити наступним чином:

$$\bar{I}_t = S \cdot \bar{y}_t, \qquad (12.20)$$

де $S$ – діагональна матриця, ненульові елементи на її головній діагоналі $s_{ij} = S_i$ – це прийняті норми інвестицій у відповідних галузях виробничої сектору. Всі значення цих норм задовольняють нерівностям:

$$0 < S_i < 1, i = 1,2, \dots, n. \qquad (12.21)$$

З врахуванням (12.20) з (12.1) отримаємо:

$$\bar{c}_t = (E - S) \cdot \bar{y}_t. \qquad (12.22)$$

Тут $t = 1$. З векторами $\bar{x}_t$ та $\bar{c}_t$ при $t = 1$ починаємо новий етап розрахунків за приведеною моделлю. Визначаємо за нею вектор $\overline{\Delta x}_t$. Інвестиції $\bar{I}_t$ вже визначені за (12.20). Далі визначаємо відповідні прирости основного капіталу $\overline{\Delta \Phi}_t = F \cdot \overline{\Delta x}_t$ та нову величину основних виробничих фондів згідно з (12.15). Після цього обчислюється приріст $\overline{\Delta y}_t$ та нове значення $\bar{y}_{t+1}$ за формулами (12.16) та (12.17). Таким чином, у послідовності (12.13) побудовано нову трійку $(\bar{x}_2, \bar{\Phi}_2, \bar{y}_2)$, причому $\bar{y}_2 > \bar{y}_1$. Після перевірки нерівності (12.19), де $t + 1 = 2$, якщо вона виконується, то завершуємо розрахунки за приведеною моделлю. Інакше при значенні $t = 2$ починаємо новий етап розрахунків за цією моделлю і так процес продовжується доки, поки не буде виконано нерівність (12.20).

Приведена динамічна модель відображає динамічний процес капітального будівництва та введення в дію основного капіталу [8]. При цьому вважається, що інвестиції $\bar{I}_t$ у момент часу $t$ приводять до величини основного капіталу $\bar{\Phi}_{t+1}$, що повністю працює у момент часу $t + 1$. Крім того, ця модель містить також припущення, що приріст основного капіталу $\overline{\Delta \Phi}_t$ компенсує також величину $\bar{W}_t$ його природного вибуття. Зв'язок величини $\bar{W}_t$ вибуття ОВФ з їх величиною $\bar{\Phi}_t$ вважають лінійним:

$$\bar{W}_t = \gamma \cdot \bar{\Phi}_t, \qquad (12.23)$$

де матриця $\gamma(n \times n)$ – діагональна матриця з ненульовими діагональними коефіцієнтами $\gamma_i$, що дорівнюють темпу вибуття ОВФ у і-й галузі. Часто витрати на заміщення вибуття ОВФ та їх капітальний ремонт включають до величини коефіцієнтів $a_{ij}$.

### 12.3. Траєкторія виробничого сектору економіки

Дослідимо динаміку вектора валового виробництва $\bar{x}_t$. Цей вектор як функцію часу називають *траєкторією виробничого сектору економіки*. Якщо траєкторія $\bar{x}_t$.така, що виконується рівність:

$$\bar{x}_{t+1} = \lambda^* \cdot \bar{x}_t, t = 0,1,2, \dots \tag{12.24}$$

і при цьому у цій рівності стала $\lambda^* > 1$, то цю траєкторію називають *збалансованою*, а константу $\lambda^*$– *темпом зростання збалансованої траєкторії*. При цьому, якщо виконується (12.24), то збалансованими з тими ж темпом зростання є супутні траєкторії $\bar{\Phi}_t$ та $\bar{y}_t$. З'ясуємо, чи існує збалансована траєкторія. Для цього, використовуючи вирази (12.11) та (12.20), побудуємо лінійне перетворення:

$$\bar{x}_{t+1} = H \cdot \bar{x}_t, t = 0,1,2, \dots, \tag{12.25}$$

що дозволяє рекурентно обчислити траєкторію $\bar{x}_t$, починаючи зі значення $\bar{x}_0$. Рівність (12.25), що не містить екзогенну змінну $\bar{c}_t$ називають *замкнутим динамічним балансом*. Доведено, що існування збалансованої траєкторії $\bar{x}_t$ рівносильно існуванню у матриці $H$ лінійного перетворення (12.25) власного значення $\lambda^* > 1$ і відповідного йому власного вектора з додатними компонентами [9].

Побудуємо квадратну матрицю $H$ лінійного перетворення. Для цього у друге рівняння моделі (12.11) підставимо праву частину рівності (12.20). Внаслідок цього отримаємо:

$$K \cdot \Delta\bar{x}_t = S \cdot \bar{y}_t. \tag{12.26}$$

Обидві частини цієї рівності помножимо на матрицю $S^{-1}$, в результаті отримаємо вектор $\bar{y}_t$ як лінійну функцію вектора $\Delta\bar{x}_t$:

$$\bar{y}_t = G \cdot \Delta\bar{x}_t, G = S^{-1} \cdot K. \tag{12.27}$$

Матриця $G$ є невід'ємною та невиродженою, оскільки матриця капітальних коефіцієнтів $K$ є невиродженою

У (12.27) замість $\bar{y}_t$ підставимо вираз з моделі (12.11):

$$\bar{y}_t = \bar{x}_t - A \cdot \bar{x}_t.$$

Отримаємо наступний вигляд замкнутого динамічного балансу:

$$\bar{x}_t - A \cdot \bar{x}_t = G \cdot (\bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t). \tag{12.28}$$

Помноживши цю рівність зліва на матрицю $G^{-1}$ і зібравши в одній її частині доданки, що містять $\bar{x}_t$, отримаємо вираз (12.25), де матриця $H$ визначається рівністю:

$$H = E + G^{-1} \cdot (E - A). \tag{12.29}$$

Доведено [7], що, якщо матриця $A$ продуктивна, то матриця $H$ має дійсне власне число $\lambda^* > 1$, причому йому відповідає власний вектор з додатними компонентами.

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 10**

1. Поясніть зміст та призначення матриці коефіцієнтів капітальних витрат.
2. Запишіть рівняння відкритого динамічного міжгалузевого балансу.
3. Наведіть повну структурну форму динамічного міжгалузевого балансу. Поясніть її змінні.
4. Вкажіть, для чого застосовують динамічну модель міжгалузевого балансу.
5. Назвіть у динамічній моделі міжгалузевого балансу екзогенні та ендогенні змінні..
6. Поясніть, у чому полягає приведена форма динамічної моделі міжгалузевого балансу.
7. Вкажіть, що розуміють під траєкторію виробничого сектора економіки.
8. Поясніть, у чому полягає збалансованості траєкторії виробничого сектора економіки.
9. Наведіть рівняння замкнутого динамічного балансу.

