Розділ 8. Теорія споживчого вибору

Лекція 8. Функції корисності та їх застосування у теорії споживчого вибору

Мета лекції: сформувати у студентів систему знань про функції корисності та їх застосування при дослідженні поведінки споживачів.

План

1. Функція корисності.
2. Бюджетні лінії, криві корисності та криві байдужості.
3. Види функції корисності.

Ключові терміни та поняття: функція корисності, модель споживчого вибору, відношення переваги, гранична корисність, гранична норма заміни, бюджетні лінії, криві корисності, криві байдужості, функція Аллена.

8.1. Функція корисності

Функцією корисності називають залежність між кількісно вираженим рівнем задоволення споживача використаними благами (товарами чи послугами) та обсягами спожитих цих благ: $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тут U – корисність набору благ, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги споживання цих благ [4].

Нехай споживач має дохід J, який він повністю витрачає на придбання деяких товарів чи послуг (благ). Ціни цих товарів вважаються заданими. Враховуючи структуру цін, величину доходу та власні уподобання, споживач придбає певну кількість товарів (послуг). Математичну модель поведінки споживача називають <u>*моделлю споживчого вибору*</u>.

Розглянемо модель з двома видами товарів, тобто будемо вважати, що кількість товарів, придбаних споживачем, визначається вектором (x_1, x_2), де x_i – кількість одиниць i-го товару, придбаних споживачем, $i = 1, 2$.

Вибір споживача характеризують *відношенням переваги*, суть якого полягає у наступному. Вважається, що споживач може вибрати з двох наборів товарів $A = (a_1, a_2)$ та $B = (b_1, b_2)$, більш бажаний або споживач не бачить між ними різниці. Якщо набір товарів $A = (a_1, a_2)$ є більш бажаним порівняно з набором $B = (b_1, b_2)$, то використовують позначення $A \succ B$. Якщо $A \prec B$, то набір B є більш бажаним, ніж A. Якщо $A \sim B$, то набори є рівноцінними для споживача.

Відношення переваги має властивості транзитивності та ненасиченості. Нехай $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$. Тоді:

1) $A \succ B \wedge B \succ C \Rightarrow A \succ C$ – <u>властивість транзитивності</u>;
2) $a_1 > b_1 \wedge a_2 > b_2 \Rightarrow A \succ B$ – <u>властивість ненасиченості</u>.

На множині споживчих наборів (x_1, x_2) визначають функцію $u(x_1, x_2)$, яку називають *функцією корисності споживача*. Її значення $u(x_1, x_2)$ на споживчому наборі (x_1, x_2) дорівнює оцінці цього набору споживачем (рівню задоволення потреб споживача даним набором). Кожний споживач має власну функцію корисності. Якщо набір товарів $A = (a_1, a_2)$ є більш бажаним для споживача, ніж набір $B = (b_1, b_2)$, то $u(a_1, a_2) > u(b_1, b_2)$, тобто $A \succ B \Rightarrow u(A) > u(B)$.

У теорії споживчого вибору вважається, що функція корисності має наступні властивості:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0, i = 1,2$ – зі зростанням споживання товару його корисність зростає;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – невеликий приріст споживання товару при його початковій відсутності суттєво збільшує його корисність;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} < 0$, $i = 1,2$ – зі зростанням споживання товару швидкість зростання його корисності сповільнюється;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ – при дуже високому рівню споживання товару його подальше збільшення не приводить до збільшення корисності.

Аналогічні поняття та властивості можна визначити для наборів з n товарів чи послуг $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, на яких визначають функцію корисності $u(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Частинну похідну $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ називають *граничною корисністю* i-го товару.

Лінію рівня $u(x_1, x_2) = c = \text{const}$ на площині Ox_1x_2 називають *лінією байдужості*. Для наборів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n товарів розглядають *поверхні байдужості* $u(x_1, x_2, ..., x_n) = c = \text{const}$, на яких корисність наборів товарів є сталою. Множину всіх ліній (поверхонь) байдужості називають *картою байдужості*.

Рівняння поверхні байдужості можна записати у диференціальній формі. Оскільки на такій поверхні функція корисності є сталою, то

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = 0. \qquad (8.1)$$

Умова (8.1) означає, що дотична до поверхні байдужості ортогональна до градієнта функції корисності. З точки зору споживача наявність множини наборів товарів, що мають однакову корисність, означає можливість заміни одного набору товарів рівноцінним йому іншим набором.

Нехай у (8.1) $dx_3 = dx_4 = ... = dx_n = 0$, тоді $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$. Звідси знаходимо:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}. \quad (8.2)$$

Відношення $\frac{dx_2}{dx_1}$ називають *граничною нормою заміни* першого товару другим [5]. Вона дорівнює відношенню граничних корисностей першого та другого товарів і показує, скільки потрібно одиниць другого товару, щоб замінити одиницю першого товару.

