Лекція № 10

Обробка експериментальних даних при непрямих,

сукупних і сумісних вимірюваннях

***Питання, що виносяться на лекцію:*** *Методика обробки результатів непрямих вимірювань. Методика обробки результатів сукупних і сумісних вимірювань.*

*Дифініція:* [*https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B5\_%D0%B2%D0%B8%D0%BC%D1%96%D1%80%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F*](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B5_%D0%B2%D0%B8%D0%BC%D1%96%D1%80%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F) *непряме, сукупне і сумісне вимірювання*

**10.1 Методика обробки результатів непрямих вимірювань**

***Непрямі вимірювання*** - це вимірювання, результат яких *y* визначають на підставі прямих вимірювань величин x1, x2, ..., xn, пов'язаних з вимірюваною величиною відомою залежністю. Рівняння непрямого вимірювання має вигляд:

 *y= f (x1, x2, …, xn).*(10.1)

Функціональна залежність f називається також формулою (рівнянням) зв'язку, а величини xi - вимірюваними аргументами.

Необхідність у непрямих вимірах виникає, якщо прямі вимірювання провести неможливо або дуже складно, або якщо непрямі вимірювання дають більш точний результат, ніж прямі.

Вихідними даними при непрямих вимірах є ряди результатів спостережень аргументів Xj, попередньо оброблені за методикою, викладеною вище.

Методика обробки результатів непрямих вимірювань може використовуватися тільки за умови сталості аргументів і відсутності взаємного звʼязку між ними. Тому перед початком обробки, проаналізувавши попарно всі результати спостережень аргументів, треба переконатися у відсутності кореляції між ними. Якщо кореляційний зв'язок не виявлено, проводиться подальша обробка: визначається результат непрямого вимірювання і оцінюється його похибка.

Похибки непрямих вимірювань величини *y* залежать від похибок вимірювань величин x1, x2, ..., xn.

Якщо систематичними складовими похибок прямих вимірювань аргументів можна знехтувати, а випадкові похибки вимірюваних аргументів не залежать одне від одного, то обробка результатів непрямих вимірювань може здійснюватися в наступній послідовності:

• проводиться перевірка відсутності кореляції між результатами спостережень кожної пари аргументів, для чого обчислюється коефіцієнт корляції R між аргументами Xh і Xl за формулою:

  (10.2)

де *n* – число спостережень; і результати *i*–го спостереження відповідно *h*–го и *l*-го аргументів;

 и - оцінки середньоквадратичного відхилення результатів вимірювання цих аргументів.

Розраховується показник кореляції

  (10.3)

Критерієм відсутності кореляції є нерівність

*KR < tγ,,* (10.4)

де *tγ* - коефіцієнт довіри при довірчій ймовірності *γ* і числі ступенів сво-боди *k = n – 1.*

Якщо ця нерівність задовольняється, то це означає, що кореляційний зв'язок між даною парою аргументів Xh і Xl відсутній. При наявності коре-ляційної залежності між аргументами обробка експериментальних даних при непрямих вимірах проводиться за більш складною методикою і в цій роботі не розглядається;

* визначаємо найбільш ймовірне значення вимірюваної величини за виразом

  (10.5)

де ** середні або середньозважені значення величин *x1, x2, …, xn;*

• визначаємо похибку результату непрямого вимірювання:

  (10.6)

де - часткова похибка результату непрямого вимірювання;

- часткова похідна від *y* з рівняння зв'язку по *j-му* вимірюваному аргументу;

- абсолютна похибка прямого виміру j-го аргументу.

Для алгебраїчної суми

*Y = a\*X1 + b\*X2 + …* (10.7)

абсолютна похибка результату

 (10.8)

Для множення

 ****** (10.9)

похибка результату

  (10.10)

визначаємо середньоквадратичну похибку результату непрямого виміру

  (10.11)

де - середньоквадратичні похибки результатів прямих вимірювань аргументів *xj*;

• обчислюємо довірчі межі випадкової складової похибки результату непрямого вимірювання

 ****** (10.12)

де*γ* - довірча імовірність,

*tγ* ***-*** коефіцієнт довіри, значення якого розраховується наступним чином.

Спочатку обчислюється ефективне число ступенів свободи для даного непрямого виміру:

 (10.13)

де *nj*- число прямих вимірів аргументу *xj*.