У наведених тестових завданнях вкажіть вірну відповідь.

1. Необхідність у розробці динамічної моделі міжгалузевого балансу виникла у зв'язку необхідністю врахування 1) витрат праці; 2) динаміки галузевого ринку; 3) введення нових виробничих потужностей; 4) необхідності збільшення обсягів виробництва.
2. Головним джерелом для збільшення основних виробничих фондів є 1) залучення акціонерного капіталу; 2) кредитні ресурси; 3) збільшення обсягу реалізації продукції підприємства; 4) залучення нових іноземних інвестицій.
3. Матриця капітальних коефіцієнтів встановлює зв'язок між величиною інвестицій у збільшення виробничих потужностей та 1) обсягом збуту підприємства; 2) прибутком підприємства; 3) приростом валового виробництва; 4) витратами праці.
4. Динамічна модель міжгалузевого балансу за своєю математичною формою є системою 1) звичайних диференціальних рівнянь; 2) диференціальних рівнянь у частинних похідних; 3) інтегральних рівнянь; 4) різницевих рівнянь.
5. Динамічну модель міжгалузевого балансу застосовують для 1) визначення потреби у основних виробничих фондів для забезпечення необхідного рівня валового виробництва; 2) планування оптимальних обсягів виробництва; 3) визначення потреби у персоналі; 4) оцінки перспективності ринку.
6. У динамічній моделі міжгалузевого балансу величина валового виробництва є 1) сталою величиною; 2) екзогенною змінною; 3) ендогенною змінною; 4) випадковою величиною.

## Розділ 11. Динамічні моделі математичної економіки

### Лекція 13. Приклади динамічних моделей економічних систем

**Мета лекції:** на прикладах пояснити студентам призначення динамічних моделей економічних систем та способи їх побудови та дослідження.

**План**

1. Модель Самуельсона-Хікса.
2. Динамічна модель Кейнса.
3. Приклади динамічних моделей економічних систем з неперервним часом

**Ключові терміни та поняття: динамічна модель, економічна система, м**одель Самуельсона-Хікса, модель Кейнса, модель з неперервним часом, модель з дискретним часом, рівняння Ферхюльста-Перла, логістична крива.

### 13.1 Модель Самуельсона-Хікса

Модель Самуельсона-Хікса – це динамічна модель, у якій економічний цикл розглядається як наслідок взаємодії національного доходу, споживання та накопичення капіталу [5]. Основне припущення моделі полягає у тому, що попит $d$ у момент часу $t = n+1$ лінійно залежить від величини національного доходу $y$ у попередній момент часу $t = n$:

$$d_{n+1} = ay_n + b.$$

Модель Самуельсона-Хікса можна подати у вигляді лінійного неоднорідного різницевого рівняння другого порядку

$$y_{n+2} = (a+\alpha)y_{n+1} - \alpha y_n + b, \tag{13.1}$$

де $\alpha > 0$ – акселератор або темп приросту капіталомісткості національного доходу.

Загальний розв'язок рівняння (13.1) будемо шукати у вигляді суми частинного розв'язку $y_n^*$ неоднорідного рівняння та загального розв'язку $y_n^\circ$ відповідного однорідного рівняння: $y_n = y_n^\circ + y_n^*$. Частинний розв'язок (13.1) шукаємо у вигляді сталої $y_n^* = A$, яку визначаємо шляхом підстановки у рівняння:

$$A - (a+\alpha)A + \alpha A - b = 0.$$

Звідси знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (13.1):

$$y_n^* = \frac{b}{1-a}.$$

Характеристичне рівняння для (13.1) має вигляд:

$$\lambda^2 - (a+\alpha)\lambda + \alpha = 0.$$

Вигляд розв'язку однорідного рівняння залежить від знаку дискримінанта для характеристичного рівняння.

**Приклад 13.1** Використовуючи модель Самуельсона-Хікса, визначити динаміку зростання національного доходу $y_n$, якщо для даної національної економіки параметри моделі $a=\alpha=0{,}5; b=5$, у початкові періоди часу $n=0$ та $n=1$ національний доход становив відповідно $y_0=10$ г.о., $y_1=20$ г.о.

**Розв'язання.** Підставивши параметри моделі у різницеве рівняння (13.1), отримаємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+2}-y_{n+1}+0{,}5y_n=5.$$

Запишемо та розв'яжемо відповідне характеристичне квадратне рівняння:

$$\lambda^2-\lambda+0{,}5=0.$$

Його дискримінант дорівнює $-1<0$, рівняння має пару комплексних коренів

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}.\ \lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{i}{2},\ |\lambda_2|=|\lambda_1|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \arg\lambda_2=\frac{\pi}{4},$$

тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y_n^{\circ}=\left(|\lambda_2|\right)^n\left(C_1\cos\left(n\arg\lambda_2\right)+C_2\sin\left(n\arg\lambda_2\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді невідомої константи: $y_n^*=A$. Підставивши цю сталу у рівняння, отримаємо:

$$A-A+0{,}5A=5\Rightarrow A=10=y_n^*.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_n=y_n^{\circ}+y_n^*=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right)+5.$$

Значення сталих $C_1$ та $C_2$ знайдемо, використовуючи початкові умови $y_0=10$, $y_1=20$. При $n=0$ та $n=1$ відповідно отримуємо:

$$y_0=C_1+5=10\Rightarrow C_1=5,$$

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5\cos\frac{\pi}{4}+C_2\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}+\frac{C_2}{2}=20\Rightarrow C_2=35.$$

Отже, вираз для залежності величини національного доходу $y_n$ від часу $n$, що моделює динаміку національного доходу в умовах даного прикладу, має вигляд:

$$y_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(5\cos\frac{n\pi}{4}+35\sin\frac{n\pi}{4}\right)+5.$$

### 13.2 Динамічна модель Кейнса

Видатний британський економіст Д. Кейнс сформулював постулат, що «підприємці виробляють не скільки, скільки захотять, але стільки, який є попит».

Якщо припустити, що попит наступного року формується у поточному році, то підприємці планують виробництво на наступний рік у відповідності з прогнозом майбутнього попиту [5].

Розглянемо динамічну модель валового внутрішнього продукту (ВВП), тобто обсягу виробництва продукції кінцевого споживання. У цій моделі єдиною ендогенною змінною $Y$ є ВВП. Величина ВВП складається з 4 частин: фонд невиробничого споживання *C*, валові приватні внутрішні інвестиції *I*, державні витрати на закупівлю товарів та послуг *G*, чистий експорт *E*. У моделі Кейнса економіка є закритою, тому чистий експорт дорівнює нулю, а державні витрати спрямовані на споживання та накопичення, тому вважається, що $Y = C + I$.