8.2 Бюджетні лінії, криві корисності та криві байдужості

Бюджетною множиною називають множину наборів товарів, які може придбати споживач, що має певний сталий доход J. Якщо $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ – набор товарів, $P = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ – вектор-рядок відповідних значень цін, то бюджетна множина має вигляд: $B = \left\{X : P \cdot X \le J\right\}$.

Геометричне місце точок площини $x_1 O x_2$, де x_1, x_2 – відповідні кількості першого та другого блага, для яких сумма витрат споживача на їх придбання залишається стала та дорівнює доходу споживачу J, називають *бюджетною лінією*. Це пряма

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = J.$$

Ця рівність виражає умову рівності витрат та доходу споживача.

При визначенні набору благ, які він повинен придбати, споживач розв'язує наступну задачу: визначити кількість благ (x_1, x_2), що будуть споживані і при яких максимізується корисність $U(x_1, x_2)$ за умови виконання бюджетного обмеження $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le J$. Цю задача може бути розв'язана графічно шляхом побудови сімейства ліній байдужості та бюджетної лінії. З всіх кривих байдужості вибирається та, що дотикається до бюджетної лінії. Корисність U, що відповідає цій кривій байдужості, є максимальною корисністю при цьому доході J, а координати точки дотику (x_1^*, x_2^*) – визначають шуканий набір благ, що максимізує корисність. Існування та єдиність розв'язку (x_1^*, x_2^*) випливає з випуклості кривої байдужості, що випливає з закону спадної граничної корисності.

Економічний зміст бюджетної лінії полягає у тому, що вона показує кількість другого товару, яку може, витратити весь доход, придбати споживач при різних значень кількості придбаного першого товару [3].

Оскільки корисність є суб'єктивним поняттям, то перед тим, як використовують функцію корисності у математичному моделюванні, потрібно спочатку визначити, що розуміємо під нульовим рівнем корисності, а також шкалою, тобто одиницею вимірювання задоволеності. Загалом, будь-яка зростаюча функція аргументу U –також є функцією корисності, оскільки також виражає корисність блага.

Залежність корисності від обсягу x_i споживання при фіксованих обсягах споживання інших благ називають *кривою корисності* $U(x_i)$. Вигляд залежності

$U(x_i)$ від обсягу споживання i-го блага при сталих обсягах споживання інших благ визначає гранична корисність i-го блага:

$$MU_i = \frac{\partial U(x_i)}{\partial x_i}, i = 1, 2. \qquad (8.3)$$

Гранична корисність виражає приріст корисності набора благ $(\text{x}_1, \text{x}_2, \dots, \text{x}_\text{п})$ при збільшенні споживання i-го блага на одиницю.

Лінії рівня (ізоліни) функції корисності (криві сталої корисності), називають *кривими байдужості*. Основна умова, якій відповідають криві байдужості, – умова сталості корисності в усіх точках цієї кривої:

$$U(x_1, x_2) = \text{const}. \qquad (8.4)$$

Аналізуючи криву корисності, ми бачимо, що при сталому рівні задоволеності набором з 2 товарів для збереження цього рівня при збільшення споживання одного товару скорочується споживання іншого товару. У цьому проявляється ефект заміни.

Кількісною характеристикою інтенсивності ефекту заміни і показником, що визначає форму кривої байдужості, є *гранична норма заміщення*:

$$MRS_{x_1x_2} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{U=\text{const}} \qquad (8.5)$$

Оскільки приріст корисності дорівнює нулю за умові $U(x_1, x_2) = \text{const}$, тому

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{MU_1}{MU_2}.$$

Підставивши цей вираз, у (8.5), знаходимо формулу для граничного норми заміщення у вигляді:

$$MRS_{x_1x_2} = \frac{MU_1}{MU_2}. \qquad (8.6)$$

Оскільки гранична норма заміщення $MRS_{x_1x_2}$ свідчить, на скільки можливо скоротити споживання блага x_2, щоб при одиничному збільшенні споживання блага x_1 корисність набору благ не зміниться, то з умови (8.6) випливає наступний висновок: у скільки разів гранична корисність блага-замінника перевищує корисність блага, що заміщає, у скільки разів скорочення обсягу його споживання перевищить приріст споживання блага-замінника [6].

8.3 Види функції корисності

Ще у 18-му сторіччі Д. Бернуллі вперше запропонував кількісне визначення корисності блага на основі теорії гри [9]. За Бернуллі, корисність (або вигода) U – це результат, що отримує споживач від володіння блага (досягнення виграшу) x. Діапазон зміни обсягу споживання блага x розбивається на два інтервали: 1) при $x > x_0$ благо забезпечує виграш (корисність); значення x_0 – це кількість блага, що відповідає нульовому рівні корисності; 2) при $0 < x < x_0$

наявний рівень блага знижає рівень задоволеності, при цьому чим менший обсяг блага, тем більш суттєвим є зниження задоволення споживача.