Якщо всі *nj* однакові і рівні *n*, то



Задамося значенням *γ*, знаходимо для *k* ***=*** *kэф*величину *tγ*;

• обчислюємо довірчі межі загальної похибки результату непрямого вимірювання*Δ Ay ≈ ε;* ***.*** (10.14)

записуємо результат непрямого вимірювання у вигляді

 *y = A ± Δ A; γ* = *0,95,*(10.15)

де *А* – найбільш ймовірне значення результату вимірювання (*A ≈ *).

**10.2 Методика обробки результатів сукупних і сумісних**

**вимірювань**

***Сукупні та спільні виміри*** *дозволяють визначити шукані значення величин x1, x2, …, xn,* що не піддаються безпосередньому спостереження-нію, за результатами вимірювання значень інших величин *y1, y2, …, ym****,*** які є їхніми функціями:

 *yj = ϕj (x1, x2, …, xn),*(10.16)

де *i = 1, 2, ..., n*– порядковий номер невідомих величин *X,*

 *j = 1, 2, ..., m*– порядковий номер прямих вимірювань величин *Y.*

Після проведення прямих вимірювань значень величин Yj результати цих вимірів підставляються в систему рівнянь 10.16, рішення якої дозволяє знайти шукані значення однойменних (при сукупних) або неодноіменних (при спільних) величин *x1, x2, …, xn*.

При сукупних вимірюваннях безпосередньо вимірюють значення різних сполучень однойменних величин, кожне з яких окремо виміряти неможливо.

У спільних вимірах необхідно знайти залежність між декількома неодноіменнимивеличинами.

Якщо в результатах прямих вимірювань величин Yj містяться випадкові похибки, то вони є і в результатах спільних (сукупних) вимірів величин Xi. Очевидно, що при *m < n* систему 10.16 взагалі вирішити неможливо; при m = n таке рішення алгебраїчно можливе однак похибки результатів вимірювань величин Xi будуть, як і при прямих одноразових вимірюваннях, великі, і числове значення цих похибок залишиться невідомим. При m>n система стає алгебраїчно нерозв'язною, оскільки ці рівняння несумісні (праві частини рівнянь 10.16 замість точних значень Yj містять результати їх вимірювань *yj = Yj + ΔYj*з випадковими похибками *ΔYj* ). Однак в останньому випадку при нормальному законі розподілу помилок вимірювання величин yj (що зазвичай і буває) можна знайти таку сукупність значень xi, яка з найбільшою ймовірністю задовольняла б вихідним залежностям 10.16. Це може бути здійснено за допомогою способу найменших квадратів (принцип Лежандра).

Такий спосіб обробки експериментальних даних при сукупних (спільних) вимірах особливо зручно застосовувати при лінійному характері функції *ϕj* в іншому випадку обробка ускладнюється.

Розглянемо випадок, коли функції *ϕj* лінійні:

  (10.17)

Цю ж систему запишемо більш компактно:

  *j=1, 2, …, m*. (10.18)

Тут індекси при коефіцієнтах ***a*** вказуються в послідовності «рядок-стовпець» (*j - i*).

Рівняння 10.17 і 10.18 називаються умовними. Зважаючи на наявність похибки праві частини умовних рівнянь насправді не будуть рівні нулю, а деяким значенням *vj* (так званим залишковим похибкам умовних рівнянь):

 *j=1, 2, …, m.* (10.19)

Відповідно до принципу Лежандра найбільш імовірними значеннями невідомих величин *Xi* в цьому випадку будуть такі, при яких сума квадратів залишкових похибок *vj* мінімальна:

  (10.20)

Необхідною умовою такого мінімуму є рівність нулю похідних

  *i=1, 2, …, n.* (10.21)

Підставляючи у вираз 10.21 значення *vj* зі співвідношення 10.19, отримуємо після перетворень систему нормальних рівнянь:

  *h=1, 2, …, n.* (10.22)

Запишемо цю ж систему в розгорнутому вигляді:

  (10.23)

Тут індекси при коефіцієнтах *b* також вказується в послідовності «рядок-стовпець» (*h - i*).

Оскільки число нормальних рівнянь завжди дорівнює числу невідомих, така система алгебраїчно вирішувана.