У моделі вважається, що попит на інвестиційні товари є сталим, а попит на споживчі товари у наступному році є лінійною функцією ВВП поточного року:

$$\mathrm{C}_{t+1} = \underline{C} + cY_t,$$

де $\underline{C}$ – нижня межа фонду невиробничого споживання, $0 < c < 1$ – гранична схильність до споживання.

Динамічну модель Кейнса отримуємо, якщо прирівняти заплановане виробництво товарів кінцевого попиту до прогнозованого на них попиту:

$$Y_{t+1} = \underline{C} + cY_t + I. \qquad (13.2)$$

Ця модель може застосовуватися лише для аналізу та короткотермінового прогнозування поведінки економіки. Вона не може застосовуватися до довготермінового прогнозування, оскільки не відображає процес відновлення ОВФ, зокрема, тут не врахування вибуття ОВФ у зв’язку з їх фізичним та моральним зносом [9].

З математичної точки зору модель (13.2) є лінійним неоднорідним різницевим рівнянням першого порядку. Загальний розв’язок неоднорідного різницевого рівняння є сума загального розв’язку однорідного рівняння та частинного розв’язку неоднорідного рівняння. Розв’язок однорідного рівняння, що відповідає (15.2), тобто $Y_{t+1} - cY_t = 0$ ,будемо шукати у вигляді $Y_t = \lambda^t$, тому отримаємо рівняння для знаходження $\lambda$:

$$\lambda^{t+1} - c\lambda^t = 0 \Rightarrow \lambda - c = 0 \Rightarrow \lambda = c\ .$$

Тому загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд: $Y_t = A \cdot c^t$.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння (13.2) будемо шукати у вигляді сталої величини $Y_E = B$. Значення цієї сталої знаходимо безпосередньою підстановкою у рівняння (13.2):

$$Y_E = B = \frac{\underline{C}+I}{1-c}.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння (13.2) має вигляд:

$$Y_t = A \cdot c^t + Y_E, t = 0,1,2, \ldots$$

Якщо задано значення цієї функції при $t = 0$, нехай воно дорівнює $Y_0$. Звідси можна знайти значення сталої $A$: $A = Y_0 - Y_E$.

Таким чином, розв’язок різницевого рівняння моделі Кейнса має остаточно наступний вигляд:

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{\underline{C}+I}{1-c}\right) \cdot c^t + \frac{\underline{C}+I}{1-c}.$$

При цьому $\lim_{t\to\infty} Y_t = Y_E$ оскільки $0 < c < 1$, тобто ВВП у довготерміновій перспективі прямує до величини $Y_E$.

### 13.3 Приклади динамічних моделей економічних систем з неперервним часом

Побудуємо модель насичення ринку продукцією деякого підприємства. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва цієї продукції у момент часу $t$. Будемо вважати, що зі збільшенням виробництва відбувається насичення ринку цією продукцією і її ціна $p(y)$ зменшується за лінійним законом:

$$p(y)=b-ay, a>0, b>0.$$

Швидкість зміни обсягів виробництва прямо пропорційна доходу підприємства від реалізації виробленої продукції з коефіцієнтом пропорційності $k$:

$$\frac{dy}{dt}=k\cdot p(y)\cdot y=k(b-ay)y. \qquad (13.3)$$

Розв'яжемо це диференціальне рівняння, розділивши змінні:

$$\frac{dy}{y(b-ay)}=k\cdot dt.$$

Інтегруючи ліву частину цього рівняння за змінною $y$, а праву – за змінною $t$, отримаємо:

$$y(t)=\frac{b\cdot Ce^{bkt}}{a\left(Ce^{bkt}-1\right)}.$$

Графіком отриманої функції $y(t)$ є так звана *логістична крива*. При $t\to+\infty$ $y(t)\to\frac{b}{a}$.

Модель (13.3) є диференціальною, оскільки вона виражається диференціальним рівнянням. До диференціальної моделі виду (13.3) зводиться *модель Золотаса* динаміки рівня суспільного добробуту, яка описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dW}{dy}=kW(A-W), \qquad (13.4)$$

де $W$ – рівень суспільного добробуту, $k>0$, $A>0$ – відомі сталі, $y$ – доход на душу населення. Рівняння (13.4) називають *рівнянням Ферхюльста-Перла* [10] Його розв'язком є логістична крива $W(y)=\frac{A}{1+Be^{-Aky}}$, де $B$ – стала інтегрування, яка визначається з початкової умови $W(0)=W_0$.

Нехай $X=F(K,L)$ – виробнича функція деякої економічної системи, $X$ – обсяг виробництва, $K$ – вартість основних виробничих фондів, $L$ – витрати на оплату праці. Далі розглянемо випадок, коли виробнича функція є функцією Кобба – Дугласа: $X=K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}$.

У *моделі Солоу* вважається, що швидкість зміни факторів виробництва $K$ та $L$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = s \cdot X, \\ \dfrac{dL}{dt} = \lambda \cdot L, \end{cases} \tag{13.5}$$

де $s$ – частка накопичення у доході $X$ від реалізованої продукції, $\lambda$ – темп зростання оплати праці.

Нехай $k = \dfrac{K}{L}$. Тоді виробнича функція Кобба-Дугласа набуває вигляду:

$$X = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} = L \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = L \cdot k^{\alpha}. \tag{13.6}$$

Підставивши (13.6) у перше з рівнянь системи (13.5), отримаємо:

$$\frac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot k^{\alpha}.$$

Враховуючи, що $K = kL$, з останнього рівняння з врахуванням другого рівняння системи (13.5), знаходимо:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(k \cdot L)}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k\frac{dL}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k \cdot \lambda L.$$

Звідси отримуємо, що $\dfrac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot k^{\alpha} = L\dfrac{dk}{dt} + k\lambda L$ або

$$\frac{dk}{dt} + \lambda k = s \cdot k^{\alpha}. \tag{13.7}$$

Рівняння (13.7) є рівнянням Бернуллі. Інтегруючи його за допомогою підстановки $k = u(t) \cdot v(t)$, знаходимо його загальний розв'язок у вигляді

$$k(t) = e^{-\lambda t}\left(\frac{s}{\lambda}e^{\lambda(1-\alpha)t} + C_1\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{K(t)}{L(t)}.$$

Отже, знайдено відношення факторів виробництва у момент часу $t$. Сталу інтегрування $C_1$ визначають з початкової умови $k(0) = \dfrac{K(0)}{L(0)} = k_0$.