З точки зору теорії ігор благо розглядається як виграш. У подальших міркуваннях Д. Бернуллі використовує наступне припущення: обсяг блага x_0, що відповідає повній незадоволеності споживача $(U = 0)$, не порівнюваний з максимально можливим обсягом споживання $x_п$, тобто $x_0 \ll x_n$. У межах своєї теорії Бернуллі отримав, що функція корисності може бути представлена логарифмічною кривою виду

$$U = a\ln\frac{x}{x_0} \tag{8.7}$$

Зауважимо, що функція (4.7) не знайшла широкого застосування у теорії корисності, оскільки на інтервалі $0 < x < x_0$ ця функція є від'ємною. Більш розповсюдженою у дослідженнях є застосування логарифмічної функції корисності у вигляді:

$$U = a\ln(x - x_0), x > x_0 \geq 0. \tag{8.8}$$

Для випадку кількох благ використовують функцію

$$U = \sum_{k=1}^{n} a_k \ln(x_k - x_{0k}). \tag{8.9}$$

Приклад 8.1. Переваги споживача, який придбає 10 л молока та 2 тюбики зубної пасти у місяць, виражаються логарифмічною функцію корисності, що має вигляд:

$$U = U_1 + U_2 = 2\ln(x_1 - 1) + \ln(x_2 - 1)$$

Споживач міркує, що йому корисніше придбати: додатково 1 літр молока чи 1 тюбик зубної пасти.

Для відповіді на це питання споживачу потрібно порівняти граничні корисності молока та зубної пасти при даних обсягах споживання цих товарів. Знайдемо ці граничні корисності.

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{10 - 1} \approx 0{,}22.$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{2}{x_2 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1.$$

Отже, цьому споживачу значно корисніше додатково придбати тюбик зубної пасти, ніж літр молока.

Розглянемо величину середньої корисності:

$$\overline{U} = \frac{f_1 U_1 + f_2 U_2}{f_1 + f_2},$$

де f_j – частота отримання j блага.

Запишемо функцію корисності (4.9) для двох благ:

$$U = U_1 + U_2 = a_1 ln(x_1 - x_{01}) + a_2 ln(x_2 - x_{02}), a_i \geq 0, x_i > x_{0i} \geq 0.$$

Прийнявши $a_1 = a_2 = a$, отримуємо формулу середньої корисності для цього випадку:

$$\overline{U} = \frac{f_1 a\ln(x_1 - x_0) + f_2 a\ln(x_2 - x_0)}{f_1 + f_2} = a\ln\left[(x_1 - x_0)\frac{f_1}{f_1 + f_2}(x_2 - x_0)\frac{f_2}{f_1 + f_2}\right].$$

Цю рівність можна записати у вигляді:

$$\overline{U} = \ln(x_1 - x_0)^{b_1} \cdot (x_2 - x_0)^{b_2}.$$

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою, то виразом під знаком логарифму у цій рівності також можна розглядати як функцію корисності:

$$U = (x_1 - x_0)^{b_1} \cdot (x_2 - x_0)^{b_2}.$$

У загальному вигляді степеневу функцію корисності можна записати у наступному вигляді:

$$U = a(x_1 - x_{01})^{b_1} \cdot (x_2 - x_{02})^{b_2}, a > 0, b_1 + b_2 = 1, x_i \geq x_{0i} > 0. \qquad (8.10)$$

Сенс теорії ігор, вложений Д. Бернуллі у функцію середньої корисності, дозволив інтерпретував корисності у задачах визначення початкового обсягу благ, необхідного для досягнення певного рівня корисності та приросту задоволеності, що пов’язаний з приростом наявного блага. Тут вважається, що розглядається одне й те ж благо, що може бути у різних кількостях, тобто може забезпечувати різний рівень задоволеності.

Приклад 8.2. Продавець планує реалізувати товар за 10 000 г.о., проте з попереднього досвіду відомо, що зі 100 угод аналогічного типу 5 угод виявляються невдалими. Угоду можна застрахувати на 800 г.о. Визначити: а) починаючи, з якої суми капіталу продавець може, відмовитися від страхування; б) яким мінімальним капіталом повинен мати страхувальник, щоб йому були визначені такі умови страхування.

Визначимо початковий розмір капіталу x_1, вважаючи $x_0 = 0, x_2 = x_1 + \delta$, де δ – приріст капіталу. Прирівняємо середню корисність при відмови від страховки $(x_1 + 10000)^{0{,}95} \cdot x_1^{0{,}05}$ та при згоді застрахувати угоду, що становить $x_1 + +(10000 - 800)$.

Отримуємо рівняння:

$$(x_1 + 10000)^{0{,}95} \cdot x_1^{0{,}05} = x_1 + 9200,$$

яке має наближений розв’язок $x_1 = 5043$. Тому, якщо капітал продавця перевищує суму 5043 г.о., то приріст середньої корисності у випадку відмови від страхування вище, ніж у випадку його прийняття.