Припустимо, що в результаті спільних (сукупних) вимірювань одержана така система умовних рівнянь:при *n = 2*

  (10.24)

при *n = 3*

 (10.25)

Система нормальних рівнянь має вигляд:

при *n = 2*

  (10.26)

при *n = 3*

  (10.27)

Коефіцієнти *bhi* можна обчислити за формулами:

   

    (10.28)

Значення *ch* визначається таким чином:

    (10.29)

Для вирішення системи 10.23 складаємо і обчислюємо головний визначник даної системи рівнянь:

для *n = 2*

  (10.30)

для *n = 3*

  (10.31)

Складаємо і обчислюємо приватні визначники D1 і D2, замінивши в системі 10.23 коефіцієнти *bhi*при відповідних невідомих на вільні члени *ch*:

для *n = 2*   (10.32)

для *n = 3*   (10.33)

Обчислюємо найбільш ймовірні значення невідомих:

для *n = 2*    (10.34)

для *n = 3*    (10.35)

Підставивши обчислені найбільш імовірні значення  невідомих в умовні рівняння 10.19, можна знайти *vj*, потім отримати *vj* та суму квадратів залишкових похибок .

Середньоквадратичне відхилення результатів сукупних (спільних) вимірювань

  (10.36)

де *m* – число умовних рівнянь;

 *n* – число невідомих;

 *Ahi* – адʼюнкти елементів *bhi*  головної діагоналі визначника *D* (при *h=i*), одержані викреслюванням рядка *h* і стовпчика *i*, що відповідають даному елементу *bhi*, та подальшим перемноженням на (-1)h+i.

Для *n = 2* адʼюнкти дорівнюють

   (10.37)

для *n = 3*

 *  * (10.38)

Задаючись довірчою імовірністю *γ*, з додатка Б знаходимо відповідні значення коефіцієнта довіри *tγ*. У цьому випадку число ступенів свободи дорівнює

 *k = m – n.*  (10.39)

Тоді можна знайти довірчі межі випадкової складової похибки результату сукупних (спільних) вимірів:

 **** (10.40)

Обчислюємо довірчі межі загальної похибки результату сукупного (спільного) вимірювання

 *** .*** (10.41)

Записуємо результат сукупного (спільного) вимірювання у вигляді

 ** (10.42)

де  – найбільш ймовірне значення i-го результату вимірювання ().

***Контрольні питання.***

*1. Що таке непряме вимірювання?*

*2. Як перевірити кореляцію між результатами спостережень кожної пари аргументів?*

*3. Як визначити похибку результату непрямого вимірювання?*

*4. Як визначити довірчі межі випадкової складової похибки результату сукупних і сумісних вимірювань?*

***Література до лекції:***

1. [Поліщук Є.С.](http://wiki.lp.edu.ua/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%96%D1%89%D1%83%D0%BA_%D0%84%D0%B2%D0%B3%D0%B5%D0%BD_%D0%A1%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87), Дорожовець М.М., Яцук В.О. та ін. Метрологія та вимірювальна техніка: Підручник. /За ред. [Є.С.Поліщука](http://wiki.lp.edu.ua/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%96%D1%89%D1%83%D0%BA_%D0%84%D0%B2%D0%B3%D0%B5%D0%BD_%D0%A1%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87%22%20%5Co%20%22%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%96%D1%89%D1%83%D0%BA%20%D0%84%D0%B2%D0%B3%D0%B5%D0%BD%20%D0%A1%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87). Львів.: Видавництво «Бескид Біт», 2003. —544с.
2. Дорожовець М., [Б. Стадник](http://wiki.lp.edu.ua/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%91%D0%BE%D0%B3%D0%B4%D0%B0%D0%BD_%D0%86%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87), [В. Мотало](http://wiki.lp.edu.ua/wiki/%D0%9C%D0%BE%D1%82%D0%B0%D0%BB%D0%BE_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C_%D0%9F%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87), [В. Василюк](http://wiki.lp.edu.ua/wiki/%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8E%D0%BA_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D1%96%D0%B9_%D0%A1%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87), А. Ковальчик,Р. Борек: Основи метрології. Підручник для студентів . Основи метрології і вимірювальна техніка. Том 1.[Видавництво НУ «Львівська політехніка»](http://wiki.lp.edu.ua/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%82%D0%B2%D0%BE_%D0%9B%D1%8C%D0%B2%D1%96%D0%B2%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%BE%D1%97_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%96%D1%82%D0%B5%D1%85%D0%BD%D1%96%D0%BA%D0%B8), Львів,2005.-532 с.

**Обрахунок похибок не прямих вимірів**

<https://www.youtube.com/watch?v=MDwbIZ7jScQ> 10 хв