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 11**

1. Поясніть необхідність побудови та застосування динамічних економічних моделей.
2. Наведіть приклади динамічних моделей економічних систем.
3. У чому перевага динамічних моделей економічних систем перед статичними?
4. Поясніть зміст та призначення моделі Самуельсона-Хікса.
5. Вкажіть змінні моделі Кейнса.

6. Поясніть різницю між динамічними моделями з неперервним часом та дискретним часом.
7. Наведіть рівняння Ферхюльста-Перла та приклади моделей, де застосовують це рівняння.
8. Поясніть сутність та призначення моделі Солоу.

Розв'яжіть наступні завдання.

1**.** Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва продукції деякого підприємства. Залежність ціни товару від обсягу виробництва має вигляд: $p(y)=b-ay$, $a>0$, $b>0$. Швидкість зростання обсягу виробництва є зростаючою функцією прибутку. Валові виробничі витрати описуються залежністю $c(y)=\alpha y+\beta$, $\alpha>0$, $\beta>0$. Побудувати диференціальну модель для знаходження залежності обсягу виробництва продукції від часу $t$.

2. Знайти функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=-2$.

3. Знайти функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=-1$ і при $y=2$ ціна $p=10$.

4. Знайти функцію, що має сталу еластичність $k$.

5. Знайти функцію попиту $y=y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=\dfrac{y-100}{y}$, $p=10$ при $y=90$, $0<y<100$.

6. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу у кожний даний момент часу пропорційна його фактичній вартості $A(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $k=\text{const}$. Початкова вартість обладнання $A(0)=A_0$. Визначити фактичну вартість обладнання у момент часу $t$.

7. Знайти обсяг реалізованої продукції за час $t=10$ днів, якщо модель зростання обсягів реалізації в умовах конкурентного ринку має вигляд: $\dfrac{dy}{dt}=y(2-y)$, $y(0)=1$.

8. Швидкість зростання інвестиційного капіталу у момент часу $t$ пропорційна величині капіталу з коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює процентній ставці $r$. Знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції.

9. Ціна товару $p(t)$ є функцією часу, функції попиту $d$ та пропозиції $s$ лінійно залежать від ціни, швидкості її зміни $p'(t)$ та темпу $p''(t)$. При цьому $d(p)=p''-p'-2p+480$, $s(p)=2p''+3p'+3p+80$. Знайти динаміку зміни ціни $p(t)$ в умовах ринкової рівноваги $\left(d(p)=s(p)\right)$, якщо у початковий момент часу $t=0$ ціна товару дорівнювала 120 г.о., а швидкість її зміни дорівнювала 40 г.о. за одиницю часу.

# Розділ 12. Моделі аналізу, прогнозування та регулювання економіки

## Лекція 14. Моделі взаємодії споживачів та виробників

**Мета лекції: надання студентам знання основ моделювання ринкових взаємодій між виробниками та споживачами.**

**План**

1. Модель встановлення ринкової ціни з дискретним часом.
2. Модель Еванса.
3. Модель Вальраса.

**Ключові терміни та поняття: «**павутиноподібна» модель, функція попиту, функція пропозиції, модель Еванса, модель Вальраса.

### 14.1 Модель встановлення ринкової ціни з дискретним часом

Розглянемо математичні моделі встановлення рівноважної ринкової ціни [9]. Вони ґрунтуються на допущенні, що зміна ціни товару залежить від різниці попиту та пропозиції: якщо попит вище, ніж пропозиція, то ціна зростає, інакше ціна спадає. Дві найбільш відомі моделі встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару – це «павутиноподібна» модель з дискретним часом та модель Еванса з неперервним часом.

«Павутиноподібна» модель ґрунтується на визначенні рівноважної ціни як абсциси точки перетину кривих попиту (залежність попиту від ціни $p$ товару) та сукупної пропозиції (залежність сукупної пропозиції всіх виробників від ціни $p$). Функція попиту є спадною функцією ціни, функція пропозиції – зростаюча функція ціни. Розглянемо ринок одного товару, що має функцію попиту $\varphi(p)$, функцію сукупної пропозиції – $\psi(p)$. Ці функції визначені та неперервні при всіх значеннях $p > 0$. Крім того, з економічного змісту цих функцій випливають наступні допущення, щодо цих функцій:

$$\lim_{p\to 0,} \varphi(p) = \infty, \lim_{p\to\infty,} \varphi(p) = 0, \quad \lim_{p\to 0} \psi(p) = 0, \quad \lim_{p\to\infty} \psi(p) = \infty.$$

Стан рівноваги відповідає рівності попиту та пропозиції, тобто

$$\varphi(p) = \psi(p), \tag{14.1}$$

З зроблених вище припущень про функції попиту та пропозиції рівняння (14.1) має єдиний розв'язок $p = p_E$, що відповідає стану рівноваги, відповідно, стан рівноваги $\varphi(p_E) = \psi(p_E) = x_E$ є єдиним.

«Павутиноподібна» модель ринку дозволяє адекватно показати процес встановлення на ринку рівноважної ціни. Нехай у початковий момент часу встановлена початкова ціна товару $p_0$, при цьому попит виявився меншим за пропозицію, тобто $\varphi(p_0) < \psi(p_0)$. Тоді продавець знижує ціну до рівня, при якому попит дорівнює пропозиції за початковій ціні, тобто $\varphi(p_1) = \psi(p_0)$. При новій ціні $p_1$ попит перевищує пропозицію $\varphi(p_1) > \psi(p_1)$. Тому ціну підвищує до рівня $p_2$, при якому $\varphi(p_2) < \psi(p_1)$ і таким чином процес продовжиться до формування рівноважної ціни товару, що урівноважує попит та пропозицію. Цей процес моделюється рекурентним співвідношенням $\varphi(p_i) < \psi(p_{i-1}), i = 1,2,\ldots$. Він є збіжним, якщо крива пропозиції є випукла вгору, інакше, описаний процес є розбіжним, хоча б рівняння (14.1) також мало б єдиний розв'язок.