Розмір початкового капіталу страхувальника визначимо з умови рівності його середньої корисності при прийняття на себе страхування та відмови від страхування:

$$(x_1 + 800)^{0{,}95} \cdot (x_1 + [800 - 10000])^{0{,}05} = x_1.$$

Звідси знаходимо, що $x_1 = 14243$. Отже, якщо страхувальник має капітал, що перевищує 14243 г.о., то йому доцільніше прийняти на себе зобов’язання страхування, ніж відмовиться від них.

Отже, розглянуті приклади свідчать, що корисність товару чи послуги (рівень задоволеності нього) можна оцінити кількісно.

Британський економіст Р. Аллен запропонував вигляд функції корисності, яка отримала назву *квадратичної функції корисності* або *функції Аллена*.

Основною передумовою вибору вигляду функції є існування споживачів, для яких можливість користування певними благами обмеженими, внаслідок чого надмірне зростання обсягу одного з благ при незмінному обсягу споживання іншого блага зменшує загальну корисність [4]. У цьому випадку, корисність виражається абсолютним відхиленням обсягів споживання благ між собою, взятим з протилежним знаком: $U = -|x_1 - x_2|$. Більш зручною для використання є диференційовна функція корисності, тому модуль відхилення доцільно замінити на квадрат відхилення: $U = -(x_1 - x_2)^2$, або, у більш загальному вигляді:

$U = -(a_1x_1 - a_2x_2)^2 = 2a_1a_2x_1x_2 - a_1^2x_1^2 - a_2^2x_2^2.$

Функція Аллена є завжди від'ємною і є «функцією втрат», які несе споживач, якщо обсяги благ, що знаходяться у його розпорядженні відрізняються від заданих питомих потреб a_1 та a_2. При цьому $a_1x_1 = a_2x_2,$ тобто

$$x_2 = \frac{a_1}{a_2}x_1.$$

У цьому випадку втрати дорівнюють нулю і корисність є максимальною.

Основоположниками кардиналістського (кількісного) підходу до оцінки корисності є економісти 19-го століття Джевонс та Вальрас [4]. Вони вважали, що споживач здатен оцінити товари, що споживаються з точки зору величини корисності, при цьому метою споживача є максимізація корисності. Тому спочатку корисність набору благ визначалася як сума корисностей всіх благ, що входили у цей комплект, тобто використовувалась адитивна функція корисності:

$$U = \sum_i U_i(x_i), \tag{8.11}$$

U_i – корисність i-го благу. Тобто вважалася, що має місце незалежність корисностей окремих благ між собою [6].

У сучасній теорії багатокритеріальної теорії вибору рішень [5] використання агрегованого критерія знову широко розповсюджені, проте розрізняється корисність альтернатив шляхом введенням коефіцієнтів значимості k_i:

$$\text{U}=\sum_i k_iU_i(x_i). \tag{8.12}$$

При цьому $\sum_i k_i = 1$.

У періоді виникнення теорія корисності використовувалась для теоретичного обґрунтування певних економічних концепцій, зараз використовується і у прикладних дослідженнях, зокрема, у маркетингу.

Лекція 9. Моделювання поведінки споживачів з допомогою функції корисності

Мета лекції: з'ясувати основні принципи моделювання поведінки споживачів на основі використання функцій корисності.

План

1. Закони Госсена.
2. Модель поведінки споживача в умовах максимізації корисності.
3. Порядкова теорія корисності.

Ключові терміни та поняття: закони Госсена, закон попиту Маршалла, рівняння Слуцького, коефіцієнти Слуцького, порядкова теорія корисності, теорія визначеної переваги.

9.1. Закони Госсена

Мета максимізації кількості корисності знайшла відображення у закономірностях, отриманих німецьким економістом Г. Госсеном.

Перший закон Госсена: при неперервному споживанні корисність наступної одиниці блага зменшується, при повторному споживанні корисність кожної одиниці блага зменшується у порівнянні з її корисністю при початковому споживанні [7]. У математичній формі перший закон Госсена можна записати у наступному вигляді:

$$MU = \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0, \frac{\partial MU}{\partial x_i} < 0, i = 1,2, \quad (9.1)$$

тобто гранична корисність блага у процесі його споживання зменшується.

Інколи цей закон називають також «аксіомою ненасиченості» [7], оскільки при $MU > 0$ функція корисності є зростаючою, тобто насищення споживача не наступає. Цій аксіомі задовольняють розглянуті вище функції корисності.

Перший закон Госсена був отриманий емпіричним шляхом на основі узагальнення суб’єктивних думок споживачів про корисності споживання благ у різних кількостях [7].

