РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

$$u(x,y)=x^2y^3; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2$$

Повний диференціал функції двох змінних має вигляд:

$$\boxed{du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy}$$

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

є рівнянням в повних диференціалах, якщо виконана умова

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Тоді початкове рівняння прийме вигляд $du=0$ і його розв'язок є $u(x,y)=C$. Таким чином, задача про знаходження розв'язку диференціального рівняння зводиться до відщукання функции $u(x,y)$.

1) $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$

• $\frac{\partial P}{\partial y}=1; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow$ маємо рівняння в повних диференціалах.

Оскільки дане диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y \qquad \Rightarrow \qquad u=x^2+yx+\varphi(y). \qquad (1)$$

Зауваження 1. Після інтегрування виникла не константа C, а функція $\varphi(y)$, оскільки до інтегрування ми мали частину похідну по x; це ж враховується і при обчисленні інтеграла (**так обчислюються інтеграли тільки в цій темі!**).

Знайшовши частинну похідну по y від обох частин останнього рівняння, будемо мати:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y).$$

З іншого боку, оскільки дане диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах, то

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y.$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівнянь, будемо мати:

$$x+\varphi'(y)=x+2y \;\Rightarrow\; \varphi'(y)=2y \;\Rightarrow\; \varphi(y)=y^2.$$

Підставивши функцію $\varphi(y)$ в (1) и прирівнюючи отриманий вираз до C, отримаємо загальний розв'язок

$$u = x^2 + yx + y^2 = C \bullet$$

2) $(10xy - 8y + 1)dx + \left(5x^2 - 8x + 3\right)dy = 0$

- $10x - 8 = 10x - 8$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10xy - 8y + 1 \qquad \Rightarrow \qquad u = 5x^2 y - 8xy + x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 - 8x + \varphi'(y) = 5x^2 - 8x + 3 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 3 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = 3y.$$

$$u = 5x^2 y - 8xy + x + 3y = C \bullet$$

4) $2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$

- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x2\cos y(-\sin y); \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -2x\sin 2y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos^2 y \qquad \Rightarrow \qquad u = x^2\cos^2 y + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\cos y(-\sin y)x^2 + \varphi'(y) = 2y - x^2 \sin 2y \qquad \Rightarrow \qquad \varphi'(y) = 2y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi(y) = y^2;$$

$$u = x^2\cos^2 y + y^2 = C \bullet$$

В деяких випадках коли ліва частина рівняння не є повним диференціалом, вдається підібрати функцію $\mu = \mu(x, y)$ таку, після домноження на яку рівняння стає рівнянням в повних диференціалах. Така функція називається *інтегруючим множником.*

Зауважимо, що при множенні рівняння на інтегруючий множник, можлива поява зайвих частинних розв'язків, що перетворюють його на нуль. Крім того, можлива втрата частинних розв'язків у випадку коли цей множник може обертатись на нескінченність.

У загальному випадку інтегрування такого рівняння ще важче, ніж початкового. В деяких випадках вдається зробити підбір його частинних розв'язків вважаючи $\mu(x, y)$ функцією тільки від x, тільки від y, від $\dfrac{x}{y}$, від $x^2 + y^2$.

5) $\left(x^2+y\right)dx-xdy=0$

- $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1, \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

Отже початкове рівняння не є рівнянням в повних диференціалах.

Спробуємо підібрати інтегруючий множник $\mu=\mu(x,y)$. Припустимо, що він вже підібраний. Тоді повинна виконуватися умова

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\left(\mu\left(x^2+y\right)\right)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(-x))}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(x^2+y\right)+\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}(-x)-\mu .$$

Припустимо, що $\mu=\mu(x)$. Тоді отримаємо

$$\mu=-x\frac{d\mu}{dx}-\mu \quad\Rightarrow\quad x\frac{d\mu}{dx}=-2\mu \quad\Rightarrow\quad \frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \mu=\frac{1}{x^2}.$$

Домножимо початкове рівняння на отриманий множник. Отримаємо рівняння:

$$\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0.$$

Перевіримо, чи буде це рівняння в повних диференціалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже маємо рівняння в повних диференціалах.

$$u=\int\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx=x-\frac{y}{x}+\varphi(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=-\frac{1}{x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \varphi'(y)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi=C; \qquad x-\frac{y}{x}=C.\bullet$$

6) $y(1+xy)dx-xdy=0$

- $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1+xy+xy=1+2xy; \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1; \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

$P=\mu(y(1+xy)); \qquad Q=-\mu x; \qquad \mu=\mu(x,y);$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu y(1+xy)]=\frac{\partial}{\partial x}[-\mu x] \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}[y(1+xy)]+\mu(1+xy+xy)=\frac{\partial\mu}{\partial x}[-x]-\mu;$$

$\mu=\mu(x)$

$$\mu(1+2xy)=\frac{d\mu}{dx}(-x)-\mu \quad\Rightarrow\quad \mu(2+2xy)=-\frac{d\mu}{dx}x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2+2xy}{x}dx$$

$\mu = \mu(x)$ не підходить (рівняння містить три змінні x, y, μ і не може бути розв'язано).

Припустимо, що μ функція тільки від y, $\mu = \mu(y)$. Тоді:

$$\frac{d\mu}{dy}y(1+xy) + \mu(2+2xy) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dy}y = -2\mu \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = -2\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|\mu| = -2\ln|y| \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Тоді

$$\mu P = \frac{1+xy}{y}; \qquad \mu Q = -\frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{xy - 1 - xy}{y^2}; \qquad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{-1}{y^2}; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1+xy}{y} = \frac{1}{y} + x \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + \varphi'(y); \qquad \frac{-x}{y^2} + \varphi'(y) = \frac{-x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = 0;$$

$$u = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C \bullet$$

Зауваження. Зауважимо, що якщо початкове рівняння має вигляд (1), то його не треба зразу розглядати як рівняння в повних диференціалах, а спочатку спробувати звести до рівнянь більш простого типу. Наприклад, розглянемо рівняння

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

$$\bullet \ xydx = -(x+1)dy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{x+1}.$$

Це рівняння із подільними змінними

$$\frac{dy}{y} = \frac{-x}{x+1}dx \qquad \Rightarrow \qquad \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{(x+1)-1}{x+1}dx + C \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -x + \ln|x+1| + C \bullet$$

7) $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ydy=0$

- $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y$; $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$$P=\mu\left(x^2+y^2+2x\right); \qquad Q=\mu 2y;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(x^2+y^2+2x\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[2y\mu\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(x^2+y^2+2x\right)+2\mu y=2y\frac{\partial \mu}{\partial x};$$

Припустимо, що $\mu=\mu(x)$. Тоді:

$$2\mu y=2y\frac{d\mu}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu}=dx \quad \Rightarrow \quad \mu=e^x.$$

Домножимо початкове рівняння на інтегруючий множник:

$$e^x\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ye^xdy=0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2ye^x; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2ye^x; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\left(x^2+y^2+2x\right) \quad \Rightarrow \quad u=\int e^x x^2dx+\int e^x y^2dx+\int 2xe^x dx+\varphi(y)=$$

$$\left\|\begin{matrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^xdx & v=e^x \end{matrix}\right\|=x^2e^x-2\int xe^xdx+\int e^xy^2dx+2\int xe^xdx+\varphi(y)=$$

$$=x^2e^x+y^2e^x+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^x+\varphi'(y)=2ye^x \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y)=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y)=0;$$

$$u=x^2e^x+y^2e^x=C \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - yx^2\right)dy = 0$;

2) $\dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$

3) $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$;

4) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$;