### 14.2. Модель Еванса

Модель Еванса також моделює встановлення рівноважної ціни товару. Тут змінна часу $t$ є неперервною. Позначимо сукупні попит та пропозицію у момент часу $t$ відповідно $d = d(t) = \varphi[p(t)], s = s(t) = \psi[p(t)]$, через $p = p(t)$ – ціну товару у цей момент часу. Модель ґрунтується на допущенні, що попит та пропозиція є лінійними функціями ціни:

$$\varphi(p) = a - bp, a > 0, b > 0;$$
$$\psi(p) = \alpha + \beta p, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Тут враховується, що попит зі збільшенні ціни спадає, пропозиція зростає зі зростанням ціни. Крім того, вважається, що $a > \alpha$, оскільки при ціні, що дорівнює нулю, попит перевищує пропозицію. Основне припущення моделі полягає у тому, що зміна ціни пропорціональна перевищенню попиту над пропозицією:

$$\Delta p = \gamma(d - s)\Delta t, \gamma > 0. \tag{14.2}$$

Згідно припущенню (14.2) взаємодія споживачів та виробників здійснюється таким чином, що ціна, яка відображає цю взаємодію, неперервно пристосовується до ситуації на ринку. При перевищенні попиту пропозиції ціна зростає, у протилежному випадку спадає.

Використовуючи сформульовані пропозиції, отримаємо наступне диференціальне рівняння відносно ціни:

$$\frac{dp}{dt} = -(b + \beta)p + a - \alpha, p(0) = p_0. \tag{14.3}$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Його розв'язок має вигляд:

$$p(t) = C \cdot e^{-(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}.$$

Сталу інтегрування $C$ знаходимо з початкової умови $p(0) = p_0$. Отримаємо:

$$p_0 = C + \frac{a-\alpha}{b+\beta} \Rightarrow C = p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}.$$

Отже, розв'язок – ціна як функція часу має вигляд:

$$p = \left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right) e^{-(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}.$$

Якщо $t \to \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$.

Отже, рівняння (14.3) має стаціонарну (рівноважну) точку $p_E = \frac{a-\alpha}{b+\beta} > 0$. Рівняння (14.3) свідчить, що $p_0 < p_E, \frac{dp}{dt} > 0$; $p_0 > p_E, \frac{dp}{dt} < 0$. Отже, отримали, що $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = p_E$. Причому у першому випадку ціна досягає рівноважного значення, зростає, а у другому випадку спадає до досягнення цього значення.

При цьому рівноважна ціна $p_E$ не залежить від початкової ціни $p_0$. Рівноважна ціна є абсцисою точки перетину попиту та пропозиції, при такій ціні попит дорівнює пропозиції.

### 14.3. Модель Вальраса

Концептуальна схема моделі формування ринкової ціни товару була розроблена французьким економістом Л. Вальрасом у межах запропонованої ним теорії функціонування ринкової економіки [10]. Вона ґрунтується на уявленні про те, що економіка складається з великої кількості господарських одиниць та на ньому присутні багато споживачів. Кожний з цих учасників має власні цілі, тому можливі конфліктні ситуації. Для того, щоб економічна система функціонувала нормально, індивідуальні дії різних учасників повинні бути узгоджувані між собою. У моделі Вальраса, що включає скінченне число споживачів та виробників, вирішення конфлікту між споживачами та виробниками досягається через конкурентний ринковий механізм, що ґрунтується на регуляторному впливі системи цін. Якщо система цін визначена, то будь-яка ринкова угода здійснюється у відповідні з цій системі цін. Якщо учасники ринку не можуть впливати на ціни, то ринок називають конкурентним. На конкурентному ринку для кожного учасника ринку ціни не керовані, він може лише пасивно пристосовуватися до діючої системи цін. Основна ідея Вальраса, що знаходиться у його моделі, полягає у тому, що при деякій системі цін індивідуальні плани учасників становляться сумісні, тобто така систем цін забезпечує розподіл ресурсів та продуктів на основі вирішення конфліктів між учасниками ринку [10]. Таку рівноважну ситуацію називають *конкурентною рівновагою*.

У моделі Вальраса розглядається економіка з $l$ споживачами ($i$=*1,2,…,*$l$), $m$ споживачами ($k$=*1,2,…,*$m$) та $n$ типами товарів ($j$=*1,2,…,*$n$). Введемо наступні позначення: $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор-рядок цін, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-стовпчик товарів (обсягів відповідних товарів). У цій модель товар розглядається в широкому сенсі не лише як предмет споживання, але й до товарів відносяться і проміжний продукт, і засіб праці і первинні ресурси (працю та природні ресурси).

Нехай кожний споживач має дохід $K(p)$ та має власне поле переваг, яке можна задати у вигляді індикатора переваг (функції корисності) $u(x)$. Якщо позначити $X(p) = \left\{x^*: \bar{x} \in X(p), u(x^*) = \max\limits_{\bar{x} \in X(p)} u(p)\right\}$ та $X(p) = 0$, якщо максимум не досягається.

Модель Вальраса можна розглядати як формалізацію річного циклу виробництва і розподілу товару внаслідок взаємодії суб’єктів економіки (споживачів та виробників), кожний з яких намагається досягнути власні мети.

### Лекція 15. Класична модель ринкової економіки

**Мета лекції:** висвітлити сутність та призначення класичної моделі ринкової економіки, ознайомити студентів з її модифікаціями.

**План**

1. Ринок робочої сили.
2. Ринок грошей та ринок товарів.
3. Моделі Кейнса та Фрідмана.

**Ключові терміни та поняття:** максимізація прибутку, зайнятість, безробіття, модель Кейнса, монетаризм.

#### 15.1. Ринок робочої сили

Класична модель ринкової економіки є системою взаємопов'язаних моделей, кожна з яких відображає поведінку одного з ринку: робочої сили, фінансових ресурсів та товарів. Класична модель у найбільшій мірі відповідає економіці за наявності досконалої конкуренції. За наявності монополій її використовувати недоцільно. Розглянемо моделі вказаних трьох ринків у межах класичної моделі ринкової економіки.

Ринок робочої сили, як і інші ринки, описується з допомогою функціональних залежностей: функції попиту, функції пропозиції та умови рівноваги. У класичній моделі функція попиту на робочу силу отримують на основі використання двох гіпотез:

1) фірми є повністю конкурентними при пропозиції товарів та найму робочої сили;
2) за інших рівних умов граничний продукт праці зменшується зі зростанням зайнятої робочої сили.

З цих гіпотез випливає, що у стані рівноваги граничний продукт праці у вартісному виразі дорівнює ставці заробітної плати $w$:

$$w = p\frac{\partial F}{\partial L}, \qquad (15.1)$$

де $p$ – ціна продукту, $F = F(K, L)$ – виробнича функція, $K$ – вартість основних виробничих фондів, $L$ – число працівників.