Другий закон Госсена: максимум корисності споживаних благ за обмежений період часу досягається, якщо затрати часу на споживання кожного блага такі, що їх граничні корисності рівні [7].

Тут мова йде про задачу визначеного умовного екстремуму функції корисності $U = \sum_i U_i(x_i)$ при обмеженому часі споживання благ $\sum_i t_i x_i + T$, де t_i – час споживання i-го блага, Т – запас (фонд) часу.

Задача розв’язується методом множників Лагранжа: тут функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \sum_i U_i(x_i) - \lambda[\sum_i t_i x_i - T], \quad (9.2)$$

У (9.2) λ – множник Лагранжа. Необхідні умови оптимальності визначаються системою рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \lambda t_i = 0, i = 1, 2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_i t_i x_i - T = 0.$$

З першої рівняння цієї системи випливає, що

$$MU_i = \lambda t_i, i = 1,2. \quad (9.3)$$

Поділивши одне з рівняння (4.15) на інше, отримаємо співвідношення:

$$\frac{MU_1(x_1^*)}{MU_2(x_2^*)} = \frac{t_1}{t_2}. \quad (9.4)$$

Введемо координати $y_1 = t_1 x_1, y_2 = t_2 x_2$, що є інтервалами часу, що витрачається на споживання благ. Крива байдужості у нових координатах подається функцією корисністю $U_i(y_i) = U_i(t_i x_i), i = 1,2$.

Граничні корисності благ дорівнюють:

$$MU_i(x_i) = \frac{\partial U_i(y_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i(y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = MU_i(y_i) \cdot t_i, i = 1,2.$$

Підставивши ці вирази у (4.16), отримаємо:

$$\frac{MU_1(y_1)\cdot t_1}{MU_2(y_2)\cdot t_2}=\frac{t_1}{t_2}\ \rightarrow \frac{MU_1(y_1)}{MU_2(y_2)}=1,$$

Тобто у момент закінчення споживання кожного блага граничні корисності всіх благ рівні [7]. Економічний зміст множників Лагранжа λ полягає у тому, що приріст фонду часу T на одиницю приведе до збільшення корисності набора на величину λ, що випливає з рівняння (9.2). тобто $\lambda=\frac{\partial\sum_i U_i}{\partial T}$ – це гранична корисність часу.

Результатом кількісної теорії корисності є закон попиту, отриманий американським економістом А. Маршаллом. Гроші розглядають з точки зору їх функції як міри вартості [10]. Маршалл виходив з того, що гранична корисність грошей дорівнює відношення граничної корисності блага до його ціни, залишається сталою величиною: $\frac{MU_i}{p_i}=MU_p=const.$

Це пояснюється тим, що, за другим законом Госсена, споживач максимізує свою корисність шляхом споживання широкого асортименту товарів, тому зміни ціни одного товару не вплине суттєво на купівельну спроможність грошей в цілому [10]. Звідси випливає, що гранична корисність блага пропорціональна його ціні: $MU_i{\sim}p_i$, а, оскільки першому закону Гессену, гранична корисність обернена пропорційна обсягу споживання блага $MU_i{\sim}\,{}^1\!/_{x_i}$, то $p_i{\sim}\,{}^1\!/_{x_i}$, тобто крива попиту є спадною. У цьому полягає закон попиту Маршалла.

На основі законів Госсена можна довести, що при оптимальній комбінації благ, що максимізує корисність її для споживача ціна одного блага повинна перевищувати ціну іншого блага у скільки разів, у скільки перше благо корисніше другого [10], тобто:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{MU_1(x_1^*)}{MU_2(x_2^*)}.$$

З цієї рівності випливає, що у точці з координаті $(x_1^*,\ x_2^*)$ кутові коефіцієнти бюджетної лінії та кривої байдужості рівні між собою.

9.2 Модель поведінки споживача в умовах максимізації корисності

Споживач намагається максимізувати свою функцію корисності за умови обмеженості доходу. За умови використання всього доходу J на придбання наборів товарів споживачу потрібно визначити $\max\limits_{P\cdot X=J} u(X)$. Маємо задачу на умовний екстремум за наявності обмеження $P\cdot X=J$. Вона зводиться до знаходження безумовного екстремуму функції Лагранжа

$$L(X)=u(X)+\lambda(J-P\cdot X), \qquad (9.5)$$

де $\lambda=const$ – множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму функції (9.5) мають вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,...,n,\ \frac{\partial L}{\partial\lambda}=0.$$

Звідси отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = J. \end{cases} \qquad (9.6)$$

Система (9.6) – це система$(n+1)$-го рівняння з $(n+1)$-ими невідомими $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda$. Можна довести, що її розв'язками є координати точки максимуму функції Лагранжа (9.5).