Якщо б не виконувалась рівність (15.1), наприклад, $p\frac{\partial F}{\partial L} > w$, то фірми намагалися б збільшити кількість найнятих працівників, оскільки з кожним новим працівником вони отримували б прибуток $p\frac{\partial F}{\partial L} - w$. Якщо б виконувалась нерівність $p\frac{\partial F}{\partial L} < w$, то фірми несуть збитки і намагаються скоротити залучену робочу силу [3].

З рівності (15.1) та з вказаних гіпотез випливає, що при зменшенні ставки заробітної плати граничний продукт також буде зменшуватися, поки знову не буде досягнена рівновага. Обґрунтуємо цей висновок на основі математичної моделі. Розглянемо економіку як одне велике підприємство. Нехай П – прибуток, при допущенні, що всі фактори виробництва є фіксовані, крім праці, отримаємо:

$$\Pi = pF(K,L) - wL - rK, \qquad (15.2)$$

Необхідна умова максимуму прибутку має вигляд:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p\frac{\partial F}{\partial L} - w = 0,$$

Проте, оскільки при цьому виконується і достатня умова максимуму:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = p\frac{\partial^2 F}{\partial^2 L} < 0,$$

то умова (15.1) є умовою максимуму прибутку. Запишемо це співвідношення у вигляді $\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p}$. Знайдемо похідну цього співвідношення по реальній заробітній платі $\frac{w}{p}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial (w/p)} = 1,$$

оскільки $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 L} < 0$, то $\frac{\partial L}{\partial (w/p)}$<0, тобто зі зростанням реальної заробітної плати попит на робочу силу зменшується.

Пропозиція робочої сили також є функцією реальної заробітної плати. Чим вищою є реальна заробітна плата, тим більшою є пропозиція робочої сили. При рівновазі на ринку праці позначимо реальну заробітну плату $\left(\frac{w}{p}\right)^0$, а зайнятість – $L^0$. Якщо б реальна заробітна плата перевищила б рівноважне значення, тобто мала б місце нерівність $\frac{w}{p} > \left(\frac{w}{p}\right)^0,$ то з'явилось перевищення пропозиції над попитом на робочу силу, тому надлишкова пропозиція привела б до зниження заробітної плати і під впливом вимушеного безробіття при цьому ціни $p$ знижаться, але меншою мірою, так, що реальна заробітна плата знизиться до значення $\left(\frac{w}{p}\right)^0$. Якщо б виявилось $\frac{w}{p} < \left(\frac{w}{p}\right)^0,$ то нестача робочої сили вимусив би підприємців збільшити оплату праці і знову на ринку праці була б досягнута динамічна рівновага.

### 15.2. Ринок грошей та ринок товарів

Теорія попиту на гроші (без інших фінансових активів) у класичній моделі ґрунтується на гіпотезі, що сукупний попит на гроші – це функція грошового доходу, тобто функції від валового внутрішнього продукту у грошовому вимірі, причому сукупний попит на гроші прямо пропорційний грошовому доходу [3].

Пропозиція грошей розглядається як фіксовано екзогенна задана величина. При надлишковій пропозиції грошей, ціни відповідно зростуть до рівня, при якій на ринку грошей настане рівновага.

Розглянемо механізм ринкового регулювання ринку товару. Попит на товари (або заплановані витрати) – це сума попиту на споживчі та інвестиційні товари: $E = C + I$. Згідно з класичною моделлю $C = C(r), I = I(r)$, при цьому $C(r)$ та $I(r)$, як функції процентної ставки $r$ спадають зі зростанням ставки $r$. Чим більше значення цього показника, тим більшим буде доход від накопичення, отже, більша частка доходу більше буде зберігатися і менша частка витрачатися на придбання споживчих товарів.

Якщо мова йде про інвестування, то зі зростанням ставки $r$ процентів, що застосовується при дисконтуванні майбутніх доходів, тим нижче буде нинішня оцінка будь-якого інвестиційного проєкту. Проєкти, що вважаються прибутковими при високими ставками, у таких умовах вважаються неперспективними для інвесторів, що намагаються максимізувати свій прибуток.

У класичній моделі пропозиція товарів є функцією рівня зайнятості, що визначається на ринку робочої сиди: $Y = Y(L^0)$. Умова рівноваги полягає у тому, що пропозиція товарів $Y(L^0)$ дорівнює попиту на товари $E = C(r) + I(r)$.
Для ринку робочої сили маємо рівняння:

$$L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right), L^D = L^D\left(\frac{w}{p}\right), L^S\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right] = L^D\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right] = L^0. \qquad (15.3)$$

У цих рівняннях індекс D відноситься до попиту, індекс S до пропозиції.

Позначивши пропозиції грошей $M^S$, попит на грошову масу – $M^D$, рівняння, аналогічні (15.3), можна записати для ринку грошей:

$$M^S = M^D = kp^0Y. \qquad (15.4)$$

Для ринку товарів відповідні рівняння мають вигляд:

$$Y = Y(L^0), E = C(r) + I(r), Y(L^0) = C(r^0) + I(r^0) = Y^0. \qquad (15.5)$$

Об'єднавши ці рівняння та умови (15.3)-(15.5), що визначають функціонування ринків робочої сили, грошей та товарів, отримаємо у повному обсязі класичну модель ринкової економіки. Кожний з цих ринків визначається кривими попиту та пропозиції, а також точками рівноваги. Суттєвим недоліком цих моделей є їх статичний характер. У сучасних наукових дослідженнях пропонуються динамічні моделі для описання функціонування цих ринків, достатньо складні з математичної точки зору та для практичного застосування.

### 15.3 Моделі Кейнса та Фрідмана

Класична модель надає відповідь на проблему пошуку рівноваги в економіці за умови повної зайнятості людських ресурсів, але не визначає шлях до досягнення рівноваги, якщо економіка значною мірою відійшла від цього стану та наявне масове безробіття. Видатний економіст Д. Кейнс показав, що рівновага при повній зайнятості не є загальним випадком. Загальний випадок – це рівновага за умови наявності безробіття. Він запропонував модель, яка обґрунтовувала роль держави у досягненні повної зайнятості. Автоматично дія ринкових сил, на його думку, не гарантує досягнення повної зайнятості [9].

У своїй моделі Кейнс розглядає три ринки фінансових активів – ринків грошей, облігацій та фінансового капіталу. Він ввів відносну ціну грошей – процентну ставку за облігацією. В моделі Кейнса вважається, що в умовах рівноваги норма прибутку на фізичний капітал дорівнює ставці прибутку за облігаціям. Він робить висновок, що грошово-кредитна політика впливає на виробництво, зокрема, збільшення грошової маси. У моделі сформульований критерій максимуму прибутку по відношенню до капіталу при фіксованому рівню зайнятості. Він полягає у тому, що гранична продуктивність виробничих фондів у вартісному виразі дорівнює нормі прибутку. Модель Кейнса стверджує, що відносно невелике зростання грошової маси приводить до зростання попиту на інвестиційні товари і зростання пропозиції товарів у цілому, тобто до збільшення кінцевого продукту.