З системи (9.6) випливає, що споживач при фіксованому сталому рівні доходу вибирає оптимальний набір $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, що є розв'язком цієї системи, таким чином, що у точці X^* відношення граничних корисностей дорівнюють відношенням цін:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : ... : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : ... : p_n.$$

Розв'язавши систему (9.6) відносно координат вектора X^*, отримаємо функцію індивідуального попиту у вигляді рівностей $x_i^* = x_i^*\left(p_1, p_2, ..., p_n, J\right)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Нехай $P = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ – вектор цін на набір товарів $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, J – дохід споживача. Функцію $D\left(P, J\right)$, що ставить у відповідність парі $\left(P, J\right)$ набір товарів X^*, що надає споживачу максимальну корисність при цінах P та доході J, називають *функцією індивідуального попиту*.

Конкретна форма функції індивідуального попиту

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) = D\left(\left(p_1, p_2, ..., p_n\right), J\right)$$

визначається шляхом розв'язання задачі оптимізації функції Лагранжа (9.5) або шляхом статистичної обробки результатів опитувань споживачів [10].

Функція індивідуального попиту є неперервною та двічі диференційовною за своїми аргументами. Вона є також однорідною функцією нульового степеня, тобто $D\left(\lambda P, \lambda J\right) = D\left(P, J\right)$.

Функцію індивідуального попиту визначають як розв'язок системи (9.6). Розглянемо випадок, коли доход J є змінною величиною, а ціни $p_1, p_2, ..., p_n$ є фіксованими. Тоді компоненти векторної функції D індивідуального попиту $x_j^* = D_j\left(J\right)$ залежать лише від змінної J, а їх похідні по J описують характер зміни попиту при зміні доходу. Диференціюючи рівняння (9.6)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = J \end{cases}$$

за змінною доходу J та вважаючи при цьому $x_i = x_i\left(J\right)$, $i = 1, 2, ..., n$, $\lambda = \lambda\left(J\right)$, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J} - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial J} = 0, i = 1, 2, ..., n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial J} = 1. \end{cases} \quad (9.7)$$

Нехай $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$. Запишемо систему (9.7) у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J} - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial J} = 0, i = 1, 2, ..., n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial J} = 1. \end{cases} \quad (9.8)$$

Якщо функція корисності u є відомою, а ціни p_i, $i = 1, 2, ..., n$ – задані, то система (9.8) – це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\frac{\partial x_j}{\partial J}$ функцій індивідуального попиту на i-й товар у точці $X^*(J)$. Запишемо цю систему у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} u_{11}\, u_{12} \dots u_{nn} - p_1 \\ u_{21}\, u_{22} \dots u_{2n} - p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n1}\, u_{n2} \dots u_{nn} - p_n \\ p_1\, p_2 \dots p_n \quad 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial J} \\ \frac{\partial x_2}{\partial J} \\ \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial J} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Якщо визначник системи (9.9) не дорівнює нулю, то її розв'язок – вектор $\left(\frac{\partial x_1}{\partial J}, \frac{\partial x_2}{\partial J}, ..., \frac{\partial x_n}{\partial J}, \frac{\partial \lambda}{\partial J} \right)$ – можна знайти за формулами Крамера. Компоненти цього вектора відображають реакцію споживача на зміну доходу [10].

Компоненти вектор-функції індивідуального попиту $D_i(P, J)$, як і у попередньому випадку, визначаються з системи рівнянь (9.6). Частинні похідні $\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$ можна знайти, якщо продиференціювати ці рівняння за змінними p_k. Позначивши $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$, у результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_k} \cdot p_i = \lambda \cdot \delta_{ik},\ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = -p_k. \end{cases} \tag{9.10}$$

Знаходячи ці невідомі величини за формулами Крамера, маємо:

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \lambda \cdot \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} - x_k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J},\ j = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ..., n. \tag{9.11}$$

У формулах (9.11) Δ – визначник системи (9.10), Δ_{kj} – визначник, який отримуємо з визначника Δ викреслюванням k-го рядка та j-го стовпчика. Рівняння (9.11) називають *рівнянням Слуцького*. З нього випливає, що при зміні ціни k-го товару на малу величину зміна попиту на j-й товар формується як сума двох факторів: ефектів заміщення та доходу [4]. Другий доданок у правій частині (9.11), що дорівнює $-x_k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J}$, називають *ефектом доходу*. Він описує зміну доходу споживача, викликану зміною ціни k-го товару. Перший доданок у правій частині (9.11), що дорівнює $\lambda \cdot \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} = c_{kj}$ називають *коефіцієнтом Слуцького*. Він характеризує вплив зміни ціни на викликану цією зміною заміну товарів при придбанні. При зниженні ціни на k-й товар відбувається зростання доходу споживача, частина якого розподіляється на придбання інших товарів. Матриця коефіцієнтів Слуцького є симетричною: $c_{kj} = c_{jk}$. Діагональні коефіцієнти цієї матриці характеризують чистий ефект заміщення та відображають швидкість зміни попиту на k-й товар при малих змінах його ціни та доходу споживача. Ця зміна попиту відбувається таким чином, що корисність вибору споживачем набору товарів залишається незмінною [4]

Напрям зміни попиту на j-й товар при зміні ціни k-го товару визначається знаком коефіцієнта Слуцького c_{kj}. Якщо $c_{kj} > 0$, то k-й та j-й товари замінюють один одного, при $c_{kj} < 0$ доповнюють один одного, при $c_{kj} = 0$ – є незалежними.

9.3 Порядкова теорія корисності

Порядкова (ординалістська) теорія корисності виражає перехід від пошуку абсолютної величини корисності до її відносної величини. Основними передумовами переходу до порядкової теорії корисності є [5]:

а) неможливість кількісно оцінити суб’єктивно корисності блага для споживача, оскільки вимога об’єктивного вимірювання корисності не відповідає її суб’єктивним оцінкам;

б) неадекватність закону спадної граничної корисності для такого економічного явища як наявність перехресного впливу благ у наборі (коли збільшення одного блага веде до зменшення корисності іншого блага, якщо вони є товарами-замінниками тощо).

В основі порядкової теорії корисності лежить метод кривих байдужості. Він передбачає, що споживач має суб'єктивну шкалу переваг, а функція корисності визначає порядок переваг наборів благ. В результаті від невимірної граничної корисності можна перейти до граничної норми заміщення, яка виражає кількість блага x_2, від якого споживач згодний відмовиться у обмін на додаткову одиницю блага x_1.

Оскільки гранична норма заміщення дорівнює співвідношенню цін благ, то цей показник є об'єктивним і його величина $MRS_{1,2}$ може бути визначена і у тому випадку, коли сама корисність вважається невимірною. Проте підхід, що ґрунтується на використання кривих байдужості, також має суттєві недоліки. Зокрема, карта байдужості має статичний характер, при появі нових благ чи зникнення старих потрібно будувати нову таку карту. На практиці споживач не може визначити нескінченну множину рівноцінних комбінацій благ.

Розвитком порядкової теорії корисності є *теорія визначених переваг*. Її автор, американський економіст П. Самуельсон, стверджував, що споживач, придбавши певний набір благ, виражає свою перевагу і, якщо споживач діє раціонально, то виявлені переваги збережуться і при зміні структури цін [10]. В результаті при дослідження поведінки споживача можна не використовувати криву байдужості, побудова яких ґрунтується лише на дані про доходи споживача та ціни благ.

Набір благ x вважається більш пріоритетним, ніж набір y, якщо $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i p_i$. Якщо споживач вибирає набір благ x за цінами p_i, якщо у той же час він міг за цими цінами придбати інший набір благ x, то тим самим він визначить свою перевагу.

Для класифікації благ (товарів чи послуг) у залежності від реакції попиту на них на зміну ціни використовують похідні $\frac{\partial x}{\partial p}$. Цей показник свідчить, на скільки одиниць зміниться попит на даний товар, якщо його ціна зросте на 1 г.о. Аналогічно, якщо J – доход споживача, то похідна $\frac{\partial x}{\partial J}$ дорівнює зміні величини попиту, якщо доход споживача збільшиться на 1 г.о. У залежності від знаку цих похідних блага можна віднести до одного з наступних типів [10].

1. *Нормальні та цінні блага*, якщо $\frac{\partial x}{\partial p} < 0, \frac{\partial x}{\partial J} > 0$, тобто попит на благо зменшується при збільшенні його ціни та зростає при зростанні доходу споживача.
2. Нормальні та малоцінні блага: $\frac{\partial x}{\partial p} < 0, \frac{\partial x}{\partial J} < 0$. Для таких благ попит зменшується, як при збільшенні їх цін та при зростанні доходу. споживача. Прикладом цінного блага вважається масло, малоцінного – маргарин.
3. Товари, попит на який зростають при зростанні цін, тобто $\frac{\partial x}{\partial p} > 0$, називають *товарами Гіффіна*. Головною особливістю товарів Гіффіна є відносна дешевизна у порівнянні з можливими аналогами.

Для класифікації благ можна використовувати коефіцієнти еластичності:

коефіцієнт еластичності попиту за доходом $E_x^J = \frac{\partial x}{\partial J} \cdot \frac{J}{x}$ та коефіцієнт еластичності попиту за ціною $E_x^p = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p}{x}$. Коефіцієнт еластичності попиту за доходом показує, на скільки процентів зріс попит, якщо доход споживача зріс на 1%. У відповідності зі значеннями коефіцієнта еластичності попиту за доходом розрізняють наступні типи благ [10]:

1. Низькоякісні (малоцінні) товари, попит на які зменшується зі збільшенням дохода споживача, тобто $E_x^J < 0$.
2. Блага першої необхідності, споживання яких не залежить від зміни доходу: $E_x^J = 0$.
3. Якісні (цінні) товари, обсяг споживання яких збільшується зі зростанням доходу, тобто $E_x^J > 0$.
4. Предмети розкоші, споживання яких зростає швидше у порівнянні зі зростанням доходу.