Таким чином, модель Кейнса є корекцією класичної моделі з точки зору врахування наявності безробіття та впливу наявної грошової маси. Іншою модифікацією класичної моделі є монетаристський підхід до економіки, розвинений американським економістом М. Фрідманом. Якщо Кейнс вважав, що найбільше впливає на зміну основних макроекономічних показників попит на товари, то Фрідман вважає, що основним є контроль за пропозицією грошей. Монетаристи вважають, що грошово-кредитна політика на реальний обсяг виробництва та безробіття впливає у короткотерміновий період [9]. На практиці для різних конкретних ситуацій найбільше адекватною є класична модель, її модифікації Кейнса та монетаристів. Подальший розвиток цих моделей здійснюються у математичних моделях державного регулювання економіки, зокрема, моделях визначення оптимальної податкової ставки.

## Лекція 16. Моделювання суспільного розвитку

**Мета лекції:** ознайомити студентів с сучасним станом та основними проблемами моделювання суспільного розвитку.

**План**

1. Кількісні критерії ефективності суспільного розвитку.
2. Моделювання науково-технічного прогресу.

**Ключові терміни та поняття:** суспільний розвиток, критерій ефективності суспільного розвитку, оптимальність по Парето, норма накопичення, науково-технічний прогрес, нейтральність технічного прогресу**.**

### 16.1 Кількісні критерії ефективності суспільного розвитку

У найбільшому загальному вигляді мета суспільного розвитку зводиться до підвищення рівня добробуту всіх членів суспільства, до створення комфортних та безпечних умов життя, до розкриття потенціалу особистості, до зростання тривалості життя. Різні підходи до її досягнення значною мірою виражені у значенні показників для порівняння між країнах, що використовуються у міжнародній практиці економічних досліджень. Головним показником у цій системі є валовий внутрішній продукт на одну людину, інший важливий показник – індекс розвитку людського потенціалу, який визначається як середній арифметичний показник індексів тривалості життя, рівня освіти та доходу. Розглядаються і інші показники, – індекс економічної свободи, індекс національної конкурентоспроможності тощо [9].

При розробці довготермінових програм соціально-економічного розвитку, при макроекономічному моделюванні головним показником, що виступає у ролі критерію ефективності, є ВВП на душу населення. Проте багато дослідників вважають, що більш доцільним є використання показника невиробничого споживання на одного зайнятого. Дійсно, якщо розглядати замкнуту економіку і державні витрати розподілити на інвестиції та невиробниче споживання, то ВВП розпадеться на фонд накопичення та фонд споживання у вигляді: $Y = I + C, I = \rho Y, C = (1-\rho)Y$, де $\rho$ – норма накопичення, частка інвестиційних витрат у ВВП. Тому критерій максимуму ВВП на душу населення полягає у максимізації відношення $\frac{I+C}{N}$, де $N$ – чисельність населення.

З моделі Солоу випливає [9], що зменшення норми накопичення $\rho$ веде не лише до зростання поточного споживання, але й до скорочення питомого споживання в майбутньому. Якщо норму накопичення дуже збільшити, це приводить до скорочення не лише поточного, але й майбутнього споживання. Довготривале стійке зростання питомого споживання можна забезпечити лише при гармонійному розвитку виробництва як споживчих, так і інвестиційних товарів. Доведено, що питоме споживання максимізується у довготерміновому перспективі, якщо норма накопичення дорівнює коефіцієнту еластичності виробництва за капіталом: $\rho = \alpha_K$. Кінцевими благами, для виробництва яких і існує економіка, є товари кінцевого споживання. Тому збільшення доданка $\frac{I}{N}$ (питомого виробництва інвестиційних товарів) корисним є лише у тому випадку, коли це спричиняє зростання питомого виробництва товарів кінцевого споживання.

Існує багато підходів до визначення критерія оптимальності економіки або критерія суспільного вибору. Наприклад, у моделі Солоу використовується критерій виробництва та споживання на душу населення предметів споживання, при цьому ігнорується різниця у величині такого споживання для різних соціальних груп [9]. У математичних моделях оптимального економічного зростання використовується критерій максимуму дисконтованої суспільної корисності. Одним з підходів до визначення економічного оптимуму є використання оптимальності по Парето.

Під оптимумом по Парето розуміють такий стан економіки, при якому неможливим є перерозподіл продукції та витрат, що веде до збільшення корисності одних без зменшення корисності інших. Після виключення всіх станів економіки, не оптимальних по Парето, залишається велика кількість станів, що є оптимальними по Парето. Вибір одного з цих станів є соціально-економічною, а не чисто економічною задачею, оскільки при цьому доводиться ранжирувати корисність різних соціальних груп. Таке ранжування, порівняння корисності може бути здійснено з допомогою функції суспільного добробуту, у яку індивідуальні корисності входять з різними ваговими коефіцієнтами. Це один з підходів до моделювання суспільного розв'язку. Іншим поширеним методом розв'язання цієї задачі є використання теорії ігор, зокрема, кооперативних ігор. На сьогодні проблема ефективних математичних моделей суспільного вибору залишається актуальною та важливою з точки зору економіко-математичного моделювання та математичної економіки.

Математична теорія суспільного вибору ґрунтується на критерії компромісної максимізації корисностей окремих соціальних груп суспільства [9]. При цьому самі корисності розглядаються як функції від обсягів споживчих благ. Тут на модельному рівні доводиться, що співробітництво та конкуренція при взаємодії суб'єктів економіки впливає на рівень досягнення цілей суспільного розвитку. Головним засобом реалізації довготермінових суспільних цілей є науково-технічний прогрес.

## 16.2 Моделювання науково-технічного прогресу

Науково-технічний прогрес проявляється у нових видах продукції, у нових способах та засобах виробництва продукції та надання послуг. Оскільки розробка та впровадження нових технологій є тривалими процесами, а за великі проміжки часу залежності між обсягами виробництва та витратами здебільшого є нелінійними, то для врахування науково-технічного прогресу (НТП) при моделюванні на макрорівні використовують в основному нелінійні моделі. Нові засоби виробництва та нові технології характеризується більшою віддачою ресурсів та меншою витратою ресурсів, саме ці аспекти відображають відомі моделі НТП [10].