Коефіцієнт еластичності попиту за ціною свідчить, на скільки процентів змінився попит на товар, якщо ціна збільшилися на 1%. У залежності від значення цього коефіцієнта розрізняють наступні товари (блага):

1. Нормальні блага, споживання яких зростають при зменшенні ціни, спадання яких при збільшенні цін. Для таких благ $E_x^p < 0$.
2. Незамінимі блага, зміни цін яких не впливає на обсяги споживання, тобто попит зовсім не еластичний за ціною. Тут $E_x^p = 0$.
3. Товари Гіффіна, попит на які збільшуються зі збільшення ціни. У цьому випадку $E_x^p > 0$.

Товари можуть класифікувати з використанням коефіцієнта перехресної еластичності попиту за ціною [3] . Цей коефіцієнт показує процентну зміну попиту на одне благо при зміни ціни на інше благо на 1%: $E_{x_i}^{p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}$. Тут блага можуть бути взаємозамінними ($E_{x_i}^{p_j} > 0$), взаємно доповнюваними ($E_{x_i}^{p_j} < 0$) або незалежними ($E_{x_i}^{p_j} = 0$).

Питання та завдання для самоконтроля до розділу 8

1. Поясніть зміст та призначення функції корисності.
2. Як на вашу думку, на практиці можна побудувати функцію корисності.
3. Вкажіть основні властивості функції корисності.
4. Вкажіть можливі види функції корисності.
5. Поясніть, що така гранична корисність та гранична норма заміщення.
6. Поясніть, що моделюють рівняння Слуцького.
7. Що описує функція індивідуального попиту і для чого її можна використати.
8. Розкрийте зміст порядкової теорії корисності.
9. Як класифікують товари у межах порядкової теорії корисності?

Розв’яжіть наведені нижче завдання.

1. Переваги споживача описуються логарифмічною функцією корисністю $U = 2\ln(x_1 - 0{,}5) + 3\ln(x_2 - 1)$. Визначити, на скільки одиниць збільшиться задоволеність, якщо за місяць він споживає 5 одиниць 1-го товару та 3 одиниці 2-го товару, якщо він придбає додаткову одиницю 2-го товару.

2. Переваги споживача моделюються степеневою функцією корисності U=$10(x_1 - 0{,}1)^{0{,}3}(x_2 - 0{,}2)^{0{,}7}$, якщо за місяць він споживає 5 одиниць 1-го товару та 3 одиниці 2-го товару і він вирішив додатково придбати одиницю 1-го товару, а 2-й товар використовується у незмінній кількісті. Визначити, як зміниться задоволеність при цьому споживача.

3. Для завдань 1 та 2 побудувати графік кривої корисності 1-го товару при сталому обсязі споживання 2-го товару.

4. Споживач в умовах задачі 1 придбає 5 одиниць 1-го товару. Визначити, скільки він повинен споживати 1-го товару, щоб його задоволеність складала 10 одиниць.

5. Споживач в умовах задачі 2 придбає 3 одиниць 2-го товару. Визначити, скільки він повинен споживати 2-го товару, щоб його задоволеність складала 30 одиниць.

6. Рівень задоволеності споживача з задачі 1 дорівнює 2 одиниці. Знайти, скільки він споживає 1-го та 2-го товару щомісячно, якщо він згоден за додаткову одиницю 1-го товару відмовитися від 4 одиниці 2-го товару. Побудувати графік кривої байдужості.

7. Рівень задоволеності споживача з задачі 2 дорівнює 10 одиниць. Визначити, скільки він споживає 1-го та 2-го товару щомісячно, якщо він згоден за додаткові 2 одиниць 2-го товару відмовитися від одиниці 1-го товару. Побудувати графік кривої байдужості.

8. Споживач з задачі 1 має дохід 300 г.о. в місяць, ціна одиниці 1-го товару дорівнює 50 г.о., ціна одиниці 2-го товару 20 г.о. Розв'язати задачу споживчого вибору.

9. Споживач з задачі 2 має дохід 600 г.о. в місяць, ціна одиниці 1-го товару дорівнює 100 г.о., ціна одиниці 2-го товару 30 г.о. Розв'язати задачу споживчого вибору.

10. Ціна 1 кг м'яса знизилась з 100 г.о. до 90 г.о.. В результаті попит на нього зріс з 2кг до 4кг в місяць. Знайти середню еластичність попиту за ціною.

11. Ціна на взуття зросла з 700 г.о. за пару до 1000 г.о. за пару, внаслідок цього попит зменшився з 3 пар на рік до 2 пар на рік. Знайти середню еластичність попиту за ціною.