НТП може здійснюватися у еволюційній формі, або у формі масового переходу до нового технологічного способу виробництва (кардинальних змін). У першому випадку його можна відобразити з допомогою виробничих функцій з коефіцієнтами, що змінюється повільно, у другому випадку для моделювання виробничої діяльності на різних проміжках часу використовують різні типи виробничих функцій. Прикладом реалізації першого підходу є використання мультиплікативної виробничої функції Тінбергера [10]:

$$X_t = F(K, L)A(t)K_t^{\alpha_K} L_t^{\alpha_L},\ \ A(t) = A_0 e^{\lambda t}.$$

Параметр $\lambda$ у цьому виразі є мірою НТП.

Застосування експоненти у цьому виразі при зміні НТП є доцільним тоді, коли відповідна функція $A(t)$ зростає з приблизним сталим темпом приросту $\lambda$. Тоді виконується наближена рівність $A(t) = (1+\lambda)^t \approx e^{\lambda t}$, ця наближена рівність вірна при малому значенні показника $\lambda$.

Технічний прогрес називають нейтральним, якщо він не змінює співвідношення значень параметрів виробничої функції. Розрізняють нейтральність за Хіксом, Хірродом та Солоу [10].

Технічний прогрес є *нейтральним за Хіксом*, якщо при заданій фондоозброєності гранична норма заміщення праці фондами є сталою при довільному обсязі виробництва:

$$s_k = \frac{\partial X/_{\partial L}}{\partial X/_{\partial K}} = \frac{\partial X/_{\partial L^*}}{\partial X/_{\partial K^*}} \cdot \frac{e^{\lambda_L t}}{e^{\lambda_K t}} = \frac{\partial X/_{\partial L^*}}{\partial X/_{\partial K^*}},\ \lambda_L = \lambda_k.$$

Тут $K^* = A_k(t)K,\ L^* = A_L(t)L$

Прогрес є *нейтральним за Хірродом*, якщо не змінюється граничний продукт фондів:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial K}.$$

Прогрес називають *нейтральним за Солоу*, якщо не змінюється граничний продукт праці: $\frac{\partial X}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial L}$.

Необхідність заміни старих виробничих фондів обумовлена змінами вимог до продукції, технології виробництва, загострення конкуренції на ринку. У математичній моделі це відображається у вигляді переходу до нової виробничої функції. При побудові математичної моделі виробничого процесу в таких умовах потрібно враховувати і наявності перехідного періоду. Тому виробнича функція має різний вигляд на різних етапах виробничої діяльності, що супроводжувалась модернізацією основних фондів.

**Питання та завдання для самоконтроля до розділу 12**

1. Поясніть потребу у розробці моделей взаємодії споживачів та виробників.
2. Розкрийте сутність моделі встановлення ринкової ціни товару.
3. Поясніть зміст моделі Еванса.
4. Висвітліть призначення та зміст моделі Вальраса.
5. Поясніть основні відмінності у моделях Кейнса та Фрідмана.
6. Поясніть механізм функціонування ринку робочої сили.
7. Вкажіть основні моделі функціонування ринку грошей.
8. Назвіть кількісні критерії суспільного розвитку. Чи можна, на Вашу думку, їх вважати об'єктивність?
9. Вкажіть основні підходи до моделювання науково-технічного прогресу.

У наведених тестових завданнях вкажіть вірну відповідь.

1. Рівноважна ціна товару визначається як абсциса точки перетину кривих попиту та пропозиції у моделі 1) Вальраса; 2) Севіджа; 3) «павутиноподібної» моделі ринку; 4) Кейнса.
2. Річний цикл виробництва та розподілу товару здійснюється на основі дослідження взаємодії споживачів та виробників, що намагаються досягти власні цілі, здійснюється у межах 1) моделі Гурвіца; 2) моделі Вальраса; 3) моделі Фрідмана; 4) моделі Кейнса.
3. У моделі Еванса час є 1) неперервною змінною; 2) дискретною змінною; 3) сталою величиною; 4) ендогенною змінною.
4. Класична модель ринкової економіки найбільшою мірою відповідає 1) ринку монополістичної конкуренції; 2) монополії; 3) досконалої конкуренції; 4) олігополії.
5. У стані рівноваги ринку праці вартісний вираз граничного продукту праці дорівнює 1) ціні одиниці товару; 2) податку на дохід; 3) ставці заробітної платні; 4) податку на додану вартість.
6. У моделі Кейнса відносна ціна грошей визначається як 1) процентна ставка за облігацією; 2) депозитна процентна ставка; 3) норма прибутку на акцію; 4) обмінний курс.
7. У моделі Солоу критерієм оптимальності економіки є 1) виробництво та споживання на душу населення предметів споживання; 2) валового

внутрішнього продукту на душу населення; 3) середній дохід на душу населення; 4) рівень зайнятості.

8. Вплив науково-технічного прогресу на обсяг виробництва враховується у виробничій функції 1) Леонтьєва; 2) Кобба-Дугласа; 3) Тінбергера; 4) лінійній.
9. Якщо у ході науково-технічного прогресу не змінюється граничний продукт праці, то він називається 1) нейтральним за Хіксом; 2) нейтральним за Хірродом; 3) нейтральним за Солоу; 4) нейтральним за Дугласом.

## Використана література


1. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Основи математичної економіки. Київ : Інформтехніка, 2015. 320 с.
2. Товкач Р. В. Математична економіка. Луцьк : СНУ ім. Лесі Українки, 2018. 146 с.
3. Гамалій В. Ф., Сотніков В. С., Вишневська В. А. та ін. Математичні моделі у маркетингу та менеджменті. Кропивницький : ЦНТУ, 2017. 136 с.
4. Економіко-математичне моделювання / за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.
5. Мазник Л. В., Березянко Т. В., Безпалько О. В. та ін. Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом. Київ : Кафедра, 2019. 290 с.
6. Малярець М. М. Економіко-математичні методи та моделі. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. 412 с.
7. Соколовська З. М., Андрієнко В. М., Івченко І. Ю. Математичне та комп'ютерне моделювання економічних процесів. Одеса : Астропринт, 2016. 308 с.
8. Моклячук М. П., Ямненко Р. Є. Теорія вибору та прийняття рішень. Київ : ВПЦ Київський університет, 2020. 527 с.
9. Werner F., Sotskov Y. N. Vfthematics of Economics and Business. London and New York : Rostlende. 2020. 536 p.
10. Dunbar S. Mathematical Modeling in Economics and Finanse. New York : AMS/NAA, 2019. 322 p.

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Клименко Михайло Іванович
Панасенко Євген Валерійович
Ткаченко Ірина Григорівна

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Конспект лекцій для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент О.*В. Кудін*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *М.І. Клименко*